振動の物理学入門：線型振動の場合

国広悌二著

1　はじめに

拙著「量子力学」（東京図書）への入門的補遺として、振動の物理学の入門的解説を行う。扱う題材は、単振動、減衰振動、強制振動、(振幅/エネルギー) 共鳴現象、連成振動である。2 階の線型常微分方程式および直交行列の対角化の入門にもなっている。

2　単振動/調和振動

2.1　微小振動としての単振動

質量 m の質点の力学的エネルギーが

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x), \tag{2.1}$$

で与えられるとする。ただし、$U(x)$ は位置エネルギー（ポテンシャル）。質点が $U(x)$ の一つの極小点（平衡点と呼ぶ）を x_0 とする。質点の持つエネルギーが小さい、すなわち、$E - U(x_0)$ が小さいとき、図から明らかなように、質点の運動は平衡点近傍に限られる。ここで、$U(x)$ を x_0 の回りに（テーラー）展開してみる；

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots, \tag{2.2}$$

x_0 が $U(x)$ の極小点であることより、

$$U'(x_0) = 0. \tag{2.3}$$

したがって、変位 $X = x - x_0$ の 2 次まで取る近似のもとで、

$$\begin{aligned} U(x) &\simeq U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2, && (2.4)\\ &= U_0 + \frac{1}{2}kX^2, && (2.5)\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$U_0 = U(x_0), \quad k = U''(x_0), \tag{2.6}$$

と置いた。

すると、力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 + U_0, \tag{2.7}$$

となる。（注；$\dot{x} = \dot{X}$。）

この時の質点の受ける力は

$$F = -\frac{\partial U}{\partial X} = -kX, \tag{2.8}$$

となり、変位に比例する。したがって、運動方程式は、

$$m\ddot{X} = -kX, \tag{2.9}$$

となり、フックの法則に従うバネにつながった質点のものと同じになる。この運動方程式で記述される運動を**単振動**あるいは**調和振動**という。

例： 単振り子の場合
長さ l の軽い棒につながった質量 m の質点の力学的エネルギー

$$E = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + U(s); \quad U(s) = mgl(1 - \cos\theta). \tag{2.10}$$

ただし、鉛直線からの棒の振れ角を θ とした。このとき、$s = l\theta$。

平衡点は $\theta = s = 0$. このとき、$\cos\theta = 1 - 1/2\dot{\theta}^2 + \ldots$ より、

$$U(s) \simeq \frac{1}{2}ks^2, \quad k = \frac{mg}{l}. \tag{2.11}$$

運動方程式は

$$\begin{aligned} m\dot{s} &= -mg\sin\theta \simeq= -mg\theta, \\ &= -ks, \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。

2.2 運動方程式の解

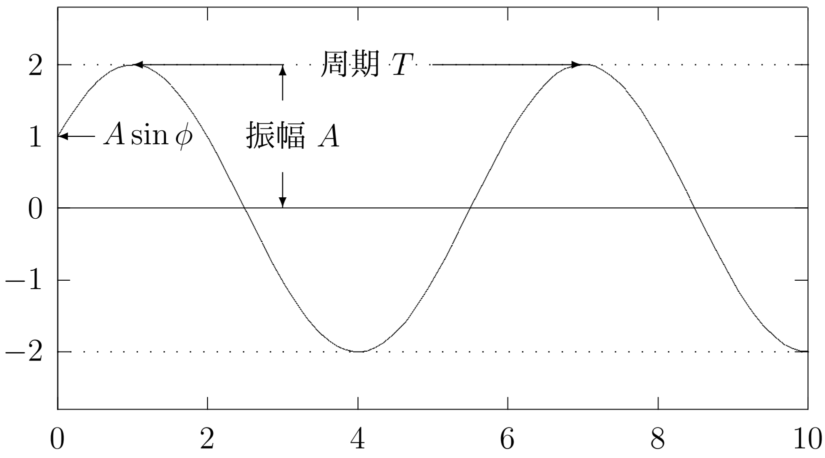
時間の関数 $x(t)$ が単振動の方程式

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2.13}$$

の解であるとは、$x(t)$ を (2.13) に代入して 左辺 = 右辺 となることである。$x = A\sin(\omega t + \phi)$ は (2.13) の解である。ただし、$A,\ \phi$ は定数（積分定数）である。（代入して確かめよ。）

問：

図. 1　単振動 $A\sin(\omega t+\phi)$ のグラフ



(1) $x = A'\cos(\omega t + \phi')$ も解である。ただし、$A',\ \phi'$ は定数。これを確かめよ。

(2) $x = C_1 \sin\omega t + C_2\cos\omega t$ も解である。ただし、$C_1,\ C_2$ は定数。これを確かめよ。また、C_1, C_2 と A, ϕ との間の関係を求めよ。

注意：

$$\begin{array}{rl} A & \text{振幅、} \\ \omega t + \phi \equiv \theta & \text{位相,} \\ \phi & \text{初期位相} \end{array}$$

と言う。

単位時間だけ時間が変化するときの位相の変化、

$$\omega \cdot (t+1) - \omega t = \omega, \tag{2.14}$$

を**角振動数**という。

$$x(t+T) = x(t), \tag{2.15}$$

となる最小の数 $T > 0$ を $x(t)$ の**周期**という。したがって、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{2.16}$$

である。また、周期の逆数

$$\frac{1}{T} = \nu, \tag{2.17}$$

を**振動数**という。

3　減衰振動

3.1　運動方程式

おもりに速度に比例する空気抵抗の効果を考慮に入れて、フックの法則に従うバネにつながった質量 m の運動を考える。おもりの変位を x、おもりにかかる力を F とすると、運動方程式は $m\frac{d^2x}{dt^2} = F,\ F = -kx - \kappa\dot{x}$ より、

$$m\ddot{x} + \kappa\dot{x} + kx = 0, \tag{3.1}$$

となる。ここで、F の第 1 項はばねによる力（k はばね定数）、第 2 項は空気抵抗による力（$\kappa > 0$ は比例定数）である。方程式の形を見やすくするために、

$$k = m\omega^2, \quad \kappa = 2m\gamma, \tag{3.2}$$

と置くと、運動方程式は、

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{3.3}$$

となる。 これは、線型 2 階微分方程式である。

問:　$x_1(t), x_2(t)$ が方程式 (3.3) の解であるとき、その 1 次結合 $x(t) = c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$（ただし、$c_1,\ c_2$ は定数 ）も解であることを示しなさい。

3.2　線型 2 階微分方程式の性質

[一般解]

線型 2 階微分方程式の一般解（解で、任意の初期条件を表現できるもの）は 2 個の任意定数を含んでいる。（この任意定数を適当に選ぶことで、任意の初期条件を表現することができる）

[独立解]

2 つの解 $x_1(t), x_2(t)$ を考える。その 1 次結合 $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ が任意の t に対し常に 0 である、すなわち、

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = 0 \quad (\forall t), \tag{3.4}$$

が成り立つのが $c_1 = c_2 = 0$ のときしかないとき、$x_1(t), x_2(t)$ は互いに独立であるという。また、このとき、x_1, x_2 を 2 つの独立解であるという。

[一般解の表現]

2つの独立解 $x_1,\ x_2$ が何らかの方法で見つかれば、一般解はその一次結合

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \tag{3.5}$$

で与えられる。そのため、2つの独立解のことを与えられた線型微分方程式の基本解（系）という。

3.3 独立解の見つけかた

次のようにして求まる事が知られている：まず、$x = \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}$ という簡単な形で解が表現されると仮定する。（もし、だめなら、ほかの形を考えてみる。）そして、これが方程式 (3.3) をみ満たすように未知定数 λ を決める。

これを実行してみる。$\dot{x} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}, \ddot{x} = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}$ より、

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2)\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}} = 0. \tag{3.6}$$

これが常に成り立つためには

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0, \tag{3.7}$$

であればよい。これは λ についての 2 次方程式である。すなわち、（難しい）微分方程式を解く問題が簡単な **2 次方程式を解く問題に帰着された！**

判別式 $D' = \gamma^2 - \omega^2$ の符号により場合分けをする。

1. $D < 0$ $(\gamma < \omega)$；これは、空気抵抗が（ばねの力に比べて）弱い場合である

   このとき、(3.7) の解は

   $$\lambda = -\gamma \pm i\omega', \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}. \tag{3.8}$$

   よって、基本解は

   $$x_1(t) = \mathrm{e}^{(-\gamma + \mathrm{i}\omega')\mathrm{t}} = \mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' \mathrm{t}}, \quad \mathrm{x}_2(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{(-\gamma - \mathrm{i}\omega')\mathrm{t}} = \mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{t}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' \mathrm{t}}. \tag{3.9}$$

   である。ここで、オイラーの公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ より、

   $$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega' \mathrm{t}} = \cos\omega' \mathrm{t} \pm \mathrm{i}\sin\omega' \mathrm{t}, \tag{3.10}$$

