

特殊相対性理論入門 続編

立川 崇之

公開用 第1版

2024.1

e-mail: tatekawa (at) akane.waseda.jp

1 はじめに

本稿は、私が2005-2006年度に物理学科の大学2年生を対象とした「相対性理論」の講義を行った時の講義録をもとに作成した資料である。

「特殊相対性理論入門」とは異なり、大学教養課程の力学、電磁気学および数学を既習としている学生を対象としたものである。微積分を用いた記述になっている。また、添字の使い方も相対性理論で標準的に用いられているものを扱う。たとえば x^1, x^2, x^3 はそれぞれ空間座標の x, y, z を示すように、同じ文字に異なる添字をつけることで、異なる成分を表すようにする。 x^0 は ct に対応する。また、添え字が右下ではなく右上についていることにも注意である。一般相対性理論において、添字が右上、右下のいずれについているかで、意味が大きく変わってしまう。このことを踏まえて、本資料でも添え字の位置に注意する。右上の添字と、二乗の記述が混在するところがあるが、二乗のところはあえて注意書きを行うことにする。

添字の扱いについても注意しておく。0, 1, 2, 3 のように具体的にそれぞれの成分を表すのみでなく、まとめて表す必要が現れることがある。その際には、ギリシャ文字は 0, 1, 2, 3, ローマ字は 1, 2, 3 を意味することに注意する。例えば x^i という記述が現れた場合には、 x^1, x^2, x^3 すなわち x, y, z を意味する。

物理量において、添字 N がつく場合には、Newton 力学での物理量を意味する。例えば p_N は、Newton 力学における (3 成分の) 運動量を意味する。

2 相対論的力学

2.1 相対論的運動方程式

特殊相対性理論の原理の一つは、「いかなる慣性系においても、物理法則は不変である」という特殊相対性原理であった。ところが Lorentz 変換のもとでは Newton 力学の運動方程式は形を変えてしまう。そこで特殊相対性理論に矛盾しない形で、古典力学に変更を加える。加速度は 4 元速度の固有時間による微分

$$\frac{du^\mu}{d\tau}$$

で与えられる。それでは、運動方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad (1)$$

の力に相当する f^μ は何に対応するのだろうか。

まず力の第 1, 2, 3 成分を考える。これらの成分は

$$f^i = \frac{dp^i}{d\tau} = \gamma \frac{dp^i}{dt}, \quad (2)$$

となる。Newton 力学では、運動量 \mathbf{p} と力 \mathbf{F}_N との関係は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_N, \quad (3)$$

であったから、相対論的運動方程式との対応を考えると

$$f^i = \gamma F_N^i, \quad (4)$$

となる。

それでは力の第 0 成分は何を意味するのだろうか。まず 4 元運動量を考えると、第 1, 2, 3 成分の二乗の和から第 0 成分の二乗を引いた、以下の式が成り立つ。

$$-(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -m^2 c^2. \quad (5)$$

上記の式の両辺を τ で微分すると、以下の式が得られる。

$$-p^0 \frac{dp^0}{d\tau} + p^1 \frac{dp^1}{d\tau} + p^2 \frac{dp^2}{d\tau} + p^3 \frac{dp^3}{d\tau} = 0. \quad (6)$$

4 元運動量の時間微分に、相対論的運動方程式を代入する。

$$-p^0 f^0 + p^1 f^1 + p^2 f^2 + p^3 f^3 = 0. \quad (7)$$

ここで以下のような、クロネッカーのデルタを拡張した量を導入する。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \mu = \nu = 0 \\ 1 & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (8)$$

すると、(7) は以下のように整理できる¹.

$$\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} p^\mu f^\nu = 0, \quad (9)$$

この式は 4 元運動量 (4 元速度) と 4 元力 (4 元加速度) が直交することを意味する².

ここから、 f^0 を移項する.

$$\begin{aligned} f^0 &= \frac{1}{p^0} (p^1 f^1 + p^2 f^2 + p^3 f^3) \\ &= \frac{1}{\gamma mc} (\gamma \mathbf{p}_N \cdot \gamma \mathbf{F}_N) \\ &= \frac{\gamma}{mc} (\mathbf{p}_N \cdot \mathbf{F}_N). \end{aligned} \quad (10)$$

(10) の右辺の意味を考えるため、少し書き直す.

$$\frac{\gamma}{mc} (\mathbf{p}_N \cdot \mathbf{F}_N) = \frac{\gamma}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_N). \quad (11)$$

Newton 力学において、「仕事」とは質点に力 \mathbf{F}_N がかり、 $d\mathbf{r}$ だけ質点が移動した時、 $\mathbf{F}_N \cdot d\mathbf{r}$ と表される物理量であった。そして「仕事率」は単位時間あたりの仕事であった。つまり仕事率は

$$\frac{1}{dt} (\mathbf{F}_N \cdot d\mathbf{r}),$$

である。もし \mathbf{F}_N が時間に対して一定であるならば、仕事率は

$$\mathbf{F}_N \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{v}, \quad (12)$$

である。つまり、 f^0 は Newton 力学における仕事率に比例する量となっている。

ここで特殊相対性理論の原理を思い出そう。相対性原理とは「あらゆる慣性系で自然法則は不変」という原理だった。ある慣性系 (S 系) において、相対論的運動方程式が

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad (13)$$

¹相対性理論の教科書では、**Einstein の縮約**という、添字が同じものが積に現れたら、添字について和をとるというルールが適用され、 Σ 記号が省略されることが大半である。本資料では入門者が混乱しないよう、あえて Σ 記号を残す。

²(9) は、Minkowski 時空中における 4 元運動量と 4 元力の内積を表す。Euclid 幾何学における 3 次元空間 (Euclid 空間) での内積は、各々の成分の積の総和によって与えられた。Minkowski 時空中の内積は、第 1, 2, 3 成分の積については総和を取り、第 0 成分の積は引く。Minkowski 時空中の内積の値が 0 になる時、2 つのベクトルは直交するという。

と表されるとすると、別の慣性系 (S' 系) においては相対論的運動方程式が

$$m \frac{du'^{\mu}}{d\tau} = f'^{\mu}, \quad (14)$$

と表されなければならない³.

