TK-NOTE/11-13-2 (improved version of TK-NOTE/11-13)
since: September 02, 2012
last update: 2014-08-29 22:31

4D $\mathcal{N} = 2$ Conformal Supergravity

Tetsuji Kimura

Department of Physics, Rikkyo University,
Nishi-Ikebukuro, Tokyo 171-8501, Japan

tetsuji _at_ rikkyo.ac.jp

Contents

Part I

de Wit's $\mathcal{N} = 2$ conformal SUGRA on 4D Lorentzian spaces

1 Field contents

	Weyl multiplet											parameters	
	P_a	Q_i	D	A	$\mathsf{V}^j{}_i$	–	–	–	M_{ab}	K_a	S_i		
	$e_\mu{}^a$	ψ^i_μ	b_μ	A_μ	$\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j$	$T_{ab}{}^{ij}$	χ^i	D	$\omega_\mu{}^{ab}$	$f_\mu{}^a$	ϕ^i_μ	ϵ^i	η^i
w	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1	$\frac{3}{2}$	2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
c	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
γ_5		$+$					$+$				$-$	$+$	$-$
#	5	16	0	3	9	6	8	1	composite				

off-shell vector multiplet				
	X^Λ	Ω^Λ_i	W^Λ_μ	Y^Λ_{ij}
w	1	$\frac{3}{2}$	0	2
c	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0
γ_5		$+$		
#	2	8	3	3

on-shell hypermultiplet				
	$A_i{}^\alpha(\phi)$	$A^{i\overline{\alpha}}(\phi)$	ζ^α	$\zeta^{\overline{\alpha}}$
w	1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
c	0	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
γ_5			$-$	$+$
#	2	2	2	2

indices
$\mu = 0, 1, 2, 3$ (spacetime)
$a = \dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}$ (local Lorentz)
$i = 1, 2$ ($SU(2)_{\mathrm{R}}$)
$\Lambda = 0, 1, \ldots, n_{\mathrm{V}}$
$A = 1, 2, \ldots, 4(n_{\mathrm{H}}+1)$
$\alpha = 1, 2, \ldots, 2(n_{\mathrm{H}}+1)$

$$\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j = -\mathcal{V}_{\mu j}{}^i\,, \quad \mathcal{V}_\mu{}^i{}_i = 0\,, \quad \omega_\mu{}^{ab} = \omega_\mu{}^{[ab]}\,, \quad Y^\Lambda_{ij} = Y^\Lambda_{(ij)}\,, \tag{1.1a}$$

$$T_{ab}{}^{ij} = T_{[ab]}{}^{[ij]}\,, \quad \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}T^{cdij} = -T_{ab}{}^{ij}\,, \quad \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}T^{cd}{}_{ij} = +T_{abij}\,, \tag{1.1b}$$

$$\Omega^{i\Lambda} = (\Omega^\Lambda_i)^c\,, \qquad A^{i\overline{\alpha}} = (A_i{}^\alpha)^*\,, \qquad \zeta^{\overline{\alpha}} = (\zeta^\alpha)^* = (\zeta^\alpha)^c\,, \tag{1.1c}$$

$$(\mathcal{V}_{\mu i}{}^j)^* = \mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\,, \qquad (Y^\Lambda_{ij})^* = Y^{ij\Lambda} = \varepsilon^{ik}\varepsilon^{jl}\,Y^\Lambda_{kl}\,, \qquad (T_{abij})^* = T_{ab}{}^{ij}\,. \tag{1.1d}$$

規格化は $\varepsilon^{12} = +1 = \varepsilon_{12}$。ちなみに $\varepsilon^{ij} = (\mathrm{i}\sigma_2)^{ij}$ であり、$\varepsilon^{kj}\varepsilon_{ji} = -\delta^k_i$ である。

ここで改めて自由度勘定の計算を明記しておく (右辺の括弧 [..] はゲージ自由度を担う生成子):

$$e_\mu{}^a: \quad 5 = 4_{(\mu)} \times 4_{(a)} - 4[P^a] - 6[M_{ab}] - 1[D]\,, \tag{1.2a}$$

$$b_\mu: \quad 0 = 4_{(\mu)} - 4[K^a]\,, \tag{1.2b}$$

$$V_\mu{}^i{}_j: \quad 9 = 4_{(\mu)} \times (2^2-1)_{(i,j)} - 3[SU(2)_{\mathrm{R}}] \quad (i,j = 1,2;\ \text{anti-hermitian, traceless}) \tag{1.2c}$$

$$A_\mu: \quad 3 = 4_{(\mu)} - 1[U(1)_{\mathrm{R}}]\,, \tag{1.2d}$$

$$\psi^i_\mu: \quad 16 = (\tfrac{1}{2} \times 2 \cdot 2^{[4/2]}) \times 4_{(\mu)} \times 2_{(i)} - 8[Q^i] - 8[S^i]\,, \tag{1.2e}$$

$$T_{ab}{}^{ij}: \quad 6 = ({}_4C_2)_{(a,b)}\,, \tag{1.2f}$$

$$\chi^i: \quad 8 = (\tfrac{1}{2} \times 2 \cdot 2^{[4/2]}) \times 2_{(i)}\,. \tag{1.2g}$$

Real antisymmetric anti-selfdual tensor $T_{ab}{}^{ij}$ の自由度の勘定に注意。antisymmetry と (anti-)selfduality は complex conjugate を通じて関係する ($(T_{abij})^* = T_{ab}{}^{ij}$)。つまり antisymmetry と (anti-)selfduality の条件は独立ではない。そのため、自由度勘定は antisymmetry から読み取れば良い (例として [3] section 3.2.2 のコメント)。