に注意。また、$x_1(t)$ と $x_2(t)$ は互いに複素共役の関係

$$x_2(t) = x_1(t)^*, \tag{3.11}$$

にある。ただし、複素数 $z = x + iy$ に対し、その複素共役 z^* は $z^* = x - iy$ で定義される。

一般解は、

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \\ &= \mathrm{e^{-\gamma t}\{(c_1 + c_2)\cos\omega' t + i(c_1 - c_2)\sin\omega' t\}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。

さて、今考えている問題の場合 x はおもりの変位であり、実数である。$x(t)$ が実数である条件は $x(t) = x^*(t)$ と書ける。 すなわち、

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1^* x_1^* + c_2^* x_2^* = c_1^* x_2(t) + c_2^* x_1(t). \tag{3.13}$$

ここで、(3.11) を用いた。これより、

$$c_2 = c_1^*. \tag{3.14}$$

$c_1 = (A - iB)/2$ （$c_2 = (A + iB)/2$） （A,B は実数）と置くと、(3.12) より、

$$x(t) = \mathrm{e^{-\gamma t}(A\cos\omega' t + B\sin\omega' t)}, \tag{3.15}$$

となる。また、さらに

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan\phi = \frac{A}{B}, \tag{3.16}$$

とおくと、

$$x(t) = R\mathrm{e^{-\gamma t}}\sin(\omega'\mathrm{t} + \phi), \tag{3.17}$$

と書ける。A, B、したがって、R, ϕ も任意定数である。

このときの運動は、「振幅」$R\mathrm{e^{-\gamma t}}$ が時間的に減少している（減衰している）振動なので、（狭義の）**減衰振動**という。

2. $D > 0$ $(\gamma > \omega)$；これは、空気抵抗が（ばねの力に比べて）強い場合である

このとき、(3.7) は異なる 2 実根を持つ：

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{D'} \equiv -\gamma_\pm. \tag{3.18}$$

よって、(3.3) の独立解（基本解）は

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-\gamma_+ t}, \quad \mathrm{x}_2(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{-\gamma_- \mathrm{t}}, \tag{3.19}$$

ただし、$\gamma_\pm = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$、(複号同順)。一般解は、

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\gamma_+ \mathrm{t}} + \mathrm{e}^{-\gamma_- \mathrm{t}}, \tag{3.20}$$

となる。このときの運動は、空気抵抗が強すぎて振動が起こらないので、**過減衰運動**という。

3. $D = 0$ ($\gamma = \omega$)；これは、空気抵抗とばねの力の強さが同程度の場合である

このとき、(3.7) の解は**ただ 1 つしかない**:

$$\lambda = -\omega. \tag{3.21}$$

これより、1 つの独立解が

$$x_1(t) = e^{-\omega t}, \tag{3.22}$$

と求まる。 しかし、 2 番目の独立解がこの方法では得られない。

2 番目の独立解は、たとえば次のようにして得る事ができる。まず、$\gamma > \omega$ のときを考える。(後で、$\gamma \to \omega$ の極限を取る。) このときの基本解系として、

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-\gamma_+ \mathrm{t}}, \;\; \mathrm{x}_2(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma_- \mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-\gamma_+ \mathrm{t}}}{\gamma_+ - \gamma_-}, \tag{3.23}$$

を取ることができる。実際、この x_1, x_2 は互いに独立な (3.3) の解である。このとき、$\gamma \to \omega$ の極限を取ると、

$$\lim_{\gamma \to \omega} x_1(t) \;\; = \;\; \lim_{\gamma_+ \to \gamma} x_1, = \mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}}, \tag{3.24}$$

$$\lim_{\gamma \to \omega} x_2(t) \;\; = \;\; \lim_{\gamma_+ \to \gamma_-} x_2 = -\frac{d\mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{t}}}{d\gamma}\bigg|_{\gamma = \omega} = t\mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}}. \tag{3.25}$$

すなわち、$\gamma = \omega$ のときの 2 番目の独立解として、$x_2(t) = t\mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}}$ を取る事ができる。

問：$\gamma = \omega$ のとき、$t\mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}}$ が (3.3) を満たしていることを示しなさい。

一般解は、

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}} + \mathrm{c}_2 \mathrm{t}\mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}} = (\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2 \mathrm{t})\mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}}, \tag{3.26}$$

である。ただし、$c_1,\ c_2$ は任意定数。このときのおもりの運動を**臨界振動**という。(**臨界制動**という場合もある。)

問: $\gamma = \omega$ のとき、$x(t) = f(t)\mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}}$ を (3.3) に代入して、$f(t)$ の従う微分方程式を導き、$f(t)$ を求め、$f(t) = c_1 + c_2 t$ となることを示しなさい。

3.4 初期値問題

時刻 $t=0$ でのおもりの位置 x_0 と速度 v_0 が与えられているとき、任意の時刻 t でのおもりの運動 $x(t)$ を求める問題を考える。これは、次の微分方程式の初期値問題を解く事と等価である：

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2 x=0, \tag{3.27}$$

$$x(0)=x_0, \quad v(0)=v_0. \tag{3.28}$$

場合に分けて考える。

1. $\gamma<\omega$; 減衰振動のとき

この場合の解（3.15）が初期条件（3.28）を満たすように定数 $A,\ B$ を決めればよい。

まず、速度を求めておく。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma \mathrm{e}^{-\gamma \mathrm{t}}(\mathrm{A}\cos\omega'\mathrm{t}+\mathrm{B}\sin\omega'\mathrm{t}) \\ &\quad +\mathrm{e}^{-\gamma\mathrm{t}}(-\mathrm{A}\omega'\sin\omega'\mathrm{t}+\mathrm{B}\omega'\cos\omega'\mathrm{t}).\end{aligned} \tag{3.29}$$

よって、初期条件は

$$x(0)=A=x_0, \quad \dot{x}(0)=-A\gamma+B\omega'=v_0, \tag{3.30}$$

となる。これを解いて、

$$A=x_0, \quad B=\frac{\gamma x_0+v_0}{\omega'}, \tag{3.31}$$

を得る。したがって、この場合の初期値問題の解は

$$x(t)=\frac{1}{\omega'}\mathrm{e}^{-\gamma\mathrm{t}}(\mathrm{x_0}\omega'\cos\omega'\mathrm{t}+(\gamma\mathrm{x_0}+\mathrm{v_0})\sin\omega'\mathrm{t}), \tag{3.32}$$

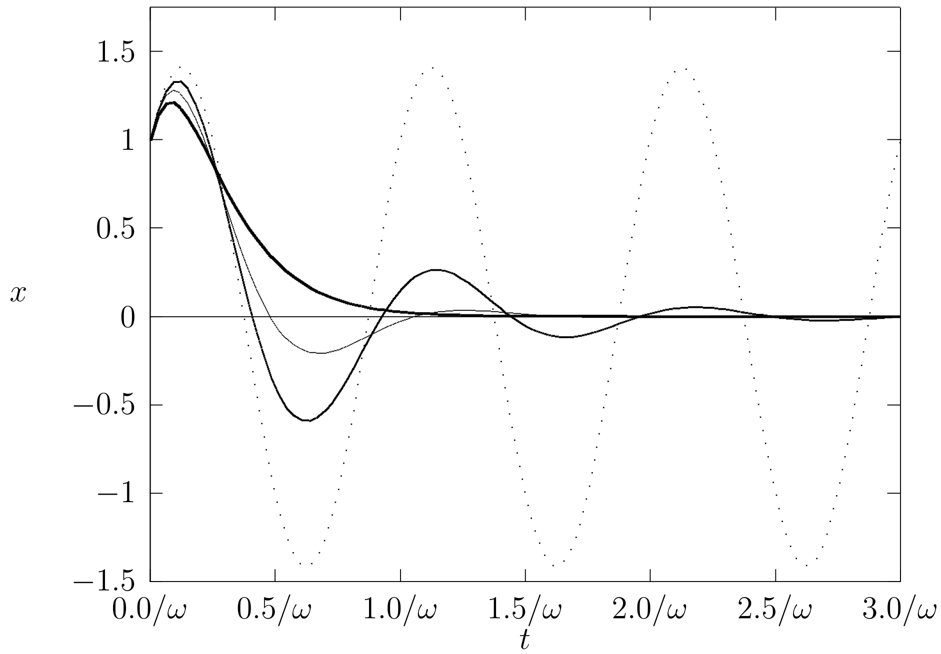
となることが分かる。

$\omega=2\pi$ とし、同じ初期条件（$x_0=1,\ v_0=\pi$）で、空気抵抗のパラメタ γ の大きさを変えたときの振動の様子を図 1 に表している。$\gamma<\omega$ の範囲では、γ が大きいほど振動が早く減衰することが分かる。

