

特殊相対性理論入門

立川 崇之

公開用 第 1 版

2012.8

e-mail: tatekawa (at) akane.waseda.jp

1 はじめに

本稿は、私が 2005-2006 年度に物理学科の大学 2 年生を対象とした「相対論」の講義を行った時の講義録をもとに、2009 年に高校 1-2 年生を対象とした講義を行うために作成した資料である。

大学の講義では光についてまず説明し、特殊相対性理論のおおもととなる相対性原理について説明した。ここで時間と空間を別々に考える事が出来ない事、座標変換（ローレンツ変換）、特殊相対性理論から得られる非日常的な帰結を述べた。その後、ニュートン力学を特殊相対性理論と矛盾しないように書き換える（相対論的力学）こと、特殊相対性理論と相性が良いように電磁気学の式を書き換える（相対論的電磁気学）こと、そして特殊相対性理論の限界と一般相対性理論の解説を行った。

相対論的力学、相対論的電磁気学は微分方程式（偏微分方程式）を多用する話であるので、きちんと扱うには大学教養レベルの数学が必要になる。さらに一般相対性理論を扱うには、高校で扱う幾何学（ユークリッド幾何学）ではなく、リーマン幾何学が必要となる。これは大学の数学科で 3 年生の頃に教わる内容である。そのため、本稿では高校生でも理解できる特殊相対性理論と、そこから得られる帰結までを述べる事とする。なお、ここまでも 行列と一次変換の知識が必要である 事に注意して読み進めてもらいたい。

文中の x' や t' は、 x や t で表される座標系とは別の座標系での位置と時間を表し、微分を意味するものではない事に注意。

2 光の速度

2.1 光

まず最初に、相対性理論で重要な鍵を握る『光』について考えてみる。そもそも光は波なのだろうか。それとも粒子なのだろうか。この論争は 17 世紀に始まる。万有引力の法則や運動の三法則で有名なニュートン (I. Newton) は微粒子の流れとして光をとらえた。一方でホイヘンス (C. Huygens) は波動として光をとらえた。この論争は 19 世紀に入り、様々な実験から確かめられるようになる。ヤング (T. Young) は、もし光が粒子だった場合、波動だった場合について屈折や反射などの現象を比較研究し、波動説が正しいと

確信した。決定的だったのはフレネル (A. Fresnel) による光の干渉、回折実験である。光が単純に直進するような粒子だったとすると、光の干渉は考えられない。そこで光は波動（進行方向に垂直に振動する横波）であると結論づけられた。ただし、19 世紀末から温度と光の関係を古典物理学でうまく説明できなくなり、1900 年にプランク (M. Planck) により量子仮説が提唱される。そして 1905 年、アインシュタイン (A. Einstein) により光量子仮説が提唱され、光は波動と粒子の二重の性質を持つと考えられるようになった。その後の量子力学の発展により、波動と粒子の二重性は統一的に理解されるようになる。

量子力学の話はさておき、ここでは光についてももう少し考えてみる。光というと目に見えるものに限られてしまうので、ここでは目に見えない電波、赤外線、紫外線、X 線等も含めて扱う事にする。これらの波を総称して『電磁波』という。名前に『電気』と『磁気』が入っているように、電気と磁気は切っても切れない関係にある。例えばモーターは、磁石で囲まれた銅線に電流を流す事により回転する。逆に発電機は、磁石で囲まれた銅線を回転させる事により、電力を発生する。昔は電気と磁気は全く別のものと考えられていたが、アンペール (A. Ampère) やファラデー (M. Faraday) などの実験により互いに結びつく事が確かめられた。

1864 年にマクスウェル (C. Maxwell) により統一的に方程式で電気と磁気の様子が記述されるようになる。電気と磁気はまとめて電磁気と呼ばれる。マクスウェルの方程式を詳しく検証すると、電磁気は真空中、あるいは物質中を波として伝わる事が分かる。そこで、目に見える光は電磁気を伝える波ではないかという仮説（光の電磁波説）が 1871 年にマクスウェルにより提唱され、周波数の単位に名前を残すヘルツ (H. R. Hertz) により 1888 年に、電気火花を起こすと電磁波が発生するという実験がなされ、光は電磁波である事が確かめられた。

このマクスウェルの方程式から予言される電磁波（光）は、特殊相対性理論が提唱される重要なきっかけとなる。

2.2 光速の測定

「光速は？」と問いかけると、「1 秒間に地球を 7 回り半」という答えが帰って来るかもしれない。航空機で外国に行く事を考えると、光速はとてつもなく速い事が分かる。それでは、この光速はどうやって確かめられたのだろうか。

まず、「光速は有限なのか？」という問題がある。例えばスポーツ観戦に行くと、応援する人の声と動きのずれから、音速は光速よりもずっと遅い事が分かる。では光速はどうだろうか。一瞬で届くならば、速度は無限なのだろうか。

この問いに対して実験から検証しようとしたのが、ガリレイ (G. Galilei) である。1638 年に、宗教裁判にかけられた著作『新科学講話』の中で、光速が有限だと主張した。さらに彼は光速を測る実験として、離

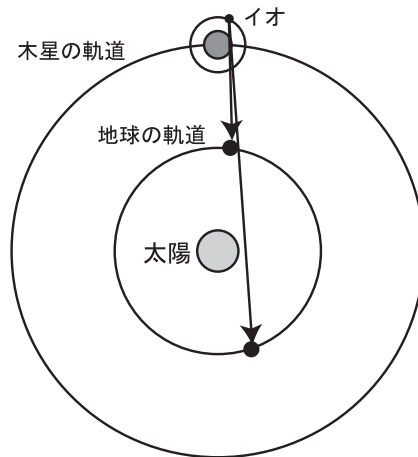


図 1: 太陽系における太陽，地球，木星，木星の衛星イオの位置を誇張して描いた図．イオが木星の陰に隠れる時の光は矢印のように伝わる．地球の公転軌道を横切る分だけ，地球への光の到達が遅れる．

れた二つの山の頂上にランプを持った人を立たせた．最初，ランプに覆いをかけて光が漏れないようにしておく．実験では，一方の人が覆いを外して光を出す．もう一方の人は，相手の光が届いた時にランプの覆いを外す．最初にランプの覆いを外した人が，覆いを外した時と，相手の光が見えた時の時刻を記録する．二つの山の頂上間の距離が分かれば，測定した時刻から光速が計算できるという事である．ところがこの実験は，光があまりに速すぎてうまくいかなかったようである．

実際に初めてうまく計算が出来たのは，レーマー (O. Roemer) である．ガリレイが発見した木星の衛星のうち，木星に一番近い軌道をとるイオ (Io) の動きを観測していた．イオは木星の周りを周期 42 時間半ほどで一周するが，その様子を地球から見ると，季節によって最大 22 分のずれがある事が分かった．このずれの原因としてレーマーは，図 1 で示すように，地球と木星の相対位置の違いによるものと 1676 年に発表した．太陽から見て地球と木星が同じ側にあるのか，それとも反対側にあるのかで，地球の公転軌道を光が横切る分の時間を余計に考える必要があるというわけである．ここからレーマーは，光速を 2.14×10^8 [m/s] と計算した．

ブラッドリー (J. Bradley) は 1727 年に，恒星の光行差というものを測定した．地上から見て真上に見えるはずの星が，地球の公転運動により図 2 のようにずれてしまうというものである．このずれ方は，地球の公転速度を v ，光速を c とすると，角度にして

$$\theta = \frac{v}{c}, \quad (1)$$

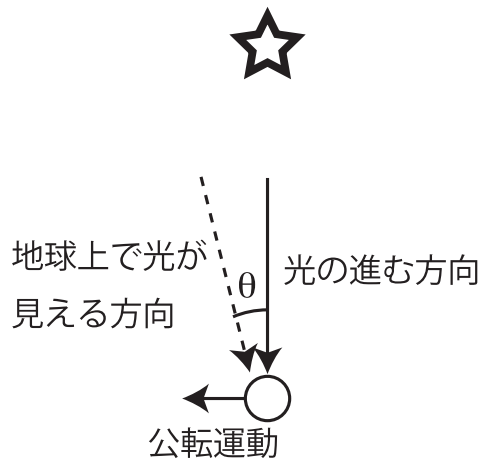


図 2: 光行差の説明．星はうんと遠くにあるので，地球にやってくる光はほぼ平行である．地球の公転運動のために，この光がまるで「雨の中を走った時に，雨が斜め前方から降ってくる」ようになり，星が真上ではなく斜め前方に見えるようになる．

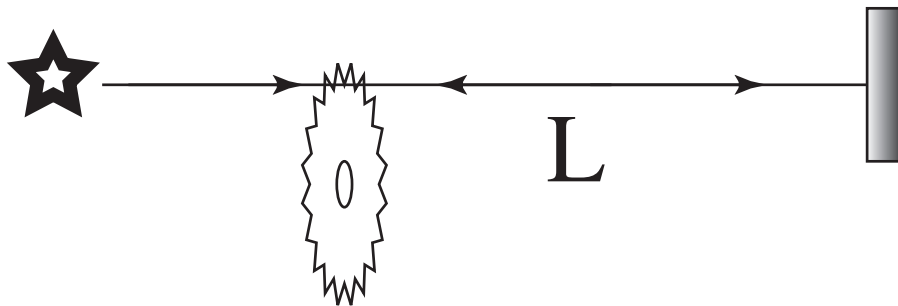


図 3: フィゾーの実験．左側から光を入射し，歯車の歯と歯の間をうまく通り抜けた光だけが右側に進み，鏡に当たって反射する．

というものである¹．ここから光速を

$$c = 3.01 \times 10^8 [\text{m/s}] \quad (2)$$

と求めた．

ここまでは天体の動きを用いて光速を測定していたのだが，地上での実験で測定できないだろうか．この地上実験を初めて行ったのはフィゾー (A. Fizeau) である．フィゾーは 1849 年に行った実験で，図 3 のように回転する歯車を用意した．

この歯車には 720 枚の歯がついている．歯車の後ろ側から光を当てると，歯の無いときだけ光が通り抜ける．歯車の前には，はるか遠く ($L = 8.633$ [km]) に鏡が置いてあり，通り抜けた光が反射するようになっ

¹ここでは角度をラジアン表示し，さらに角度が微小として $\sin \theta$ を θ に置き換えている．

ている。歯車を回転させると、光が通り抜ける時と遮断されるときが出来る。光を当てた側から歯車の方向を見ると、光が通り抜けて鏡によって反射された光が見える時があるが、うまくタイミングがあわないと、光が点滅して見えてしまう。ところが、歯車の回転速度を毎秒 12.6 回転にした時、この点滅が消えて、光は歯車の歯が無いときはいつでも点灯して見えるようになる。この時、ちょうど歯車の歯が 1 つぶん回転する間に、光が鏡に当たって反射し、往復するというわけである²。ここから光速を測定する。歯車と鏡の間の距離の 2 倍を、歯車の歯が 1 つ分動く時間で割れば、光速が分かる。

$$c = \frac{2L}{\Delta t} = \frac{2 \times 8.633 \times 10^3}{\frac{1}{12.6} \times \frac{1}{720} \times \frac{1}{2}} = 3.13 \times 10^8 [\text{m/s}]. \quad (3)$$