Lorentz 変換は線形変換なので、座標変数は定数行列の成分を $a_{\mu\nu}$ として

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} x^{\nu}, \quad (15)$$

のような形の変換を受ける⁴. 4元運動量は

$$u'^{\mu} = \frac{dx'^{\mu}}{d\tau}, \quad (16)$$

であり、 $a_{\mu\nu}$ は時間によらないので、(14) は

$$m \sum_{\nu} a_{\mu\nu} \frac{du^{\nu}}{d\tau} = f'^{\mu}, \quad (17)$$

と表される. この運動方程式が (13) と同じ形になるためには、4元力も

$$f'^{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} f^{\nu}, \quad (18)$$

という変換を受けなければならない.

この節では、4元速度、4元力が、慣性系間の Lorentz 変換において、座標変数と同様の変換を受けることを示した. 座標変数と同様の変換を受けるベクトルを**共変 (covariant) ベクトル**という⁵..

³ここでの ' は慣性系の違いを表している.

⁴もし S' 系が S 系に対し x 軸正方向に速度 V で運動する系であったら、

$$\begin{aligned} a_{00} &= a_{11} = \gamma, \\ a_{01} &= a_{10} = -\frac{V}{c}\gamma, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \end{aligned}$$

となり、定数行列の他の成分は 0 となる.

⁵速度や加速度は座標変換において座標変数と同じ変換を受けるので共変ベクトルである. それでは位置ベクトルと速度ベクトルの外積で定義される角運動量はベクトルだろうか. 実は角運動量は座標反転で符号が変わらない. このようなベクトルを**軸性ベクトル**あるいは**擬ベクトル**という. 角速度やトルクも軸性ベクトルである. 軸性ベクトルの性質については、以下の資料がわかりやすい. 安藤裕康, "軸性ベクトルについて", 天文月報 第 112 巻 第 4 号, 255-259 (2019).

2.2 変分原理

解析力学を思い出してみよう。対象としている物理系の Lagrangian を \mathcal{L} とする。図 1 のように示すように始点と終点を固定して、その間の作用

$$S = \int \mathcal{L} dt, \quad (19)$$

を極小にする条件

$$\delta S = 0, \quad (20)$$

から、Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0, \quad (21)$$

が得られた。このような変分原理を用いた運動方程式の導出を、特殊相対性理論的に拡張してみる。

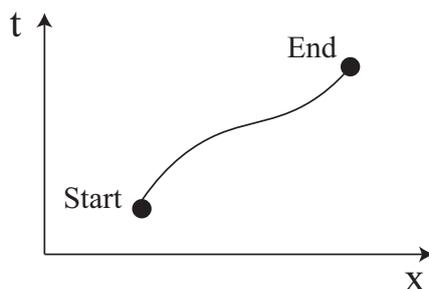


図 1: 変分原理の模式図。始点 (Start) と終点 (Stop) を固定し、途中の経路で作用が極値を取るように選ぶ。

まず、自由粒子の場合を考える。 $v/c \rightarrow 0$ の極限で Newton 力学と一致するように、

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad (22)$$

としてみる。すると、作用は以下のようなになる。

$$S = - \int mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt. \quad (23)$$

ところが特殊相対性理論では時間座標を特別視しないので、書き換えが必要になる。 t ではなく固有時間 τ を用いるようにする。

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\} \\
&= \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} - \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right\} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \\
&= -\frac{1}{c^2} \left(\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2. \tag{24}
\end{aligned}$$

よって固有時間を用いた作用は以下のようなになる.

$$S = - \int mc \left\{ - \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\}^{1/2} d\tau. \tag{25}$$

ここで被積分関数を Lagrangian として定義し直す.

$$\mathcal{L}_m \equiv -mc \left\{ - \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\}^{1/2}, \tag{26}$$

$$S = \int \mathcal{L}_m d\tau. \tag{27}$$

固有時間を用いた作用に対して変分原理を適用すると, Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x^\mu} = 0, \tag{28}$$

が得られる. 自由粒子の場合には,

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = 0, \tag{29}$$

あるいは,

$$m \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0, \tag{30}$$

となる.

ところで, Lagrangian \mathcal{L} や作用 S は, Lorentz 変換のような座標変換では不変である. 座標変換に対し不変である物理量を **スカラー量** という.