問：（3.32）で与えられる $x(t)$ に対して、

$$\lim_{\gamma\to\omega} x(t)=\{x_0+(\omega x_0+v_0)t\}\mathrm{e}^{-\omega\mathrm{t}}, \tag{3.33}$$

図. 1　減衰振動のグラフ



となることを示しなさい。

それでは、γ を大きくすればするほど早く減衰するのであろうか？　そうではない事が次の計算で分かる。

2. $\gamma > \omega$; 過減衰のとき

このときの速度は（3.20）より、

$$\dot{x}(t) = -\gamma_+ c_1 \mathrm{e}^{-\gamma_+ \mathrm{t}} - \gamma_- \mathrm{c}_2 \mathrm{e}^{-\gamma_- \mathrm{t}}. \tag{3.34}$$

よって、初期条件（3.28）より

$$x(0) = c_1 + c_2 = x_0, \quad \dot{x}(0) = -\gamma_+ c_1 - \gamma_- c_2 = v_0. \tag{3.35}$$

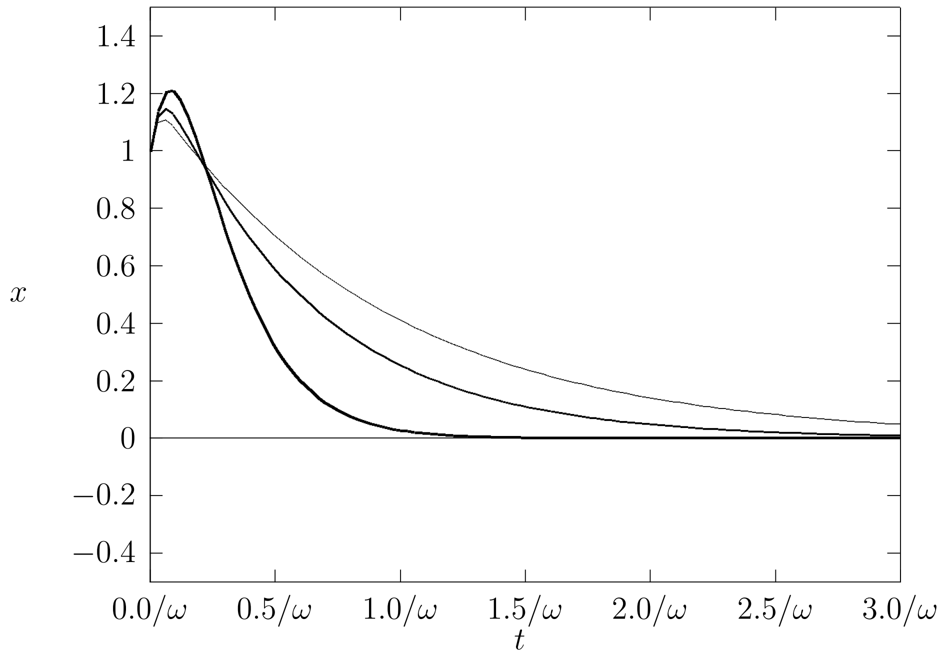
この連立方程式を解いて、

$$c_1 = -\frac{\gamma_- x_0 + v_0}{2\omega'}, \quad c_2 = \frac{\gamma_+ x_0 + v_0}{2\omega'}. \tag{3.36}$$

ここで、$\gamma_+ - \gamma_- = 2\omega'$ を用いた。したがって、このときの初期値問題の解は、

$$x(t) = \frac{1}{2\omega'}\{-(\gamma_- x_0 + v_0)\mathrm{e}^{-\gamma_+ \mathrm{t}} + (\gamma_+ \mathrm{x}_0 + \mathrm{v}_0)\mathrm{e}^{-\gamma_- \mathrm{t}}\}. \tag{3.37}$$

図. 2　過減衰振動のグラフ



$\omega = 2\pi$ とし、同じ初期条件（$x_0 = 1,\ v_0 = \pi$）で、空気抵抗のパラメタ γ の大きさを $\gamma > \omega$ の範囲で変えたときの $x(t)$ の振る舞いの様子を図 2 に表している。この場合、γ が小さく ω に近い（臨界振動に近い）ほど減衰の度合いが激しいことが分かる。

問：（3.37）で与えられる $x(t)$ に対して、

$$\lim_{\gamma\to\omega} x(t) = \{x_0 + (\omega x_0 + v_0)t\}\mathrm{e}^{-\omega\mathrm{t}}, \tag{3.38}$$

を示しなさい。これは、(3.33）と一致している。

3. $\gamma = \omega$; 臨界振動のとき

このときの速度は、(3.26）より、

$$\dot{x}(t) = -\omega(c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\omega\mathrm{t}} + \mathrm{c}_2\mathrm{e}^{-\omega\mathrm{t}}. \tag{3.39}$$

よって、初期条件（3.28）を代入すると、

$$x(0) = c_1 = x_0, \quad \dot{x}(0) = -\omega c_1 + c_2 = v_0. \tag{3.40}$$

これを解いて、

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \omega x_0 + v_0. \tag{3.41}$$

したがって、初期値問題の解は

$$x(t) = \{x_0 + (\omega x_0 + v_0)t\}\mathrm{e}^{-\omega \mathrm{t}}, \tag{3.42}$$

となる。これは、$\gamma \neq \omega$ のときの解から、$\gamma \to \omega$ の極限として得られた解（3.33、3.38）と一致している。

このように、$\gamma = \omega$ **のとき最も早く減衰する**ことがわかる。

このことは、臨界制動として制御理論に応用されている。

問：$\gamma = \omega$ の場合を考える。$x(0) = x_0 > 0$ とし、負の方向に初速度を持たせて $v_0 = -v_1$ $(v_1 > 0)$ としたときの、おもりの運動を調べなさい。
ヒント；(i) $v_1 < \omega x_0$ と (ii) $v_1 > \omega x_0$ の場合に分けて調べなさい。(i) の場合、$x(t)$ は負の値を取ることはない。　(ii) の場合、$t > t_0 \equiv v_1/(v_1 - \omega x_0)$ のとき $x(t) < 0$ となり、$t > t_1 \equiv \omega^{-1} v_1/(v_1 - \omega x_0)$ で負の最小値を取る。$t_1 > t_0$ に注意。

3.5　応用：交流回路（LCR 回路）の電気振動

LCR 交流回路を考える[1]。すなわち、抵抗（抵抗値 $R\,\Omega$）、コンデンサー（電気容量 $C\,\mathrm{F}$）、コイル（自己インダクダンス $L\,\mathrm{H}$）である。それぞれの役割は、次のようにまとめられる：

抵抗　通常、回路に電流を流すためには、回路の両端に電圧をかけなければならない。実験によれば、かける電圧 V があまり大きくないとき、V と流れる電流 I は比例している。その比例係数を R と書くと、

$$V = RI, \tag{3.43}$$

である。R の値は回路を作る導線の素材により異なり、また温度により変化する。与えられた電圧 V に対して、R が大きくなると流れる電流の大きさ I が小さくなる、電流が流れにくくなるので、R を（電気）抵抗の大きさという。

R オームの抵抗を I アンペアの電流が流れているとき、抵抗の両端の電位差 V_R は $V_R = IR$ ボルトである。

コンデンサ　電荷を貯える装置をコンデンサという。電荷を貯え、電荷が電流として逃げていかなくするには、コンデンサの両極（陰極と陽極）に電圧をかけておかなければ

[1] この項は飛ばしても後の内容の理解に影響はない。

ばならない。貯えられる電荷の量 Q とかけている電圧 V は比例する。その比例係数を C と書くと、

$$Q = CV, \tag{3.44}$$

である。

C が大きいほど低い電圧で多くの電荷が貯えられるので C を（電気）容量という。

電気容量 C ファラッドのコンデンサーに電荷 Q クーロンが貯えられているとき、このコンデンサの陰極と陽極の間の電位差 V_C は $V_C = Q/C$ ボルトである。

コイル 電流は磁場の源である。（電磁石！）生じる磁場と電流の間の関係は（準定常電流の場合）アンペールの法則で与えられる： ループを流れる電流 I が生み出す磁束の大きさ Φ は I に比例する。比例係数を L と書くと、

$$\Phi = LI, \tag{3.45}$$

である。L をインダクタンスといい、電流を流す導線の素材や回路（コイルを含む）の幾何学的な性質に依存する。

磁場（精確には磁束密度 Φ）が時間的に変化すると、その空間中の任意のループに沿って電流を流す「力」（起電力）$\mathcal{E}$ が生じる。その大きさは、磁束の時間変化率 $d\Phi/dt$ に等しい。（ファラディーの電磁誘導の法則）
生じる起電力は、その起電力により流れる電流が生み出す磁場が、元の磁場の変化を妨げる方向に生じる。（レンツの法則）
ファラディとレンツの法則はいっしょにして、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{3.46}$$

