くりこみ群の方法とその輸送方程式への応用 I [1]

国広 悌二　(京大基研)

くりこみ群方程式を用いた非線型方程式の漸近解析の方法を包絡線の概念および不変多様体の概念を用いて分かりやすく定式化し説明する。その輸送方程式の導出への応用を述べる。

1　はじめに

有限温度の場の理論においてある種の総和法が必要であることは以前からよく知られている: Weinberg[1] は 1974 年に有限温度での場の理論（FTQFT) における相転移の研究の中で、FTQFT ではループ展開と $\hbar$ 展開が一致しないことを注意し、整合的な摂動論の展開のためにある総和法（熱的な自己質量を自己無撞着な平均場として前もってくりこんでおく方法）を提案していた。その後の発展については [2] を参照。このような総和法の必要性は動的な過程でも必要であることが、高温でのグルオンのモードの減衰率の線形応答理論での分析のなかで Pisarski および Braaten ら [3] によって明らかにされた。これも、FTQFT ではループ展開と $\hbar$ 展開が一致しないことによる。彼らはファインマンダイアグラムに基づいて整合的な総和法を定式化したが、その方法のより初等的でかつ物理的な意味が見やすい定式化が運動論的方程式に基づいて Blaizot らによって提出されている [4]。本質的に総和法が必要になる問題としてはその他にたとえば、赤外発散（あるいは、ピンチ特異性）のない整合的な運動論的方程式（Boltzmann 方程式) を導く問題がある [5]。似た例は古典流体の場合にもある [7, 8]。また、back-flow に伴う相関関数の赤外発散（長時間テイル）が出ないようにするには運動学的領域と流体力学的領域を分離することが必要である [8, 9]。すなわち、あらかじめ注目する時間スケールを特定しておかなければならない。 量子場の場合、特に、系に質量のない場が存在する場合、例えば、ゲージ理論の場合、新たな赤外発散を避けるために Bloch-Nordiek（B-N）流の総和法が必要とされる [10]。興味深いことに B-N 流の総和が以下で紹介するくりこみ群法 [12] を用いて簡便に達成できることが Boyanovsky と de Vega ら [11] によって示されている。このような特異性の処理は臨界点近傍でソフトモードの存在する場合などにも必要になると考えられる。また、上記のスケールの分離の問題はくりこみ群の理論が有効となるはずの問題である。

くりこみ群 (RG) の概念は最初、場の理論の摂動論に現れる発散の処理、いわゆる、くりこみ処方の不定性にからんで Stuckelberg と Petermann および Gell-Mann と Low[13] によって導入された。しかし、その本質は非摂動的である。それを明らかにしたのは Wilson[15] である。くりこみ群の方法はその後、場の理論や臨界現象などの統計物理学の問題に適用され大きな成功を収めている [14]。

くりこみ群の方法は簡単には以下のように定式化される: $\Gamma(\phi, \boldsymbol{g}(\Lambda), \Lambda)$ を非常に大きなエネルギースケール Λ_0 から Λ まで積分して得られた有効作用とする; ただし、$\boldsymbol{g}(\Lambda) = (g_1, g_2, ...g_n)$ は結合定数のセットである。$\boldsymbol{g}$ が Λ に依存することが重要である。くりこみ群方程式は次の等式を要請することにより得られる；

$$\Gamma(\phi, \boldsymbol{g}(\Lambda), \Lambda) = \Gamma(\phi, \boldsymbol{g}(\Lambda'), \Lambda'). \tag{1.1}$$

ここで、 極限 $\Lambda' \to \Lambda$ を取ると,

$$\frac{d\Gamma(\phi, \boldsymbol{g}(\Lambda), \Lambda)}{d\Lambda} = 0, \tag{1.2}$$

[1] 基研研究会「熱場の量子論とその応用 (2000 年 8 月 28 日 (月) — 30 日 (水))」での報告。「素粒子論研究」 **103 巻** 1 号、A160 -A176 （2001 年 4 月発行）に掲載。ただし、タイポを訂正した。

が得られる。これは Wilson のくりこみ群方程式 [15] である。あるいは、Wegner[16] にならってフロー方程式とも呼ばれる。

この方程式は摂動論と無関係に成立している。RG のこの非摂動性のため、くりこみ群には少なくとも次の２つのメリットがある。

(A) 摂動展開の総和法　低次の摂動計算の結果に Gell-Mann-Low 型のくりこみ群方程式 [13] を作用させることで、あるクラスのダイアグラムを無限次足し上げることができる。すなわち、RG 法は摂動級数の総和法になっている [17]。

(B) 赤外有効作用の構成法　ウイルソン型 [15] の RG は、低エネルギーでの実効的な、すなわち、低エネルギーおよび長波長の領域で漸近的に厳密な有効作用あるいはハミルトニアンを得る体系的な方法になっている。

摂動級数が発散級数になっていることは場の理論に限らず数学を使うすべての科学の分野で一般的であり、何らかの便利な「総和法」が必要とされ、実際、いくつかの総和法が知られている [18]。

また、ゆっくりした長波長の運動を記述する少数自由度の方程式をもとの多自由度の系から取り出す問題は、パタン形成の物理を含む統計物理学、多体系の集団運動理論等、物理学のほとんどあらゆる分野で基本的な課題である。たとえば、

（１）ハミルトン系のリュビュ方程式から導かれる BBGKY(Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood- Yvon) 階層を「運動学的領域」で妥当なボルツマン方程式に縮約する問題 [19]、さらに、

（２）ボルツマン方程式（運動学的方程式）からより長波長の運動を記述する流体方程式（オイラー、ナビエ-ストークス方程式）を導出すること [19, 20] はこの範疇の問題である。

（３）　原子核の振動や回転などのゆっくりした運動がフェルミオン（核子）の運動からどのように発生するか、また、そのような集団モードを記述する集団座標をどう取り出すかという問題 [21] も同種の問題である。集団座標を取り出す問題は場の量子論においても基本的問題である [22]。

（４）ミクロな場としてクォークとグルーオン場で書かれている QCD のラグランジアンから、パイ中間子やローなどのハドロン場で書かれた低エネルギーの有効作用（それは、何らかのシグマ模型になっているはず）を導出する問題も、未解決だが、ボルツマン方程式や流体方程式を導くのと同種の問題である。この場合、流体方程式に対応するのがシグマ模型、ボルツマン方程式（運動学的方程式）に対応するのが南部-ヨナ-ラシニオ模型 [25] と考えてよいかも知れない。

以上を概括して、「ダイナミックス（発展方程式）の縮約」の問題と言える。くりこみ群の方法はこれらの問題に対する統一的な方法である可能性がある。

この報告では最近イリノイ大学のグループによって開発された RG 法 [12] を輸送方程式に適用してみる。古典流体の場合を私が、量子場の場合を八田氏 [26] が報告する。この報告ではまた、準備として RG 法による縮約の背景にある一般的構造を明らかにし、その方法を「解析のことば」を用いて説明する [27, 28, 29, 30, 31, 32]。[2] これは 10 年前に蔵本 [24] が提示していた発展方程式の縮約の普遍的構造と一致する。また、RG 方程式が古典解析でよく知られている包絡線を構成するための基本方程式と同じ形であることを指摘し、RG 法による漸近解析の解析的な側面が包絡線の概念を使って解釈できることを示す; 場の理論で使われる摂動論的 RG の有効性も包絡線の概念で直感的に理解することができる。[3]