実は自由粒子の場合の Lagrangian を考えると,

$$\mathcal{L}_m = -mc^2, \tag{31}$$

となっている. この Lagrangian に対し変分を取ると,

$$S = -mc^2 \int d\tau, \tag{32}$$

$$\delta S = -mc^2 \delta \int d\tau = 0, \quad (33)$$

となる。この変分は、自由粒子の経路に沿った固有時間の経過が最大になるということを意味する。変分原理に基づいて双子のパラドックスを考えると、慣性系の出発点にとどまっている人⁶は、外力を受けない自由粒子の運動といえる。一方でロケットに乗った人は折り返しがあるので加速度がゼロではなく自由粒子の運動ではない。出発点の人は自由粒子の運動とみなせるので固有時間が最大となる。つまり出発点にいる人がロケットに乗った人より歳を取ることになる。

3 相対論的電磁気学

3.1 はじめに

電磁気学の基礎方程式は Maxwell 方程式である。歴史的経緯から電磁気学は SI 単位系と Gauss 系の記述が今もなお並立している。ここでは SI 単位系による Maxwell 方程式を取り扱う。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (35)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (36)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (37)$$

Maxwell 方程式 (34), (35), (36), (37) はそれぞれ, Gauss の法則, 磁気単極子がないこと, Ampere の法則, 電磁誘導の法則を表す。 $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ はそれぞれ電束密度, 電場, 磁場, 磁束密度を表す。 ρ, \mathbf{j} はそれぞれ電荷密度, 電流密度を表す。さらに真空中では, 以下の式が成り立つ。

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (38)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (39)$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (40)$$

ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率, 真空の透磁率という。これらの積が真空中の光速の逆二乗になっていることは, 真空中では電磁場は電磁波として光速で伝わることを意味する。(35), (37) より, ベクトルポテン

⁶地球にとどまっていると公転運動があるので, あえて慣性系の「出発点」とする。

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} , スカラーポテンシャル ϕ を用いて \mathbf{B}, \mathbf{E} が表されることがわかる⁷.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (41)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (42)$$

(34) の時間微分を取り, (36) の発散 (div) との和をとると, 電荷保存の法則が得られる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (43)$$

また, 電荷 e を持つ粒子が速度 \mathbf{v} で運動するときに受ける力は

$$\mathbf{F}_N = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (44)$$

であった.

今後, 特殊相対性理論を考慮して電磁気学を扱うことを考える.

3.2 Maxwell 方程式の書き換え

まず, (43) に注目する. 電流密度の成分

$$j^1 = j_x, j^2 = j_y, j^3 = j_z,$$

に加えて, $j^0 = c\rho$ と置くと, (43) は

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} j^{\mu} = 0, \quad (45)$$

と書き換えられる.

次に (41), (42) を (34), (36) に代入する.

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \varepsilon_0 \nabla^2 \phi = \rho, \quad (46)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \{ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) = \mathbf{j}. \quad (47)$$

ところで \mathbf{A}, ϕ には「ゲージ自由度」とよばれる自由度が存在する. 任意のスカラー関数 χ を用いて,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (48)$$

⁷ここで導入した \mathbf{A}, ϕ は数学的便宜のために導入された仮想的なものではなく, 物理的に実在することが Aharonov-Bohm 効果 (AB 効果) の実験的検証で示されている.

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (49)$$

というようにベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャルを置き換えても，同じ電磁場を表す。

初期条件，境界条件を与えても \mathbf{A}, ϕ が一意に決まらないので，以下のような条件（Lorenz 条件）を課す⁸。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (50)$$

Lorenz 条件のもとで， \mathbf{A}, ϕ について以下の式が成り立つ。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = c^2 \mu_0 \rho, \quad (51)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (52)$$

これらの式の右辺に存在する ρ, \mathbf{j} を j^μ に置き換えた時のことを考えて，

$$A^0 = \frac{1}{c} \phi, A^1 = A_x, A^2 = A_y, A^3 = A_z,$$

と置くと，

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^\mu - \nabla^2 A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad (53)$$

という一つの式にまとまる。

さて，成分が4つになったベクトルポテンシャル A^μ に対し，

$$A_\mu \equiv \sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad (54)$$

という別のポテンシャルを定義する。つまり，

$$A_0 = -A^0 = -\frac{1}{c} \phi, A_i = A^i,$$

である。単に添字の付け替えのように見えるが，相対性理論では添字の上下で座標変換での変換則が変わってしまうことに注意が必要である。

定義した A_μ を用いて，次の量を定義する。

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu = -F_{\nu\mu}. \quad (55)$$

⁸Lorentz 変換の Lorentz とは別人なので，誤植ではない。

この $F_{\mu\nu}$ の各成分を電場, 磁場の成分で表すと以下のような行列のように表される.

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

(35), (37) を各成分で表すと, 以下の4つの式になる.

$$0 - c \frac{\partial}{\partial x} B_x - c \frac{\partial}{\partial y} B_y - c \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0, \quad (56)$$

$$c \frac{\partial}{\partial t} B_x + 0 + \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = 0, \quad (57)$$

$$c \frac{\partial}{\partial t} B_y - \frac{\partial}{\partial x} E_z + 0 + \frac{\partial}{\partial z} E_x = 0, \quad (58)$$

$$c \frac{\partial}{\partial t} B_z + \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x + 0 = 0. \quad (59)$$

$F_{\mu\nu}$ を用いると, これらの式をまとめて一つに表すことができる.

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\nu\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\rho\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\rho} F_{\mu\nu} = 0. \quad (60)$$

一方で, $F_{\mu\nu}$ に対応して, 以下の量を定義する.

$$F^{\mu\nu} \equiv \sum_{\rho,\sigma} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (61)$$

ここで現れた記号は, $\eta^{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$ であり, 添字が双方とも揃った場合に値を持つことは, 前述の $\eta_{\mu\nu}$ と同じである. すると, 以下の性質がある.

$$F^{0\nu} = -F_{0\nu}, F^{\mu 0} = -F_{\mu 0}, F^{ij} = F_{ij}. \quad (62)$$

(34), (36) は $F^{\mu\nu}$ を用いて書き換えができる.

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu. \quad (63)$$

(45), (60), (63) はいかなる慣性系でも同じ形の方方程式になる. 例として, (45) と (63) について座標変換で式の形が不変になるように, 物理量が. どのような変換を受ける必要があるのかを確かめる.

まず (45) を見てみる.