と表される。（ファラディーレンツの法則）

交流回路内のコイルを考える。コイルを貫く磁束 Φ と交流電流 I の間には関係式 (3.45) が成り立っている。このときのインダクタンス L を自己インダクタンスという。このコイルの磁束の変化のために、この交流回路には（3.45）と（3.46）より、

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}, \tag{3.47}$$

の逆起電力が生じる。

キルヒホッフの第二法則より、

$$\frac{Q}{C} + (-L\frac{dI}{dt}) = RI. \tag{3.48}$$

ところで、電流の大きさ I は単位時間内に導線の断面を通り過ぎる電荷量のことである。電流の向きを図のように取ると、微少時間 Δt の間にコンデンサから回路を通って流れ出す電荷量 $I\Delta t$ は、この時間内のコンデンサの電荷の減少量 $-\Delta Q = Q(t) - Q(t+\Delta t)$ に等しい（電荷保存則）:

$$I\Delta t = -\Delta Q, \quad I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{3.49}$$

$\Delta t \to 0$ の極限を取って、

$$I = -\frac{dQ}{dt}. \tag{3.50}$$

コンデンサに貯えられている電荷が時間的に減少しているとき、すなわち、$dQ/dt < 0$ のとき、$I > 0$ である。

（3.50）を（3.48）に代入して、

$$\frac{1}{C}Q + L\frac{d^2Q}{dt^2} = -R\frac{dQ}{dt}, \tag{3.51}$$

整理して、

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0, \tag{3.52}$$

を得る。

これは、数学的には、ばねにつながったおもりの運動方程式（3.1）と同じ形をしており（2 階線型微分方程式）、両者を比較すると次の対応関係があることが分かる：

$$\begin{aligned}
\text{電荷 } Q &\leftrightarrow \text{おもりの変位 } x \\
\text{自己インダクタンス } L &\leftrightarrow \text{質量 } m \\
\text{電気抵抗 } R &\leftrightarrow \text{空気抵抗 } \kappa \\
\text{電気容量の逆数 } 1/C &\leftrightarrow \text{ばねの強さ } k
\end{aligned}$$

この読み替えを行えば、（3.52）を解く事は（3.1）を解く事とまったく同値であり、それはすでに行ったことである。

問：時刻 $t = 0$ でのコンデンサに貯えられている電荷が Q_0、そのときの電流の大きさが I_0 であるとする。ただし、電流の向きは図のように取り、$I = -dQ/dt$。このとき、時刻 $t > 0$ での電荷 $Q(t)$ および電流 $I(t)$ を求めなさい。
ヒント：おもりの初期値問題の解で、上記の読み替え（3.53）と、$x_0 \to Q_0$、$v_0 \to -I_0$ の読み替えを行えばよい。

4　強制振動と共鳴

バネによる復元力 $-kx$ と速度に比例する抵抗力 $-2m\gamma v$ の他に、角振動数 ω_e で時間的に振動する外力 $mf_0\cos\omega_e t$ が加わっている質量 m の質点の運動を考える。外力の角振動数 ω_e を変化させるとき、バネの復元力に比較して抵抗力があまり大きくないとき、振幅が最大値を取る場合がある。これを振幅共振（共鳴）という。外力は質点に仕事をするが、$\omega_e=\sqrt{k/m}\equiv\omega$ のとき質点の吸収するエネルギーが最大になる。このことは抵抗の大きさ γ に依存しない。これをエネルギー共振（共鳴）という。

数学的には、非同次（斉次）線型微分方程式の初歩を学ぶことになる。

4.1　運動方程式とその解

1. 運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-2m\gamma\frac{dx}{dt}+mf_0\cos\omega_e t. \tag{4.1}$$

m で割って移項すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=f_0\cos\omega_e t. \tag{4.2}$$

ここで、

$$\mathcal{L}=\frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}+\omega^2 \tag{4.3}$$

と置くと、上の式は

$$\mathcal{L}[x]=f(t), \quad f(t)\equiv f_0\cos\omega_e t, \tag{4.4}$$

と書ける。右辺が**未知関数 x を含まない** t の関数になっていることに注意しよう。このような線型微分方程式は、「**非同次（斉次）線型常微分方程式**」と呼ばれる。

ちなみに、 $f(t)=0$ のときの方程式 $\mathcal{L}[x]=0$ は「**同次（斉次）線型常微分方程式**」と呼ばれる。

2. 非同次線型常微分方程式の解の形

$$\begin{aligned}\text{非同次方程式の一般解} \quad &= \quad \text{(対応する）同次方程式の一般解}\\ &\quad + \ \text{非同次方程式の特解}\end{aligned} \tag{4.5}$$

と書ける。

3. 非同次線型常微分方程式の特解の求め方

解を

$$x(t) = A\cos(\omega_s - \alpha) \tag{4.6}$$

と仮定して、(4.2) を満たすように未知定数 $A,\ \omega_s,\ \alpha$ を求める。

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_s\sin(\omega_s t - \alpha), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_s^2\cos(\omega_s t - \alpha) \tag{4.7}$$

より、(4.4) の左辺は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x] &= -A\omega_s^2\cos(\omega_s t - \alpha) + \ (-2\gamma A\omega_s\sin(\omega_s t - \alpha)) + \omega^2 A\cos(\omega_s t - \alpha), \\ &= A[(\omega^2 - \omega_s^2)\cos(\omega_s t - \alpha) - 2\gamma\omega_s\sin(\omega_s t - \alpha)], \\ &\equiv A[B_c\cos\theta - B_s\sin\theta] \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる。ここに、

$$B_c = \omega^2 - \omega_s^2, \quad B_s = 2\gamma\omega_s, \quad \theta = \omega_s t - \alpha. \tag{4.9}$$

これを少し整理して、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x] &= A\sqrt{B_c^2 + B_s^2}[\cos\delta\cos\theta - \sin\delta\sin\theta], \\ &= A\sqrt{B_c^2 + B_s^2}\cos(\theta + \delta)\end{aligned} \tag{4.10}$$

ただし、位相 δ は次のように定義されている：

$$\cos\delta = \frac{B_c}{\sqrt{B_c^2 + B_s^2}}, \quad \sin\delta = \frac{B_s}{\sqrt{B_c^2 + B_s^2}} \tag{4.11}$$

これを (4.2) 式と等値して、

$$A\sqrt{B_c^2 + B_s^2} = f_0, \quad \theta + \delta = \omega_e t. \tag{4.12}$$

よって、$\omega_s = \omega_e$、そして、

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{B_c^2 + B_s^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \equiv \mathcal{A}(\omega_e), \tag{4.13}$$

$$\alpha = \delta \equiv \mathrm{Tan}^{-1}\frac{2\gamma\omega_e}{\omega^2 - \omega_e^2}. \tag{4.14}$$

即ち、特解は

$$x(t) = \mathcal{A}(\omega_e)\cos(\omega_e t - \delta). \quad \left(\mathcal{A}(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}.\right) \tag{4.15}$$

こうして、一般解は、

1. $\gamma < \omega$; バネのほうが抵抗より強い場合

$$x(t) \;=\; C\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin(\omega' t + \phi) + \mathcal{A}(\omega_e)\cos(\omega_e t - \delta), \quad (\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}). \tag{4.16}$$

2. $\gamma > \omega$; 抵抗の方がバネより強い場合

$$x(t) \;=\; C_1\mathrm{e}^{-\Gamma_1 t} + C_2\mathrm{e}^{-\Gamma_2 t} + \mathcal{A}(\omega_e)\cos(\omega_e t - \delta), \quad (\Gamma_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}) \tag{4.17}$$

3. $\gamma = \omega$; 臨界振動の場合

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-\gamma t} + \mathcal{A}(\omega_e)\cos(\omega_e t - \delta). \tag{4.18}$$

どの場合も十分時間が経過した後（$t \to \infty$）では、（漸近的に）第一項が消えて第二項（特解）の部分だけが残るので、外力と同じ角振動数、振幅 $\mathcal{A}(\omega_e)$ の単振動になる：

$$x(t) \;\to\; \mathcal{A}(\omega_e)\cos(\omega_e t - \delta). \tag{4.19}$$

問：(1) ω_e の関数としての振幅 $\mathcal{A}(\omega_e)$ が最大値を持つ条件を求めなさい。 (2) その条件が満たされるとき、最大値を与える $\omega_e \equiv \omega_\mathrm{r}$ とそのときの振幅 $\mathcal{A}(\omega_\mathrm{r})$ を求めなさい。

[解] (1) $d\mathcal{A}/d\omega_e^2 \;\propto\; (\omega^2 - 2\gamma^2 - \omega_e^2)$ より、$\omega/\sqrt{2} \;>\; \gamma$ のときのみ最大値が存在する。(2) 外力の角振動数が $\omega_e = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \equiv \omega_\mathrm{r}$ のとき、振幅は最大値 $\mathcal{A}(\omega_\mathrm{r}) = f_0/[2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}]$ を取る。これを**振幅共振（共鳴）**という。

