Fourier 解析とデルタ関数

1　はじめに

量子力学の形式は、Fourier 級数や Fourier 変換（「Fourier 解析」と総称）の応用あるいはその自然な拡張（「Hilbert 空間論」）と見なすことができる。そこで、この節では、数学的な厳密さは犠牲にして、Fourier 級数と Fourier 変換について、量子力学の形式を理解する上で参考となるだろう最小限の基礎的な事項をまとめておく。また、Fourier 解析の中で自然に現れる Dirac のデルタ関数についても、その超関数（distribution: 分布) としての解釈について基礎的なことを解説する。

2　Fourier 級数

x 軸上の長さ L の区間 $[-L/2,\, L/2]$ で定義されている次の関数を定義する：

$$f_n(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{ik_n x}, \quad k_n = 2\pi/L, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, , , ,). \tag{2.1}$$

区間 $[-L/2,\, L/2]$ で定義された任意の関数 $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ に対して次のように内積を定義する：

$$\langle \varphi,\, \psi \rangle \equiv \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \varphi^*(x)\psi(x). \tag{2.2}$$

この内積に対して、$\{f_n(x)\}_{n=0,\pm1,\pm2,,,,}$ は正規直交系をなす：

$$\langle f_n,\, f_m \rangle = \delta_{mn}. \tag{2.3}$$

$f_n(x)$ を用いた次の無限級数を Fourier 級数という：

$$f(x) \equiv \sum_{n-- \infty}^{\infty} c_n f_n(x) = \sum_{n--\infty}^{\infty} c_n \frac{\mathrm{e}^{ik_n x}}{\sqrt{L}}. \tag{2.4}$$

このとき、(2.3) より

$$\langle f_n, f \rangle = \langle f_n,\, \sum c_m f_m \rangle = \sum_m c_m \langle f_n,\, f_m \rangle = \sum_m c_m \delta_{nm} = c_n. \tag{2.5}$$

すなわち、

$$c_n = \langle f_n, f \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, f_n^*(x) f(x) = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \frac{\mathrm{e}^{-ik_n x}}{\sqrt{L}} f(x). \tag{2.6}$$

区間 $[-L/2,\, L/2]$ で区分的に滑らかな関数 $F(x)$ は一意的に Fourier 級数展開できる：

1. $F(x)$ が x で連続のとき、

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n f_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \frac{\mathrm{e}^{ik_n x}}{\sqrt{L}}, \quad C_n = \langle f_n,\, F \rangle. \tag{2.7}$$

2. $F(x)$ が x で不連続のとき、

$$\frac{1}{2}\{F(x-0) + F(x+0)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n f_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \frac{\mathrm{e}^{ik_n x}}{\sqrt{L}}, \quad C_n = \langle f_n,\, F \rangle \tag{2.8}$$

以下、$F(x)$ は x で連続とする。
$F(x)$ が実関数のとき、すなわち、$F^*(x) = F(x)$ のとき、

$$\begin{aligned} F^*(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^* f_n^*(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^* f_{-n}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_{-n}^* f_n(x), \\ &= F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n f_n(x). \end{aligned} \tag{2.9}$$

よって、展開の一意性より

$$C_{-n} = C_n^*, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, , , ,). \tag{2.10}$$

特に、C_0 は実数である。
具体的には、

$$\begin{aligned} C_n &= \langle f_n, F \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, f_n^*(x) F(x), \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{-ik_n x} F(x), \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, (\cos k_n x \,-\, i \sin k_n x)\, F(x), \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \cos k_n x\, F(x) \,-\, i \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \sin k_n x\, F(x), \\ &\equiv a_n - i b_n. \end{aligned} \tag{2.11}$$

ここに、a_n, b_n は実数である:

$$\begin{aligned} a_n &\equiv \frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \cos k_n x\, F(x), \\ b_n &\equiv \frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \sin k_n x\, F(x). \end{aligned} \tag{2.12}$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} F(x) &= C_0 f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n f_n(x) + C_n^* f_{-n}(x)\right), \\ &= C_0 f_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}[C_n f_n(x)]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