2 Ungauged conformal Lagrangian

2.1 Lagrangian

$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{(1)}_{\text{kin}} + \mathscr{L}^{(2)}_{\text{kin}} + \mathscr{L}_{\text{aux}} + \mathscr{L}_{\text{conf}} + \mathscr{L}_{\text{H,conf}}$:

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}^{(1)}_{\text{kin}} &= -N_{\Lambda\Sigma}\mathcal{D}_\mu X^\Lambda \mathcal{D}^\mu \overline{X}^\Sigma - \frac{1}{4}N_{\Lambda\Sigma}\Big[\overline{\Omega}^{i\Lambda}\not{\mathcal{D}}\Omega^\Sigma_i + \overline{\Omega}^\Lambda_i \not{\mathcal{D}}\Omega^{i\Sigma}\Big] \\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{4}\Big[F_{\Lambda\Sigma\Gamma}\overline{\Omega}^\Lambda_i \not{\mathcal{D}} X^\Sigma \Omega^{i\Gamma} - \overline{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}\overline{\Omega}^{i\Lambda}\not{\mathcal{D}}\overline{X}^\Sigma\Omega^\Gamma_i\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}N_{\Lambda\Sigma}\Big[\overline{\psi}^i_\mu \not{\mathcal{D}}\overline{X}^\Lambda\gamma^\mu\Omega^\Sigma_i + \overline{\psi}_{\mu i}\not{\mathcal{D}} X^\Lambda\gamma^\mu\Omega^{i\Sigma}\Big]\,, \qquad (2.1a)\\
e^{-1}\mathscr{L}^{(2)}_{\text{kin}} &= \frac{\mathrm{i}}{4}\Big[F_{\Lambda\Sigma}F^{-\Lambda}_{\mu\nu}F^{-\mu\nu\Sigma} - \overline{F}_{\Lambda\Sigma}F^{+\Lambda}_{\mu\nu}F^{+\mu\nu\Sigma}\Big] \\
&\quad + \Big[\mathcal{O}^-_{\mu\nu\Lambda}F^{-\mu\nu\Lambda} - N^{\Lambda\Sigma}\mathcal{O}^-_{\mu\nu\Lambda}\mathcal{O}^{-\mu\nu}_\Sigma + (\text{h.c.})\Big]\,, \qquad (2.1b)\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\text{aux}} &= \frac{1}{8}N^{\Lambda\Sigma}\Big[N_{\Lambda\Gamma}Y^\Gamma_{ij} + \frac{\mathrm{i}}{2}\big(F_{\Lambda\Gamma\Pi}\overline{\Omega}^\Gamma_i\Omega^\Pi_j - \overline{F}_{\Lambda\Gamma\Omega}\overline{\Omega}^{k\Gamma}\Omega^{l\Pi}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\big)\Big] \\
&\qquad \times \Big[N_{\Sigma\Xi}Y^{ij\Xi} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big(\overline{F}_{\Sigma\Xi\Delta}\overline{\Omega}^{i\Xi}\Omega^{j\Delta} - F_{\Sigma\Xi\Delta}\overline{\Omega}^\Xi_m\Omega^\Delta_n\varepsilon^{im}\varepsilon^{jn}\big)\Big]\,, \qquad (2.1c)\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\text{conf}} &= \frac{1}{6}K\Big[R + \big(e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}^i_\mu\gamma_\nu\mathcal{D}_\rho\psi_{\sigma i} - \overline{\psi}^i_\mu\psi^j_\nu T^{\mu\nu}{}_{ij} + (\text{h.c.})\big)\Big] \\
&\quad - K\Big[D + \frac{1}{2}\overline{\psi}^i_\mu\gamma^\mu\chi_i + \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu\chi^i\Big] \\
&\quad - \Big[K_\Lambda\Big(\frac{1}{4}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma_\nu\psi^i_\rho\mathcal{D}_\sigma X^\Lambda + \frac{1}{48}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu\gamma_{\rho\sigma}\Omega^\Lambda_j T^{\rho\sigma ij}\Big) + (\text{h.c.})\Big] \\
&\quad - \Big[K_\Lambda\Big(\frac{1}{3}\overline{\Omega}^\Lambda_i\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\psi^i_\nu - \overline{\Omega}^\Lambda_i\chi^i\Big) + (\text{h.c.})\Big]\,, \qquad (2.1d)\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\text{H,conf}} &= \frac{1}{6}\chi\Big[R + \Big(e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}^i_\mu\gamma_\nu\mathcal{D}_\rho\psi_{\sigma i} - \frac{1}{4}\overline{\psi}^i_\mu\psi^j_\nu T^{\mu\nu}{}_{ij} + (\text{h.c.})\Big)\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi\Big[D + \frac{1}{2}\overline{\psi}^i_\mu\gamma^\mu\chi_i + \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu\chi^i\Big] \\
&\quad - \frac{1}{2}G_{\overline{\alpha}\beta}\mathcal{D}_\mu A_i{}^\beta\mathcal{D}^\mu A^{i\overline{\alpha}} - G_{\overline{\alpha}\beta}\big(\overline{\zeta^{\overline{\alpha}}}\not{\mathcal{D}}\zeta^\beta + \overline{\zeta}^\beta\not{\mathcal{D}}\zeta^{\overline{\alpha}}\big) - \frac{1}{4}W_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}\,\overline{\zeta^{\overline{\alpha}}}\gamma_\mu\zeta^\beta\,\overline{\zeta^{\overline{\gamma}}}\gamma^\mu\zeta^\delta \\
&\quad - \chi_A\Big[\gamma^A_{i\overline{\alpha}}\Big(\frac{2}{3}\overline{\zeta^{\overline{\alpha}}}\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\psi^i_\nu + \overline{\zeta^{\overline{\alpha}}}\chi^i - \frac{1}{6}\overline{\zeta^{\overline{\alpha}}}\gamma_\mu\psi_{\nu j}T^{\mu\nu ij}\Big) + (\text{h.c.})\Big] \\
&\quad + \Big[\frac{1}{16}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\overline{\zeta}^\alpha\gamma^{\mu\nu}\zeta^\beta T_{\mu\nu ij}\varepsilon^{ij} - \frac{1}{2}\overline{\zeta}^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_{\mu i}\big(\overline{\psi}^i_\nu G_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^{\overline{\beta}} + \varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\overline{\psi}_{\nu j}\zeta^\beta\big) \\
&\qquad + G_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\zeta}^\beta\gamma^\mu\not{\mathcal{D}}A^{i\overline{\alpha}}\psi_{\mu i} - \frac{1}{4}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\psi}^i_\mu\gamma_\nu\psi_{\rho j}A_i{}^\beta\mathcal{D}_\sigma A^{j\overline{\alpha}} + (\text{h.c.})\Big]\,. \qquad (2.1e)
\end{aligned}$$