[2] イリノイグループの定式化は場の理論の乗法的くりこみの処方との密接な対応関係を示す形で行われた。ところが、そのことが逆にこの方法になじみのない者には、RG 法とは神秘的な数学的手続きでの寄せ集めであるかのような印象を与えたかも知れない。行っていることは微分方程式を解くこと、あるいは、その漸近解を求めることである。であれば、くりこみ群法で行っていることは「解析のことば」で理解可能のはずである。それは、既存の数学理論 [23] の何かに対応しているかもしれないし、まったく新しい理論であるかもしれない。後者にしても、解析のことばで記述可能のはずである。これが、私がこの研究をはじめた動機である。

[3] 包絡線の概念が理論物理学において有効であることが最初に示されたのは、鈴木増雄氏による CAM(Coherent Anomaly

§2 と §3 での議論の進め方は、横浜市大の栄伸一郎氏と藤井一幸氏との共著の論文 [31] で提示されたものを私なりに整理し直したものである。(ここで初めて述べることもいくつかある。) §4 は未発表の私の論考 [34] に基づく。

2　ウイルソン型くりこみ群方程式による発展方程式の縮約

ウイルソン流の RG 方程式 [15, 16] から出発して漸近解析の「RG 法」を定式化を行う。また、その包絡線の概念による解釈を与える。

次の n 次元（$0 < n \leq \infty$）の発展方程式を考える;

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t). \tag{2.1}$$

ここで $\boldsymbol{F}$ はあらわに t に依存していてもよいことに注意しておく。この方程式の初期値問題厳密に解けているものとし、その解を $\boldsymbol{X}(t)$ と書くことにする。ある任意の初期時間 $t = \forall t_0$ において厳密解 $\boldsymbol{X}(t)$ を初期値をに取って、この方程式をなんらかの近似を用いて解く。その近似解を $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{X}(t_0))$, と書くことにする；

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t = t_0; t_0, \boldsymbol{X}(t_0)) = \boldsymbol{X}(t_0). \tag{2.2}$$

勿論、方程式が厳密に解ければ、$\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{X}(t_0)) = \boldsymbol{X}(t)$ である。しかし、$\boldsymbol{X}(t)$ 自体は今のところ未知である。この近似解 $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{X}(t_0))$ を用いて” 初期値” $\boldsymbol{X}(t)$ の情報を得る方法がここで紹介する方法「くりこみ群法」である。その基礎は次の簡単な事実にある：もし、初期条件が t'_0 でのもの

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t = t'_0; t'_0, \boldsymbol{X}(t'_0)) = \boldsymbol{X}(t'_0), \tag{2.3}$$

に変更されても 得られる解は同じである；

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{X}(t_0)) = \tilde{\boldsymbol{X}}(t; t'_0, \boldsymbol{X}(t'_0)). \tag{2.4}$$

ここで $t'_0 \ \rightarrow \ t_0$ の極限を取ると,

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}}{dt_0} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial t_0} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial \boldsymbol{X}} \frac{d\boldsymbol{X}}{dt_0} = \boldsymbol{0}, \tag{2.5}$$

を得る。この方程式は、初期値 $\boldsymbol{X}(t_0)$ についての発展方程式 (フロー方程式）である。この方程式は場の理論におけるくりこみ群方程式と同じ形をしている。t_0 がエネルギースケール Λ の対数に対応している。場の理論における結合定数に対応するのは、方程式の解の積分定数であることがすぐに示されるだろう。「くりこみ可能性」に対応するのは力学系の理論（微分方程式論）[23] では不変多様体の存在である。

このようにしてくりこみ群方程式で改善された解は初期値として、

$$\boldsymbol{X}(t) = \tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0 = t, \boldsymbol{X}(t)), \tag{2.6}$$

となる。ここで、右辺の引数の中の $\boldsymbol{X}(t)$ はくりこみ群方程式 (2.5) の解である。

Method）[33] においてである。

2.1 $t_0 = t$ と選ぶこと；摂動論による合理化

摂動展開を用いて $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{X}(t_0))$ を求める場合、. $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{X}(t_0))$ と $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0', \boldsymbol{X}(t_0'))$ はそれぞれ $t \sim t_0$ および $t \sim t_0'$ でのみ意味のある妥当な解となっている。したがって、等値性 (2.4) の条件およびそれから導かれたくりこみ群方程式 (2.5) が妥当であるためには $t_0 < t < t_0' \equiv t_0 + \Delta t_0$ を満たす t を取る必要がる。このとき $\Delta t_0 \to 0$ の極限では、必然的に

$$t = t_0, \tag{2.7}$$

となる。したがって、摂動論で $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{X}(t_0))$ を構成するときには、次の $t = t_0$ という条件のついたくりこみ群方程式を要請することになる [29]；

$$\left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}}{dt_0}\right|_{t_0=t} = \left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial t_0}\right|_{t_0=t} + \left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{d\boldsymbol{X}}{dt_0}\right|_{t_0=t} = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

この議論で自然に $t_0 = t$ の要請が生じたことを強調しておく。こうして、[12] に与えられている処方箋が正当化される[4] 。

2.2 包絡線概念による解釈

上記の議論はこれで十分説得力のあるものになっているが、包絡線の概念を用いて以下のように幾何学的に解釈することもできる [27, 29, 30, 31]: t_0 は任意に変えられるので、$\{\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0, \boldsymbol{X}(t_0))\}_{t_0}$ は t_0 をパラメタとする曲線群を与える。すると、(2.8) はその包絡線 $\boldsymbol{X}_E(t)$ を求めるための方程式に他ならない。

実際、μ をパラメタとする曲線群 $\{y = f(x; \mu, \boldsymbol{C}(\mu))\}_\mu$ の包絡線 $y_E(x)$ は[5] 、次の「包絡線方程式」を解いて求めることができる。

$$\frac{df(x; \mu, \boldsymbol{C}(\mu))}{d\mu} = 0, \tag{2.9}$$

この方程式は次の２通りの使い方をすることができる。

1. 通常は、関数 $\boldsymbol{C}(\mu)$ は既知であり、(2.9) から $\mu = \mu(x)$ を求め、これを $f(x; \mu, \boldsymbol{C}(\mu))$ に代入して

   $$y_E(x) = f(x; \mu(x), \boldsymbol{C}(\mu(x))) \tag{2.10}$$

   と求められる。

2. 関数 $\boldsymbol{C}(\mu)$ が未知で、曲線群が $\{y = f(x; \mu, \boldsymbol{C}(\mu))\}_\mu$ が包絡線を持つかどうかわからないときは、他の条件から $\mu = \mu(x)$ を求め、この曲線群が包絡線を持つように関数 $\boldsymbol{C}(\mu)$ を（2.9) から決定することができる。実際、このとき（2.9) は

   $$\left.\frac{df(x; \mu, \boldsymbol{C}(\mu))}{d\mu}\right|_{\mu=x} = \left.\frac{\partial f(x; \mu, \boldsymbol{C}(\mu))}{\partial\mu}\right|_{\mu=x} + \left.\frac{\partial f(x; \mu, \boldsymbol{C}(\mu))}{\partial \boldsymbol{C}} \cdot \frac{d\boldsymbol{C}}{d\mu}\right|_{\mu=x} = 0, \tag{2.11}$$