4.2 抵抗のない場合：$\gamma = 0$

この場合は、非現実的であるが、数学の問題としては有り得るので、完全を期して解を求めておく。

解くべき方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f_0\cos\omega_e t, \tag{4.20}$$

である。この方程式の特解が $x(t) = A\cos(\omega_s t - \alpha)$ と書けると仮定して、(4.20) を満たすように定数 A, ω_S, α を求めてみよう。左辺 $= A(\omega^2 - \omega_s^2)\cos(\omega_s t - \alpha)$ となるので、右辺と等値して、$\omega_e \neq \omega$ のときの解、

$$\omega_s = \omega_e, \quad A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_e^2}, \quad \alpha = 0, \tag{4.21}$$

を得る。$\omega_e = \omega$ のときは、後で扱う。こうして、$\omega_e \neq \omega$ のときの特解は

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_e^2} \cos \omega_e t. \tag{4.22}$$

この振幅 $A(\omega_e) = f_0/(\omega^2 - \omega_e^2)$ は外力の角振動数 ω_e が振動体の固有振動数 ω に近付くと無限に大きくなる；

$$\lim_{\omega_e \to \omega} A(\omega_e) = \infty. \tag{4.23}$$

しかし、注意しなければならないことは、これはあくまで $\omega_e \neq \omega$ の条件を満たしているときであって、現実には振幅が無限大になることはない。

次に、$\omega_e = \omega$ のときの解を新ためて求め直してみよう。

$\omega_e = \omega$ のとき　解くべき方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega t. \tag{4.24}$$

そこで、$x(t) = a(t)\sin \omega t + \ b(t)\cos \omega t$ と置いて関数 $a(t),\ b(t)$ を t の多項式の範囲で求めてみる。

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (\dot{a} - \omega b)\sin \omega t \ + \ (a\omega + \dot{b})\cos \omega t, \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= (\ddot{a} - 2\omega \dot{b} - a\omega^2)\sin \omega t \ + \ (\ddot{b} + 2\omega \dot{a} - \omega^2 b)\cos \omega t
\end{aligned}$$

より、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \ \frac{dx}{dt} = (\ddot{a} - 2\omega \dot{b})\sin \omega t \ + \ (\ddot{b} + 2\omega \dot{a})\cos \omega t. \tag{4.25}$$

これと $f_0 \cos \omega t$ を等値して、

$$\ddot{a} - 2\omega \dot{b} = 0, \quad \ddot{b} + 2\omega \dot{a} = f_0. \tag{4.26}$$

この解は

$$a = \frac{f_0}{2\omega} t + C, \quad b = \text{定数} = B, \quad (C = \text{定数}) \tag{4.27}$$

と求まる。よって、特解は、

$$x(t) = B\cos \omega t + C\sin \omega t \ + \ \frac{f_0}{2\omega} t \sin \omega t. \tag{4.28}$$

最後の項は時間 t に比例し、振幅が時間と共に増大していく。この項を歴史的な理由で「**永年項**」と呼ぶ。（第一、二項は、同次方程式の一般解に等しいので、特解としては、この永年項を取ればよい。）

4.3 エネルギー吸収；エネルギー共振

時間変化 $t \to t + \Delta t$ により位置が $x \to x + \Delta x$ と変化したとする。 このとき外力のした仕事は

$$\Delta W_e = F_e \Delta x; \quad (F_e = m f_0 \cos \omega_e t.) \tag{4.29}$$

単位時間当たりでは、

$$\frac{\Delta W_e}{\Delta t} = F_e \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \qquad \frac{dW_e}{dt} = F_e \frac{dx}{dt}. \tag{4.30}$$

この 1 周期 $T = 2\pi/\omega_e$ にわたる**平均（仕事率）**は

$$w = \frac{W_e}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW_e}{dt} dt = \int_0^T F_e \frac{dx}{dt} dt, \tag{4.31}$$

となる。

ここで、十分時間が経過して遷移現象が終り特解の部分だけが残っているときの**外力の仕事率** $w(\omega_e)$ を外力の角振動数 ω_e の関数として求めてみよう。十分時間が経過したときの $x(t)$ は (4.19) で与えられるから、$\frac{dx}{dt} = -\omega_e A \sin(\omega_e t - \delta)$. 振幅 $\mathcal{A}(\omega_e)$ は（4.13）式で与えられている。したがって、

$$w(\omega_e) = -m f_0 A \omega_e \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega_e t \sin(\omega_e t - \delta) dt \equiv -m f_0 A \omega_e I. \tag{4.32}$$

ただし、

$$I \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega_e t \sin(\omega_e t - \delta) dt. \tag{4.33}$$

ここで、公式 $\cos X \sin Y = \frac{1}{2}\{\sin(X+Y) - \sin(X-Y)\}$ を思い出すと、$X = \omega_e t, \;\; Y = \omega_e t - \delta$ と置いて、$\cos \omega_e t \sin(\omega_e t - \delta) = \frac{1}{2}\{\sin(2\omega_e t - \delta) - \sin \delta\}$. ゆえに、

$$w(\omega_e) = \frac{1}{2T} \int_0^T \{\sin(2\omega_e t - \delta) - \sin \delta\} = -\frac{1}{2} \sin \delta. \tag{4.34}$$

従って、

$$w(\omega_e) = \frac{1}{2} m f_0 A \omega_e \sin \delta \tag{4.35}$$

となる。ここで、(4.13) および (4.14) より得られる式 $\sin \delta = \frac{2\omega_e \gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_e^2}}$ を代入すると、

$$w(\omega_e) = \frac{\gamma f_0^2}{m} \cdot \frac{\omega_e^2}{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_e^2}. \tag{4.36}$$

$w(\omega_e)$ の ω_e に対する依存性を調べてみる。

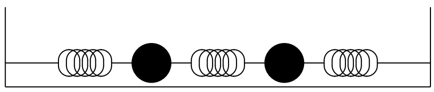
$$\frac{dw}{d\omega_e} = \frac{2\gamma f_0^2}{m} \frac{\omega_e(\omega^2 - \omega_e^2)(\omega^2 + \omega_e^2)}{\{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2\}^2}. \tag{4.37}$$

これから、$w(\omega_e)$ は $\omega_e = \omega$ のとき最大値 $f_0^2/4m\gamma$ を取ることが分かる。すなわち、**外力の角振動数 ω_e が系の固有角振動数 ω に一致するとき、外力のする仕事が最大になる**。この仕事は振動子にされるので、**振動子のエネルギー吸収が最大になる**。これを、「**エネルギー共振**」という。この共振の有無は、振幅共振とは異なり γ と ω の大小関係に依らない。

5 線型連立常微分方程式と連成振動

5.1 2 自由度の連成振動

下図のように、異なる強さの 3 つのバネにつながった同じ質量 m の 2 つのおもりの運動 (**連成振動**) を考えてみよう。



運動方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1), \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{5.1}$$

整理して、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m} & \frac{k_2}{m} \\ \frac{k_2}{m} & -\frac{k_2+k_3}{m} \end{pmatrix} \equiv A. \tag{5.3}$$

A の転置行列 ${}^tA$ が A に等しいことに注意しよう。すなわち、行列 A は**対称行列**である。この方程式は線型 2 階 2 元連立常微分方程式である。その一般解は $2 \times 2 = 4$ 個の任意定数を含み、4 個の独立解（基本解ともいう）$\boldsymbol{x}_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ の線型結合で表すことができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + c_3\boldsymbol{x}_3(t) + c_4\boldsymbol{x}_4(t), \\ \frac{d^2\boldsymbol{x}_i}{dt^2} &= A\boldsymbol{x}_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2 基本解の求め方

運動方程式 (5.2) の解を $\boldsymbol{x} = \mathrm{e}^{pt}\boldsymbol{x}_0$ の形を仮定して求めてみよう。(ただし、$\boldsymbol{x}_0$ は定ベクトル。) (5.2) に代入すると、

$$\frac{d^2\mathrm{e}^{\mathrm{pt}}}{dt^2}\boldsymbol{x}_0 = p^2\mathrm{e}^{\mathrm{pt}}\boldsymbol{x}_0 = \mathrm{A}\mathrm{e}^{\mathrm{pt}}\boldsymbol{x}_0, \tag{5.5}$$