ここで、$f_{-n}(x) = f_n^*(x)$ を用いた。$\mathrm{Re}[F]$ は複素数 F の実部である。
ところが、

$$\begin{aligned} C_n f_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}}(a_n - ib_n)(\cos k_n x \,+\, i\sin k_n x), \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}}\left((a_n\cos k_n x + b_n \sin k_n x) \,+\, i(a_n \sin k_n x - b_n \cos k_n x)\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

よって、

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos k_n x \,+\, B_n \sin k_n x\right). \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\sqrt{L}}a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, F(x), \\ A_n &= 2\frac{1}{\sqrt{L}}a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \cos k_n x\, F(x), \quad (n = 1, 2, , , ,) \\ B_n &= 2\frac{1}{\sqrt{L}}b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \sin k_n x\, F(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

これまで $F(x)$ は区間 $[-L/2,\, L/2]$ で定義されているとしてきた。ところが、その Fourier 展開の式 (2.7) (2.8), (2.15) の右辺は、周期を L として無限区間 $(-\infty,\, \infty)$ で定義された関数になっている。したがって、定義域を $(-\infty,\, \infty)$ とし、

$$F(x + L) = F(x), \tag{2.17}$$

を満たす周期 L の関数は、(2.7), (2.8), (2.15) のように展開できる。

[注]

1. (2.7) は、次のように書き直すことができる：

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)\langle f_n,\, F\rangle, \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)\int_{-L/2}^{L/2} dx'\, f_n^*(x')F(x'), \qquad (2.18)\\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dx' \left(\sum_{-\infty}^{\infty} f_n(x)f_n^*(x')\right) F(x'). \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

最後の表式は、$\{f_n(x)\}_{n=0,\pm,\pm,,,}$ の完全性、

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)f_n^*(x') = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ik_n(x-x')} = \delta(x-x'), \qquad (2.20)
$$

を意味する（$-L/2 < x, x' < L/2$）。ただし、無限和と積分の順序交換が可能であると仮定した。

2. (2.18) は $f_n(x)$ の顕わな表式を代入すると次のように書ける：

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L}\left(\int_{-L/2}^{L/2} dx'\, \frac{\mathrm{e}^{-ik_nx'}}{\sqrt{2\pi}}F(x')\right)\frac{\mathrm{e}^{ik_nx}}{\sqrt{2\pi}}, \\
&\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L}\hat{F}(k_n)\frac{\mathrm{e}^{ik_nx}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\hat{F}(k_n) \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}\langle f_n,\, F\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} dx'\, \frac{\mathrm{e}^{-ik_nx'}}{\sqrt{2\pi}}F(x'). \qquad (2.22)
$$

これらは、次の Fourier 変換への拡張の出発点となる式である。

3　Fourier 変換

これまでは、関数 $F(x)$ は有限区間で定義されているか無限区間で定義されていても有限の周期を持つ周期関数である場合に限られていた。以下では、$L \to \infty$ の極限を考えてこれらの制限を除くことを試みる。

(2.21) において、n と $k_n = 2n\pi/L$ は 1 対 1 に対応しているから、n に関する和を k_n に関する和とみなす。さらに、$L \to \infty$ を考えると、

$$\Delta k_n \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L} \to 0, \quad (L \to \infty). \tag{3.1}$$

このとき、(2.21) は

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} \hat{F}(k_n) \frac{\mathrm{e}^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}}, \\ &= \sum_{k_n-\infty}^{\infty} \left(\hat{F}(k_n) \frac{\mathrm{e}^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}} \right) \Delta k_n, \\ &\downarrow \ L \to \infty \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{F}(k) \mathrm{e}^{ikx}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし、このとき (2.22) より、

$$\hat{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-ikx} F(x). \tag{3.3}$$

これを $F(x)$ の Fourier 変換という。

さらにこのとき Fourier 級数の完全性の表す式 (2.20) は、

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} \mathrm{e}^{ik_n(x-x')}, \\ &= \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k_n}{2\pi} \mathrm{e}^{ik_n(x-x')}, \\ &\downarrow \ L \to \infty \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \mathrm{e}^{ik(x-x')}, \qquad (3.4) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} \mathrm{e}^{-ik'(x-x')}, \qquad (3.5) \end{aligned}$$