   となって $\boldsymbol{C}(\mu)$ を求める方程式になる。くりこみ群方程式はこの場合の包絡線方程式と解釈できる。

こうして、 (2.6)で与えられる解$\boldsymbol{X}$ は t_0 をパラメタとする曲線群 $\{\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0 = t, \boldsymbol{X}(t_o))\}_{t_0}$ の包絡線と解釈できる。このとき、t_0 が曲線群中の１曲線と包絡線の接点になっている。

[4] BBGKY 階層からボルツマン方程式を導出する場合や、ランジュバン方程式からフォッカー-プランク方程式を出すような場合には、ミクロな系での無限小時間と上の階層の無限小時間のオーダーが異なるので、ミクロスケールでは $t - t_0 \to \infty$ だが、マクロスケールでは $t - t_0 << \Delta t_0$ という状況を設定しないといけない。[35]

[5] μ 依存性は μ の関数 $\boldsymbol{C}(\mu)$ を通しても入っているとした。

2.3 不変多様体とくりこみ可能性

n 次元発展方程式

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, t), \tag{2.12}$$

を考える。この方程式系に m 次元の不変多様体 M がある場合を考える；$m \le n$。M 上の任意の点 $\boldsymbol{X}$ は m 次元のパラメタ $\boldsymbol{s}$ を用いて

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{s}), \quad \mathrm{dim}\boldsymbol{s} = m, \tag{2.13}$$

と表せるとする[6]。(2.1) の M 上に縮約された運動法則はあるベクトル場 $\boldsymbol{G}$ を用いて次のように表されるとする；

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}). \tag{2.14}$$

我々の課題はベクトル場 $\mathbf{G}$ および M の表現 $\boldsymbol{R}$ を求めることである。

議論を少し具体的にするために、$|\epsilon| < 1$ として

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{X}) + \epsilon \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}, t), \tag{2.15}$$

と書ける場合を考える。ここで、$\boldsymbol{F}_0$ にはあらわな時間依存性がないとしたことに注意。

(2.15) のある初期値問題の解を $\boldsymbol{X}(t)$ とする。$\boldsymbol{X}(t)$ は M 上にあるとし、次の展開を仮定する；

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0(t) + \epsilon \boldsymbol{X}_1(t) + \epsilon^2 \boldsymbol{X}_2(t) + \ldots, \tag{2.16}$$

さて、(2.15) を任意の時間 $t = t_0$ での初期値を $\boldsymbol{X}(t_0)$ としたときの形式的摂動解を $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0)$ とする；

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t = t_0; t_0) = \boldsymbol{X}(t_0). \tag{2.17}$$

ただし、$\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0) = \tilde{\boldsymbol{X}}_0(t; t_0) + \epsilon \tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0) + \epsilon^2 \tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0) + \ldots$, そして、各摂動解の初期値を厳密解の対応する次数のものに一致させる[7]；

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_i(t_0; t_0) = \boldsymbol{X}_i(t_0), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.18}$$

初期値の非摂動部分からのずれを $\boldsymbol{\rho}(t_0)$ と書くことにする；

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t_0; t_0) = \boldsymbol{X}_0(t_0) + \boldsymbol{\rho}(t_0), \quad \boldsymbol{\rho}(t_0) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \boldsymbol{X}_i(t_0). \tag{2.19}$$

さて、最低次の方程式

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}_0}{dt} = \boldsymbol{F}_0(\tilde{\boldsymbol{X}}_0), \tag{2.20}$$

の解を

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_0(t; t_0) = \boldsymbol{R}(t; \boldsymbol{C}(t_0)), \tag{2.21}$$

[6] ここでのノーテイションは蔵本のもの [24] に従っている。実際、以下の内容は [24] の内容をくりこみ群法のことばで定式化し直し基礎付けたたとものと見なすこともできる。

[7] これは minimal の設定であり、技術的には同次方程式の解の任意の線形結合を加えておく方が都合がよい場合もある。

と書く。ここで、$\boldsymbol{C}(t_0)$ は積分定数である。$\boldsymbol{C}$ は t には依存しないが初期時間 t_0 には依存してよいことに注意；$\mathrm{dim}\boldsymbol{C} = m$ とする。

不変多様体 M_0 の自然な座標は

$$\boldsymbol{s}(t_0) = \boldsymbol{C}(t_0), \tag{2.22}$$

で与えられることを理解することはたやすい。これは簡単だが重要な洞察である。われわれは不変多様体の表現について何の仮説も必要ない。単に方程式を解きさえすればよい。そのときの積分定数の組が不変多様体の自然な座標となるのである。

このように非摂動解が求まり、以下のくりこみ群の処方がうまく機能する場合としては次の２通りの場合が知られている。

1. $\boldsymbol{F}_(\tilde{\boldsymbol{X}}_0) = 0$、すなわち、$\tilde{\boldsymbol{X}}_0 =$ 定数、が固定点 (fixed point）になっている場合。固定点の作る集合がこの力学系の不変多様体（あるいは、その基底空間）になり、その次元が m である。

2. $\tilde{\boldsymbol{X}}_0$ が振動解になっている場合。

   (a) $\boldsymbol{F}_0(\tilde{\boldsymbol{X}})$ が線形の場合、すなわち、L を線形演算子として $\boldsymbol{F}_0(\tilde{\boldsymbol{X}}) = L\boldsymbol{X}$ となっている場合、$\boldsymbol{X}_0(t)$ は調和振動の線形結合であり、不変多様体の座標 $\boldsymbol{C}$ はそれらの振幅と位相になる。

   (b) $\boldsymbol{F}_0(\tilde{\boldsymbol{X}})$ が非線形の場合、$\boldsymbol{X}_0(t)$ は、たとえば、楕円関数になる。$\boldsymbol{C}$ は位相とモジュラスである。

摂動による多様体の変形 $\boldsymbol{\rho}$ は次の２つの基準で求められる：

1. $\boldsymbol{\rho}$ は $\boldsymbol{X}_0$ と独立であること、

2. 得られる縮約方程式ができるだけ簡単になること。

以下で見るように $\boldsymbol{\rho}$ は摂動方程式を解くことで自然に求められる。

１次の摂動方程式は

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}_1}{dt} = \boldsymbol{F}'_0(\tilde{\boldsymbol{X}}_0)\tilde{\boldsymbol{X}}_1 + \boldsymbol{P}(\tilde{\boldsymbol{X}}_0). \tag{2.23}$$

この非同次方程式の解はその特解と、右辺第２項を０とした同次方程式の一般解の和で表される。

一般に、摂動方程式としての非同次方程式の特解は永年項と非摂動解に独立な解の重ね合わせになっている。くりこみ群法の要点は永年項が $t = t_0$ では０次の非摂動解に繰り込んで無くすることができることの認識にある。永年項は場の理論における対数発散項に対応している。初期値の１次の摂動は

$$\boldsymbol{X}_1(t_0) = \tilde{\boldsymbol{X}}_1(t = t_0), \tag{2.24}$$

で与えられ、$\boldsymbol{X}_1(t_0)$ は永年項は含まず、０次解に独立な関数である。重要な点は $\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t)$ は摂動方程式の具体的な解であり、あらわに与えられているということである。[8]