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} j^{\mu} &= \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} j^{\mu} \\
 &= \sum_{\mu, \nu} a_{\nu \mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} j^{\mu} \\
 &= \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} (a_{\nu \mu} j^{\mu}) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{64}$$

ここから j^{μ} は

$$j'^{\nu} = a_{\nu \mu} j^{\mu}, \tag{65}$$

という変換を受ける必要がある.

次に (63) を見てみる.

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} F^{\mu\nu} &= \sum_{\nu, \sigma} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} F^{\mu\nu} \\
 &= \sum_{\nu, \sigma} a_{\sigma \nu} \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} F^{\mu\nu} \\
 &= j^{\mu}.
 \end{aligned} \tag{66}$$

ここで両辺に $a_{\rho\mu}$ をかけて, μ について和をとる.

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu, \nu, \rho} a_{\sigma \nu} a_{\rho \mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} F^{\mu\nu} &= \sum_{\mu} a_{\rho \mu} j^{\mu} \\
 &= j'^{\rho} \\
 &= \sum_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} F'^{\rho\sigma}.
 \end{aligned} \tag{67}$$

ここから $F^{\mu\nu}$ は

$$F'^{\rho\sigma} = \sum_{\mu, \nu} a_{\rho \mu} a_{\sigma \nu} F^{\mu\nu}, \tag{68}$$

という変換を受ける必要がある⁹.

⁹座標変換に際し, このような変換を受ける物理量を**共変テンソル**という. テンソルはベクトルの考え方を一般化した量である.

3.3 運動する粒子が作る電磁場

次に運動する荷電粒子が作る電磁場を考える。原点に静止している電荷 q の荷電粒子が作る電場は以下のように与えられる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (69)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (70)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (71)$$

それでは荷電粒子が運動している場合はどうだろうか。特殊相対性理論を考慮しない電磁気学においては、荷電粒子の位置を $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ と時間の関数として置いた。また、電磁場を求める空間上の点には、粒子の運動の影響は光速 c で伝わることを考慮して、Liénard-Wiechert ポテンシャルを求め、そして空間微分を行うことにより \mathbf{E}, \mathbf{B} を求めていた。電磁気学の教科書を参照するとわかるが、この計算は大変面倒なものである。

特殊相対性理論を考えると、もし荷電粒子が等速運動をしていれば、Lorentz 変換を用いて静止している荷電粒子が作る電磁場を変換すれば直ちに求まることがわかる。そこで、Lorentz 変換を用いた電磁場の変換を考える。

荷電粒子が x 軸正方向に速度 v で運動しているとする。(68)において

$$a_{00} = \gamma, a_{01} = a_{10} = -\gamma\frac{v}{c}, a_{11} = \gamma, a_{22} = a_{33} = 1, \quad (72)$$

とすると、荷電粒子が静止している系での電磁場（静電場）から変換を行うことによる運動している荷電粒子の電磁場が求まる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} E'_x = F'^{01} &= a_{00}a_{11}F^{01} + a_{01}a_{10}F^{10} \\ &= \gamma^2 F^{01} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} F^{10} \\ &= \gamma^2 \cdot \frac{1}{c} E_x + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \left(-\frac{1}{c}\right) E_x \\ &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{1}{c} E_x \\ &= \frac{1}{c} E_x, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} E'_y = F'^{02} &= a_{00}a_{22}F^{02} + a_{01}a_{22}F^{12} \\ &= \gamma \cdot \frac{1}{c} E_y - \gamma \cdot \frac{v}{c} B_z \end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma}{c}(E_y - vB_z), \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}E'_z = F'^{03} &= a_{00}a_{33}F^{03} + a_{01}a_{33}F^{13} \\ &= \gamma \cdot \frac{1}{c}E_z + \gamma \cdot \frac{v}{c}B_y \\ &= \frac{\gamma}{c}(E_z + vB_y), \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} B'_x = F'^{23} &= a_{22}a_{33}F^{23} \\ &= B_x, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} B'_y = F'^{31} &= a_{33}a_{10}F^{30} + a_{33}a_{11}F^{31} \\ &= -\gamma \frac{v}{c} \left(-\frac{1}{c}E_z \right) + \gamma B_y \\ &= \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z \right), \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} B'_z = F'^{12} &= a_{10}a_{22}F^{02} + a_{11}a_{22}F^{12} \\ &= \gamma \left(-\frac{v}{c} \right) \frac{1}{c}E_y + \gamma B_z \\ &= \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y \right). \end{aligned} \quad (78)$$

得られた電磁場は、 $|v/c| \ll 1$ の極限では、

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (79)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (80)$$

となる。

また、ベクトルポテンシャル、スカラーポテンシャルは以下のように変換される。

$$\frac{1}{c}\phi' = a_{00} \cdot \frac{1}{c}\phi + a_{01}A_x = \frac{\gamma}{c}(\phi - vA_x), \quad (81)$$

$$A'_x = a_{10} \frac{1}{c}\phi + a_{11}A_x = \gamma \left(-\frac{v}{c^2}\phi + A_x \right), \quad (82)$$

$$A'_y = a_{22}A_y = A_y, \quad (83)$$

$$A'_z = a_{33}A_z = A_z. \quad (84)$$

これらの結果を用いると、速度 v で x 軸正方向に運動する荷電粒子が作る電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} が求まる。

$$E_x = E'_x, E_y = \frac{\gamma}{c}(E'_y + vB'_z), E_z = \frac{\gamma}{c}(E'_z - vB'_y), \quad (85)$$

$$B_x = B'_x, B_y = \gamma \left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z \right), B_z = \gamma \left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y \right). \quad (86)$$

ベクトルポテンシャル, スカラーポテンシャルも以下ようになる.

$$\phi = \frac{\gamma}{c}(\phi' + vA'_x), A_x = \gamma\left(\frac{v}{c^2}\phi' + A'_x\right), A_y = A'_y, A_z = A'_z. \quad (87)$$

S' 系の原点に電荷 q をもつ荷電粒子が静止しているとする. この時の電磁場は以下ようになる.