すなわち、

$$A\boldsymbol{x}_0 = p^2\boldsymbol{x}_0. \tag{5.6}$$

これは、p^2 が A の**固有値**であり、$\boldsymbol{x}_0$ がその**固有ベクトル**であることを示している。

すぐ後に一般的に示しているように、2×2 対称行列の固有値は 2 個あり、すべて実数である。 A の 2 つの固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2$ とすると、$p^2 = \lambda_1, \lambda_2$ より、p の値として以下の 4 個が取れることが分かる：$p = \pm\sqrt{\lambda_1},\ \pm\sqrt{\lambda_2}$. $\lambda_1,\ \lambda_2$ に対応する A の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_0^{(1)},\ \boldsymbol{x}_0^{(2)}$ とすると、一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = (c_1\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_1}\mathrm{t}} + \mathrm{c}_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_1}\mathrm{t}})\boldsymbol{x}_0^{(1)} + (\mathrm{c}_3\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_2}\mathrm{t}} + \mathrm{c}_4\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_1}\mathrm{t}})\boldsymbol{x}_0^{(2)}, \tag{5.7}$$

となる。

5.3 実対称行列の固有値、固有ベクトル、対角化

5.3.1 定義

A を対称行列とする:

$$(A)_{ij} = a_{ij} = ({}^tA)_{ji}. \tag{5.8}$$

λ が A の固有値であるとは、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}). \tag{5.9}$$

このとき、$\boldsymbol{x}$ を A の λ に属する固有ベクトルという。

[注] $\boldsymbol{x}$ が λ に属する固有ベクトルならば、$c\boldsymbol{x}$ ($c \neq 0$ は任意定数) も λ に属する固有ベクトルである。(問：これを示せ。)

従って、c を適当に選ぶことにより、固有ベクトルの大きさを 1 にすることができる。(これを「**規格化する**」という。)

$$|\boldsymbol{x}| \equiv \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = 1. \tag{5.10}$$

5.3.2　固有値方程式

$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$、かつ, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ より、

$$|A-\lambda I|=0. \tag{5.11}$$

これを**固有値方程式**という。固有値方程式は n 次方程式だから固有値は n 個存在する。（重根の場合は、重複を含める。） それらを $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ とする。λ_i に属する規格化された固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする：

$$A\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i,\quad \boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_i=1. \tag{5.12}$$

A が実対称行列のとき、$\lambda_i\ \ (i=1,2,...n)$ はすべて実数である。（問：これを示せ。）

[例題 1：] 次の行列の固有値を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

[解]
固有値方程式は

$$|A-\lambda I|=(\lambda-a)(\lambda-c)-b^2=0.$$

よって、

$$\lambda=\frac{1}{2}[(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}]\equiv\lambda_1,\lambda_2. \tag{5.14}$$

特に、$a=c$ のとき、

$$\lambda_1=a+b,\quad \lambda_2=a-b. \tag{5.15}$$

[例題 2：] 例題 1 の行列 A （ただし、$a=c$ とする。）の固有ベクトルを求めよ。

[解]

(i) 固有値 $\lambda_1=a+b$ に属する固有ベクトルを求めるには、連立方程式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

即ち、

$$\begin{aligned} ax_1+bx_2 &= (a+b)x_1, \\ bx_1+ax_2 &= (a+b)x_2, \end{aligned}$$

を解けばよい。この解は不定であり、$x_1 = x_2$ となる。従って、規格化すると、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{x}_1, \tag{5.16}$$

となる。

(ii) 固有値 $\lambda_2 = a - b$ に属する固有ベクトルを求めるには、(i) と同様にして、連立方程式

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= (a-b)x_1, \\ bx_1 + ax_2 &= (a-b)x_2, \end{aligned}$$

を解けばよい。この解は不定であり、$x_1 = -x_2$ となる。従って、規格化すると、

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{x}_2, \tag{5.17}$$

となる。

[注]$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は互いに直交している。 実際、その内積を計算すると、$\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2 = 0$.

任意の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合で一意的に表すことができる：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &\equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \\ c_1 &= \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x} = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}, \quad c_2 = \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x} = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

5.3.3 固有ベクトルの直交性, 完全性

異なる固有値に属する固有ベクトルはたがいに直交する：

$$\lambda_i \neq \lambda_j \ \text{のとき、} \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = 0. \tag{5.19}$$

[証明]

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i, \qquad A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j.$$

第 2 式と $\boldsymbol{x}_i$ との内積を取ると、

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}_i A \boldsymbol{x}_j &= \lambda_j \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j. \\ \text{左辺} &= {}^t\boldsymbol{x}_i ({}^tA) \boldsymbol{x}_j = {}^t(A\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_j = \lambda_i \, {}^t\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j = \lambda_i \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j. \end{aligned}$$

よって、左辺＝右辺より

$$(\lambda_i - \lambda_j)\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = 0.$$

従って、$\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき、

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = 0. \qquad\qquad [\text{証了}]$$

以下では、簡単の為、$\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ はすべて異なるとする。したがって、

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = {}^t\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j = \delta_{ij}. \tag{5.20}$$

ここに、δ_{ij} は

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1, \quad i = j \text{ のとき}, \\ &= 0. \quad i \neq j \text{ のとき} \end{aligned} \tag{5.21}$$

で定義される。（クロネッカーのデルタと呼ばれる。）このとき、$\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1,\ 2, ...n)$ は**正規直交系**をなしているとう。

$\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1,\ 2, ...n)$ は独立な n このベクトルであるから、任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1,\ 2, ...n)$ の 1 次結合で一意的に表すことができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n, \\ &= \sum_i^n c_i\boldsymbol{x}_i. \quad (c_i = \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{5.22}$$

このことを、$\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1,\ 2, ...n)$ は**完全系をなす**という。

5.3.4 対角化

実対称行列 A は**直交変換**により、**固有値をその対角成分とする対角行列**に変換することができる。すなわち、ある直交行列 L が存在して、

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1\ 0\ ...\ 0 \\ 0\ \lambda_2\ 0\ ...0 \\ \vdots\ \ \vdots ...\ 0 \\ 0\ 0\ ...\ 0\ \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

とできる。

なお、L の逆行列 L^{-1} がその転置行列 ${}^tL$ に一致するとき、L は直交行列であると呼ばれる：$L^{-1} = {}^tL$. たとえば、以下の行列は直交行列である：

$$L = \begin{pmatrix} \cos\theta\ \ \sin\theta \\ -\sin\theta\ \ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

2 つのベクトルの内積は直交変換によって変化しない。実際、$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ とすると、

$$\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{y}' \ = \ {}^t\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}' = {}^t(L\boldsymbol{x})Ly = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tLL\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}(L^{-1}L)\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}.$$

従って、2 つのベクトルのなす角度やベクトルの長さは直交変換によって変化しない。

さて、A を対角化する直交行列 L を具体的に構成してみよう。A の i 番目の固有ベクトルを

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

としよう。すなわち、$\boldsymbol{x}_i$ の j 成分が x_{ij} である。すると、L はつぎのように与えられる：

$$L \ = \ \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ \cdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.26}$$

$${}^tL \ = \ \left(\boldsymbol{x}_1 \vdots \boldsymbol{x}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{x}_n \right) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

(i) ${}^tL = L^{-1}$ であること：

$$(L\,{}^tL)_{ij} = {}^t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j = \delta_{ij}, \ \ 即ち、\ L\,{}^tL = I. \tag{5.28}$$

ゆえに、${}^tL$ は L の逆行列であり、L は直交行列である。

(問：$A,\ B$ を $n\times n$ 行列とする。A の i 番目の行ベクトルを ${}^t\mathbf{a}_i$、B の j 番目の列ベクトルを $\mathbf{b}_j$ とすると、積 AB の (i,j) 成分は ${}^t\mathbf{a}_i\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j$ となることを確かめよ。)

(ii) LAL^{-1} が対角行列になること：

$$\begin{aligned} LAL^{-1} &= L\left(A\boldsymbol{x}_1 \vdots A\boldsymbol{x}_2 \vdots \cdots \vdots A\boldsymbol{x}_n \right), \\ &= \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x}_1 \\ \cdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \left(\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \vdots \lambda_2\boldsymbol{x}_2 \vdots \cdots \vdots \lambda_n\boldsymbol{x}_n \right). \end{aligned}$$

従って、

$$(LAL^{-1})_{ij} = \lambda_j \, {}^t\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j = \lambda_j \delta_{ij}, \quad \text{すなわち、} LAL^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \, 0 \, \cdots \, 0 \\ 0 \, \lambda_2 \, \cdots \, 0 \\ \ldots \, \vdots \, \cdots \, \vdots \\ 0 \, 0 \, \cdots \, \lambda_n \end{pmatrix}. \quad [\text{以上}]$$

練習：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{を対角化せよ。}$$

5.4　2 自由度の基準振動

2 個のおもりの連成振動の問題で、おもり 1,2 が同じ時間依存性を持つような運動を求めてみよう。すなわち、$\boldsymbol{x} = \mathrm{e}^{pt}\boldsymbol{x}_0$ と書けるような運動方程式の解である。このような運動を基準運動（**基準振動**）という。このとき、§5.2 で示したように p^2 は A の固有値、$\boldsymbol{x}_0$ は A の固有ベクトルになっており、以下のように求まる：

$$p^2 = -\frac{1}{2m}[(k_1 + 2k_2 + k_3) \pm \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}]. \tag{5.29}$$