[8] 技術的な注意；非同次方程式の解に同次方程式の解を重ね合わせて 0 次解の「形を整える」ことができる。すなわち、同次方程式の解は 0 次解の定数の相殺項 (counter terms）を与える。上のように構成した解はその意味で minimal の特解である。

以上の手続きを任意の次数まで繰り返すことができる。重要なことは、この手続きにより初期値のゆがみ $\boldsymbol{\rho}(t_0)$、したがって、全初期値 $\boldsymbol{X}(t_0)$ も 0 次解の積分定数 $\boldsymbol{C}(t_0)$ のみで書かれるということである;

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}(t_0)] + \boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{C}(t_0)]. \tag{2.25}$$

RG 方程式 (2.8) がこの積分定数を動的変数に「格上げ」しその運動方程式を与える;

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}}{dt_0}\bigg|_{t_0=t} = \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial t_0}\bigg|_{t_0=t} + \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial \boldsymbol{C}}\cdot\frac{d\boldsymbol{C}}{dt_0}\bigg|_{t_0=t} = 0. \tag{2.26}$$

この方程式の未知関数は $\boldsymbol{C}(t)$ であり、(2.26) は確かに $\boldsymbol{C}(t)$ の時間発展を与えている。解は初期値として

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}(t)] + \boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{C}(t)], \tag{2.27}$$

となる。これは、t の関数としては解軌道を与え、$\boldsymbol{C}$ の関数として不変多様体 M を与えている。こうして、方程式の縮約が実行できた。すなわち、不変多様体の構成とその上を動く軌道を与える運動方程式が組で得られた。

コメント:

（i）(2.26) と (2.27) は本質的に蔵本が設定した方程式であり、実は、非線形振動子に対する Krilov-Bogoliubov の摂動理論を拡張したものになっている。Bogoliubov は彼らの摂動論を Liouville 方程式に適用してハミルトン方程式の縮約としてボルツマン方程式を導き、さらに、ボルツマン方程式を縮約して流体方程式を導いた。Krilov-Bogoliubov の理論、またその拡張としての蔵本の理論は（摂動論的）くりこみ群の理論と等価であると言える[9] 。

（ii）(2.27) は、不変多様体の存在する場合、系の運動が $\boldsymbol{C}$ の変化にくりこまれていることを示している。場の量子論におけるくりこみ可能性と力学系の理論における有限次元の不変多様体の存在が対応している：積分定数 $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ がくりこみ可能な結合定数の組に対応し、$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{C})$ は QED におけるパウリ項のようなくりこみ不可能な演算子に対応している。

3 非摂動線形演算子が 0 固有値を持つ場合の一般論

次の一般的方程式に、射影演算子法と組み合わせてくりこみ群法を適用する [31]：

$$\partial_t \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{X} + \epsilon \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \tag{3.1}$$

ただし、 $\partial_t \boldsymbol{X} = \partial \boldsymbol{X}/\partial t$、$A$ は線形演算子、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ は $\boldsymbol{X}$ の非線形関数、そして ϵ は小さな展開パラメタである ($|\epsilon| < 1$)。A は必ずしも対称でもエルミートでもない。ここでは、A は半単純で、m 重に縮退した 0 固有値を持つ場合を扱う。このような 0 固有値を持つ線形演算子が現れる物理的な状況は比較的一般的にあり、たとえば、系の持つ対称性を反映している場合や相転移の臨界点で 0 モードが発生する場合などがある。

A の他の固有値は負の実部を持つものとする：

$$A\boldsymbol{U}_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.2}$$

$$A\boldsymbol{U}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{U}_\alpha, \quad (\alpha = m+1, m+2, \cdots, n), \tag{3.3}$$

[9] Bogoliubov の理論を非線形波動に拡張したのが Whitham 理論 [36] である。Whitham 理論は、したがって、ここで解説したくりこみ群理論として再定式化できると思う。

ただし、 $\mathrm{Re}\lambda_\alpha < 0$。$\boldsymbol{U}_i$ と $\boldsymbol{U}_\alpha$ は線形独立に選ぶ。
共役演算子 $A^\dagger$ は A は次の性質を持つ;

$$\begin{aligned} A^\dagger \tilde{\boldsymbol{U}}_i &= 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ A^\dagger \tilde{\boldsymbol{U}}_\alpha &= \lambda_\alpha^* \tilde{\boldsymbol{U}}_\alpha, \quad (\alpha = m+1, m+2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\tilde{\boldsymbol{U}}_i$ と $\tilde{\boldsymbol{U}}_\alpha$ は線形独立に選ばれているものとする。　また、一般性を失うことなく

$$\langle \tilde{\boldsymbol{U}}_i, \boldsymbol{U}_\alpha \rangle = 0 = \langle \tilde{\boldsymbol{U}}_\alpha, \boldsymbol{U}_i \rangle, \quad \text{ただし、} 1 \le i \le m, \quad m+1 \le \alpha \le n. \tag{3.5}$$

とできる。$\mathrm{Ker}A$ への射影演算子を P、そして、$Q = 1 - P$ と書く。
ここでは $t \to \infty$ での系の漸近的な振る舞いを記述する縮約された方程式をくりこみ群法で求めてみよう。それは、結局 attractive manifold M[23] とその上での縮約された運動方程式を求めることに他ならない。
一般論に従い、厳密解を $\boldsymbol{X}(t)$ とし任意の初期時間 $t = t_0$ で $\boldsymbol{X}(t_0)$ を初期値とする初期条件を設定したときの解を $\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0)$ とする; $\tilde{\boldsymbol{X}}(t = t_0; t_0) = \boldsymbol{X}(t_0)$.
次の摂動展開を考える；$\tilde{\boldsymbol{X}}(t; t_0) = \tilde{\boldsymbol{X}}_0(t; t_0) + \epsilon \tilde{\boldsymbol{X}}_1(t; t_0) + \epsilon^2 \tilde{\boldsymbol{X}}_2(t; t_0) + \cdots$, 同様に、$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}_0(t_0) + \epsilon \boldsymbol{X}_1(t_0) + \epsilon^2 \boldsymbol{X}_2(t_0) + \cdots = \boldsymbol{X}_0(t_0) + \boldsymbol{\rho}(t_0)$.
最初のいくつかの低次の方程式は

$$(\partial_t - A) \tilde{\boldsymbol{X}}_0 = 0, \tag{3.6}$$

$$(\partial_t - A) \tilde{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{X}}_0), \tag{3.7}$$

$$(\partial_t - A) \tilde{\boldsymbol{X}}_2 = \boldsymbol{F}'(\tilde{\boldsymbol{X}}_0) \tilde{\boldsymbol{X}}_1, \tag{3.8}$$

と与えられる。　ただし、$(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X}_0)\boldsymbol{X}_1)_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \partial(F'(\boldsymbol{X}_0))_i / \partial(X_0)_j \right\} (X_1)_j$.