となる。ただし、最後の等式では $k = -k'$ と変数変換を行った。これらはよく知られたデルタ関数の公式である。

[まとめ]

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{F}(k) \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \hat{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-ikx} F(x) \qquad (3.6) \\
\delta(x-x') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \mathrm{e}^{ik(x-x')} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \mathrm{e}^{-ik(x-x')}. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

極限の順序に注意して、両者をいっしょに書いた式、

$$
F(x) = \lim_{K\to\infty} \lim_{L\to\infty} \int_{-K}^{K} \frac{dk}{2\pi} \mathrm{e}^{ikx} \left(\int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-ikx'} F(x') dx' \right), \qquad (3.8)
$$

を**「Fourier の積分定理」**という。

この極限操作が自由にできると仮定すると、

$$
F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \mathrm{e}^{ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ikx'} F(x') dx' \right). \qquad (3.9)
$$

さらに、積分の順序交換を行って、

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x') dx' \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \mathrm{e}^{ik(x-x')} \right), \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \delta(x-x') dx', \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、デルタ関数の表式 (3.7) を用いた。最後の表式はデルタ関数の定義式である。

このように、「Fourier の積分定理」はデルタ関数の平面波を使った表式 (3.7) と等価であることが分かる：

$$
F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+\xi) \delta(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \delta(x'-x) dx'. \qquad (3.11)
$$

[注]

1. (3.7) は平面波

$$
\phi_k(x) \equiv \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (3.12)
$$

の完全性を表している：

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dk \phi_k^*(x) \phi_k(x') = \delta(x-x'). \qquad (3.13)
$$

2. 一方, (3.6) の第 1 番目の式は、任意の関数 $F(x)$ を平面波 $\phi_k(x)$ の線形結合で表したものと解釈できる。このとき、平面波の**「規格直交条件」**は次のようになることが分かる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_{k'}^*(x)\phi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \mathrm{e}^{i(k-k')x} = \delta(k-k'). \qquad (3.14)$$

ここで、「デルタ関数の Fourier 変換」(3.7) を用いた。これを**「デルタ関数型規格化」**という。

[補足: 積分の計算]

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x}, \\ &= \lim_{\alpha\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \frac{\sin x}{x}, \\ &= 2 \lim_{\alpha\to 0+} \int_{0}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}, \\ &\equiv 2 \lim_{\alpha\to 0+} J(\alpha). \end{aligned} \qquad (3.15)$$

ただし、

$$J(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}, \quad J(\infty) = 0. \qquad (3.16)$$

ところが、

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha} &= -\int_0^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x, \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha x} \cos x|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\alpha x} \cos x, \\ &= -1 + \alpha \left[\mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\alpha x} \sin x \right]. \\ &= -1 - \alpha^2 \frac{dJ}{d\alpha}. \end{aligned} \qquad (3.17)$$

よって、

$$\frac{dJ}{d\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2+1}. \qquad (3.18)$$

$J(\infty) = 0$ に注意して、これを α について ∞ から 0 まで積分すると、

$$J(0) = -\int_{\infty}^{0} d\alpha \frac{1}{\alpha^2+1} = \int_0^{\infty} d\alpha \frac{1}{\alpha^2+1} = \frac{\pi}{2}. \qquad (3.19)$$

最後の等式は $\alpha = \tan\theta$ とおいて積分すると得られる:

$$d\alpha = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \quad 1/(\alpha^2+1) = 1/(\tan^2\theta+1) = \cos^2\theta.$$

よって、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = 2J(0) = \pi. \tag{3.20}$$

例

Fourier 変換は、（複素）積分の練習問題である。

まず、Gauss 積分の復習:

$$I(a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ax^2/2} = 2\int_0^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ax^2/2}. \tag{3.21}$$

[計算]

$$\begin{aligned}
(I(a))^2 &= 4\int_0^{\infty} dx \mathrm{e}^{-ax^2/2} \cdot \int_0^{\infty} dy \mathrm{e}^{-ay^2/2}, \\
&= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} dxdy \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(x^2+y^2)}, \\
&= 4\int_0^{\infty} rdr\,\mathrm{e}^{-ar^2/2}\int_0^{\pi/2} d\phi, \\
&= 4\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} rdr \mathrm{e}^{-ar^2/2}, \\
&= 2\pi\int_0^{\infty} rdr \mathrm{e}^{-ar^2/2}, \quad (y = r^2) \\
&= \pi\int_0^{\infty} dy \mathrm{e}^{-ay/2}, \quad (z = ay/2) \\
&= \frac{2\pi}{a}\int_0^{\infty} dz \mathrm{e}^{-z}, \\
&= \frac{2\pi}{a}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