地上実験でも、現在の値に近いものが得られた。

振り子で有名なフーコー (J. L. Foucault) は 1862 年にフィゾーの実験を改良し、歯車を回転する鏡に置き換えて、鏡に写る像のずれを見る事により光速を測定した。この結果、

$$c = (2.980 \pm 0.5) \times 10^8 [\text{m/s}], \quad (4)$$

という、非常に高い精度で光速が測定できた。

2.3 光速の精度

それでは光速は現在、どこまで正確に分かっているのだろうか。速さは「距離 / 時間」で求められるので、距離と時間の精度が問題となる。

まず距離 (長さ) だが、1875 年のメートル条約で 1 メートルが定義された。地球の北極と南極を結ぶ経線の長さの 4000 万分の 1 を 1 メートルとし、『メートル原器』という白金とイリジウム合金で定義された。このメートル原器には二つの目盛りが刻まれており、複製品が条約加盟国に配布された³。ところが数学では『線分』は幅がないものとして定義されるが、実際の原器の刻みは当然ながら幅があるので、誤差が 0.2 [μm] ほど存在した。比率にして 2×10^7 程度である。

これでは精密測定には向かないという事で、元素が出す特殊な光を使う事が提案された。化学で炎色反応の実験をした事があるかもしれないが、このような特定の元素が発する特定の波長の光を使うというわけである。1927 年にメートル原器から定義が代わり、カドミウム (Cd) が出す赤い光の波長に基づいて 1 メートルが定義された。この時の誤差は 10^{-8} 程度となり、1 桁よくなった。さらに 1960 年、⁸⁶Kr 原子が出す光を用いる事に定義が代わり、精度は 4×10^{-9} 程度まで上がっている。

² 上野の国立科学博物館の地下に、この実験装置の模型がある。

³ 日本に渡されたメートル原器は、産業技術総合研究所に保管されている。

時間の精度がどうなったかについて考えてみる。まず、どれほど正確な時計が出来るかが問題である。イギリスの時計技師ハリソン (J. Harrison) が、長期間の航海でも使える非常に精密な機械式時計を 1761 年に完成させた。精度は 10^{-6} ということなので、2 週間で 1 秒程度のずれが生じるというものであった。その後、1930 年代にクォーツ (水晶) を用いた時計が発明され、精度が 10^{-8} に上がった。これを受けて、1956 年に国際条約として、1 秒間は 1900 年 1 月 1 日正午の地球の公転速度を用いて定義される事になった。その後 1966 年に、セシウム 133 (^{133}Cs) 原子が出す放射の振動数から定義されるようになり、現在では精度は $10^{-13} \sim 10^{-14}$ 程度まで上がっている。このセシウム 133 を用いた精密な時計は『原子時計』と名付けられており、現在の 1 秒の定義に用いられる。その後、2005 年に東京大学と産業技術総合研究所が光格子時計を開発した⁴。この時計は原子時計の 1000 倍の精度を誇り、現在は 1 秒の定義に準ずる第二の基準の扱いをされている。今後、光格子時計を用いて 1 秒の定義がなされるかもしれない。

さて、現在のメートルの定義であるが、これまでの話と大きく変わっている。1983 年に決められた定義は、従来とは全く発想が異なるものである。まず、真空中の光速を定義する。

$$c = 2.99792458 \times 10^8 [\text{m/s}]. \quad (5)$$

真空中の光速は測定値ではなく、定義値である。そして 1 メートルは、 $1/299792458$ 秒間に光が真空中を伝わる距離として定義される。つまり、長さの精度が向上すると、光速ではなく 1 メートルの精度が向上するのである。

3 相対性原理

3.1 序

まず、特殊相対性理論が誕生する以前の、19 世紀末の物理学を考えてみる。当時の物理学としては、まず力学が挙げられる。力学はラグランジュ (J. L. Lagrange) やハミルトン (W. R. Hamilton) により数学的に美しい公式として、今日では『解析力学』と呼ばれる形式にまとめられていた。また、力学の拡張として弾性体や流体に対する力学も体系づけられていた。電磁気学は前述のようにマクスウェルによりまとめられ、熱力学や統計力学はボルツマン (L. E. Boltzmann) により体系づけられたところであった。このため、「物理学者は、後は式に従って計算するだけ」と言われていた⁵。

ところがこれらの物理学で説明できない事柄が二つあった。一つは光速に関する問題で、もう一つは高温に熱せられた物体から放たれる光に関する問題であった。この矛盾は 20 世紀になり、前者に対しては特殊

⁴<http://www2.nict.go.jp/w/w114/afs/index.html>

⁵もちろん、基本原理が解明されているからといって、問題が解けるとは必ずしもいえない。

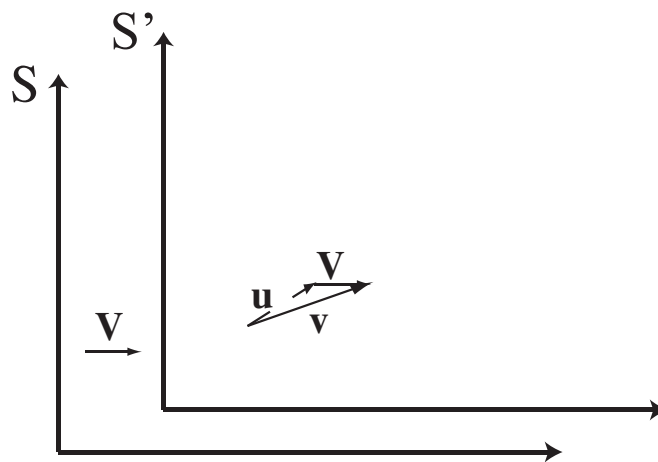


図 4: 二つの慣性系 S, S' があり, 慣性系 S' は S に対して速度 V で動いている.

相対性理論, 後者に対しては量子力学という形で, 新たな物理学の端緒となる. そして 19 世紀までに知られていた物理学は『古典物理学』と呼ばれるようになる.

今回扱うのは特殊相対性理論である. 光速についてどのような問題があったのか考えてみよう.

ニュートン力学では, 『慣性系』と呼ばれる座標系が存在した. ニュートンの第一法則は慣性の法則で,

「外力が働かない質点は等速運動する」

ということで, 慣性系がどのようなものかを規定するものだった. また, ある慣性系に対し, 等速運動する系もまた慣性系である.

二つの慣性系を考えた時, 互いの速度はどのように見えるだろうか. 例えば, 時速 $4[\text{km/h}]$ で歩く人が居たとする. この人が, 時速 $40[\text{km/h}]$ でまっすぐ進む電車の中を, 進行方向に向かって歩いているとすると, 電車を外から見ている人には, 電車の中を歩く人はどれだけの速さで歩いている事になるだろうか. 答えは単純な足し算で, $44[\text{km/h}]$ である. さらに, その人が床に物を落とす時の事を考えると, 落下の加速度は電車に乗っている時とそうでない時で変わらない. これを少し遠回しな言い方で書くと,

力学の法則 (運動方程式) は, どちらの慣性系で見ても変わらない

という事である.

これを物理の問題らしく図で表すと, 図 4 のようになる. 二つの慣性系 S, S' があり, 慣性系 S' は S に対して速度 V で動いている. S' にいる観測者が見て速度 u で運動している質点は, S にいる観測者から見ると, 速度 $v = u + V$ で運動しているように見える.

さて次にマクスウェルの電磁気学を考える. マクスウェルの方程式を扱うと, 電磁波は光速 c で伝わるという結論が得られる. それではこの光速 c は, ニュートン力学で示した二つの慣性系のどちらで見た光速な

のだろうか．さらには，慣性系が変わると光速が変わるのだろうか．自然科学と相容れないような話だが，この世界には神様がものさしを持っている，『絶対静止系』が存在するのだろうか．

ニュートンの力学とマクスウェルの電磁気学は，19世紀の物理学で非常に重要であり根本をなす学問であったが，理論に大きな矛盾を抱える事となっていた．

3.1.1 マイケルソン・モーレーの実験

当時，光は波動であるという考えが主流を占めていた．音の波，水の波，地震波などは，その波を伝える物質（媒質）が存在する．例えば音は空気が無ければ伝わらない．そこで，光が波だとしたらその波を伝える媒質が存在するのではないか．そのような考えから，光は『エーテル』と呼ばれる媒質を伝わるのではないかと考えられた⁶．

前の章で述べたブラッドレーの測定は，光行差を測定して光速を求めた．もし宇宙がエーテルで満たされているとすると，地球はそのエーテルの中を運動する事になる．すると，地球の公転方向に対して平行な方向に光を発すると，光は「追い風」あるいは「向かい風」を受ける形になり，光速が変化するはずである．一方，地球の公転方向に対して垂直な方向に光を発すると，光は「横風」を受ける事になる．地球の公転速度は $v = 30[\text{km/s}]$ 程度なので，光速との比は

$$\beta = \frac{v}{c} \simeq 10^{-4},$$

となる．つまり，光速を 10^{-4} 以上の精度で測定すれば，エーテルの存在を確認できると考えられた．

マイケルソン (A. Michelson) は 1881 年，図 5 のような干渉計を作った．まず光を入射し，ハーフミラーで二つに分ける．一方はそのまま直進して鏡に当たって反射し，ハーフミラーのところで反射して下に進む．もう一方はハーフミラーで上に反射し，鏡に当たって反射し，ハーフミラーを直進して下に進む．この二つの光を干渉させる事により，光速のずれを検証しようとした⁷．

式できちんと考える．左右の方向 (L_1 の方向) が地球の公転方向だとする．光の進む向きが地球の公転方向と同じだとすると，『エーテルの向かい風』を受ける事になるので，光速が c ではなく， $c - v$ になる．また，逆向きだと『エーテルの追い風』を受けて，光速が $c + v$ になる．すると，ハーフミラーと鏡の間を往復する時間は，

$$t_{\parallel}^{(1)} = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1-\beta^2}, \quad (6)$$