(2.1a) 第三行の相対符号は正である。

念のため [7] (次式の左辺) と [1] (次式の右辺) との違いを明記しておく [2011 12/02]:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\,, \qquad N_{IJ} = -N_{\Lambda\Sigma}\,. \qquad (2.2)$$

2.2 Constituents in ungauged system

2.2.1 Covariant derivatives w.r.t. M_{ab}, D, $U(1)_{\mathbf{R}}$ and $SU(2)_{\mathbf{R}}$

任意の場の変換 $\phi(x) \to \exp\big[w\Lambda_{\mathsf{D}}(x) + {\rm i}c\Lambda_{U(1)}(x)\big]\phi(x)$ についての共変微分 ([1, 7] に共通):

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu X^\Lambda &= \big(\partial_\mu - b_\mu + {\rm i}A_\mu\big)X^\Lambda\,, &(2.3a)\\
\mathcal{D}_\mu \Omega_i^\Lambda &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{3}{2}b_\mu + \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\Omega_i^\Lambda - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\Omega_j^\Lambda\,, &(2.3b)\\
\mathcal{D}_\mu \epsilon^i &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd} + \frac{1}{2}b_\mu + \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\epsilon^i + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\epsilon^j\,, &(2.3c)\\
\mathcal{D}_\mu \psi_a^i &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd} + \frac{1}{2}b_\mu + \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\psi_a^i + \omega_{\mu a}{}^b\psi_b^i + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\psi_a^j\,, &(2.3d)\\
\mathcal{D}_\mu T_{ab}{}^{ij} &= \Big(\partial_\mu - b_\mu + {\rm i}A_\mu\Big)T_{ab}{}^{ij} + \omega_{\mu a}{}^c T_{cb}{}^{ij} + \omega_{\mu b}{}^c T_{ac}{}^{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_k T_{ab}{}^{kj} + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_k T_{ab}{}^{ik}\,, &(2.3e)\\
\mathcal{D}_\mu \chi^i &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd} - \frac{3}{2}b_\mu + \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\chi^i + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\,\chi^j\,. &(2.3f)
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}_\mu\psi_a^i$ など Weyl multiplet に属す場の共変微分はどこにも書いていないが、Lorentz, dilatation, $U(1)_{\rm R}$, $SU(2)_{\rm R}$ 変換に伴うそれぞれの connection A_μ, $\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j$ を考慮した。超対称変換の定義より ψ_μ^i と ϵ^i は (vector index を除いて) 同じ性質なので、$U(1)_{\rm R}$-, $SU(2)_{\rm R}$-gauge について ([1] に明記されている意味で) 既知の ϵ^i から未知の ψ_μ^i を演繹した。ここで traceless anti-hermitian $\mathcal{V}_\mu{}^i{}_i = 0$, $\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j = (\mathcal{V}_{\mu i}{}^j)^* = -\mathcal{V}_{\mu j}{}^i$ (3.28), (A.7)[7] を用いて、上記の hermitian conjugate を明記する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \overline{X}^\Lambda &= \big(\partial_\mu - b_\mu - {\rm i}A_\mu\big)\overline{X}^\Lambda\,, &(2.4a)\\
\mathcal{D}_\mu \Omega^{i\Lambda} &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{3}{2}b_\mu - \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\Omega^{i\Lambda} + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\Omega^{j\Lambda}\,, &(2.4b)\\
\mathcal{D}_\mu \epsilon_i &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd} + \frac{1}{2}b_\mu - \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\epsilon_i - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\epsilon_j\,, &(2.4c)\\
\mathcal{D}_\mu \psi_{ai} &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd} + \frac{1}{2}b_\mu - \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\psi_{ai} + \omega_{\mu a}{}^b\psi_{bi} - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\psi_{aj}\,, &(2.4d)\\
\mathcal{D}_\mu T_{abij} &= \Big(\partial_\mu - b_\mu - {\rm i}A_\mu\Big)T_{abij} + \omega_{\mu a}{}^c T_{cbij} + \omega_{\mu b}{}^c T_{acij} - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^k{}_i T_{abkj} - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^k{}_j T_{abik}\,, &(2.4e)\\
\mathcal{D}_\mu \chi_i &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd} - \frac{3}{2}b_\mu - \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\chi_i - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\,\chi_j\,. &(2.4f)
\end{aligned}$$