3.1　１次の摂動解

0 固有値以外の固有値はすべて負の実部を持つので、$t \to \infty$ での最低次の漸近解の初期値は $\mathrm{Ker}A$ に属するとする:

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t = t_0; t_0) = \boldsymbol{X}_0(t_0) = \sum_{i=1}^m C_i(t_0) \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}]. \tag{3.9}$$

このとき、解は定常状態にある；

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_0(t; t_0) = \mathrm{e}^{(t - t_0)A} \boldsymbol{X}_0(t_0) = \sum_{i=1}^m C_i(t_0) \boldsymbol{U}_i. \tag{3.10}$$

最低次の不変多様体 M_0 の自然なパラメトリゼイションは積分定数 $\boldsymbol{C} = {}^t(C_1, C_2, \cdots, C_m)$ で与えられている。
初期値を $\boldsymbol{X}_1(t_0)$ としたときの 1 次の方程式 (3.7) の解は、

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{X}}_1(t; t_0) &= \mathrm{e}^{(t - t_0)A} [\boldsymbol{X}_1(t_0) + A^{-1} Q \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0))] \\ &\quad + (t - t_0) P \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0)) - A^{-1} Q \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0)), \end{aligned} \tag{3.11}$$

である。右辺第１項はＰ空間からはずれた速い運動を含んでいる。しかし、この項は未だ決められていない初期値 $\boldsymbol{X}_1(t_0)$ を次のように選ぶことで消すことができる；

$$\boldsymbol{X}_1(t_0) = -A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t_0)). \tag{3.12}$$

$\boldsymbol{X}_1(t_0)$ はＰ空間と独立であり（$P\boldsymbol{X}_1(t_0) = 0$）、また、$\boldsymbol{C}(t_0)$ のみの関数であることを注意しておく。

こうして、１次の摂動解は

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_1(t;t_0) = (t-t_0)P\boldsymbol{F} - A^{-1}Q\boldsymbol{F}, \tag{3.13}$$

と構成できる。このとき、不変多様体は次のものに変更されている;$\mathrm{M}_1 = \{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 - \epsilon A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0)\}$.

ここまでで近似を止めるとすると、近似解は

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0) = \boldsymbol{X}_0 + \epsilon\{(t-t_0)P\boldsymbol{F} - A^{-1}Q\boldsymbol{F}\}, \tag{3.14}$$

となる。摂動により、Ｐ空間に属する永年項が出現したことに注意。　この解にくりこみ群方程式 $d\tilde{\boldsymbol{X}}/dt_0|_{t_0=t} = 0$ をかけると、

$$\dot{\boldsymbol{X}}_0(t) = \epsilon P\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0(t)), \tag{3.15}$$

が得られる。この方程式は $\boldsymbol{C}(t)$ についての m 次元連立方程式である；

$$\dot{C}_i(t) = \epsilon\langle\tilde{\boldsymbol{U}}_i, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}])\rangle, \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{3.16}$$

$dC_i/dt \sim O(\epsilon)$ なので、$\boldsymbol{C}(t)$ の運動は「ゆっくり」であることが分かる。この $\boldsymbol{C}(t)$ を用いて、大域的領域で妥当な解は次のように初期値として得られる；

$$\boldsymbol{X}(t) = \tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0=t) = \sum_{i=1}^{m} C_i(t)\boldsymbol{U}_i - \epsilon A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}]). \tag{3.17}$$

3.2　２次まで近似をすすめたとき

$t = t_0$ での初期値を $\boldsymbol{X}_2(t_0)$ としたときの２次の摂動方程式（3.8）の解は

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{X}}_2(t;t_0) \;=\; & \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\left[\boldsymbol{X}_2(t_0) - \left\{A^{-1}Q\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F} - A^{-2}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F}\right\}\right] \\ & + A^{-1}Q\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F} - A^{-2}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F} - (t-t_0)\left\{P\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F} + A^{-1}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F}\right\} \\ & + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 P\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F},\end{aligned} \tag{3.18}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{F}'$ の引数は $\boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}]$ である。初期値は第１項から生じうる速い運動を消す要請から、

$$\boldsymbol{X}_2(t_0) = A^{-1}Q\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X}_0)A^{-1}Q\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0) - A^{-2}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F}, \tag{3.19}$$

と決められる。これはＱ空間に属している。このことは、不変多様体がさらに $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}] + \boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{C}]$; $\boldsymbol{\rho} \simeq \epsilon\boldsymbol{X}_1 + \epsilon^2\boldsymbol{X}_2$ と変更されたことを意味する。

こうして、２次の摂動解は

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{X}}(t;t_0) &= \boldsymbol{X}_0(t_0) + \epsilon\{(t-t_0)P\boldsymbol{F} - A^{-1}Q\boldsymbol{F}\} \\
&\quad + \epsilon^2\Big[A^{-1}Q\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F} - A^{-2}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F} - (t-t_0)\Big\{P\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F} + A^{-1}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F}\Big\} \\
&\quad + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 P\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F}\Big],
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

となる。P 空間に属する新たな永年項の発生に注意。くりこみ群方程式 $d\tilde{\boldsymbol{X}}/dt_0|_{t_0=t} = 0$ は

$$
\dot{\boldsymbol{X}}_0(t) - \epsilon P\boldsymbol{F} - \epsilon A^{-1}Q\boldsymbol{F}'\dot{\boldsymbol{X}}_0 + \epsilon^2\Big\{P\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F} + A^{-1}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F}\Big\} = 0, \tag{3.21}
$$

となる。これに左から射影演算子 P、Q を作用させて

$$
\dot{\boldsymbol{X}}_0(t) - \epsilon P\boldsymbol{F} + \epsilon^2 P\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F} = 0, \tag{3.22}
$$

$$
-\epsilon A^{-1}Q\boldsymbol{F}'\dot{\boldsymbol{X}}_0 + \epsilon^2 A^{-1}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F} = 0, \tag{3.23}
$$

を得る。２番目の方程式（3.23）は

$$
\epsilon A^{-1}Q\boldsymbol{F}'(-\dot{\boldsymbol{X}}_0 + \epsilon P\boldsymbol{F}) = 0,
$$

と変形でき、このオーダーで（3.22）と等価であることがわかる。第１の方程式から $\boldsymbol{C}$ について閉じた方程式

$$
\dot{C}_i = \epsilon\langle\tilde{U}_i, \boldsymbol{F} - \epsilon\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F}\rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.24}
$$

が得られる。

大域的領域で妥当な軌道を与える解は初期値として次のように与えられる：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}(t) &= \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}] + \boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{C}] \\
&= \boldsymbol{X}_0[\boldsymbol{C}] - \epsilon A^{-1}Q\boldsymbol{F} + \epsilon^2\{A^{-1}Q\boldsymbol{F}'A^{-1}Q\boldsymbol{F} - A^{-2}Q\boldsymbol{F}'P\boldsymbol{F}\}.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

ただし、$\boldsymbol{C}(t)$ は (3.24) の解である。上式において $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{F}'$ の引数はすべて $\boldsymbol{C}$ である、すなわち、$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}[\boldsymbol{C}]$. $\boldsymbol{C}$ は非摂動解の積分定数であったことを注意しておく。

ここで与えた表式 (3.24) (あるいは、その「母」方程式 (3.22)) および (3.25) は縮約方程式として普遍的であり、多くの個別の縮約の問題はこれらの方程式に具体的な射影子 P および Q を代入するだけで得られる。

4　ボルツマン方程式の流体力学極限

上記の定式化の興味ある応用として、古典流体に対するボルツマン方程式の流体力学極限をくりこみ群法で求めてみる [34]。

4.1　ボルツマン方程式に関する基本的事項 [37]