よって、$I(a) > 0$ より

$$I(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}. \tag{3.23}$$

少し複雑な Gauss 積分：

$$J(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2+bx}. \tag{3.24}$$

完全平方の構成：

$$-\frac{a}{2}x^2 + bx = -\frac{a}{2}(x^2 - \frac{2bx}{a}) = -\frac{a}{2}\{(x - \frac{b}{a})^2 - \frac{b^2}{a^2}\} = -\frac{a}{2}(x - \frac{b}{a})^2 + \frac{b^2}{2a} \tag{3.25}$$

よって、$z = x - \frac{b}{a}$ と変数変換すると、

$$J(a,\, b) = \mathrm{e}^{b^2/2a}\int_{-\infty}^{\infty} dz \mathrm{e}^{-az^2/2} = \mathrm{e}^{b^2/2a}\cdot I(a) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{b^2/2a}. \tag{3.26}$$

ここで、$b = -ik$ と置くと Gauss 関数の Fourier 変換が得られる：

$$\hat{G}(k;\, a) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}\mathrm{e}^{-ikx} == \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2 - ikx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-k^2/2a} \tag{3.27}$$

[重要な注意]

Gauss 関数 $\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x^2}$ の広がりは $\Delta x \sim 1/\sqrt{a}$ 程度ある。一方その Fourier 変換 $\hat{G}(k;\, a)$ の k 空間での広がりは $\Delta k \sim \sqrt{a}$ である。よって、

$$\Delta x \cdot \Delta k = 1. \tag{3.28}$$

物理的には k は波数の意味があるので、対応する運動量は $p = \hbar k$. したがって、対応する運動量の広がりは $\Delta p \sim \hbar \Delta k = \hbar\sqrt{a}$. よって、Gauss 関数に対する次の「不確定関係」を得る：

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar. \tag{3.29}$$

すなわち、「不確定関係」は局在化した関数とその Fourier 変換との間の簡単かつ普遍的関係である。

(3.24) の応用：

$$\frac{d^n}{db^n} J(a, b)\Big|_{b=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \mathrm{e}^{-ax^2/2} \tag{3.30}$$

一方、

$$J(a,\, b) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{b^2/2a} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^{2m}}{m!2^m a^m}. \tag{3.31}$$

すなわち、

$$\frac{d^{2m}}{d^{2m}} J(a,\, b)\Big|_{b=0} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\frac{1}{m!2^m a^m}\frac{d^{2m} b^{2m}}{db^{2m}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\frac{(2m)!}{m!2^m a^m}, \tag{3.32}$$

$$\frac{d^{2m+1}}{db^{2m+1}} J(a,\, b)\Big|_{b=0} = 0. \tag{3.33}$$

よって、

1. $n=$ 奇数:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \mathrm{e}^{-ax^2/2} = 0. \tag{3.34}$$

2. $n=$ 偶数 $=2m$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx x^n \mathrm{e}^{-ax^2/2} &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,\frac{(2m)!}{m!2^m a^m}, \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,\frac{(2m-1)!!}{a^m}, \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{a^{n+1}}}\,(n-1)!!. \end{aligned} \tag{3.35}$$

ただし、$(2m)! = 2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots 2\cdot 1 = 2^m m!(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1 \equiv 2^m m!(2m-1)!!$ を用いた。

4 デルタ関数について

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ は、積分の中の「核」として、関数空間から複素数空間への線型写像を与える「**超関数 (distribution:分布)**」の一種である [1]。まず、(3.7) によればデルタ関数は次の極限として書けることを注意しておく：

$$\delta(x) = \lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}\frac{dk}{2\pi}\mathrm{e}^{ikx} = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi ix}\left(\mathrm{e}^{iKx}-\mathrm{e}^{-iKx}\right) = \lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{\pi x} \tag{4.1}$$