である⁸．一方で『エーテルの横風』を受ける場合は，三平方の定理から速度が $\sqrt{c^2 - v^2}$ に変化するので，

⁶ここで挙げたエーテルは，有機化合物のエーテルとは関係がない．

⁷この形の装置は，一般相対性理論の直接検証である重力波の観測に，現在でも用いられている．

⁸ $\beta = v/c$ は，特殊相対性理論でよく用いられる表記である．

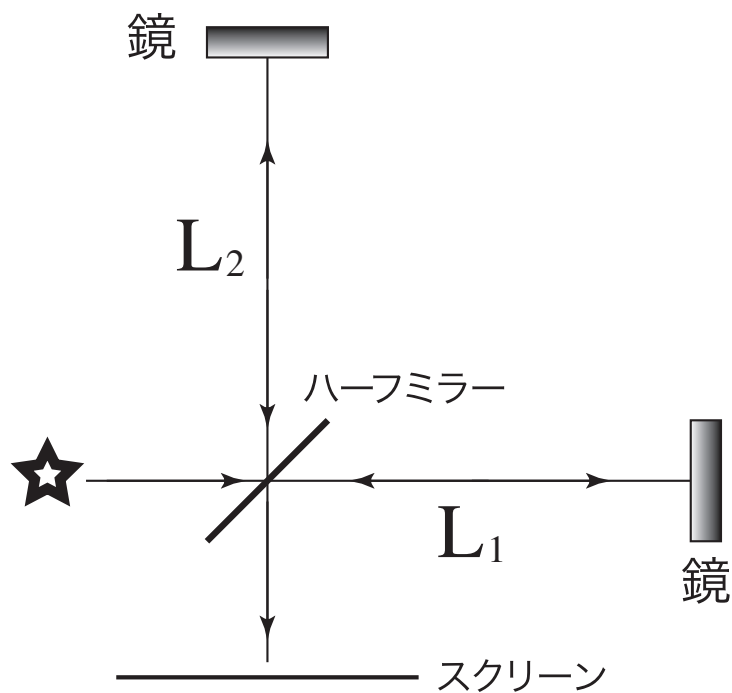


図 5: マイケルソン・モーレーの実験．左側から光を入射し，真ん中のハーフミラーで光を二つに分離する．それぞれが進んで鏡に当たって反射し，ハーフミラーを経由して下のスクリーンに到達する．

ハーフミラーと鏡の間を往復する時間は，

$$t_{\perp}^{(2)} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (7)$$

となる．光が往復するために必要な時間の差は，

$$\Delta(0^\circ) = t_{\parallel}^{(1)} - t_{\perp}^{(2)}, \quad (8)$$

である．

装置の誤差を抑えるため，次に装置を 90 度回転させて，光が最初に直進する方向と反射する方向を入れ替える．すると，ハーフミラーと鏡の間を往復する時間はそれぞれ，

$$t_{\parallel}^{(2)} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{1-\beta^2}, \quad (9)$$

$$t_{\perp}^{(1)} = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (10)$$

となり、光が往復するために必要な時間の差は、

$$\Delta t(90^\circ) = t_{\parallel}^{(2)} - t_{\perp}^{(1)}, \quad (11)$$

である。2つの実験での時間の差は、

$$\begin{aligned} \Delta t(0^\circ) - \Delta t(90^\circ) &= t_{\parallel}^{(1)} + t_{\perp}^{(1)} - t_{\parallel}^{(2)} - t_{\perp}^{(2)} \\ &= \frac{2(L_1 + L_2)}{c} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

である。

簡単のために、ここで β は 1 より非常に小さい⁹として、さらに $L_1 = L_2 = L$ とすると、

$$\Delta t(0^\circ) - \Delta t(90^\circ) \simeq \frac{2L}{c} \beta^2, \quad (13)$$

とできる。

時間のずれの測定は、光の干渉を用いて行う。光の波長を λ 、干渉縞のずれを Δs とすると、

$$\Delta s = \frac{1}{\lambda} c (\Delta t(0^\circ) - \Delta t(90^\circ)) \simeq \frac{2L}{\lambda} \beta^2, \quad (14)$$

となる。

具体的な値を入れて実験を考えてみる。マイケルソンが行った実験では、

$$L = 1.2[\text{m}], \quad \lambda = 6 \times 10^{-7}[\text{m}],$$

であった。このとき、 $\Delta s = 0.04$ となる。その後、マイケルソンとモーレー (E. Morley) が 1887 年に装置を大型化し、 $L = 11[\text{m}]$ とした。このとき、 Δs は 0.4 程度になる計算である。

ところが、実験結果は $\Delta s < 0.01$ であった。つまり、光速は観測者の相対運動によらず一定であった。言い換えると、光速はニュートン力学での速度の変換で、正しく変換できないのであった。

この結果は、光速を測定したマイケルソンのみならず、様々な物理学者たちを悩ませた。マイケルソンは、「エーテルは地球とともに運動する」として、エーテルも地球の公転と一緒に運動するため、追い風や向かい風は発生しないのだと主張した。

一方で、フィッツジェラルド (G. F. FitzGerald) やローレンツ (H. A. Lorentz) らは、何らかの理由で距離は運動方向との関係で収縮するのではないかと考え、長さが収縮する仮説を提唱した。この仮説はマクスウェルの方程式が慣性系によって変わってしまうという問題があり、後にローレンツによって、

⁹大学の教養課程で扱うテイラー展開から、 $(1 - \beta^2)^a$ を $1 - a\beta^2$ と置いても、あまり誤差は生じない事が分かる。

マクスウェル方程式がいかなる慣性系でも同じ形になる変換¹⁰を提唱した。ただし、変換の根拠は明らかではなかった¹¹。

3.2 特殊相対性理論の基本原則

いよいよ 1905 年に発表されたアインシュタインの特殊相対性理論について述べる。ローレンツがどの慣性系でもマクスウェル方程式が変わらない変換（ローレンツ変換）を提唱したが、この変換の根拠が明らかではなかった。アインシュタインは特殊相対性理論の構築にあたり、二つの原理を要請した。

3.2.1 相対性原理

一つ目の原理は、相対性原理と呼ばれる。この原理は

「全ての自然法則は、あらゆる慣性系において同一である」

というものである。例えば、ニュートンの運動方程式は

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (15)$$

という形で与えられる。ここで別の慣性系への座標変換

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (16)$$

を考える。この変換を ガリレイ変換 という。 v は一定とすると、加速度は変化しないので、別の慣性系でも

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}, \quad (17)$$

という様に、同じ形の運動方程式になる。ところがマクスウェル方程式は、ガリレイ変換で形が大きく変わってしまう。つまり、ガリレイ変換は相対性原理と矛盾してしまう。このため、ガリレイ変換に代わる新たな変換を考える必要がある。

¹⁰今日、ローレンツ変換と呼ばれる変換である。ローレンツ変換は後で詳しく扱う。

¹¹この物理学者たちの混迷は、現代宇宙論にも類似したところがある。現代宇宙論の観測を全て矛盾無く説明しようとすると、水素や炭素、酸素、あるいはそれらを構成する陽子、中性子は宇宙全体の 4%ほどしかない。残りの 20%ほどは光を出さないダークマター、70%ほどはダークエネルギーと呼ばれる特異な性質を持つものとされている。ダークマター、ダークエネルギーの正体は不明である。

3.2.2 光速度不変の原理

次に 光速度不変の原理 を考える．ところで，二つの物体に働く力はどれだけの速さで伝わるのだろうか．瞬時に伝わるのだろうか．それとも，ある程度の時間がかかって伝わるのだろうか．前者を『遠隔作用』，後者を『近接作用』という．

マクスウェルの電磁気学（マクスウェル方程式）では，電磁気力は光速で伝わるということが分かった．光速は無限ではないので，『近接作用』である．一方，ニュートンの万有引力の法則では力は瞬時に伝わるので，『遠隔作用』である．

力の伝わる速さに最大値がある事と，相対性原理を一緒に考えると，

「全ての慣性系において，力の伝わる速さの最大値が同じ」

という事になる．

ニュートン力学において，ガリレイ変換では相対性原理を満たし，かつ力の伝わる速さは無限大だった．アインシュタインの特殊相対性理論は，相対性原理と光速度不変の原理の両方を満たす．それでは日常生活でガリレイ変換を用いて困らないのはなぜか．それは，前の章で述べたように光速は非常に速いので，日常生活では「光速が無限に速い」と考えても，計算結果が大きくずれないからである．

3.3 ミンコフスキー時空

3.3.1 世界間隔

物理学では，発生した出来事を事象 (event) という．特殊相対論で事象や歴史を記録する時は，空間だけでなく時間をも含めて世界を表す．つまり 3 次元空間に加えて，時間を 1 つ加えた 4 次元時空を扱う．例えば粒子の運動の軌跡は，4 次元時空内の曲線（世界線）で表される．

4 次元というとなかなか想像しにくいので，図で説明する時は平面（空間 2 次元）と時間の組み合わせ，あるいは直線（空間 1 次元）と時間の組み合わせで考える．

二点の P, Q の位置ベクトルをそれぞれ x_P, x_Q と表したとき，この二点の距離 d は

$$d^2 = (x_Q - x_P)^2, \quad (18)$$

という形で表された．特殊相対性理論ではさらに時間も考えて距離を定義する．これを 世界間隔 という．

事象 P, Q の間の世界間隔は，次のように定義される．

$$s_{PQ}^2 \equiv -c^2(t_Q - t_P)^2 + (x_Q - x_P)^2. \quad (19)$$

等号より横線が一本多い記号は、「左辺を右辺で定義する」という意味である。右辺に注目してみると、第二項は今までの距離の定義と同じであったが、第一項が少し異なる。マイナス記号が最初についている事に注意してほしい。また、時間と長さはそのままでは単位が異なり足し算が出来ないので、光速を時間にかけて長さの単位にしている。式(19)で距離が表される時空を、ミンコフスキー (Minkowski) 時空 という。もし P と Q の間隔が非常に短い場合には、

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2, \quad (20)$$

という表し方をする¹²。

この世界間隔には特別な性質がある。それは光の通り道に関する性質である。もし PQ 間を光が伝わるとすると、

$$|\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P| = c(t_Q - t_P), \quad (21)$$

であるので、

$$s_{PQ}^2 = 0, \quad (22)$$

である。つまり、光の通り道では世界間隔はゼロになるということである。この性質は非常に重要である。

また、光速度不変の原理から、この光の通り道を別の慣性系から見ても、

$$(s'_{PQ})^2 = -c^2(t'_Q - t'_P)^2 + (\mathbf{x}'_Q - \mathbf{x}'_P)^2 = 0, \quad (23)$$

とならなければならない。つまり、世界間隔はどの座標系から見ても不変である事が必要となる。

3.3.2 時間的、空間的

それでは前述の世界間隔の話の踏まえて、光の通り道以外の場合を考える。まず、「2つの事象 P, Q が、空間の同一点で起きるか？」を考える。電車と人の関係を考えて、「同一点」というのはプラットフォームにいる人か、あるいは電車に乗っている人かによって異なる。例えば電車の2両目で起きている事は、電車に乗っている人から見たら「2両目」という同じ場所で起きている事になる。一方でプラットフォームにいる人には、動いている電車の中で起きている事なので、時々刻々と場所が変わる。つまり、「同一点は基準となる座標系による」ものである。

さて、座標系 S で、事象 P, Q がそれぞれ (t_p, \mathbf{x}_p) , (t_q, \mathbf{x}_q) という時刻、場所で起きているとする。両

¹²実際は微分を用いて表すのだが、高校の範囲では「御法度」らしいので、 Δ を使う。

者の世界間隔は前に見たように，

$$s_{PQ}^2 \equiv -c^2(t_Q - t_P)^2 + (\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P)^2. \quad (24)$$

である．ところが座標系 S' で見ると，事象 P, Q が同じ点（場所）で起きていた．すると，

$$(s'_{PQ})^2 = -c^2(t'_Q - t'_P)^2 < 0 \quad (25)$$

となり，世界間隔は負になる．世界間隔は座標系に依らないので，

$$s_{PQ}^2 = (s'_{PQ})^2 < 0, \quad (26)$$

である．この時，両者の事象の間の関係は 時間的である という．

もし1つの物体で起こる2つの事象があったとしたら，それは「時間的」である．なぜなら，後で説明する特殊相対性理論に従うと，物質の速度は光速 c を超えないからである．積分を使って表すと，

$$(\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}_P)^2 = \left\{ \int_{t_P}^{t_Q} v(t) dt \right\}^2 < \left\{ \int_{t_P}^{t_Q} c dt \right\}^2 = c^2(t_Q - t_P)^2, \quad (27)$$