hypermultiplets についての共変微分と、complex conjugate $(A_i^\alpha)^* = A^{i\overline{\alpha}}$, $(\zeta^\alpha)^c = \zeta^{\overline{\alpha}}$ で演繹される hermitian conjugate な表記を与える:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \phi^A &= \partial_\mu\phi^A - b_\mu\chi^A + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_k\varepsilon^{jk}k_{ij}{}^A\,, &(2.5a)\\
\mathcal{D}_\mu A_i{}^\alpha &= \big(\partial_\mu - b_\mu\big)A_i{}^\alpha + \frac{1}{2}\mathcal{V}_{\mu i}{}^j A_j{}^\alpha + \partial_\mu\phi^A\Gamma_A{}^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta\,, &(2.5b)\\
\mathcal{D}_\mu A^{i\overline{\alpha}} &= \big(\partial_\mu - b_\mu\big)A^{i\overline{\alpha}} - \frac{1}{2}\mathcal{V}_{\mu j}{}^i A^{j\overline{\alpha}} + \partial_\mu\phi^A\Gamma_A{}^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}A^{i\overline{\beta}}\,, &(2.5c)\\
\mathcal{D}_\mu \zeta^\alpha &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{3}{2}b_\mu + \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\zeta^\alpha + \partial_\mu\phi^A\Gamma_A{}^\alpha{}_\beta\zeta^\beta\,, &(2.5d)\\
\mathcal{D}_\mu \zeta^{\overline{\alpha}} &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{3}{2}b_\mu - \frac{\rm i}{2}A_\mu\Big)\zeta^{\overline{\alpha}} + \partial_\mu\phi^A\Gamma_A{}^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}}\zeta^{\overline{\beta}}\,. &(2.5e)
\end{aligned}$$

hermitian conjugate の表記の構築については、(3.22) にて詳細を議論する。

2.2.2 Local supersymmetry transformations

Vector multiplets:

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathsf{Q,S}} X^\Lambda &= \bar{\epsilon}^i \Omega_i^\Lambda \,, & (2.6a)\\
\delta_{\mathsf{Q,S}} W_\mu^\Lambda &= \varepsilon^{ij} \bar{\epsilon}_i \big(\gamma_\mu \Omega_j^\Lambda + 2\psi_{\mu j} X^\Lambda\big) + \varepsilon_{ij} \bar{\epsilon}^i \big(\gamma_\mu \Omega^{j\Lambda} + 2\psi_\mu^j \overline{X}^\Lambda\big) \,, & (2.6b)\\
\delta_{\mathsf{Q,S}} \Omega_i^\Lambda &= 2 \not{D} X^\Lambda \epsilon_i + \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \widehat{F}_{\mu\nu}^{-\Lambda} \varepsilon_{ij} \epsilon^j + Y_{ij}^\Lambda \epsilon^j + 2 X^\Lambda \eta_i \,, & (2.6c)\\
\delta_{\mathsf{Q,S}} Y_{ij}^\Lambda &= 2 \bar{\epsilon}_{(i} \not{D} \Omega_{j)}^\Lambda + 2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} \bar{\epsilon}^{(k} \not{D} \Omega^{l)\Lambda} \,. & (2.6d)
\end{aligned}$$

$D_\mu X^\Lambda$, $D_\mu \Omega_i^\Lambda$ は fully superconformal covariant derivatives である (具体形は? [2011 12/02])。また supercovariantized field strength を与える:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_{\mu\nu}^\Lambda &= F_{\mu\nu}^{+\Lambda} + F_{\mu\nu}^{-\Lambda} - \varepsilon^{ij} \overline{\psi}_{i[\mu} \big(\gamma_{\nu]} \Omega_j^\Lambda + \psi_{\nu]j} X^\Lambda\big) - \varepsilon_{ij} \overline{\psi}_{[\mu}^i \big(\gamma_{\nu]} \Omega^{j\Lambda} + \psi_{\nu]}^j \overline{X}^\Lambda\big)\\
&\quad - \frac{1}{4} \big(X^\Lambda \varepsilon^{ij} T_{\mu\nu ij} + \overline{X}^\Lambda \varepsilon_{ij} T_{\mu\nu}{}^{ij}\big) \,, & (2.7a)\\
\widehat{G}_{\mu\nu}^{-\Lambda} &= \widehat{F}_{\mu\nu}^{-\Lambda} \,, & (2.7b)\\
\widehat{G}_{\mu\nu\Lambda}^{-} &= F_{\Lambda\Sigma} \widehat{F}_{\mu\nu}^{-\Sigma} - \frac{1}{8} F_{\Lambda\Sigma\Gamma} \overline{\Omega}_i^\Sigma \gamma_{\mu\nu} \Omega_j^\Gamma \varepsilon^{ij} \,, & (2.7c)
\end{aligned}$$

Hypermultiplets:

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathsf{Q,S}} \phi^A &= 2\big(\gamma_{i\bar{\alpha}}^A \bar{\epsilon}^i \zeta^{\bar{\alpha}} + \overline{\gamma}_\alpha^{Ai} \bar{\epsilon}_i \zeta^\alpha\big) \,, & (2.8a)\\
\delta_{\mathsf{Q,S}} A_i{}^\alpha + \delta_{\mathsf{Q,S}} \phi^B \Gamma_B{}^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta &= 2 \bar{\epsilon}_i \zeta^\alpha + 2 \varepsilon_{ij} G^{\bar{\beta}\alpha} \Omega_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \bar{\epsilon}^j \zeta^{\bar{\gamma}} \,, & (2.8b)\\
\delta_{\mathsf{Q,S}} \zeta^\alpha + \delta_{\mathsf{Q,S}} \phi^A \Gamma_A{}^\alpha{}_\beta \zeta^\beta &= \not{D} A_i{}^\alpha \epsilon^i + A_i{}^\alpha \eta^i \,, & (2.8c)\\
\delta_{\mathsf{Q,S}} \zeta^{\bar{\alpha}} + \delta_{\mathsf{Q,S}} \phi^A \overline{\Gamma}_A{}^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}} \zeta^{\bar{\beta}} &= \not{D} A^{i\bar{\alpha}} \epsilon_i + A^{i\bar{\alpha}} \eta_i \,. & (2.8d)
\end{aligned}$$