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'}, \quad (88)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{0}, \quad (89)$$

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{(r')^3}, \quad (90)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{0}. \quad (91)$$

ここで, \mathbf{r}', r' は以下の意味である.

$$\mathbf{r}' = (x', y', z'), \quad (92)$$

$$(r')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2. \quad (93)$$

S' 系で求めた上記の電磁場を, Lorentz 変換を用いて S 系の電磁場に変換することにより, 等速運動をなす荷電粒子が作る電磁場を求めることができる.

3.4 相対論的 Doppler 効果

次に Doppler 効果を考えてみる. S 系の原点で星を観測することを考える. 星は S' 系では静止しているが, S 系で見ると速度 v で x 軸正方向に等速運動しているとする. 前述の Lorentz 変換を考えると, 星の時間間隔 $\Delta t'$ と観測者の時間間隔 Δt は異なる. さらに, 図 2 に示すように, 星から観測者までの光の到達を考えなければならない. 様々な効果を考えなければならないが, 式を扱っていくと理解できる.

まず, 観測者は S 系で静止しているとする. ここで観測者の位置は原点とは限らない. 光は電磁波と同じであり, 真空中を伝わるものとする. 電磁波の伝播を考えるので, Maxwell 方程式を取り扱うことになる.

Lorentz ゲージのもとで, 真空中 ($j^\mu = 0$) での A^μ に関する波動方程式は以下ようになる.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A^\mu - \nabla^2 A^\mu = 0. \quad (94)$$

波動方程式の解は以下ようになる.

$$A^\mu = A_0^\mu \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (95)$$

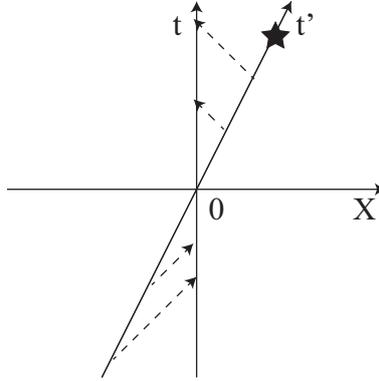


図 2: 動く星から放たれる光. 観測者は (t, x) を, 星は (t', x') を座標変数にとる. 星から放たれた光は破線に沿って $x = 0$ の観測者に届く.

$$\begin{aligned}
 A_0^\mu & : \text{定数} \\
 \omega = c|\mathbf{k}| & : \text{振動数 (周波数)} \\
 |\mathbf{k}| & : \text{波数}
 \end{aligned}$$

得られた解は S 系での解である. S' 系での波動方程式は同じ形になることから, 解も同様に得られる.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} A'^\mu - \nabla'^2 A'^\mu = 0, \quad (96)$$

$$A'^\mu = A_0'^\mu \exp [i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t')]. \quad (97)$$

Lorentz 変換における j^μ の変換則と同様に, A^μ も変換を受ける.

$$A'^\mu = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} A^\nu. \quad (98)$$

変換則に従いベクトルポテンシャルについて, 2つの系での解を結びつける.

$$A_0^\mu \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} A_0'^\nu \exp [i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t')]. \quad (99)$$

この式が時空上のいかなる点でも成り立つためには, 以下の式を満たさなければならない.

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \quad (100)$$

ベクトルを成分で表すと以下のようなになる.

$$-\omega' t + k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' = -\omega t + k_x x + k_y y + k_z z. \quad (101)$$

左辺に Lorentz 変換の式を代入し, (t, x, y, z) の係数を比較する.

$$\omega = \gamma(\omega - vk_x), \quad (102)$$

$$k'_x = \gamma\left(k_x - \frac{v}{c^2}\omega\right), \quad (103)$$

$$k'_y = k_y, \quad (104)$$

$$k'_z = k_z. \quad (105)$$

ここで, 図 3 のように, x 軸と角 θ をなす方向に進む光が, Doppler 効果でどのように振動数を変化させるかを考える.

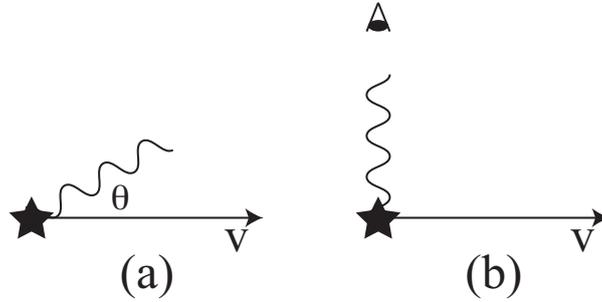


図 3: 星の進行方向とは異なる方向に放たれる光. (a) 進行方向と角 θ をなすように放たれる光. (b) 進行方向と垂直方向に放たれる光. 特殊相対性理論では, 進行方向と垂直方向に放たれる光も, Doppler 効果を受ける.

$$vk_x = vk \cos \theta = \omega v \cdot \frac{1}{\omega \lambda} \cos \theta = \omega \cdot \frac{v}{c} \cos \theta. \quad (106)$$

ここで λ は電磁波の波長を示し, 波数の逆数である. 光の振動数は以下のように変化を受ける.

$$\omega' = \gamma\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right). \quad (107)$$

特に $\theta = \pi/2$, つまり星の運動方向が観測者の視線方向と垂直である時を考える. 観測者が座標 $(0, Y, 0)$ ($Y \neq 0$) にいて, 星が x 軸に沿って横切るような状況である.

$$\omega' = \gamma\omega. \quad (108)$$

特殊相対性理論を考慮しない極限では $\gamma \rightarrow 1$ だから, Doppler 効果を受けないが, 特殊相対性理論を考慮すると, 視線方向と垂直に運動する星から放出される光も Doppler 効果を受ける. この効果を**横 Doppler 効果**という.