だからである．

一方，座標系 S で，事象 P, Q がそれぞれ $(T_P, \mathbf{X}_P), (T_Q, \mathbf{X}_Q)$ という時刻，場所で起きているとする．両者の世界間隔は

$$s_{PQ}^2 \equiv -c^2(T_Q - T_P)^2 + (\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P)^2. \quad (28)$$

である．ところが座標系 S' で見ると，事象 P, Q が同じ時刻に起きていた．すると，

$$(s'_{PQ})^2 = (\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P)^2 > 0 \quad (29)$$

となり，世界間隔は正になる．世界間隔は座標系に依らないので，

$$s_{PQ}^2 = (s'_{PQ})^2 > 0, \quad (30)$$

である．この時，両者の事象の間の関係は 空間的である という．

世界間隔は座標系に依らないため，両者の事象の間の関係が座標系によって時間的か空間的かが入れ替わる事は無い．

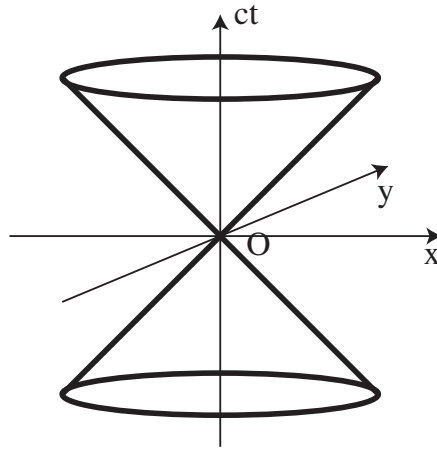


図 6: 光円錐．原点を頂点とする二つの円錐が存在するようになる．円錐は式 (31) で表される．

3.3.3 光円錐

ここで空間と時間の図を考えてみる．単位を揃えるため， x 軸と ct 軸とする．そして，現在我々が居るところを原点 $t = 0, x = 0$ とする．原点 O に対して，空間的に離れた世界点 P に対しては $x^2 > c^2t^2$ になり，時間的に離れた世界点 Q に対しては $x^2 < c^2t^2$ になる．境界となる点では

$$-c^2t^2 + x^2 = 0,$$

となる．ここを「光的」あるいは「ヌルの」という．

空間座標に x だけでなく y も加えて，三次元的に考えてみる．そして，

$$c^2t^2 = x^2 = x^2 + y^2, \quad (31)$$

という図形を考えてみる． t の範囲を区切って考えると，(31) は円錐を表す．図で表すと，図 6 のようになる．

この円錐を 光円錐 という．先ほどの時間的，空間的な世界点は，光円錐を使って考えると分かりやすい．時間的な世界点は，光円錐の内側にある．そして ct が正になる光円錐は O から見て未来にあたる．逆に ct が負になる光円錐は， O から見て過去にあたる．また，空間的な世界点は光円錐の外側にある．

粒子の運動を考えると，その速さは光速を超えないために O から発したとすると時間的な世界点にある．そのため，粒子が存在する場所は光円錐の内側に限られる．

3.4 固有時間

特殊相対性理論の変換であるローレンツ変換に入る前に、時間に関する準備をしておく。

微小時間 Δt の間に、物体が微小距離

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

だけ進む事を考える。この物体には時計が固定されているとすると、時計の進みはようになるだろうか。

ガリレイやニュートンの考えた力学の世界では、どこに取り付けられた時計も（壊れていなければ）進み方は同じである。ところが特殊相対論では座標系が変わると空間座標だけでなく、時間も変化を受けるので注意が必要なのである。

物体を周囲から見ている人の慣性系を S 、物体に固定された慣性系を S' としよう。この物体と一緒に運動する人には、物体は自分に対して静止しているので、

$$\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0, \quad (32)$$

である。世界間隔は慣性系に依らず一定なので、

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta \mathbf{r})^2 = -c^2(\Delta t')^2, \quad (33)$$

であるから、

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right)^2} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (34)$$

となる。ここでは

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad v = |\mathbf{v}|,$$

とした。

(34) の結果に注目してほしい。右辺のルートの中身は 1 より小さい。つまりこの式が意味するところは、物体を周囲から見ている人の時計の進み方よりも、物体に固定された（あるいは物体と一緒に運動している人の）時計の進みの方が遅い事を示している。この事は

運動している物体では、静止している物体よりも時間の進み方が遅くなる

事を意味する。ニュートン力学では考えられなかった、時間が絶対的ではなく各々に依って異なるという、大変な結論を導いているのである¹³。

¹³ここで、物体と一緒に運動する人が、「周りで見ている人の方こそ動いているのだ」と主張したらどうなるのだろうか、気にする人が居るかもしれない。この問題は『時計のパラドックス』と名付けられた非常に重要な問題である。時計のパラドックスについては後で説明する。

それでは、物体が等速運動をしない時は、時間の進み方はどうなるのだろうか。例えば徐々に加速するロケットの中の時間の進み方は、どうやって計算すればいいのだろうか。その時は、「ロケットが慣性系を次々と乗り換えて行く」と考えればいい。式で表すと以下ようになる。

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} dt' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}. \quad (35)$$

v は慣性系 S から見たロケットの速さである。 $\tau_2 - \tau_1$ が、ロケットの中で経過した時間である。固有時間は

$$(\Delta\tau)^2 \equiv -\frac{(\Delta s)^2}{c^2}, \quad (36)$$

と定義され、世界間隔が慣性系に依らないから、固有時間も慣性系に依らない値をとる。

3.5 ローレンツ変換

いよいよ特殊相対性理論の座標変換である、ローレンツ変換に取りかかる。ここでは慣性系 $S(t, x, y, z)$ から慣性系 $S'(t', x', y', z')$ への変換を考える。二つの座標系の間関係はどのような向きであってもいいのだが、うまく座標軸を回転させて、それぞれが平行になるようにする。座標回転の結果、 S' 系は S 系に対して x 軸正方向に速度 v で動いているようにしたとする。

ニュートン力学で用いられていたガリレイ変換では、このような二つの慣性系の間座標変換は

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (37)$$

であった。この変換を用いて、座標変換の前後での世界間隔を計算してみると、

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad (38)$$

$$(\Delta s')^2 = -(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 - 2v(\Delta t)(\Delta x) + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad (39)$$

と不変でなくなってしまう。そこで世界間隔が慣性系に依らず不変であるように変換を置き換える。

座標変換で満たすべき条件は、前に述べた二つの原理に加えて、三番目の条件を付け加える。

1. 相対性原理。
2. 光速度不変の原理。あるいは世界間隔が不変である事。
3. $\beta = v/c \ll 1$ でガリレイ変換に一致する事。

まず 1. の条件から、座標変換は一次変換でなくてはならない。なぜなら一次変換でないと、一方の慣性系で等速運動だった運動が、他方の慣性系では等速運動でなくなってしまうからである。

一次変換であるため，変換の式は以下のように書ける．

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (40)$$

4×4 の行列の成分を決める事は大変であり，さらに逆行列を計算する作業は非常に面倒である．

ところで二つの慣性系は， S' 系が S 系に対して x 軸正方向に速度 v で運動している．そこで， $t = t' = 0$ で S 系と S' 系の時空の原点は一致しているとする．すると，

$$y' = y, \quad z' = z, \quad (41)$$

となり，

$$a_{22} = a_{33} = 1, \quad (42)$$

$$a_{20} = a_{21} = a_{23} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = 0, \quad (43)$$

となる．また逆変換でも $y = y'$ ， $z = z'$ を満たすためには

$$a_{02} = a_{03} = a_{12} = a_{13} = 0, \quad (44)$$

とならなければならない．以上から変換式は整理出来て，

$$ct' = a_{00}ct + a_{01}x, \quad (45)$$

$$x' = a_{10}ct + a_{11}x, \quad (46)$$

$$y' = y, \quad (47)$$

$$z' = z, \quad (48)$$

となる．つまり， 4×4 の行列と 4 成分のベクトルを取り扱うのではなく， 2×2 の行列と 2 成分のベクトルを扱うだけでよいのである．

さて， S 系の原点 ($x = 0$) に注目してみよう．この原点は， S' 系から見ると x' 軸の負の方向に速度 v で移動しているので，

$$x' = -vt', \quad (49)$$

である。(45) と (46) から,

$$ct' = a_{00}ct, \quad x' = a_{10}ct, \quad (50)$$

なので,

$$a_{10}ct = -a_{00}vt, \quad (51)$$

である。つまり

$$\frac{a_{10}}{a_{00}} = -\frac{v}{c}, \quad (52)$$

である。同様に S' 系の原点 ($x' = 0$) について考えてみると, この原点は S 系で見た時に x 軸の正の方向に速度 v で移動しているので,

$$x = vt, \quad (53)$$

である。(46) から,

$$a_{10}ct + a_{11}x = 0, \quad (54)$$

なので,

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = -\frac{v}{c}, \quad (55)$$

である。(52) と (55) から

$$a_{00} = a_{11}, \quad (56)$$

が得られる。ここで $\gamma \equiv a_{00} = a_{11}$ とする。

次に 2. の光速不変の原理を考える。 $t = t' = 0$ で原点から x 軸正方向に光を放出する。この光の軌跡は S 系で見ると

$$x = ct, \quad (57)$$

である。(45), (46) に代入すると,

$$ct' = (a_{00} + a_{01})ct, \quad (58)$$

$$x' = (a_{10} + a_{11})x, \quad (59)$$

となる。一方で S' 系では

$$x' = ct', \quad (60)$$

となるはずだから,

$$a_{00} + a_{01} = a_{10} + a_{11}, \quad (61)$$

である．つまり $a_{01} = a_{10}$ となる．(52) を用いると

$$a_{01} = a_{10} = -\frac{v}{c}\gamma, \quad (62)$$

と， γ を用いて表される．以上から

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right), \quad (63)$$

$$x' = \gamma(-vt + x), \quad (64)$$

である．後は γ を決める必要がある．

今までは S 系から S' 系への変換を考えてきた．逆に S' 系から S 系への変換を考えてみる．これは (63) と (64) の逆変換になる．

$$ct = \frac{1}{\gamma[1 - (v/c)^2]}ct' + \frac{v/c}{\gamma[1 - (v/c)^2]}x', \quad (65)$$

$$x = \frac{v/c}{\gamma[1 - (v/c)^2]}ct' + \frac{1}{\gamma[1 - (v/c)^2]}x', \quad (66)$$