Weyl multiplet under ϵ^i, η^i, Λ_{K}^a:

$$\begin{aligned}
\delta e_\mu{}^a &= \bar{\epsilon}^i \gamma^a \psi_{\mu i} + \bar{\epsilon}_i \gamma^a \psi_\mu^i \,, & (2.9a)\\
\delta \psi_\mu^i &= 2 \mathcal{D}_\mu \epsilon^i - \frac{1}{8} T_{ab}{}^{ij} \gamma^{ab} \gamma_\mu \epsilon_j - \gamma_\mu \eta^i \,, & (2.9b)\\
\delta b_\mu &= \Big[\frac{1}{2} \bar{\epsilon}^i \phi_{\mu i} - \frac{3}{4} \bar{\epsilon}^i \gamma_\mu \chi_i - \frac{1}{2} \overline{\eta}^i \psi_{\mu i} + (\text{h.c.})\Big] + \Lambda_{\mathsf{K}}^a e_{\mu a} \,, & (2.9c)\\
\delta A_\mu &= \Big[\frac{\mathrm{i}}{2} \bar{\epsilon}^i \phi_{\mu i} + \frac{3\mathrm{i}}{4} \bar{\epsilon}^i \gamma_\mu \chi_i + \frac{\mathrm{i}}{2} \overline{\eta}^i \psi_{\mu i} + (\text{h.c.})\Big] \,, & (2.9d)\\
\delta \mathcal{V}_\mu{}^i{}_j &= \Big[2 \bar{\epsilon}_j \phi_\mu^i - 3 \bar{\epsilon}_j \gamma_\mu \chi^i + 2 \overline{\eta}_j \psi_\mu^i - (\text{h.c.; traceless})\Big] \,, & (2.9e)\\
\delta T_{ab}{}^{ij} &= 8 \bar{\epsilon}^{[i} R(\mathsf{Q})_{ab}{}^{j]} \,, & (2.9f)\\
\delta \chi^i &= -\frac{1}{12} \gamma^{ab} \not{D} T_{ab}{}^{ij} \epsilon_j + \frac{1}{6} R(\mathsf{V})_{\mu\nu}{}^i{}_j \gamma^{\mu\nu} \epsilon^j + \Big(D - \frac{\mathrm{i}}{3} R(\mathsf{A})_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu}\Big) \epsilon^i + \frac{1}{12} \gamma_{ab} T^{abij} \eta_j \,, & (2.9g)\\
\delta D &= \bar{\epsilon}^i \not{D} \chi_i + \bar{\epsilon}_i \not{D} \chi^i \,. & (2.9h)
\end{aligned}$$

ここで antisymmetric-traceless の表記として次の定義を用いている:

$$\overline{\eta}^i \epsilon_j - (\text{h.c.; traceless}) \equiv \overline{\eta}^i \epsilon_j - \overline{\eta}_j \epsilon^i - \frac{1}{2} \delta_j^i \left(\overline{\eta}^k \epsilon_k - \overline{\eta}_k \epsilon^k\right) . \qquad (2.10)$$

2.2.3 Curvatures

$$
\begin{aligned}
R(\mathsf{P})_{\mu\nu}{}^{a} &= 2\partial_{[\mu}e_{\nu]}{}^{a} + 2b_{[\mu}e_{\nu]}{}^{a} - 2\omega_{[\mu}{}^{ab}e_{\nu]b} - \frac{1}{2}\big(\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma^{a}\psi_{\nu]i} + (\text{h.c.})\big)\,, && (2.11\text{a})\\
R(\mathsf{M})_{\mu\nu}{}^{ab} &= 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^{ab} - 2\omega_{[\mu}{}^{ac}\omega_{\nu]c}{}^{b} - 4f_{[\mu}{}^{[a}e_{\nu]}{}^{b]} + \frac{1}{2}\big(\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma^{ab}\phi_{\nu]i} + (\text{h.c.})\big)\\
&\quad + \Big[\frac{1}{4}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\psi^{j}_{\nu}T^{ab}{}_{ij} - \frac{3}{4}\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma_{\nu]}\gamma^{ab}\chi_{i} - \overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma_{\nu]}R(\mathsf{Q})^{ab}{}_{i} + (\text{h.c.})\Big]\,, && (2.11\text{b})\\
R(\mathsf{D})_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}b_{\nu]} - 2f_{[\mu}{}^{a}e_{\nu]a} - \frac{1}{2}\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\phi_{\nu]i} + \frac{3}{4}\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma_{\nu]}\chi_{i} - \frac{1}{2}\overline{\psi}_{i[\mu}\phi^{i}_{\nu]} + \frac{3}{4}\overline{\psi}_{i[\mu}\gamma_{\nu]}\chi^{i}\,, && (2.11\text{c})\\
R(\mathsf{K})_{\mu\nu}{}^{a} &= 2\mathcal{D}_{[\mu}f_{\nu]}{}^{a} - \frac{1}{4}\big(\overline{\phi}^{i}_{[\mu}\gamma^{a}\phi_{\nu]i} + \overline{\phi}_{i[\mu}\gamma^{a}\phi^{i}_{\nu]}\big)\\
&\quad + \frac{1}{4}\Big[\overline{\psi}^{i}_{\mu}D_{b}T^{ba}{}_{ij}\psi^{j}_{\nu} - 3e_{[\mu}{}^{a}\psi^{i}_{\nu]}\not{D}\chi_{i} + \frac{3}{2}D\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma^{a}\psi_{\nu]i} - 4\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma_{\nu]}D_{b}R(\mathsf{Q})^{ba}{}_{i} + (\text{h.c.})\Big]\,, && (2.11\text{d})\\
R(\mathsf{A})_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} - \Big[\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\phi_{\nu]i} + \frac{3\mathrm{i}}{4}\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma_{\nu]}\chi_{i} + (\text{h.c.})\Big]\,, && (2.11\text{e})\\
R(\mathsf{V})_{\mu\nu}{}^{i}{}_{j} &= 2\partial_{[\mu}\mathcal{V}_{\nu]}{}^{i}{}_{j} + \mathcal{V}_{[\mu}{}^{i}{}_{k}\mathcal{V}_{\nu]}{}^{k}{}_{j} + \Big[2\big(\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\phi_{\nu]j}\big) - 3\big(\overline{\psi}^{i}_{[\mu}\gamma_{\nu]}\chi_{j}\big) - (\text{h.c.; traceless})\Big]\,, && (2.11\text{f})\\
R(\mathsf{Q})_{\mu\nu}{}^{i} &= 2\mathcal{D}_{[\mu}\psi^{i}_{\nu]} - \gamma_{[\mu}\phi^{i}_{\nu]} - \frac{1}{8}T^{abij}\gamma_{ab}\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]j}\,, && (2.11\text{g})\\
R(\mathsf{S})_{\mu\nu}{}^{i} &= 2\mathcal{D}_{[\mu}\phi^{i}_{\nu]} - 2f_{[\mu}{}^{a}\gamma_{a}\psi^{i}_{\nu]} - \frac{1}{8}\not{D}T_{ab}{}^{ij}\gamma^{ab}\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]j} - \frac{3}{2}\gamma_{a}\psi^{i}_{[\mu}\overline{\psi}^{j}_{\nu]}\gamma^{a}\chi_{j}\\
&\quad + \frac{1}{4}R(\mathsf{V})_{ab}{}^{i}{}_{j}\gamma^{ab}\gamma_{[\mu}\psi^{j}_{\nu]} + \frac{\mathrm{i}}{2}R(\mathsf{A})_{ab}\gamma^{ab}\gamma_{[\mu}\psi^{i}_{\nu]}\,. && (2.11\text{h})
\end{aligned}
$$