3.5 電荷をもつ粒子の運動

前にも述べたが、荷電粒子が電磁場から受ける力は以下のように表される。

$$\mathbf{F}_N = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (109)$$

この力を 4 元力に置き換えたい。一番簡単な方法は、変分原理を用いる方法である。

電磁場の影響を表す Lagrangian を導入する。

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{\nu} qu^{\nu} A_{\nu}. \quad (110)$$

Lagrangian 全体は、自由粒子の Lagrangian と電磁場の Lagrangian の和になる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int} \\ &= -mc \sqrt{-\sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}} + \sum_{\nu} qu^{\nu} A_{\nu}. \end{aligned} \quad (111)$$

この Lagrangian の変分をとる。

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int \mathcal{L} d\tau = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x^{\mu}} \right) + \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial x^{\mu}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (112)$$

右辺第二項を考えるため、各々を詳細に見てみる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial u^{\mu}} &= q \frac{d}{d\tau} A_{\mu} \\ &= q \sum_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \\ &= q \sum_{\nu} u^{\nu} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \end{aligned} \quad (113)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial x^{\mu}} = q \sum_{\nu} u^{\nu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (114)$$

つまり、第二項は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial x^{\mu}} &= q \sum_{\nu} \left\{ u^{\nu} \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) \right\} \\ &= -q \sum_{\nu} u^{\nu} F_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (115)$$

第一項は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial x^\mu} &= -mc \cdot \frac{1}{2} \left\{ -\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right\}^{-1/2} \frac{d}{d\tau} \left(-2 \sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} u^\nu \right) - 0 \\ &= m \sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (116)$$

ここで,

$$u_\mu \equiv \sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} u^\nu, \quad (117)$$

を導入すると, 運動方程式は最終的に以下のように導かれる.

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = q \sum_{\nu} u^\nu F_{\mu\nu}. \quad (118)$$

第 1, 2, 3 成分は従来の電磁気学の運動方程式と一致する. 第 0 成分について考える..

$$\begin{aligned} mu_0 &= -\frac{dp^0}{d\tau} = -\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} \\ &= q \left(-\frac{1}{c} E_x \cdot u^1 - \frac{1}{c} E_y \cdot u^2 - \frac{1}{c} E_z \cdot u^3 \right). \end{aligned} \quad (119)$$

第 0 成分は, 電磁場によってなされる仕事が荷電粒子のエネルギーを変化させることを意味する.

4 特殊相対性理論を超えて

4.1 等価原理

Newton 力学では, 厳密には質量が 2 種類存在した. まず, 万有引力の法則で物体に働く重力の大きさは,

$$F = G \frac{m_g M}{r^2}, \quad (120)$$

と表される. この時の質量 m_g を**重力質量**という. 一方, Newton の第二法則により, m_i を物体の**慣性質量**とすると, 地球の重力加速度 g に対し物体は以下の力を受ける.

$$F = m_i g. \quad (121)$$

地球と物体の間に働く万有引力を考えると, 重力加速度は以下のように表される.

$$g = \frac{m_g}{m_i} \cdot G \frac{M}{r^2}. \quad (122)$$

もし物体によって重力質量と慣性質量の比 m_g/m_i が異なるならば、 g も物体によって異なることになる。

Eötvös による 19 世紀の実験に着目する。この実験では、図 4 に示すような地球の重力と自転による慣性力の物体への影響を調べた。前者は重力質量、後者は慣性質量に比例する。もし重力質量と慣性質量の比が異なるならば、物体は鉛直方向を変えるはずであると考えた。ところが、ずれは 10^{-8} 以下であった¹⁰。そこで、**重力質量と慣性質量は等しい**、すなわち

$$m_g = m_i = m, \quad (123)$$

とした。この 2 つの質量が等しいという原理を**等価原理**という。

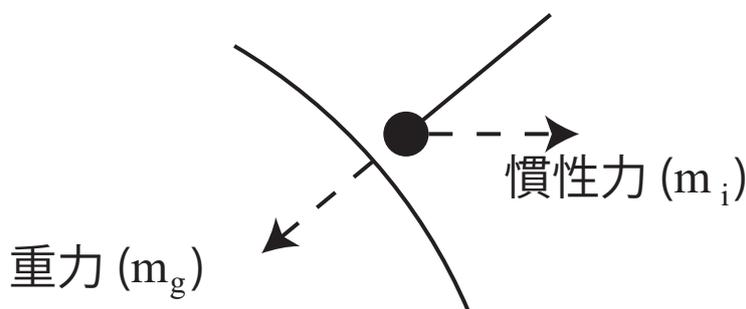


図 4: 地球上でおもりをつるす。おもりは地球の中心方向に向かう重力を受けるが、この時には重力質量 m_g が影響する。一方で、自転の影響による遠心力を受けるが、この時には慣性質量 m_i が影響する。

次に、ロケットが加速度 g で等加速度運動をすることを考える。ロケットの中の人、ロケットに固定された座標系で現象を見ることになる。すると、ロケットの中の人、進行方向と逆向きの加速度 $-g$ を受けたように感じる (図 5)。実際に宇宙ステーションのような宇宙船で地球の周りを回るとする。この時、宇宙船に固定された座標系では、地球による重力と、地球の周りを回ることによって感じる遠心力が釣り合い、宇宙船では無重力になったようになる。