ボルツマン方程式　ボルツマン方程式は位相空間 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ における１体分布関数 $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$ の時間変化を与える発展方程式であり、次のように書ける：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = I[f]. \tag{4.26}$$

ここに、左辺は運動方程式に従う変化を表し、右辺は衝突による変化を与える「衝突積分」である；

$$\begin{aligned} I[f] \;\; = \;\; & \int d\boldsymbol{v}_1 \int d\boldsymbol{v}' \int d\boldsymbol{v}'_1 w(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{v}'_1) \\ & \times\Big\{ f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'_1, t) - f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1, t) \Big\}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

遷移確率 $w(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{v}'_1)$ は微視的な運動法則の時間反転不変性のため次の対称性を持つ；

$$w(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{v}'_1) = w(\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{v}'_1|\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_1). \tag{4.28}$$

また、衝突する粒子の入れ替えに対する不変性より、

$$w(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{v}'_1) = w(\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}'_1\,\boldsymbol{v}') = w(\boldsymbol{v}'_1\,\boldsymbol{v}'|\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{v}), \tag{4.29}$$

を得る。最後の等式では (4.28) を用いた。

保存則とバランス方程式　衝突過程で粒子数、全運動量および運動エネルギーが保存されることより、衝突積分に対して次の恒等式が成り立つ；

$$\int d\boldsymbol{v} I[f] = 0, \quad \int d\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} I[f] = 0, \quad \int d\boldsymbol{v} v^2 I[f] = 0. \tag{4.30}$$

一般に、$\boldsymbol{v}$ の関数 $\varphi(\boldsymbol{v})$ が

$$\int d\boldsymbol{v} \varphi(\boldsymbol{v}) I[f] = 0, \tag{4.31}$$

を満たすとき、$\varphi(\boldsymbol{v})$ を「衝突不変量」という。衝突不変量 $\varphi(\boldsymbol{v})$ に対し、その密度 n_φ と流れ $\boldsymbol{j}_\varphi$ は次のように与えられる；

$$n_\varphi = \int d\boldsymbol{v} \varphi(\boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t), \quad \boldsymbol{j}_\varphi = \int d\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \varphi(\boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t). \tag{4.32}$$

このとき、次の連続の式（バランス方程式）が成り立つ；

$$\partial_t n_\varphi + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_\varphi = 0. \tag{4.33}$$

こうして、粒子数、全運動量および運動エネルギーの保存に対する連続の式（バランス方程式）として形式上　次の流体方程式が得られる：

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0, \tag{4.34}$$

$$\partial_t (\rho u_i) + \partial_j (\rho u_j u_i) + \partial_j P_{ji} = 0, \tag{4.35}$$

$$\partial_t (\rho \frac{u^2}{2} + e) + \partial_i \Big[(\rho \frac{u^2}{2} + e) u_i + Q_i \Big] + \partial_i (P_{ij} u_j) = 0. \tag{4.36}$$

ただし、ρ, $\boldsymbol{u}$, e, P_{ij}, Q_i はそれぞれ、以下で定義される、密度、流速、エネルギー密度、圧力テンソル、熱流束である；

$$\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{r},t) &= m\int d\boldsymbol{v} f(\boldsymbol{r},bfv,t) = mn(\boldsymbol{r},t), && (4.37)\\
\rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) &= m\int d\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} f(\boldsymbol{r},bfv,t), && (4.38)\\
e(\boldsymbol{r},t) &= \int d\boldsymbol{v}\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^2 f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t), && (4.39)\\
P_{ij}(\boldsymbol{r},t) &= \int d\boldsymbol{v} m(v_i-u_i)(v_j-u_j) f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t), && (4.40)\\
Q_i(\boldsymbol{r},t) &= \int d\boldsymbol{v}\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^2 (v_i-u_i) f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t). && (4.41)
\end{aligned}$$

ここで「形式上」と言ったのは、未だ分布関数 f の具体的形が求まっている訳ではないからである。ボルツマン方程式は統計力学の方程式なので、内部エネルギーの表式や輸送係数が具体的に求まらなければ意味がない。

H 定理　H 関数を次のように定義する：

$$H(\boldsymbol{r},t) = \int d\boldsymbol{v}\, f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)(\ln f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)-1). \tag{4.42}$$

平衡状態では、H 関数はエントロピー S の符号を替えたものに等しい。対応する流れを

$$\boldsymbol{J}_H(\boldsymbol{r},t) = \int d\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v}\, f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)(\ln f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)-1), \tag{4.43}$$

と定義すると次のバランス方程式が成り立つ：

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J}_H = \int d\boldsymbol{v}\, I[f]\ln f. \tag{4.44}$$

この式は、$\ln f$ が衝突不変量のとき、H 関数が保存されることを示している。これは、$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ が後の (4.57) で与えられる局所平衡分布になるときであることを示すことができる。

4.2　流体方程式の導出

§2 あるいは §3 の一般論に対応させるため、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}_i$ と離散化する [24]。そして、$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_i,t)$ の引数の中 $(\boldsymbol{r},t)$ と $\boldsymbol{v}_i$ を区別し、$\boldsymbol{v}_i$ を分布関数の添え字として扱う；

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_i,t) = f_i(\boldsymbol{r},t) \equiv (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},t))_i. \tag{4.45}$$

このとき、ボルツマン方程式は、

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \hat{I}[\boldsymbol{f}]_i - \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{4.46}$$

となる。ここに、

$$\hat{I}[\boldsymbol{f}]_i = \sum_{j,k,l} w(\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j|\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_l)(f_kf_l - f_if_j)(\boldsymbol{r},t). \tag{4.47}$$

流体が長波長のゆっくりした運動をしている状態を考え、

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}} = O(\epsilon), \quad ; |\epsilon| < 1, \tag{4.48}$$

であるとする。この小ささを形式的に取り入れるため、スケールされた位置座標 $\bar{\boldsymbol{r}}$ を次のように導入しよう；

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \epsilon \boldsymbol{r}, \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}}. \tag{4.49}$$

このとき、(4.46) は

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \hat{I}[\boldsymbol{f}]_i - \epsilon \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}}, \tag{4.50}$$

となり、§2 での摂動論が適用できる形式になる。

解を $f_i(\bar{\boldsymbol{r}}, t) = f_i^{(0)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t) + \epsilon f_i^{(1)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t) + \cdots,$ と展開しておく。$f_i(\bar{\boldsymbol{r}}, t_0)$ を初期値とする $t \sim t_0$ での摂動解を $\tilde{f}_i(\bar{\boldsymbol{r}}, t; t_0))$ とする；

$$\tilde{f}_i(\bar{\boldsymbol{r}}, t = t_0; t_0) = f_i(\bar{\boldsymbol{r}}, t_0). \tag{4.51}$$

$\tilde{f}_i(\bar{\boldsymbol{r}}, t; t_0))$ の摂動展開を

$$\tilde{f}_i(\bar{\boldsymbol{r}}, t; t_0) = \tilde{f}_i^{(0)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t; t_0) + \epsilon \tilde{f}_i^{(1)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t, t_0) + \cdots, \tag{4.52}$$

とし、各次数での初期条件を次のように設定する；

$$\tilde{f}_i^{(l)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t = t_0; t_0) = f_i^{(l)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t_0), \quad (l = 0, 1, 2...). \tag{4.53}$$