この等式の正確な意味を理解することが以下の目的である [2]。

4.1 線型汎関数としてのデルタ関数

パラメータ n に依存する関数の属 $\varphi(x;n)\equiv\varphi_n$ に対して、無限遠で十分速く減少する（「**急減少関数**」と呼ぶ）任意の関数 $f(x)$ との内積をを次のように定義する：

$$(\varphi_n, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi(x;n)f(x). \tag{4.2}$$

これは定積分であるから、ある数（一般には複素数）である。したがって、φ_n を固定するとき、これは f の属する関数空から複素数空間への**線型写像（線型汎関数）**$\mathcal{T}_n$ を定義している。

$$\mathcal{T}_n[f] \equiv= \int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi(x;n)f(x). \tag{4.3}$$

次の極限を考える；

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{T}_n[f] \equiv (\varphi_n, f) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi(x;n)f(x). \tag{4.4}$$

この極限が任意の $f(x)$ に対して値を持つとき、そこで定義される線型写像を $\lim_{n\to\infty}\mathcal{T}_n = \mathcal{T}$ と定義する。

$$\mathcal{T}[f] = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\varphi(x;n)f(x). \tag{4.5}$$

---

[1] distribution の理論は L.Schwartz(シュワルツ) が与えた。

[2] 参考書としては、例えば、L. シュワルツ「物理数学の方法」（吉田耕作、渡邊二郎翻訳、岩波書店 1966 年；吉田耕作・加藤敏夫共著「大学演習　応用数学 I」（裳華房、1961 年）の III Fourier 解析および超関数。

線型汎関数としてのデルタ関数を与える関数列　例として次の関数を考える：

$$\hat{\delta}_n(x) = \frac{\sin nx}{x}. \tag{4.6}$$

このとき、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\hat{\delta}_n, f) &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin nx}{x} f(x), \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\sin x'}{x'} f(\frac{x'}{n}), \quad (x' = nx) \\
&= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\sin x'}{x'}, \\
&= \pi f(0).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ここで、$\lim_{n\to\infty} f(\frac{x'}{n}) = f(0)$ および、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \pi, \tag{4.8}$$

を用いた。

よって、この極限によって次の線型写像（汎関数）$\mathcal{T}$ が定義された：

$$\mathcal{T}[f] = \pi f(0). \tag{4.9}$$

$\frac{1}{\pi}\mathcal{T} \equiv \mathcal{D}$ と書くと、

$$\mathcal{D}[f] = f(0). \tag{4.10}$$

この場合あたかも

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\hat{\delta}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x}, \tag{4.11}$$

が存在するかのうように仮定して、それを $\delta(x)$ と書くことにしたのが、(4.1) である。（ただし、n を K と書いている。）すなわち、

$$\mathcal{D}[f] \equiv \lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin Kx}{\pi x} f(x) = f(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x). \tag{4.12}$$

デルタ関数の表式 (4.1) はこのように定義されたものと理解される。

4.2 デルタ関数の重要な性質

デルタ関数について以下の等式が成り立つ:

$$\text{(i)} \qquad \delta(x) = \delta(-x), \tag{4.13}$$

$$\text{(ii)} \qquad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad (a \neq 0) \tag{4.14}$$

$$\text{(iii)} \qquad \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\{\delta(x - |a|) + \delta(x + |a|)\}, \quad (a \neq 0) \tag{4.15}$$

$$\text{(iv)} \qquad f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0), \quad \text{特に}, \ x\delta(x) = 0. \tag{4.16}$$

証明はいずれも容易である。たとえば、$a > 0$ のとき, 任意の積分可能な関数 $f(x)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{a}\, f(y/a)\delta(y) = \frac{1}{a}f(0).$$

$a < 0$ のときは,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(ax) = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dy}{a}\, f(y/a)\delta(y) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{a}\, f(y/a)\delta(y) = \frac{1}{-a}f(0) = \frac{1}{|a|}f(0).$$

よって、(ii) が示された。ここで、積分範囲は $x = 0$ は含む任意の区間でよいことに注意.

問い　等式 (i), (iii), (iv) が成り立つことを示しなさい。