これらの話を取りまとめると、加速度運動では重力を作り出したり消したりすることが出来るといえる。すると、加速度運動と重力場の区別ができなくなってしまう。

4.2 加速度系の性質

前に示したように、電磁気力は特殊相対性理論で扱うことができた。それでは、式の上では静電気力と同じ形で表される万有引力 (Newton 重力) も同じように扱えるのではないかと考えられる。ところが簡単にはうまくいかない。エネルギーと質量の関係 $E = mc^2$ について考えると、ある領域にエネルギー E が局

¹⁰1960 年台に Dicke らによって 3×10^{-11} 以下であることが確かめられている。

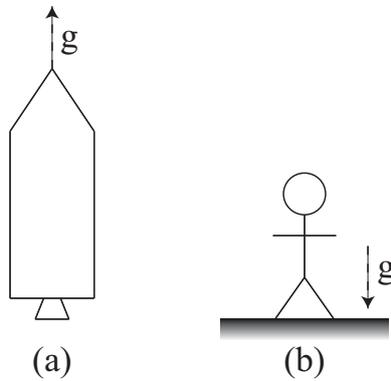


図 5: 左は加速度 g で等加速度運動をなすロケット. 右は地表で重力加速度 g を受ける人. ロケットに乗っている人は, ロケットに対して下向きに加速度 $-g$ を受けるように感じる. つまり, 右の人と同じ加速度を受けるように感じる.

在した場合には

$$\tilde{m} = \frac{E}{c^2},$$

という "質量" に重力が働いてしまう.

さて, 透過原理から次のことがいえる. 自由落下しているゴンドラを考える. ゴンドラの内部は無重力といえる¹¹. ゴンドラ内の $y' = y'_0$ で $t' = 0$ に, 水平に左から光を発することを考える. そして, $t' = t'_0$ で右側の壁 ($y' = y'_0$) に到達するとする. この状況をゴンドラの外部から見てみる. すると, 以下のようになる.

$$\text{光を発した時} : y = y'_0$$

$$\text{光が届いた時} : y = y'_0 - \frac{g}{2}(t'_0)^2$$

つまり, **光が重力によって曲げられることになる** (図 6).

特殊相対性理論では慣性系, つまり互いに等速度運動をなしている座標系同士の座標変換を考えた. 力学の教科書で等速運動の次に等加速度運動を取り扱うように, ここでもある座標系に対し一定の加速度で移動する別の座標系を考える. ここで元の座標系の x 軸方向に加速度 α で移動することとする.

相対論的力学より, 4 元速度, 4 元加速度の二乗に関する以下の式が成り立つ.

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -c^2, \quad (124)$$

¹¹ 無重力の擬似体験として, 高度の高い位置で航空機のエンジンを切り, 短時間の自由落下を行うというものがある. 航空機も中の人や物体も同じ加速度で落下するので, 中の人にとっては無重力状態になったと感じる.

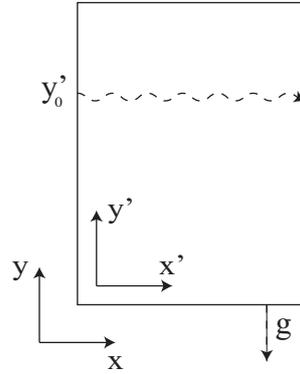


図 6: 自由落下しているゴンドラで光を放つ。光はゴンドラの中の人にとっては水平に動いているが、外部から見ると光の進みが曲がってしまうことになる。

$$-\left(\frac{du^0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du^1}{d\tau}\right)^2 = \alpha^2. \quad (125)$$

ここで、 u^0, u^1 について以下のようにおいてみる。

$$u^0 = c \cosh \{f(\tau)\}, \quad (126)$$

$$u^1 = c \sinh \{f(\tau)\}. \quad (127)$$

固有時間による微分を取る。

$$\frac{du^0}{d\tau} = cf'(\tau) \sinh \{f(\tau)\}, \quad (128)$$

$$\frac{du^1}{d\tau} = cf'(\tau) \cosh \{f(\tau)\}. \quad (129)$$

(125) に代入する。

$$-c^2 \{f'(\tau)\}^2 \sinh^2 \{f(\tau)\} + c^2 \{f'(\tau)\}^2 \cosh^2 \{f(\tau)\} = c^2 \{f'(\tau)\}^2 = \alpha^2. \quad (130)$$

よって、 $f(\tau)$ が以下のように求まる。

$$f'(\tau) = \pm \frac{\alpha}{c}, \quad (131)$$

$$f(\tau) = \pm \frac{\alpha}{c} (\tau - \tau_0). \quad (132)$$

よって、4元速度が以下のように表される。

$$u_0 = c \cosh \left\{ \pm \frac{\alpha}{c} (\tau - \tau_0) \right\}, \quad (133)$$

$$u_1 = c \sinh \left\{ \pm \frac{\alpha}{c} (\tau - \tau_0) \right\}. \quad (134)$$

ここで $f(\tau)$ は正のものだけを取ることにする。座標変数は以下のようになる。

$$x = \frac{c^2}{\alpha} \sinh \left\{ \frac{\alpha}{c} (\tau - \tau_0) \right\} + x_0, \quad (135)$$

$$ct = \frac{c^2}{\alpha} \cosh \left\{ \frac{\alpha}{c} (\tau - \tau_0) \right\} + ct_0. \quad (136)$$

x, t の関係は以下のように双曲線で表されるものになる。

$$(x - x_0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = \frac{c^4}{\alpha^2}. \quad (137)$$