これらは負であることが簡単に示すことができる。

問：これを示せ。ヒント；正の数 a, b に対し、$a + b > |a - b|$. また、$a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$. ）

従って、p は純虚数。

$$\begin{aligned} p &= \pm i\omega_1, \quad \pm i\omega_2, \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2m}[(k_1 + 2k_2 + k_3) - \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}]}, \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2m}[(k_1 + 2k_2 + k_3) + \sqrt{(k_1 - k_3)^2 + 4k_2^2}]}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

以下では、簡単のために、$k_1 = k_3$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} p &= \pm i\omega_1, \quad \pm i\omega_2, \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

となる。

さて、このときのそれぞれの固有ベクトルを求めてみよう。このとき系数行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a \, b \\ b \, a \end{pmatrix}, \quad a = -\frac{k_1 + k_2}{m}, \quad b = \frac{k_2}{m}, \tag{5.32}$$

となり、例題2で扱ったのと同じ形になる。ゆえに、固有ベクトルはそれぞれ、

$$\boldsymbol{x}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

となる。したがって、連成振動の運動の一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = (c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 \mathrm{t}} + \mathrm{c}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 \mathrm{t}})\boldsymbol{x}_0^{(1)} + \ (\mathrm{c}_3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 \mathrm{t}} + \mathrm{c}_4 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 \mathrm{t}})\boldsymbol{x}_0^{(2)}, \tag{5.34}$$

となる。

ここで、オイラーの公式 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta} = \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$ を用いると、$c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} + \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} = \sqrt{2}\mathrm{a}\cos(\omega\mathrm{t} + \phi)$, と書けるので、一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \sqrt{2}[a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)\boldsymbol{x}_0^{(1)} + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)\boldsymbol{x}_0^{(2)}], \tag{5.35}$$

となる。

$\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \ \boldsymbol{x}_0^{(2)}$ の具体的な形を入れると、

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \\ x_2(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \end{aligned} \tag{5.36}$$

となる。

基準振動はそれぞれ、$a_1 \neq 0, \ a_2 = 0$、および、$a_1 = 0, \ a_2 \neq 0$ の場合である。

問：おもりはそれぞれどのような運動をするか考えよ。

例題：　初期条件 $x_1(0) = a, \ \dot{x}_1 = 0, \ \ x_2(0) = 0, \ \dot{x}_2(0) = 0$ のもとで、おもりの運動を求めよ。（定数 $a_{1,2}, \ \phi_{1,2}$ を求めよ。）

[解]

まず、それぞれの速度の表式を求める：$\dot{x}_1(t) = -\omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$, $\dot{x}_2(t) = -\omega_1 a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \omega_2 a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$. 初期条件を代入すると、

$$\begin{aligned} x_1(0) &= a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2 = a, \cdots \text{(i)} \\ \dot{x}_1(0) &= -\omega_1 a_1 \sin\phi_1 - \omega_2 a_2 \sin\phi_2 = 0, \cdots \text{(ii)} \\ x_2(0) &= a_1 \cos\phi_1 - a_2 \cos\phi_2 = 0, \cdots \text{(iii)} \\ \dot{x}_2(0) &= -\omega_1 a_1 \sin\phi_1 + \omega_2 a_2 \sin\phi_2 = 0. \cdots \text{(iv)} \end{aligned}$$

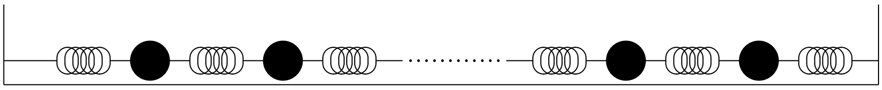
(i), (iii) より、$a_1 \cos\phi_1 = a_2 \cos\phi_2 = \frac{a}{2}$. (ii), (iv) より、$a_1 \sin\phi_1 = a_2 \sin\phi_2 = 0$. したがって、$\phi_1 = \phi_2 = 0$ および、$a_1 = a_2 = \frac{a}{2}$. ゆえに、

$$x_1(t) = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t), \quad x_2(t) = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t). \tag{5.37}$$

問：$x_1(t), x_2(t)$ をグラフに表しなさい。

5.5 n 個のおもりの連成振動

下図のように、n 個の質量の異なる物体が同じ強さ k のバネでつながっている場合を考えよう。ただし、両端のばねは十分重い壁に繋がっているとする。



運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -kx_1 + k(x_2 - x_1),\\
m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2),\\
&\ \vdots\\
m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} &= -k(x_i - x_{i-1}) + k(x_{i+1} - x_i),\\
&\ \vdots\\
m_n\frac{d^2x_n}{dt^2} &= -k(x_n - x_{n-1}) - kx_n.
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad
M = \begin{pmatrix} m_1\ 0\ 0\ 0\ 0 \cdots 0 \\ 0\ m_2\ 0\ 0\ 0 \cdots 0 \\ 0\ 0\ m_3\ 00 \cdots 0 \\ \vdots \ddots\ \ \ddots\ \ \ddots\ \ \ddots \vdots \\ 0\ \cdots\ \cdots\ 0\ m_n \end{pmatrix},\quad
A = \begin{pmatrix} 2\ -1\ 0\ 0\ 0 \cdots 0 \\ -1\ 2\ -1\ 0\ 0 \cdots 0 \\ 0\ -1\ 2\ -10 \cdots 0 \\ \vdots \ddots\ \ \ddots\ \ \ddots\ \ \ddots \vdots \\ 0\ \cdots\ \cdots\ -1\ 2 \end{pmatrix},
\tag{5.39}
$$

を使うと、

$$
M\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -kA\boldsymbol{x}, \tag{5.40}
$$

あるいは、

$$
\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -B\boldsymbol{x}. \tag{5.41}
$$

ただし、

$$
B = kM^{-1}A. \tag{5.42}
$$

このとき、一般には ${}^tB = k^tA^t(M^{-1}) = kAM^{-1} \neq B$. すなわち、$B$ は非対称行列である。ただし、全てのおもりの質量が等しい（$m_1 = m_2 = \cdots = m_n \equiv= m$）とき、$B = mI$ となり A と M は可換になるので、B は対称行列 $k/m\ A$ になる。

既に示したように対称行列 A は直交行列 L で対角化することができるが、非対称行列 B は直交行列で対角化できない。そこで、次のような変換を行なって、対称行列に変換する。

$$\boldsymbol{u} = M^{1/2}\boldsymbol{x}, \qquad B' = M^{1/2}BM^{-1/2} = kM^{-1/2}AM^{-1/2}. \qquad ({}^tB' = B'). \tag{5.43}$$

具体的には、

$$B' = k\begin{pmatrix} \frac{2}{m_1} & \frac{-1}{\sqrt{m_1m_2}} & 0\ 0\ 0\cdots 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{m_1m_2}} & \frac{2}{m_2} & \frac{-1}{\sqrt{m_2m_3}} & 0\ 0\cdots 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{m_2m_3}} & \frac{2}{m_3} & \frac{-1}{\sqrt{m_3m_4}} 0\cdots 0 \\ \vdots\ddots & \ddots & \ddots & \ddots\vdots \\ 0 & \cdots\ \cdots & \frac{-1}{\sqrt{m_{n-1}m_n}} & \frac{2}{m_n} \end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

このとき、

$$\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2} = -B'\boldsymbol{u}. \tag{5.45}$$

B' は直交行列 L を用いて対角化できる：

$$LB'L^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv \Lambda. \tag{5.46}$$

L は B' の規格化された固有ベクトル

$$\boldsymbol{u}_0^{(i)} = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{in} \end{pmatrix}, \quad (i = 1,\ 2, ...n) \tag{5.47}$$

を使って表されている： すなわち、

$$L\boldsymbol{u}_0^{(i)} = \lambda_i \boldsymbol{u}_0^{(i)}, \qquad\qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{5.48}$$

とすると、

$$L \;=\; \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_0^{(1)} \\ \cdots \\ {}^t\boldsymbol{u}_0^{(2)} \\ \cdots \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{u}_0^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \ldots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.49}$$

$${}^tL \;=\; \left(\boldsymbol{u}_0^{(1)} \vdots \boldsymbol{u}_0^{(2)} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{u}_0^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \ldots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5.50}$$

三重対角行列 B' に対する固有値方程式

$$f_n(\lambda) \equiv |B' - \lambda I| = 0 \tag{5.51}$$

となる。このとき $f_n(\lambda)$ はスツルム多項式になるので、B' の固有値はスツルムの定理を用いて 2 分法で数値的に求めることができる。($B' = k/m\ A$ のときの固有値 λ_i および固有ベクトル $\boldsymbol{u}_0^{(i)}$ $(i = 1,\ 2, ...n)$ は後で具体的に求める。)