2.2.4 Conventional constraints

$$
\begin{aligned}
0 &= R(\mathsf{P})_{\mu\nu}{}^{a}\,, && (2.12\text{a})\\
0 &= \gamma^{\mu}R(\mathsf{Q})_{\mu\nu}{}^{i} + \frac{3}{2}\gamma_{\nu}\chi^{i}\,, && (2.12\text{b})\\
0 &= e^{\nu}{}_{b}R(\mathsf{M})_{\mu\nu a}{}^{b} - \mathrm{i}\widetilde{R}(\mathsf{A})_{\mu a} + \frac{1}{8}T_{abij}T_{\mu}{}^{bij} - \frac{3}{2}De_{\mu a}\,, && (2.12\text{c})\\
\widetilde{R}(\mathsf{A})_{\mu b} &= \widetilde{R}(\mathsf{A})_{ab}\,e_{\mu}{}^{a} = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}R(\mathsf{A})^{cd}\,e_{\mu}{}^{a}\,. && (2.12\text{d})
\end{aligned}
$$

The composite fields determined by the conventional constraints:

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mu}{}^{ab} &= -2e^{\nu[a}\partial_{[\mu}e_{\nu]}{}^{b]} - e^{\nu[a}e^{b]\sigma}e_{\mu c}\partial_{\sigma}e_{\nu}{}^{c} - 2e_{\mu}{}^{[a}e^{b]\nu}b_{\nu}\\
&\quad - \frac{1}{4}\Big[2\overline{\psi}^{i}_{\mu}\gamma^{[a}\psi^{b]}_{i} + \overline{\psi}^{ai}\gamma_{\mu}\psi_{i}{}^{b} + (\text{h.c.})\Big]\,, && (2.13\text{a})\\
\phi^{i}_{\mu} &= \frac{1}{2}\Big(\gamma^{\rho\sigma}\gamma_{\mu} - \frac{1}{3}\gamma_{\mu}\gamma^{\rho\sigma}\Big)\Big(\mathcal{D}_{\rho}\psi^{i}_{\sigma} - \frac{1}{16}T^{abij}\gamma_{ab}\gamma_{\rho}\psi_{\sigma j} + \frac{1}{4}\gamma_{\rho\sigma}\chi^{i}\Big)\,, && (2.13\text{b})\\
f_{\mu}{}^{\mu} &= \frac{1}{6}R(\omega, e) - D\\
&\quad - \Big[\frac{1}{12}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\gamma_{\nu}\mathcal{D}_{\rho}\psi_{\sigma i} - \frac{1}{12}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\psi^{j}_{\nu}T^{\mu\nu}{}_{ij} - \frac{1}{4}\overline{\psi}^{i}_{\mu}\gamma^{\mu}\chi_{i} + (\text{h.c.})\Big]\,, && (2.13\text{c})
\end{aligned}
$$

where

$$f_\mu{}^a = \frac{1}{2}R(\omega,e)_\mu{}^a - \frac{1}{4}\Big[D + \frac{1}{3}R(\omega,e)\Big]e_\mu{}^a - \frac{\mathrm{i}}{2}\widetilde{R}(\mathsf{A})_\mu{}^a + \frac{1}{16}T_{\mu b}{}^{ij}T^{ab}{}_{ij}\,, \tag{2.13d}$$

$$R(\omega,e)_\mu{}^a = R(\omega)_{\mu\nu}{}^{ab}e_b{}^\nu = 2\big(\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^{ab} - \omega_{[\mu}{}^{ac}\omega_{\nu]c}{}^b\big)e_b{}^\nu\,. \tag{2.13e}$$