加速度系の様子を図示すると、図7のようになる。漸近線は光の経路と同じ傾きになる。よって、 x 座標が正の双曲線よりも x 軸正方向（領域 III）、および x 座標が負の双曲線よりも x 軸負方向（領域 I）には加速運動をしている物体から光が届かない。逆に加速運動をしている物体に対し、光を発しても到達しない領域（未来側が領域 II、過去側が領域 IV）が時空に存在する。

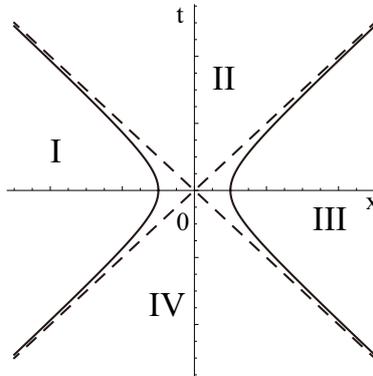


図 7: 等加速度で移動する座標系の様子。左右の双曲線が加速度系での静止している点に対応する。漸近線は観測者の光の経路に一致する。

双曲線上では加速度系の空間座標が一定で、双曲線に沿って時間が進むので、加速度系の座標 (CT, X) を以下のように定義する。

$$x = X \sinh \left(\frac{T}{T_0} \right), \quad (138)$$

$$ct = X \cosh\left(\frac{T}{T_0}\right). \quad (139)$$

両辺の全微分を取る.

$$dx = \sinh\left(\frac{T}{T_0}\right) dX + \frac{X}{T_0} \cosh\left(\frac{T}{T_0}\right) dT, \quad (140)$$

$$cdt = \cosh\left(\frac{T}{T_0}\right) dX + \frac{X}{T_0} \sinh\left(\frac{T}{T_0}\right) dT. \quad (141)$$

すると世界間隔は以下ようになる.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -x^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -\left(\frac{X}{T_0}\right) dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \end{aligned} \quad (142)$$

加速度系の世界間隔では dT^2 に場所に依存する関数が掛かっている. つまり**加速度系は Minkowski 時空とは異なる**ことを示している¹².

4.3 局所慣性系

一定の加速度で移動する座標系の座標変換は, 特殊相対性理論では扱えないことがわかった. それでは, 等価原理を考えることによって, 重力が存在しても加速運動により打ち消せそうにみえるが, 本当に打ち消せるのだろうか.

原点に置かれた質量 M の質点が及ぼす重力により, 位置ベクトル \mathbf{r} に置かれた質点 m が受ける力は以下のように表される.

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (143)$$

重力は質点からの距離や方向に依存し, 一様ではない. 前述のゴンドラの仮想実験でも, ゴンドラ内の場所によっては微小な加速度が感じられることになる. だが, 局所的には重力場を打ち消すことができる. そして慣性の法則が成立する. このように慣性の法則が成立している座標系を**局所慣性系**という. 局所慣性系の考え方は, 一般相対性理論で極めて重要である.

¹²重力を含むような理論 (一般相対性理論) は Riemann 幾何学で記述される. 一般相対性理論では, 世界間隔は計量 $g_{\mu\nu}(x)$ という関数を用いて, 以下のように表される.

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu.$$

5 おわりに

講義ではこの後、一般相対性理論の概略を説明して締め括った。一般相対性理論は以下の2つを基本原理として構築されている。

1. 物理法則がいかなる座標系でも普遍である（一般相対性原理）
2. 等価原理

これらを満たすためには、Riemann 幾何学を用いる必要がある。Riemann 幾何学を学習するには十分な時間が必要であるので、講義では Riemann 幾何学については省略し、一般相対性理論が適用される例を2つ示した。一つは静的球対称のブラックホール解である Schwarzschild 解である。この解の性質として、光の屈折や水星の公転軌道の近日点移動が生じる。もう一つの例は、宇宙そのものの振る舞いである。Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 解である。これらの詳細はすでに出版されている様々な文献を参照していただくこととし、本資料には含めないものとする。

参考となる図書，文献

本資料を理解する上で役立つような文献をいくつか挙げておく。

1. J.J. キャラハン 著，樋口三郎 訳 『時空の幾何学 - 特殊および一般相対論の数学的基礎』 森北出版 (2021)
2. 佐藤勝彦 著 『岩波基礎物理シリーズ 9 相対性理論』 岩波書店 (1996)
3. 前田恵一，田辺誠 著 『SGC ライブラリ 175 演習形式で学ぶ特殊相対性理論』 サイエンス社 (2022)
4. アインシュタイン 著，小玉英雄 訳 『一般相対性理論』 岩波文庫 (2023)

1. は数式だけでは理解しにくい相対性理論を、膨大なグラフを交えて説明している専門書。大学生が相対性理論を学ぶ時に有用なだけでなく、相対性理論を使って研究を行う第一線の研究者でも役立つ本である。2003年にシュプリングァーフェアラク東京から出版されていたが、絶版になっていた。2021年に森北出版から再版された。

2. は相対性理論を学ぶ学生が扱いやすい教科書として、私の周囲でしばしば取り上げられる書籍である。

3. はやはり手を動かして計算して特殊相対性理論を理解したいという方におすすめの書籍である。本資料で取り扱ったことよりも高度な内容を含んでおり、研究者でも十分に有用である。

4. はアインシュタイン自身が特殊相対性理論発表後、一般相対性理論に至るまでの試行錯誤を綴った書籍である。Einstein 方程式に至るまでが一筋縄でないことがわかる。