運動方程式の左から L を掛けると、

$$\begin{aligned} 左辺 &= L\frac{d^2\boldsymbol{u}}{dt^2} = \frac{d^2L\boldsymbol{u}}{dt^2} \equiv \frac{d^2\boldsymbol{y}}{dt^2}. \quad (\boldsymbol{y} \equiv L\boldsymbol{u}), & (5.52) \\ 右辺 &= -LB'\boldsymbol{u} = -LB'L^{-1}L\boldsymbol{u} = -\Lambda\boldsymbol{y}. & (5.53) \end{aligned}$$

Λ は対角行列より、運動方程式は次の独立な N 個の方程式に分解される：

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = -\lambda_i y_i. \quad (i = 1, 2,\ \cdots, n) \tag{5.54}$$

ただし、y_i は $\boldsymbol{y}$ の i 成分； $\mathbf{y} = \sum_i y_i\boldsymbol{e}_i$。これは、簡単に解けて、

$$y_i = a_i\cos(\omega_i t + \phi_i), \quad (\omega_i = \sqrt{\lambda_i}.) \tag{5.55}$$

逆変換を行なって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= L^{-1}\boldsymbol{y}(t) = {}^tL\boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} {}^tLy_i(t)\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)^tL\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\boldsymbol{u}_0^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\cos(\omega_i t + \phi_i)\boldsymbol{u}_0^{(i)}. & (5.56) \end{aligned}$$

そして、

$$\boldsymbol{x}(t) = M^{-1/2}\boldsymbol{u}(t). \tag{5.57}$$

[例題 **1**]

$$A = \begin{pmatrix} 2\ \ -1\ 0\ 0\ 0\cdots 0 \\ -1\ 2\ \ -1\ 0\ 0\cdots 0 \\ 0\ \ -1\ 2\ \ -1 0\cdots 0 \\ \vdots\ddots\ \ \ddots\ \ \ddots\ \ \ddots\vdots \\ 0\ \ \cdots\ \ \cdots\ \ -1\ 2 \end{pmatrix}$$

の固有値は

$$\lambda_k = 4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad (k = 1, 2, ..., n), \tag{5.58}$$

となることを示せ。

[解]

一般の n について証明する前に、$n = 1, 2$ について確かめてみる。

(i) $n=1$

固有値方程式は $\lambda-2=0$. ゆえに、$\lambda=2$. 一方、$4\sin^2\frac{1\times\pi}{2(1+1)}=4\sin^2\frac{\pi}{4}=2$.

(ii) $n=2$

固有値は $(2-\lambda)^2-1=0$, より、 $\lambda=1,3$. 一方、$4\sin^2\frac{1\times\pi}{2(2+1)}=4\sin^2\frac{\pi}{6}=1$. $4\sin^2\frac{2\times\pi}{2(2+1)}=4\sin^2\frac{\pi}{3}=3$.

さて、一般の n の場合、$|A-\lambda I|=D_n(\lambda)$ と置くと、

$$D_n-2\alpha D_{n-1}+D_{n-2}=0,\quad \alpha=(2-\lambda)/2,\quad (n=2,3,...). \tag{5.59}$$

となる。 ただし、$D_2=(2-\lambda)^2-1,\ \ D_1=2-\lambda$ から、上記漸化式を仮定して $D_0=1$ となる。

$D_n=0$ を与える α の存在する（１３）の解は、後に示すように $\alpha<1$ のときのみ存在し、

$$\alpha=\cos\theta, \text{すなわち、}\lambda=2(1-\cos\theta)=4\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{5.60}$$

と置くと、

$$D_n=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \tag{5.61}$$

となる。 従って、$D_n=0$ より、

$$\theta=\frac{k\pi}{(n+1)\pi}\equiv\theta_k,\quad (k=1,2,...n), \tag{5.62}$$

を得る。 よって、

$$\lambda=4\sin^2\frac{\theta_k}{2}=4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}\equiv\lambda_k, \tag{5.63}$$

となる。　[以上]

[D_n に対する差分方程式の解]
D_n は２階線型差分方程式を満たしている。一般解は２つの独立解 $a_n,\ b_n$ を用いて、

$$D_n=c_1a_n+c_2b_n \tag{5.64}$$

と表される。 独立解は $D_n=r^n$ と置いて、

$$r^2-2\alpha r+1=0, \tag{5.65}$$

から得られる。

1. $\alpha < 1$ のとき

   $\alpha = \cos\theta$ とおいて、

$$r = \mathrm{e}^{\pm i\theta}. \tag{5.66}$$

   従って、一般解は

$$D_n = c_1\mathrm{e}^{ni\theta} + c_2\mathrm{e}^{-ni\theta}. \tag{5.67}$$

   ここで、初期条件を代入すると、

$$D_0 = c_1 + c_2 = 1, \qquad D_1 = c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{-i\theta} = 2\alpha. \tag{5.68}$$

   これを解いて、

$$c_1 = \frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}, \quad c_2 = -\frac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta}. \tag{5.69}$$

   よって、

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}. \tag{5.70}$$

2. $\alpha \geq 1$ のとき

   $\alpha = \cosh\theta$ とおいて、

$$r = \mathrm{e}^{\pm\theta}. \tag{5.71}$$

   従って、一般解は

$$D_n = c_1\mathrm{e}^{n\theta} + c_2\mathrm{e}^{-n\theta}. \tag{5.72}$$

   初期条件より、

$$D_0 = c_1 + c_2 = 1, \quad D_1 = c_1\mathrm{e}^{\theta} + c_2\mathrm{e}^{-\theta} = 2\alpha. \tag{5.73}$$

   これを解いて、

$$c_1 = \frac{e^{\theta}}{2\sinh\theta}, \quad c_2 = -\frac{e^{-\theta}}{2\sinh\theta}. \tag{5.74}$$

   よって、

$$D_n = \frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh\theta}. \tag{5.75}$$

   任意の n に対して、$D_n = 0$ となる θ は存在しない。

[**例題 2**]　A の固有値 $\lambda_k = 4\sin^2\frac{\theta_k}{2}$ に属する規格化された固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x}_0^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin\theta_k \\ \sin 2\theta_k \\ \vdots \\ \sin n\theta_k \end{pmatrix}, \tag{5.76}$$

となる事を示せ。

[解]

$\boldsymbol{x}^{(k)}$ は

$$\begin{pmatrix} 2\ -1\ 0\ 0\ 0 \cdots 0 \\ -1\ 2\ -1\ 0\ 0 \cdots 0 \\ 0\ -1\ 2\ -10 \cdots 0 \\ \vdots \ddots\ \ \ddots\ \ \ddots\ \ \ddots \vdots \\ 0\ \cdots\ \cdots\ -1\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} b_{k1} \\ b_{k2} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix}, \tag{5.77}$$

を満たす。 k の添字を省略して成分毎の式を書き下すと、

$$b_j - 2\alpha_k b_{j-1} + b_{j-2} = 0, \quad (j = 2, 3, ...n). \tag{5.78}$$

ただし、境界条件として $b_0 = b_{n+1} = 0$ としてよい。この漸化式の解は

$$b_j = c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{ji}\theta_\mathrm{k}} + \mathrm{c}_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{ji}\theta_\mathrm{k}}. \tag{5.79}$$

境界条件から、$c_1 + c_2 = 0$ を得る。よって、

$$b_j = c\sin j\theta_k, \quad (j = 1, 2, ...n) \tag{5.80}$$

となる。 定数 c は規格化条件から次のように決められる：

$$c = \sqrt{\frac{2}{n+1}}. \tag{5.81}$$

こうして、一般の振動に対して、各おもりの変位は

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sin\theta_j \cos(\omega_j + \phi_j), \\ x_2(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sin 2\theta_j \cos(\omega_j + \phi_j), \\ &\vdots \\ x_k(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sin k\theta_j \cos(\omega_j + \phi_j), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \sin n\theta_j \cos(\omega_j + \phi_j), \end{aligned} \tag{5.82}$$

となる。

j 番目の基準振動の場合は、$a_j = a \neq 0,\ \ a_l = 0\ (l \neq 0)$ と置いて、

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= a \sin\theta_j \cos(\omega_j + \phi_j), \\
x_2(t) &= a \sin 2\theta_j \cos(\omega_j + \phi_j), \\
&\vdots \\
x_k(t) &= a \sin k\theta_j \cos(\omega_j + \phi_j), \\
&\vdots \\
x_n(t) &= a \sin n\theta_j \cos(\omega_j + \phi_j),
\end{aligned} \tag{5.83}
$$

となる。

練習：$j = 1, 2, 3$ に対応する基準振動の形を描きなさい。