一方，逆変換は S 系から S' 系への変換で，速度を $v \rightarrow -v$ としたものと考える事も出来る．

$$ct = \gamma\left(ct' + \frac{v}{c}x'\right), \quad (67)$$

$$x = \gamma(vt' + x'), \quad (68)$$

両者の変換式は一致するはずなので，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (69)$$

となる¹⁴．

さて， $\beta = v/c \rightarrow 0$ の極限で (63) と (64) がガリレイ変換に一致するかチェックしてみよう．極限では $\gamma \rightarrow 1$ になるので，(63) は

$$ct' = ct \rightarrow t' = t, \quad (70)$$

となり，(64) は

$$x' = -vt + x, \quad (71)$$

となるので，きちんとガリレイ変換に一致する．

¹⁴ 相対性理論の教科書では，この γ が何の断りもなく使われていることがしばしばある．以後，本文で γ が出てきた時には，この式の意味だと理解していただきたい．

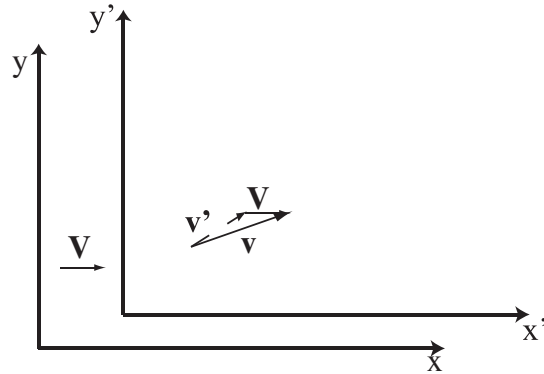


図 7: 速度の合成．慣性系 S' は慣性系 S に対して速度 V で x 軸方向に動くものとし，物体は慣性系 S' で見ると速度 v' で運動し， S で見ると速度 v で運動しているものとする．

3.6 ローレンツ変換からの帰結

3.6.1 速度の合成

ローレンツ変換では，どの慣性系でも光速は c であり不変だった．それでは，光速より遅い物体の運動を見た時，速度はどうなるのだろうか．分かりやすいように，前節と同じく慣性系 S' は慣性系 S に対して速度 V で x 軸方向に動くものとする．そして物体は，慣性系 S' で見ると速度 v' で運動し， S で見ると速度 v で運動しているものとする．図で表すと，図 7 のようになる．

では， v と v' の関係はどうなるだろうか．ローレンツ変換を考えると，

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + V\Delta t'), \quad (72)$$

$$\Delta y = \Delta y', \quad (73)$$

$$\Delta z = \Delta z', \quad (74)$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right), \quad (75)$$

である．ここから，

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x' + V\Delta t')}{\gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right)} = \frac{V + v'_x}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, \quad (76)$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right)}, \quad (77)$$

$$v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right)}, \quad (78)$$

となる．ここで $V < c, v' < c$ ならば $v < c$ である事が示される．つまり，光速より遅いもの同士を足しあ

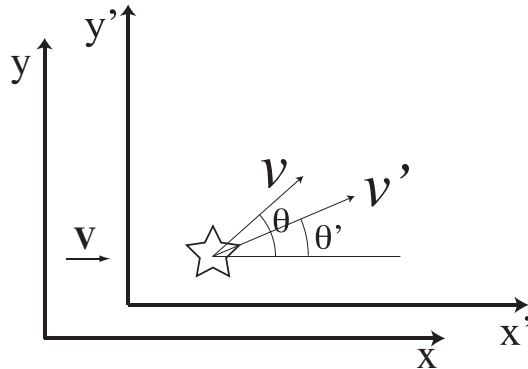


図 8: 星の運動の場合．慣性系 S' は慣性系 S に対して速度 V で x 軸方向に動くものとし，星は慣性系 S' で見ると速度 v' で光を発し， S で見ると速度 v で光を発しているものとまず考える．

わけても，光速を超える事は出来ないのである．

また上記の速度の合成で，光速 c が無限に速いという極限，あるいは同等の事であるが $\gamma \rightarrow 1$ の極限では

$$v_x = V + v'_x, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z,$$

という日常生活で成り立っているような速度の合成則が得られる．

3.6.2 光の集束

次に，非常に速く運動している星から出る光がどうなるかを考えてみよう．先ほどの速度の合成を考える．今度は星が静止している慣性系 S' と，運動している慣性系 S を考え，星からある速度を持ったものが出て行くという状況を考える．図 8 のような状況である．

光が出て行く方向と x 軸， x' 軸がなす角度をそれぞれ θ ， θ' とすると，

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad (79)$$

$$v'_x = v \cos \theta', \quad v'_y = v' \sin \theta', \quad (80)$$

と表される．速度の合成則から

$$v_x = v \cos \theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{V + v' \cos \theta'}{1 + \frac{V}{c^2} v' \cos \theta'}, \quad (81)$$

$$v_y = v \sin \theta = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v' \sin \theta'}{\gamma \left(1 + \frac{V}{c^2} v' \cos \theta'\right)}, \quad (82)$$

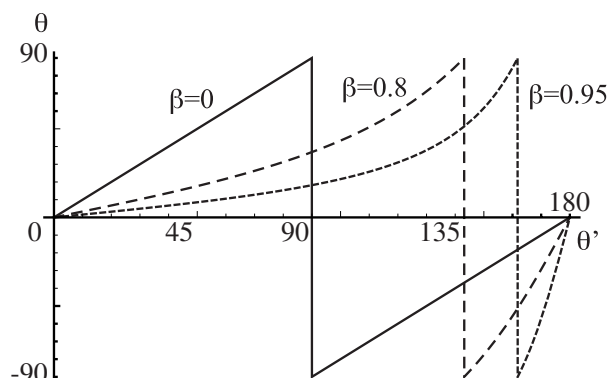


図 9: θ と θ' の関係．ここではラジアンではなく度で角度を表している．少々分かりにくいだが， $\theta' = 0$ が進行方向， $\theta' = 180$ が進行方向と逆向きを表す．星が光を放つ方向は θ' で与えられ，観測者は θ の方向から光を受ける．グラフの正負が反転するところが，光の進路が進行方向（前向き）から進行方向逆向き（後ろ向き）になるところである．

となるので， θ と θ' の関係を表すと，

$$\tan \theta = \frac{v' \sin \theta'}{\gamma(V + v' \cos \theta')}, \quad (83)$$

となる．ところで，星から出て行くものが光だと考えると，

$$v = v' = c,$$

となるため，

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\beta + \cos \theta')}, \quad (84)$$

θ と θ' の関係はコンピューターを使えば分かる．結果は図 9 のようになる．少々分かりにくい図だが，星が光を放つ方向は θ' で与えられ，観測者は θ の方向から光を受ける．グラフの正負が反転するところが，光の進路が進行方向（前向き）から進行方向逆向き（後ろ向き）になるところである． $\beta = 0$ は静止している状況であり，90 度を超えると光の向きが前から後ろになる．ところが $\beta = 0.8$ であると，進行方向に対して 140 度程度までの範囲の光は前方に進んでしまい， $\beta = 0.95$ になると進行方向に対して 160 度程度までの範囲の光が前方に進んでしまう．

この結果は何を意味するのだろうか．星は中性子星のように一方向にビームを出すのではなく，あらゆる方向に同じ強さで光を出すものを考えよう．慣性系 S' では星は静止している．一方，観測する人は慣性系 S で静止しているとする．星が我々から遠ざかっているという状況である．この二つの慣性系の関係を見ると，慣性系 S から見たら星の光は星の進む方向に集まってしまい，観測している人にとっては暗く見

えてしまう¹⁵。

この慣性系の変換による星の光の集束は、関係を置き換えると別の問題に応用できる。光の速さに近いロケットから外を見たら、星空はどう見えるだろうか。SF 映画やアニメでは、電車から車窓を見た時に景色が進行方向と逆向きに流れるように、星も進行方向と逆向きに流れるように描かれる事が多い。ところが特殊相対性理論の結果をきちんと扱うと、結果は全く異なる。特殊相対性理論の結果、星は流れるのではなくロケットの前方に集まってしまうのである。ロケットが速くなればなるほど、星空はますます前方に集まるようになり、背後は星が疎らな暗黒の世界になってしまう。

3.6.3 動いている時計の遅れ

今度は時間の進み方について考えてみよう。慣性系 S' に固定された時計を考える。 S' では $x' = 0$ であり、時間は t' で表される。つまり図 10 のような状況で、ロケットの中と外に時計があるという事である。

この慣性系 S' で二つの事象の時間差が

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1, \quad (85)$$

だったとする。慣性系 S' は慣性系 S に対し、速さ v で運動していたとすると、慣性系 S での二つの事象の時間差は、

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= \gamma \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} - t'_1 - \frac{v}{c^2} \right) \\ &= \gamma (t'_2 - t'_1) \\ &= \gamma \Delta t' > \Delta t', \end{aligned} \quad (86)$$

となる。つまり慣性系 S' の時計は、慣性系 S の時計よりも進み方がゆっくりになる。

3.6.4 ローレンツ収縮

それでは二つの慣性系の間で、長さはどうなるだろうか。慣性系 S' において、一本の棒が x 軸に平行に置かれているとする。図 11 のような状況である。

S' で測った棒の長さを、

$$\ell = \Delta x' = x'_2 - x'_1, \quad (87)$$

¹⁵さらにドップラー効果により、星の色が赤い方にずれてしまう。ドップラー効果を特殊相対性理論をきちんと考えて扱うには、偏微分方程式であるマクスウェル方程式を扱わなければならないので、省略する。

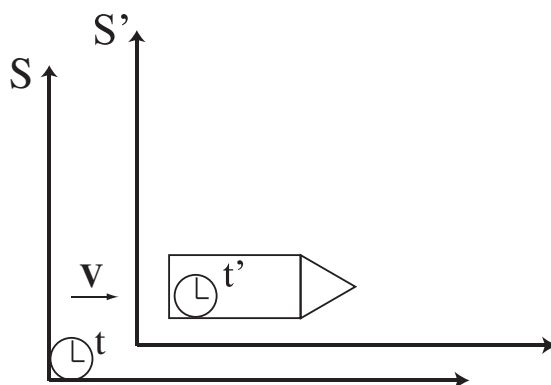


図 10: 動いている時計と静止している時計．ロケットに積まれた時計は時間が t' , 外に置かれた時計は時間が t で表される．

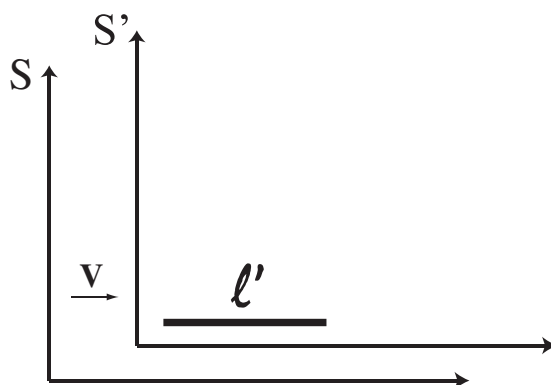


図 11: 一本の棒が x 軸に平行に置かれている．この棒を二つの慣性系で見た時，長さはどうになるだろうか．

とする．この棒を慣性系 S に固定された人が見る事を考える．ある時刻 t に棒の両端の座標を測り，その差を取る事で慣性系 S での棒の長さを測る事が出来る¹⁶．すると，