2.2.5 Variations of the composite fields under the conventional constraints

$$\begin{aligned}\delta\omega_\mu{}^{ab} &= \Big[-\frac{1}{2}\overline{\epsilon}^i\gamma^{ab}\phi_{\mu i} - \frac{1}{2}\overline{\epsilon}^i\psi_\mu^j T^{ab}{}_{ij} + \frac{3}{4}\overline{\epsilon}^i\gamma_\mu\gamma^{ab}\chi_i + \overline{\epsilon}^i\gamma_\mu R(\mathsf{Q})^{ab}{}_i - \frac{1}{2}\overline{\eta}^i\gamma^{ab}\psi_{\mu i} + (\text{h.c.})\Big]\\ &\quad + 2\Lambda_{\mathsf{K}}^{[a}e_\mu{}^{b]}\,,\end{aligned} \tag{2.14a}$$

$$\begin{aligned}\delta\phi_\mu^i &= -2f_\mu{}^a\gamma_a\epsilon^i + \frac{1}{4}R(\mathsf{V})_{ab}{}^i{}_j\gamma^{ab}\gamma_\mu\epsilon^j + \frac{\mathrm{i}}{2}R(\mathsf{A})_{ab}\gamma^{ab}\gamma_\mu\epsilon^i - \frac{1}{8}\not{D}T^{abij}\gamma_{ab}\gamma_\mu\epsilon_j\\ &\quad + \frac{3}{2}\big[(\overline{\chi}_j\gamma^a\epsilon^j)\gamma_a\psi_\mu^i - (\overline{\chi}_j\gamma^a\psi_\mu^j)\gamma_a\epsilon^i\big] + 2\mathcal{D}_\mu\eta^i + \Lambda_{\mathsf{K}}^a\gamma_a\psi_\mu^i\,,\end{aligned} \tag{2.14b}$$

$$\begin{aligned}\delta f_\mu{}^a &= \Big[-\frac{1}{2}\overline{\epsilon}^i\psi_\mu^j D_b T^{ba}{}_{ij} - \frac{3}{4}e_\mu^a\overline{\epsilon}^i\not{D}\chi_i - \frac{3}{4}\overline{\epsilon}^i\gamma^a\psi_{\mu i}D + \overline{\epsilon}^i\gamma_\mu D_b R(\mathsf{Q})^{ba}{}_i + \frac{1}{2}\overline{\eta}^i\gamma^a\phi_{\mu i} + (\text{h.c.})\Big]\\ &\quad + \mathcal{D}_\mu\Lambda_{\mathsf{K}}^a\,.\end{aligned} \tag{2.14c}$$

2.2.6 Supercovariant derivatives

$(5.2)_{[7]}$ 以外ではまだ明記されているのが見つからない supercovariant derivatives ([7] と [1] は他の変換則などで一致をみているので、これも信頼できる) [2011 12/10]:

$$D_\mu X^\Lambda = \mathcal{D}_\mu X^\Lambda - \frac{1}{2}\overline{\psi}_\mu^i\Omega_i^\Lambda\,, \tag{2.15a}$$

$$D_\mu\Omega_i^\Lambda = \mathcal{D}_\mu\Omega_i^\Lambda + \ldots(?)\,, \tag{2.15b}$$

$$D_\mu\chi_i = \mathcal{D}_\mu\chi_i + \ldots(?)\,, \tag{2.15c}$$

$$D_\mu T_{ab}{}^{ij} = \mathcal{D}_\mu T_{ab}{}^{ij} + \ldots(?)\,, \tag{2.15d}$$

$$D_a R(\mathsf{Q})^{bc} = \mathcal{D}_a R(\mathsf{Q})^{bc} + \ldots(?)\,. \tag{2.15e}$$

Hypermultiplets についての明記された supercovariant derivatives ($(5.2)_{[4]}$ 参照。conventions は [1] と同じなので安心できる):

$$D_\mu\phi^A = \mathcal{D}_\mu\phi^A - \gamma^A_{i\overline{\alpha}}\overline{\psi}_\mu^i\zeta^{\overline{\alpha}} - \overline{\gamma}^{Ai}_\alpha\overline{\psi}_{\mu i}\zeta^\alpha\,, \tag{2.16a}$$

$$D_\mu A_i{}^\alpha = \mathcal{D}_\mu A_i{}^\alpha - \overline{\psi}_{\mu i}\zeta^\alpha - \varepsilon_{ij}G^{\alpha\overline{\beta}}\Omega_{\overline{\beta}\overline{\gamma}}\overline{\psi}_\mu^j\zeta^{\overline{\gamma}}\,, \tag{2.16b}$$

$$D_\mu\zeta^\alpha = \mathcal{D}_\mu\zeta^\alpha - \frac{1}{2}\not{D}A_i{}^\alpha\psi_\mu^i - \frac{1}{2}A_i{}^\alpha\phi_\mu^i\,. \tag{2.16c}$$

共変微分 $D_\mu\phi$ を構成するときは、ゲージ変換 $\delta(\epsilon)\phi$ のゲージパラメータをゲージ場に書き換えて、それまで考えていた微分に次の様に追加すれば良い:

$$D_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi - \delta_{(\epsilon\to A_\mu)}\phi\,.$$

上記の Local lorentz, dilatation, $U(1)_{\mathrm{R}}$, $SU(2)_{\mathrm{R}}$ は全てその処方箋で構成している。これを local SUSY についても導入しようと思ったが、同じ手法で良いのか分からないので、文献を調べてみた。[4] (5.2) の超対称変換に従って、共変微分 (5.1) から 超共変微分 (5.3) に拡張するときは、実は上の素朴な処方箋に従っていない。一番単純にも、まず 変換パラメータを gravitino に置き換えて符号を反転させるまでは同じだが、1/2 倍している。また、ところどころ項が反映されていない。何故??