0 次の方程式は

$$\frac{\partial \tilde{f}_i^{(0)}}{\partial t} = (I[\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}])_i. \tag{4.54}$$

われわれは $t \to \infty$ での漸近的なゆっくりした運動に興味があるので、0 次解として定常解

$$\frac{\partial \tilde{f}_i^{(0)}}{\partial t} = 0, \tag{4.55}$$

を取る。この解は任意の $\bar{\boldsymbol{r}}$ に対して、

$$(\hat{I}[\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}])_i = 0, \tag{4.56}$$

を満たす方程式の固定点である。また、(4.56) は分布関数 $\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}$ が衝突不変項のみの関数であることを示している。そのような分布関数は局所平衡分布関数、すなわち、次のマクスウェル分布関数である；

$$\tilde{f}_i^{(0)}(\bar{\boldsymbol{r}}, t; t_0) = n(\bar{\boldsymbol{r}}, t_0)\left(\frac{m}{2\pi k_B T(\bar{\boldsymbol{r}}, t_0)}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{r}}, t_0)|^2}{2\pi k_B T(\bar{\boldsymbol{r}}, t_0)}\right]. \tag{4.57}$$

ここで、局所密度 n, 局所温度 T, 局所流速 $\boldsymbol{u}$ がすべて、任意の初期時間 t_0 と置座標 $\bar{\boldsymbol{r}}$ に依存するが時間 t にには依存しないことを注意しておく。

1 次の摂動方程式は

$$\left((\frac{\partial}{\partial t}-A)\tilde{f}^{(1)}\right)_i = -\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial\tilde{f}_i^{(0)}}{\partial\bar{\boldsymbol{r}}} \tag{4.58}$$

と書ける。ここに、A は

$$\left[\hat{I}'[\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}]\tilde{\boldsymbol{f}}^{(1)}\right]_i = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial I}{\partial\tilde{f}_j}\Big|_{\tilde{\boldsymbol{f}}=\tilde{\boldsymbol{f}}^0}\cdot\tilde{f}_j^{(1)} \equiv (A\tilde{\boldsymbol{f}}^{(1)})_i. \tag{4.59}$$

によって定義される線形演算子である。適当に内積を定義すると、A は自己共役であり、5 つの衝突不変量、$m, \boldsymbol{v}, \frac{m}{2}v^2$ を 0 固有ベクトルとし、それ以外の固有値は負であることを示すことができる [37]。P を A の 0 固有値の張る部分空間への射影演算子、Q = 1− P と定義する。

§3 の一般論がそのまま適用できて、

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^{(1)} = -(t-t_0)\mathrm{P}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}}{\partial\bar{\boldsymbol{r}}} + A^{-1}\mathrm{Q}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}}{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}, \tag{4.60}$$

と求まり、ϵ^1 までの摂動解は

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\bar{\boldsymbol{r}},t,t_0) = \tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}(\bar{\boldsymbol{r}},t,t_0) + \epsilon[-(t-t_0)\mathrm{P}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}}{\partial\bar{\boldsymbol{r}}} + A^{-1}\mathrm{Q}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}}{\partial\bar{\boldsymbol{r}}}]. \tag{4.61}$$

となる。

ここで近似を止めると、くりこみ群方程式、$\partial\tilde{\boldsymbol{f}}/\partial t_0|_{t_0=t} = \boldsymbol{0}$ より、

$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}}{\partial t} + \epsilon\mathrm{P}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}}{\partial\bar{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{0}, \tag{4.62}$$

が得られる。これは $\tilde{\boldsymbol{f}}^{(0)}$ の中の $n(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ および $T(\boldsymbol{r},t)$ についての運動方程式、すなわち、流体方程式を与える。実際、順次 m, $m\boldsymbol{v}$ そして $mv^2/2$ との内積を取ると (4.34) に与えたバランス方程式としての流体方程式が得られるが、今や、f が具体的に求まっているので、エネルギー密度 e、圧力テンソル P_{ij} および熱流束 Q_i が次のように具体的に与えられる：

$$e(\boldsymbol{r},t) = \int d\boldsymbol{v}\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^2 f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \frac{3}{2}k_BT(\boldsymbol{r},t), \tag{4.63}$$

$$P_{ij}(\boldsymbol{r},t) = \int d\boldsymbol{v}m(v_i-u_i)(v_j-u_j)f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = nk_BT(\boldsymbol{r},t)\delta_{ij} \equiv P(\boldsymbol{r},t)\delta_{ij}, \tag{4.64}$$

$$Q_i(\boldsymbol{r},t) = \int d\boldsymbol{v}\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|^2(v_i-u_i)f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = 0. \tag{4.65}$$

ここで、第 2 式において理想気体の状態方程式を使って圧力 P を定義した。$f^{(0)}$ が局所平衡分布なので熱流束はない。これらを (4.34) に代入すると、この近似では次の、散逸のない流体方程式（オイラー方程式）が得られることになる：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\boldsymbol{u} = 0, \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}P = 0, \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^2 + e) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\rho\frac{u^2}{2} + e + P)u_i\right] = 0. \tag{4.68}$$

ただし、このときの分布関数は

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)+A^{-1}\mathrm{Q}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{4.69}$$

となり、摂動により局所平衡分布からのずれが生まれこれが散逸の効果を表している。

2 次の摂動解を求めると散逸効果の入った流体方程式（ナビエ-ストークス方程式）が得られ、粘性率などの輸送係数が具体的に求められる。実際、2 次の摂動方程式は

$$\left((\frac{\partial}{\partial t}-A)\tilde{f}^{(2)}\right)_i=-\boldsymbol{v}_i\cdot\frac{\partial \tilde{f}_i^{(1)}}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}} \tag{4.70}$$

と書ける。　ただし、衝突積分の $\tilde{\boldsymbol{f}}^{(1)}$ について 2 次の項は無視した[10] 。§3 の解がそのまま使えて、結局くりこみ群方程式は

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}+\epsilon\mathrm{P}\boldsymbol{v}\cdot\nabla f^{(0)}-\epsilon^2\mathrm{P}\boldsymbol{v}\cdot\nabla A^{-1}\mathbf{Q}\boldsymbol{v}\cdot\nabla f^{(0)}=0, \tag{4.71}$$

となる。　この第 3 項は散逸の効果を表している。この項から様々の輸送係数の表式が与えられる。

5　おわりに

ここで紹介した系のゆっくりした運動を取り出す方法としてのくりこみ群法は、他の問題にも適用できる。たとえば、クラマース方程式から断熱的に速い運動を消去して Sumorkowski 方程式を導くフォッカー-プランク方程式の縮約の問題、また、ランジュバン方程式からフォッカー-プランク方程式を導く問題など [38] である。また、BBGKY 階層からボルツマン方程式を導くこともくりこみ群法でできるはずである。有限温度での場の理論への応用については [11, 26] を参照。

参考文献

[1] S. Weinberg, Phys. Rev. **D 9**(1974), 3357; D.A. Kirzhnits and A.D. Linde, Ann. Phys. **101** (1976), 195.

[2] T. Altherr, Phys. Lett. **B238** (1990), 360; N. Banerjee and S. Mallik, Phys. Rev. **D 43** (1991), 3368; S. Chiku and T. Hatsuda, Phys. Rev. bf D57 (1998), R6.