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma \Delta x, \quad (88)$$

であり，

$$\delta x = \frac{1}{\gamma} \ell < \ell, \quad (89)$$

である．つまり 動いている物体の長さは進行方向に対して縮む のである¹⁷．

¹⁶実際には棒から出てきた光を見て，観察する人は棒の長さを測るので，どこに立っているかが重要になる．この辺りの事は，後で述べる．

¹⁷この問題の応用として，異常に長く，また異常に速く動く電車とトンネルの問題がある．静止している時に，電車の方がトンネ

3.7 特殊相対性理論のパラドックス

3.7.1 時計のパラドックス

3.6.3 で動いている時計の進み方が遅れる事を説明した．確かにロケットに積まれた時計は，ロケットの外に置かれた時計よりも進み方が遅くなる．ところが相対性原理を考えると，特別な慣性系は存在しないはずである．つまり，ロケットの乗っている人から見たら，外に置かれた時計の方が速く動いているという事になり，ロケットの外に置かれた時計の方が進みが遅いのではないだろうかという訳である．

この問題は時計のパラドックスと呼ばれている．果たしてどちらが正しいのだろうか．式を眺めていても分かりにくいので，図を書いてみよう．図を書くときの注意として，「ローレンツ変換では，時間 (ct) 軸と空間 (x) 軸が直交するとは限らない」という事がある．

実際に直交しない事を見してみる．ロケットと共に動く慣性系を S' とする． S' 系の空間軸は x' であり，この軸上では $ct' = 0$ である．ローレンツ変換から $ct' = 0$ となる直線は，ロケットの外の慣性系 S で見ると，

$$ct = \frac{v}{c}x,$$

である．図を描くため，

$$\tan \theta = \frac{v}{c},$$

としておく．次に， S' 系の時間軸は ct' であり，時間軸上では $x' = 0$ である．ローレンツ変換から $x' = 0$ となる直線は，ロケットの外の慣性系 S で見ると，

$$x = \frac{v}{c} \cdot ct = vt,$$

である．

この様子を図示すると，図 12 のようになる．ここでは S 系の時間軸と空間軸を直交させた．ロケットに乗っている人は， $x' = 0$ のままであるので， ct' という軸に沿って動いている．ロケットが点 P に到達した時，ロケットの中に居る人にとって「同時刻」というのは，周囲のどの点になるだろうか．図 12 の水平な実線だと思いがちだが， ct' が一定になる線を考えて， x' 軸に平行な破線になるのである．この破線が ct 軸と交わる場所を見ると，点 B ではなく点 A になる．このため，ロケットに乗っている人が外に置かれた時計を見ると，遅れているように見える訳である．結論をいうと，

「ロケットの外にいる人，ロケットの中にいる人のどちらからでも相手の時計を見ると，

ルより長いのだが，うんと速く走ると電車の長さが縮んで，トンネルに収まってしまうのではないかという問題である．果たしてどうなるだろうか．時間がある時にぜひ考えてみてほしい．

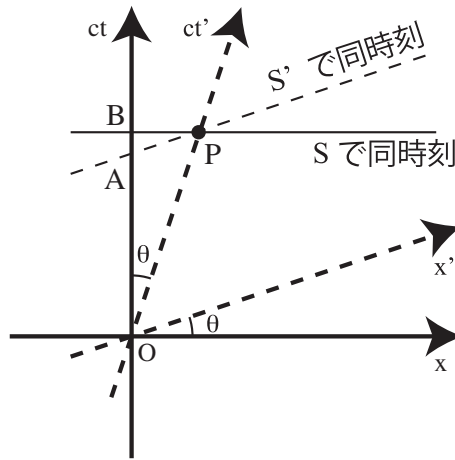


図 12: 二つの慣性系での時間軸と空間軸. S 系での時間軸と空間軸を直交させると, S' 系の時間軸と空間軸は直交しない.

進み方が遅くなっている。」

という訳である。「同時刻」の基準の取り方をどうするかということが大きな問題であった。

念のため, 式を使って計算してみよう. B 点の時間, 空間は S 系で $(cT, 0)$, S' 系で (cT', x'_B) とする. ローレンツ変換を考えると,

$$cT = \gamma \left\{ cT' - \left(-\frac{v}{c}\right) x'_B \right\}, \quad (90)$$

$$0 = \gamma \left\{ -\left(-\frac{v}{c}\right) cT' + x'_B \right\}, \quad (91)$$

である. ここから x'_B を消去して T と T' の関係を求めると,

$$T = \frac{1}{\gamma} T' < T', \quad (92)$$

となり, S' 系 (ロケットの中) の観測者から S 系に置かれた時計を見ると, 遅れて見えるという事が分かる.

3.7.2 同時刻のパラドックス

「時計のパラドックス」の補足として, これがパラドックスと言えるかは怪しいが挙げておく事にする.

実際に時刻を測る時には, 測定する人が時計を見なければならない. 例えばロケットの先頭と最後尾に時計があったとして, 両方の時計が同時に同じ時刻を指している事を知るには, どうすればいいだろうか. 時計から出て来る光の速度を考えると, 二つの時計から等距離のところでは時計を見ればよいという事になる. 図 13 で考えると, (a) のように先頭または最後尾に居る人が時計を見ると, 時計から出た光を受ける

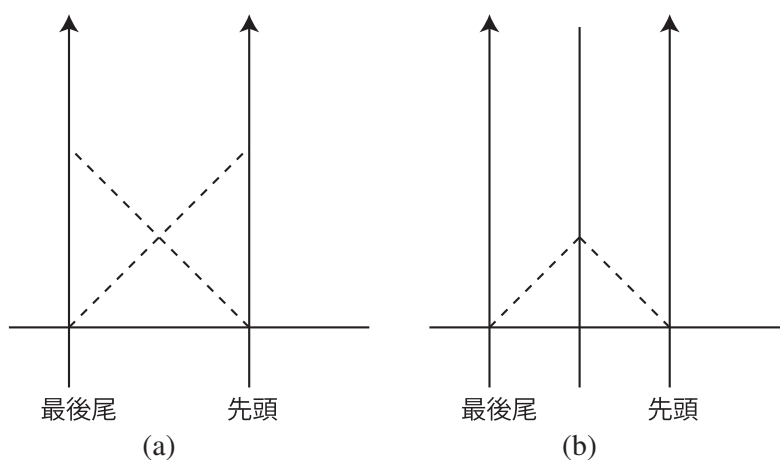


図 13: ロケットの先頭と最後尾に置かれた二つの時計を見る場合 . (a) どちらか片方に居て、もう一方の時計から来る光を見ると、同時とは言えなくなってしまう . (b) 両方の時計から等しい距離のところでは二つの時計を見ると、同時という事が説明できる .

までの時間差が生じてしまう . (b) のように、二つの時計から等距離のところでは時計を見ないと、同時とは言えない .

この事は、一つの慣性系から別の慣性系の時計を見るときも同じである .

さて、図 13 で挙げた事を少し難しくしてみよう . 図 13 の話は、ロケットが静止している時の話である . このロケットが動いていたらどうなるだろうか .

ロケットの中央部に乗っている人と、ロケットの外にいる人を考える . 今までの問題と同じく、ロケットの外にいる人の慣性系が S 、ロケットと一緒に動く慣性系が S' である .

ロケットの外にいる人は、原点 ($x = 0$) に居る . そして時刻 $t = 0$ の時、ロケットに積まれた時計の仕掛けが動き、ランプがつくものとする . そして、 $t = 0$ ではロケットの中央部は $x = 0$ 、つまりロケットの外にいる人と中にいる人の位置が一致するものとする .

この状況でロケットの両端に置かれた時計のランプの光は、二人にどのように見えるだろうか . 図 14 を見ながら考える . 時刻 $t = 0$ で出た光は破線で表されている . ロケットの外にいる人は、 $x = 0$ にずっと居たままであり、ここには点 Q の時点で両方からの光が同時に届く . ところが、ロケットの中央部に居る人が見てみると、まず点 P で先頭から出た光を見て、その後で最後尾から出た光を点 R で見る . つまり、ロケットの中央部に乗っている人には光が同時に届かないのである .

時間が相対的であるように、『同時』も相対的である

事に注意しよう .

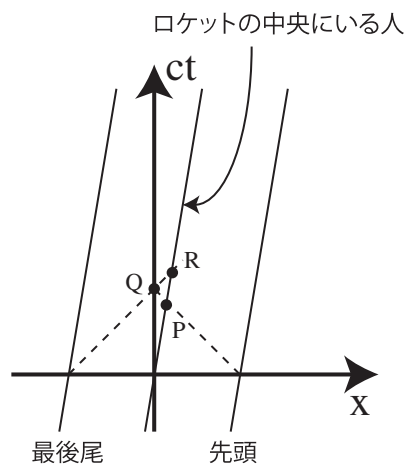


図 14: ロケットの先頭と最後尾に置かれた二つの時計を，ロケットの中央部に乗っている人と，外にいる人が見る場合．外にいる人は，点 Q で両方から出た光を同時に見る．ロケットの中央部に乗っている人は，まず先頭から出た光を点 P で見て，その後で後ろから出た光を点 R で見る．

3.7.3 双子のパラドックス

いよいよ，特殊相対性理論の山場である『双子のパラドックス』に取りかかる．このパラドックスは，時計のパラドックスをさらに拡張したものといえる．状況はロケットの中と外だが，もう少しひねりが加わっている．

まず地球に双子が居て，兄は地球に留まっている．地球は実際には太陽の周りを公転しているので慣性系とは言えないが，ここではじっとしているものと仮定する．一方で，弟が地球にあるロケットに乗り宇宙へ行く．特殊相対性理論で扱える状況を考えるため，ロケットは瞬時に加速して一定の速度になり，遠くまで行くとする．このロケットは，例えばおおいぬ座のシリウス（距離は約 8.6 光年）に到達したら，瞬時に方向を反転させて，地球に戻って来る．

シリウスまでは光でも 8.6 年かかるので，往復で 17 年ほどかかる．ロケットは光より遅いので，もっと時間がかかる．さて，このロケットが地球に戻ってきた時，兄と弟はどちらが若いのだろうか．それとも二人とも同じだけ歳を取っているのだろうか．この問題が『双子のパラドックス』である．

時計のパラドックスを考えると，相手の時計の方が進み方が遅くなるので，地球に居る兄からロケットに居る弟の時計を見ることを考えると，弟の方が若いように見える．一方でロケットに乗っている弟から地球にいる兄の時計を見ることを考えると，兄の方が若いように見える．この考えのどこに引っかかるところがあるのだろうか．

このパラドックスの説明は，専門家でもなかなかうまくいかない場合がある．中には「一般相対性理論を使わないと説明できない」という答えが出てくることもあるが，どちらが歳を取ったかという問題について

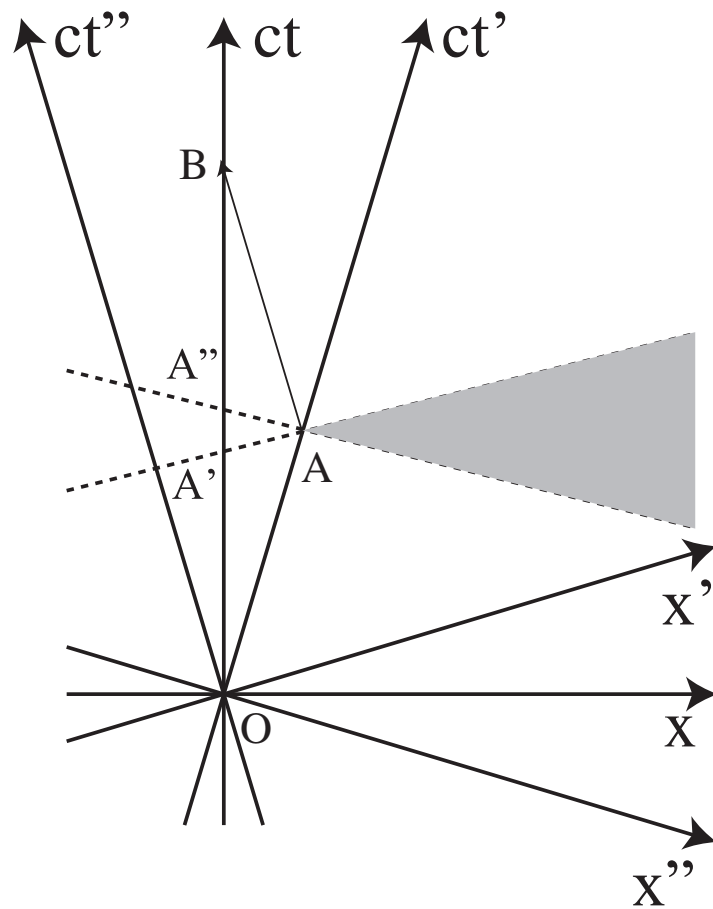


図 15: 双子のパラドックス．兄は $x = 0$ に留まるので， ct 軸上にずっといる事になる．弟は ct' 軸に沿って動くが，点 A でロケットが向きを変える時に座標系が代わり， ct'' 軸に平行な直線上を動いて点 B に到達する．

は，特殊相対性理論の範囲で説明できる．図を書いて丁寧に見ていくことにする．

図 15 を見てみよう．兄は地球にずっと留まっている．こちらを慣性系 S とすると，兄は ct 軸上にずっといる事になる．弟はロケットに乗って旅立って行くのだが，弟のいる座標系は地球を出発して，途中で折り返して，そして地球に戻って来る間を考えると，一つの慣性系に留まっている訳ではないのである．点 A までは弟は慣性系 S' に居て， ct' 軸に沿って動く．そして点 A で折り返す時，弟は地球に対して今までと逆向きの速度で運動するので，慣性系が変わるのである．こちらの慣性系を S'' とすると，弟は今度は ct'' 軸に平行な直線上を動き，点 B で地球に戻って来る．

出発点と転回点を除いて特殊相対性理論で図示できた．それでは実際に時間がどう経過しているのかを考えてみる．ロケットにいる弟は，時刻 0 で地球を出発し，時刻 τ で点 A に到達する．そして向きを反転

させて地球に戻って来る。行きと帰りのロケットの速さは同じなので、地球に戻ってきた時の弟の時刻は 2τ である。

点 A に着いた時の弟の固有時間は τ であった。これを兄が見てみると、弟の方が時間の進み方が遅い。ここまでは時計のパラドックスと何ら変わりがなく、弟の側から見ても兄の時間の進み方は遅いのである。ところが、ロケットが向きを反転させた瞬間に話が大きく変わる。弟が点 A に着いた時、弟にとって『同時』なのは、図 15 の右上がりの破線で、兄の側では A' である。ところが向きを反転させると基準となる慣性系が変わり、弟にとって『同時』になるのは、図 15 の右下がりの破線で、兄の側では A'' になる。つまり、ロケットに乗っている弟にとっての一瞬の反転の間に、兄の側では $A' \rightarrow A''$ という時間経過になってしまうのである。この時間反転の間に兄の方の時間が進んでしまうため、双子のパラドックスの答えは兄が歳を取ってしまうということである。

まとめると、

双子のパラドックスは、ロケット側で慣性系の乗り換えが生じるために、
地球に残った兄の方が、ロケットに乗った弟よりも歳を取ってしまう

である。

ただし注意しなければならないのは、慣性系のつなぎあわせ方である。ロケットが進む時と帰る時の慣性系をつなぎあわせると、図 15 の灰色のところが表示なくなってしまい、座標系が不完全になってしまう。実際には出発や反転では加速度が生じており、しかもその加速度は無限ではないので、出発や反転に時間がかかる。特殊相対性理論では慣性系しか扱えないので、加速度が加わるような座標系を考えるには、一般相対性理論まで考えていかなければならない。

4 相対論的力学

4.1 はじめに

今まで、ニュートン力学についてはガリレイ変換で運動方程式の形が変わらないが、電磁気学については基礎方程式、より端的に言えば観測者によって光速が変わってしまい、実験結果に反する事を述べた。そしてローレンツ変換では光速がいかなる慣性系でも変わらないが、日常的には非常識であるような現象が見られる事を示した。

さて、ローレンツ変換でニュートン力学の変換を行うとどうなるか。そのままでは慣性系によって、運動法則が変わってしまう。例えば、質量 m の物体が x 軸正方向に速さ $2v$ 、質量 $2m$ の物体が x 軸負方向に

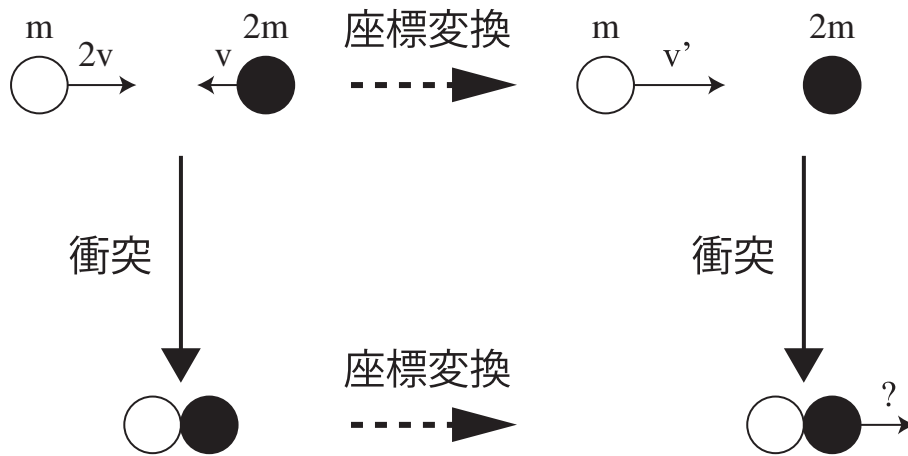


図 16: 二つの物体の衝突．左側は質量 m の物体が x 軸正方向に速さ $2v$ ，質量 $2m$ の物体が x 軸負方向に速さ v で動いている．つまり，重心が静止している．こちらは衝突後に二つの物体が合体し，静止している．右側は質量 $2m$ の物体が静止している慣性系に，ローレンツ変換で座標変換した場合．衝突前の質量 m の物体の速度は $3v$ ではなく，衝突後の合体した物体の速度も v にはならない．このため，衝突後のローレンツ変換と速度が一致しない．

速さ v で動いている．この二つの物体が正面衝突をする事を考えると，

$$m \times 2v + 2m \times (-v) = 0, \quad (93)$$

であるので，粘土のような反発係数 0 の物体ならば，衝突により合体して静止する．

次に慣性系を変えて考える．重い物体が静止しているように見える慣性系に移ると，軽い物体の速度はローレンツ変換から

$$v' = \frac{v + 2v}{1 - (v \times 2v/c^2)} = \frac{3v}{1 - (2v^2/c^2)}, \quad (94)$$

となる．衝突前の運動量は mv' となる．この慣性系でも，衝突後に 2 つの物体は合体する．衝突後の運動量を $3m\tilde{v}$ と置く．元の慣性系では衝突後は物体は静止しているので，衝突後にローレンツ変換を適用してもう一方の慣性系に移ると，衝突後の物体は速度 v で動いているはずである，それでは，ローレンツ変換を衝突の前に行った場合と衝突の後に行った場合の速度は一致するのだろうか．式で表すと $\tilde{v}' = v$ となるのだろうか．きちんと計算してみると

$$\tilde{v}' = \frac{v}{1 - (2v^2/c^2)} \neq v, \quad (95)$$

である．つまり，

ローレンツ変換を衝突の前に行うか，後に行うかで結果が変わってしまう

のである。これは、ニュートン力学とローレンツ変換がそのままでは両立しない事を示している。そこでローレンツ変換に対しても力学の法則が不変になるように、ニュートン力学に変更を行う。ローレンツ変換に対しても不変になる力学を 相対論的力学 という。

4.2 速度，運動量，エネルギー

ニュートン力学では、質点の位置を x とした時、速度 v は時間 t に対する位置の変化として見ていた。つまり、時間が Δt 変わる間に位置が Δx だけ変わったとすると、速度は

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (96)$$

となっていた。しかしこの書き方では、「位置 x に対する時間 t 」という扱いになっており、時間を特別扱いしている。ローレンツ変換は時間と空間を一緒に変換するような変換であったので、これではまずいのではないだろうか。

時間 t と空間 x を同等に扱うにはどうすればよいか。それは、ニュートン力学で考えてきた「時間に対する変化」という考えを改め、「固有時間に対する変化」とすればよい。固有時間 τ についてもう一度振り返ってみる。ミンコフスキー時空での二点間の世界距離 s との関係は、

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= -c^2 (\Delta \tau)^2 = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \\ &= \left\{ -c^2 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 \right\} (\Delta t)^2 \\ &= -c^2 \left\{ 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\} (\Delta t)^2, \end{aligned} \quad (97)$$

である。世界距離は慣性系に依らないので、固有時間も慣性系に依らず不変である。

時間 t と空間 x を同等に見るため、時間に光速をかけて ct とする。こうすると、時間成分も距離と同じ扱いが出来る。 x, y, z をそれぞれ第 1, 第 2, 第 3 成分と呼ぶ事に対し、 ct を第 0 成分と呼ぶ¹⁸。

さて、成分が 4 つになったところで、改めて速度を定義し直す。ニュートン力学では時間に対する位置の変化であったが、特殊相対性理論では時間と空間を同等に扱うので、「固有時間に対する時間，位置の変化」となる。

$$u_t \equiv \frac{\Delta(ct)}{\Delta \tau}, \quad (98)$$

$$u_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \quad u_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \quad u_z \equiv \frac{\Delta z}{\Delta \tau}. \quad (99)$$