[3] R. D. Pisarski, Phys. Rev. Lett. **63**(1989), 1129; E. Braaten and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. **B337** (1990) 569; ibid., **B339**(1990), 310. その他多くの関連する文献を含む有限温度の場の理論の摂動論の総合報告として次のモノグラフが参考になる; M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1996).

[4] J. P. Blaizot, E. Iancu and J.-Y. Ollitrault, in *Quark Gluon Plasma II*, ed. by R. C. Hwa (World Scientific, Singapore, 1996).

[5] L. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, (Benjamin, New York, 1962); A. A. Abrikosov, L.P. Gorkov and I.E. Dzyaloshinski, 「統計物理学における場の量子論の方法」(松原武生 他訳) (東京図書、1970).

[10] この項からはいわゆるバーネット項が現れる。

[6] A. Niegawa, Prog. Theor. Phys. **102** (1999), 1; `hep-th/9810043`.

[7] K. Kawasaki and I. Oppenheim, Phys. Rev. **A 139** (1965), 1763.

[8] 川崎　恭治、「非平衡と相転移 — メソスケールの統計物理学 —」（朝倉書店　２０００年）.

[9] L. E. Reichl, 「現代統計物理 下」(鈴木増雄 監訳)(丸善、1984). 原著は 1998 年に第二版が出ている。

[10] K. Takashiba, Int. J. Mod. Phys. **A 11** (1996) 2309; J. -P. Blaizot and E. Iancu, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3080.

[11] D. Boyanovsky and H.J. de Vega, Phys.Rev. **D59** (1999), 105019; D. Boyanovsky, H.J. de Vega and S. -Y. Wang, Phys.Rev. **D61** (2000), 06506 and the references cited therein.

[12] N. Goldenfeld, O. Martin and Y. Oono,*J. Sci. Comp.* **4**(1989),4; N. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono and F. Liu,*Phys. Rev. Lett.* **64** (1990), 1361; N. D. Goldenfeld, "Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group,"Addison-Wesley, Reading, Mass., 1992. L. Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono and G. Paquette, *Physica* **A 204**(1994)111. G. Paquette, L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono,*Phys. Rev. Lett.* **72**(1994)76; L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono,*Phys. Rev. Lett.***73**(1994)1311; L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono,*Phys. Rev.* **E 54** (1996), 376. 日本語の文献では、大野 克嗣, 日本物理学会誌、**52**(1997), 501.

[13] E.C.G. Stuckelberg and A. Petermann, Helv. Phys. Acta **26**(1953), 499.
M. Gell-Mann and F. E. Low, Phys. Rev. **95** (1953), 1300.
次の論文の Appendix は後者の論文についての優れた解説になっている; K. Wilson,Phys. Rev.**D3** (1971)1818。また、次の解説も読みごたえがある; S. Weinberg, in *Asymptotic Realms of Physics*, ed. A. H. Guth et al. (MIT Press, 1983)。

[14] S.K. Ma, "Modern Theory of Critical Phenomena", W. A. Benjamin, New York, 1976. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1989). , K.-I. Aoki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131**(1998), 129. 厳密な定式化に興味がある人には日本語の文献としては、江沢 洋他「くりこみ群の方法」岩波書店 (1994 年)、を挙げることができる。

[15] K.G.Wilson and M.E.Fisher, Phys. ReV. Lett. **28** (1972), 240; K.G. Wilson, Phys. Rev. Lett.**28**(1972), 548; K.G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12C** (1974), 75. ウイルソンのくりこみ群の基礎とその意義を述べた最近の文献として、M. E. Fisher, Rev. Mod. Phys., **70** (1998), 653.

[16] F. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. **A8** (1973),401.

[17] S. Weinberg,"The Quantum Theory of Fields II", Cambridge U.P., 1996.

[18] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, New York, 1978).

[19] N.N. Bogoliubov, *in* " Studies in Statistical Mechanics", vol.1, (J. de Boer and G.E. Uhlenbeck Ed.)North-Holland.

[20] S. Chapman and T.G. Cowling, “The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases” (3rd ed.) Cambridge U.P., 1970.

[21] P. Ring and Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, (Springer-Verlag, New York, 1980); T. Marumori, T. Maskawa, F. Sakata and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 1294; M. Yamamura and A. Kuriyama, Prog. Theor. Phys. Suppl. **93** (1987).

[22] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B61** (1973), 45; T. Eguchi and H. Sugawara, Phys. Rev. **D10** (1974), 4257; Y. Nambu, Phys. Rev. **D 10** (1974) 4262; G. C. Baronco, B. Sakita and P. Senjanovic, Phys. Rev. **D10** 2573, 2582; A. Hosoya and K. Kikkawa, Nucl. Phys. **101** (1975) 271.

[23] 俣野　博、「微分方程式　I」岩波講座 **応用数学**、（岩波書店、１９９３）; 藤井 宏、岡本 久、「非線型力学」岩波講座 **応用数学**、（岩波書店、１９９３）; J. D. Crawford, Rev. Mod. Phys. **63** (1991), 991.

[24] Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **99** (1989), 244; 蔵本 由紀、物性研究 **49**(1987) 299.

[25] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio,*Phys. Rev.* **122** (1961), 345; QCD の赤外有効理論としてのこの模型についての総合報告として、S. Klevanski, *Rev. Mod. Phys.***64** (1992), 649; T. Hatsuda and T. Kunihiro,*Phys. Rep.* **247** (1994), 221; J. Bijnens,*Phys. Rep.* **265**(1996), 369.

[26] 八田 佳孝、次の報告。

[27] T.Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **94** (1995), 503; (E) **95** (1996), 835; Jpn. J. Ind. Appl. Math. **14**(1997),51.

[28] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **97**(1997).

[29] T. Kunihiro, Phys. Rev. **D57**(1998).

[30] T. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998), 459; また、`patt-sol/979003` も参照.

[31] S.-I. Ei, K. Fujii and T. Kunihiro, Ann. Phys. **280** (2000), 236.

[32] T. Kunihiro and J. Matsukidaira, *Phys. Rev.* **E57** (1998), 4817.

[33] M. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn.,**55** (1986), 4205; *Coherent Anomaly Method; Mean Field, Fluctuations and Systematics*, M. Suzuki et al ed. (World Scientific, 1995).

[34] T. Kunihiro, (1999, May) ,unpublished; この仕事の内容は私の指導のもとに次の修士論文にまとめられている；安立 悦朗,「くりこみ群方程式のボルツマン方程式の流体力学極限への適用」, 1999 年度龍谷大学理工学研究科修士論文、2000 年 2 月提出。

[35] T. Kunihiro, in preparation.

[36] G. B. Whitham, *Linear and Non-linear waves*, (John Wiley and Sons, 1977).

[37] D. Resibois and M. DeLeener, *Classical Kinetic Theory of Fluids*, (John Wiley and Sons, 1977): 北原　和夫· 吉川研一、「非平衡系の科学　I」第３章（北原和夫執筆）（講談社 1994); イェ· エム · リフシッツ、エリ · ペ · ピタエフスキー、「物理的運動学　１」　（東京図書、１９８２）.

[38] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* 2nd ed. (Springer, 1985); K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **66** (1981) 129; M. Matsuo and S. Sasa, `cond-mat/9810220`; 松尾美希、物性研究 **73**-3 (1999-12), 557.