¹⁸文献によっては、第 4 成分としている場合もある。

速度の成分は相対論的力学では4つになる．この速度 u を 4元速度 (しげんそくど) という．また，この4元速度を用いて，運動量を

$$p_t \equiv mu_t, \quad (100)$$

$$p_x \equiv mu_x, \quad p_y \equiv mu_y, \quad p_z \equiv mu_z, \quad (101)$$

と定義する．これを 4元運動量 という．

4元速度，4元運動量には不思議な性質がある．ニュートン力学で物体の速度 v と，その大きさである速さ v との関係は

$$v = |\boldsymbol{v}|,$$

であった．つまり，

$$v^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad (102)$$

であり，速さ v はいろいろな値を取れる．4元速度の大きさを考える場合，ミンコフスキー時空の世界間隔の計算と同様に考えて，第0成分の二乗はマイナスになる．すると，

$$\begin{aligned} -(u_t)^2 + (u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2 &= -\left(\frac{\Delta(ct)}{\Delta\tau}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta\tau}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\tau}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta\tau}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(\Delta\tau)^2} \left\{ -(\Delta(ct))^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(\Delta\tau)^2} \cdot \left\{ -c^2 (\Delta\tau)^2 \right\} = -c^2, \end{aligned} \quad (103)$$

となる．つまり，4元速度の大きさは一定になってしまう 4元運動量も同様に，

$$\begin{aligned} -(p_t)^2 + (p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2 &= -\left(m\frac{\Delta(ct)}{\Delta\tau}\right)^2 + \left(m\frac{\Delta x}{\Delta\tau}\right)^2 + \left(m\frac{\Delta y}{\Delta\tau}\right)^2 + \left(m\frac{\Delta z}{\Delta\tau}\right)^2 \\ &= \frac{1}{m^2(\Delta\tau)^2} \left\{ -(\Delta(ct))^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{m^2(\Delta\tau)^2} \cdot \left\{ -c^2 (\Delta\tau)^2 \right\} = -(mc)^2, \end{aligned} \quad (104)$$

となり，こちらも一定になってしまう．

さて，4元運動量をニュートン力学の速度 v で書く事を考える．少し書き換えてみると，

$$p_t = mu_t = m\frac{\Delta(ct)}{\Delta\tau} = mc\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \gamma mc, \quad (105)$$

$$p_x = mu_x = m\frac{\Delta x}{\Delta\tau} = m\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma mv_x, \quad (106)$$

$$p_y = mu_y = m \frac{\Delta y}{\Delta \tau} = m \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \gamma m v_y, \quad (107)$$

$$p_z = mu_z = m \frac{\Delta z}{\Delta \tau} = m \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \gamma m v_z, \quad (108)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \left(= \frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right), \quad (109)$$

となる．特にニュートン力学との対応がつく第 1, 第 2, 第 3 成分に注目する．ここで

$$m' \equiv \gamma m, \quad (110)$$

と置くと，相対論的力学の 4 元運動量とニュートン力学の速度は，例えば第 1 成分について

$$p_x = m' v_x, \quad (111)$$

となる．“慣性質量” m' は速度が光速に近づくと増加する．質量が紛らわしくなるので， m を 静止質量 という¹⁹． m' は v が光速 c に近づくと増加し，無限大になる．つまり，質量を持つ粒子は速さが光速になると 4 元運動量が無限大になる．運動量は無限大に出来ないので，

質量を持つ粒子は光速で運動できない

事になる．

最後に，4 元運動量の第 0 成分の意味を考える．4 元運動量の第 0 成分に光速 c をかける．

$$cp_t = \gamma mc^2. \quad (112)$$

γ は (109) で示すように，平方根で表される．このままでは分かりにくいので，粒子の運動が非常に遅い場合を考える．つまり， $\beta = v/c$ が 1 に比べてうんと小さい場合である．

ここから先の計算をきちんとやるには，大学の教養課程で教わるテイラー (Taylor) 展開が必要なので，計算に関しては以下の説明で大まかに理解してもらいたい．数学の式の展開を考える． $(1 + \varepsilon)$ という式を何回かかけて展開してみよう．

$$(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2, \quad (113)$$

$$(1 + \varepsilon)^3 = 1 + 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3, \quad (114)$$

$$(1 + \varepsilon)^4 = 1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4, \quad (115)$$

というように書ける．左辺を展開した時， ε の何乗のところの係数がどうなるかは，二項定理 として高校

¹⁹文献によっては，静止している事を強調するために m_0 と書いている場合がある．

の数学で教わる話である．ここでは特に右辺の ε の項の係数に注目する．2乗の時は2, 3乗の時は3, 4乗の時は4という様になっている事が分かる．二項定理から, n 乗の時は ε の項の係数が n になる事が示される．もし ε がうんと小さければ,

$$(1 + \varepsilon)^n \rightarrow 1 + n\varepsilon, \quad (116)$$

と置き換えても, ほとんど支障がない．

二項定理では, この n は自然数の場合に限る．ところが, (116) の置き換えは n が自然数ではなく, 実数の場合でも成り立つのである²⁰．そこで,

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = (1 + \varepsilon)^{1/2} \rightarrow 1 + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad (117)$$

という置き換えを考える．この置き換えを (109) に対して行くと,

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2, \quad \left(\varepsilon = -\left(\frac{v}{c}\right)^2\right), \quad (118)$$

となる．この置き換えを4元運動量の第0成分の式 (112) に適用すると,

$$cp_t \simeq \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \cdot mc^2, \quad (119)$$

となり,

$$cp_t \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (120)$$

となる．右辺第2項はニュートン力学で現れる運動エネルギーである事が分かるが, 第1項は何だろうか．第1項は物体の速度 v が0になっても0にならない項である．この項こそが 質量とエネルギーの同等性 を示す項である．この項は 静止エネルギー と呼ばれ,

$$E_0 = mc^2, \quad (121)$$

と与えられる²¹．また, 相対論的力学ではエネルギーは

$$E \equiv cp_t, \quad (122)$$

と定義される．物体の速度が光速に比べて無視できるときは, 相対論的力学のエネルギーは静止エネルギーと運動エネルギーの和で表されるが, 物体の速度が光速に近づくと, 上記の展開の置き換えで無視してきた項の影響が大きくなるため, ニュートン力学のエネルギーとは徐々にずれて行く．

²⁰この説明をきちんとするには, テイラー展開が必要．

²¹ここでの質量は静止質量であり, 慣性質量 m' でない事に注意．

5 まとめ

特殊相対性理論が誕生するまでの話と座標変換（ローレンツ変換）、特殊相対性理論から得られる非日常的な帰結、パラドックスについて述べてきた。そしてローレンツ変換に対してはニュートン力学の法則（例えば運動方程式）の形が大きく変わってしまうので、ローレンツ変換でも法則の形が変わらないように、ニュートン力学を拡張することを考え、相対論的力学におけるエネルギーを考えていくと、有名な質量とエネルギーが等価であるという式

$$E = mc^2, \quad (123)$$

が得られた。

さらに、電磁気学もローレンツ変換で扱いやすいようにするという作業があり、ドップラー効果が特殊相対性理論の効果によって変更を受けるという事が得られる。また、電気と磁気の関連性も分かりやすくなるのだが、さらに数学的に込み入った話となる。

特殊相対性理論は「慣性系同士の座標変換」であり、慣性系でなければ変換が取り扱えない。例えば等加速度運動をしているロケットに座標系を設定し、ロケットの外で静止している人を基準とした慣性系との間の座標変換を考えると、ローレンツ変換ではうまく行かず、世界間隔の計算もおかしな事になってしまう。

また、電磁気力は光速で伝わるのだが、ニュートンの万有引力は時間をかけずに一瞬で伝わってしまうので、特殊相対性理論と矛盾が生じる。特殊相対性理論が正しいとすると、重力の伝わり方も有限の速さであるはずで、また万有引力の法則はローレンツ変換で座標系に依らず同じ形になるはずだが、そうはならない。

これらの問題点を全て解決したのが『一般相対性理論』である。一般相対性理論を取り扱うには、最初に述べたようにユークリッド幾何学ではダメで、曲がった世界を取り扱えるリーマン幾何学が必要になる。きちんと扱うには大学での数学の学習が必要となる。

ただし、曲がった世界を扱う事は皆さんも既に行っているのである。地球の上で「東西南北」を考えると、どうしているだろうか。例えば地球儀の東京の位置に、経線に沿った紙テープと、その紙テープに直交させた紙テープを貼り付けて、方位を考えるだろう。すると、東京のはるか東はアメリカではなく、南米である事が分かる。緯線が東西方向を表している訳ではないのである。

数学の先生に怒られるかもしれないが、ベクトルを教わった時の事を思い出してみよう。「出発点からまず東に1km行って、その後で北に1km行く時と、まず北に1km行って、その後で東に1km行く時では、到着地点は同じになる」というような話だったかもしれない。京都や札幌のような街を考えると、たしかに何ブロック進んで曲がるかという事で、よさそうな話である。ただ、この話をもっと極端にして、「シンガポールから北に5000km進んで、東に5000km進む場合と、シンガポールから東に5000km進んでから北に5000km進んだ場合では、たどり着くところは同じだろうか」という事を考えてみると、不思議な事に気

付くかもしれない。

混乱させるような話を述べた後で、最後にアインシュタインに関する逸話の一つ。アインシュタインが子どもに、バスの中で相対性理論について聞かれた時、「君が勉強しているときはまるで一分が一時間のように感じるだろう？ だけど君が好きな女の子と遊んでいるときは一時間が一分のように感じてしまう。これが相対性理論さ」と答えたい。皆さんにとって、この喩えが当てはまるだろうか。

6 参考となる図書，文献

高校生が特殊相対性理論を学ぶ際に役立つような文献をいくつか挙げておく。

1. アインシュタイン 著，内山龍雄 訳 『相対性理論』 岩波文庫
2. アインシュタイン 著，金子務 訳 『特殊および一般相対性理論について』 白揚社
3. 手塚治虫，大塚明郎 監修 『まんが・アトム博士の相対性理論』 東陽出版
4. アインシュタイン，インフェルト 著，石原純 訳 『物理学はいかに創られたか』 岩波新書
5. 松田卓也，木下篤哉 著 『相対論の正しい間違え方 (パリティブックス)』 丸善
6. J.J. キャラハン 著，樋口三郎 訳 『時空の幾何学 - 特殊および一般相対論の数学的基礎』 シュプリンガーフェアラーク東京

1. はアインシュタインの「運動物体の電気力学」と名付けられた，特殊相対性理論の論文の翻訳。さらに相対性理論の専門家による解説がついているが，やや難しいかもしれない。

2. は特殊相対性理論，一般相対性理論の解説書。理論を構築した本人が数式を使わないで簡潔に解説しているという点で，良書といえる。

3. は相対性理論を漫画で説明した珍しい本。アインシュタインの生い立ちと相対性理論の解説を交えたもので，恐らく本稿よりも簡潔で分かりやすいと思う。私自身，中学生～高校生の時にこの本を読んでかなり勉強になった。

4. は古典物理学から現代物理学に至るまでの筋道を解説した本。数式を操る訳ではないが，理論構築の考え方を知る上では非常に重要な本である。

5. は少々ひねった本で，相対性理論の落とし穴ばかりを挙げている。著者は「相対性理論は間違っている」と主張する人と論争を行ってきた方で，主張のどこがおかしいかをこれでもかと言わんばかりに説明している。読んで行くうちに混乱が生じるかもしれない。

6. は数式だけでは理解しにくい相対性理論を，膨大なグラフを交えて説明している専門書。大学生が相対性理論を学ぶ時に有用なだけでなく，相対性理論を使って研究を行う第一線の研究者でも役立つ本である。