2.2.7 Matter dependent tensor $\mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^-_{\mu\nu\Lambda} &\equiv -\frac{\mathrm{i}}{16}F_{\Lambda\Sigma\Gamma}\overline{\Omega}{}^{\Sigma}_i\gamma_{\mu\nu}\Omega^{\Gamma}_j\varepsilon^{ij} - \frac{1}{8}N_{\Lambda\Sigma}\varepsilon_{ij}\overline{\psi}{}^i_\rho\gamma_{\mu\nu}\gamma^\rho\Omega^{j\Sigma} \\
&\quad -\frac{1}{8}N_{\Lambda\Sigma}\overline{X}{}^{\Sigma}\varepsilon_{ij}\overline{\psi}{}^i_\rho\gamma^{\rho\sigma}\gamma_{\mu\nu}\psi^j_\sigma + \frac{1}{8}N_{\Lambda\Sigma}\overline{X}{}^{\Sigma}T_{\mu\nu}{}^{ij}\varepsilon_{ij}\,, \qquad (2.17a)\\
\mathcal{O}^+_{\mu\nu\Lambda} &= \mathrm{h.c.}(\mathcal{O}^-_{\mu\nu\Lambda}) \;=\; (\mathcal{O}^-_{\mu\nu\Lambda})^\dagger \\
&= \frac{\mathrm{i}}{16}\overline{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}\big(\overline{\Omega}{}^{\Sigma}_i\gamma_{\mu\nu}\Omega^{\Gamma}_j\big)^\dagger\varepsilon_{ij} - \frac{1}{8}N_{\Lambda\Sigma}\big(\overline{\psi}{}^i_\rho\gamma_{\mu\nu}\gamma^\rho\Omega^{j\Sigma}\big)^\dagger\varepsilon^{ij} \\
&\quad -\frac{1}{8}N_{\Lambda\Sigma}X^{\Sigma}\big(\overline{\psi}{}^i_\rho\gamma^{\rho\sigma}\gamma_{\mu\nu}\psi^j_\sigma\big)^\dagger\varepsilon^{ij} + \frac{1}{8}N_{\Lambda\Sigma}X^{\Sigma}\varepsilon^{ij}T_{\mu\nu ij}\,. \qquad (2.17b)
\end{aligned}$$

3 Conventions in de Wit's formulation [1]

3.1 Identities among gamma matrices

Gamma matrices には次の恒等式が成立する:

$$\gamma^{a_1 a_2 \cdots a_p} \gamma_{b_1 b_2 \cdots b_q} = \sum_{k=0}^{\min(p,q)} (-1)^{\frac{1}{2}k(2p-k-1)} \frac{p!q!}{(p-k)!(q-k)!k!} \delta^{[a_1}_{[b_1} \cdots \delta^{a_k}_{b_k} \gamma^{a_{k+1} \cdots a_p]}{}_{b_{k+1} \cdots b_q]} \,. \qquad (3.1)$$

これは任意の次元で成立する。特に 4 次元でよく使われる恒等式は次のものである:

$$\gamma^a \gamma_{bc} = \gamma^a{}_{bc} + 2\delta^a_{[b} \gamma_{c]} \,, \qquad (3.2a)$$

$$\gamma^{ab} \gamma_c = \gamma^{ab}{}_c - 2\delta_c^{[a} \gamma^{b]} \,, \qquad (3.2b)$$

$$\gamma^{abcd} \gamma_d = \gamma^{abc} \,. \qquad (3.2c)$$

3.2 Levi-Civita invariant tensor

Levi-Civita invariant tensor の規格化が $\epsilon^{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}} \equiv +\mathrm{i}$ となっている (dotted number は local Lorentz index を示す)。しかるに [2, 6] では $\epsilon^{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}} \equiv -1$ である。つまり $\epsilon^{abcd} = -\mathrm{i}\epsilon^{abcd}$ である。この虚数単位の有無は、Dirac conjugate の定義と関連する。ちなみに (A.6)[1] にある chirality operator γ_5 の定義は $\gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma_{\dot{0}}\gamma_{\dot{1}}\gamma_{\dot{2}}\gamma_{\dot{3}}$ は [6] であり、符号まで含めて同じである:

$$\gamma_5 \equiv \mathrm{i}\gamma_{\dot{0}}\gamma_{\dot{1}}\gamma_{\dot{2}}\gamma_{\dot{3}} \,, \qquad (3.3a)$$

$$\gamma^{abcd} = \gamma_5 \epsilon^{abcd} \,, \qquad \gamma_{abcd} = \gamma_5 \epsilon_{abcd} \,, \qquad (3.3b)$$

$$\gamma^{abc}\gamma^d = \gamma^{abcd} + 3\eta^{d[a}\gamma^{bc]} = \gamma_5 \epsilon^{abcd} + 3\eta^{d[a}\gamma^{bc]} \,, \qquad (3.3c)$$

$$e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{abcd} e_a{}^\mu e_b{}^\nu e_c{}^\rho e_d{}^\sigma \,. \qquad (3.3d)$$

さらに $\gamma^{abcd} = \gamma_5 \epsilon^{abcd}$ なので、

$$\gamma^{abc} = \epsilon^{abcd}\gamma_5\gamma_d \,, \qquad \therefore \quad \gamma^{ab}\gamma^c = \epsilon^{abcd}\gamma_5\gamma_d - 2\eta^{c[a}\gamma^{b]} \,, \qquad (3.4)$$

となる。同様に

$$\gamma_{abc} = \gamma_{abcd}\gamma^d = \epsilon_{abcd}\gamma_5\gamma^d \,, \qquad (3.5a)$$

$$\gamma_c \gamma_{ab} = \gamma_{abc} + 2\eta_{c[a}\gamma_{b]} = \epsilon_{abcd}\gamma_5\gamma^d + 2\eta_{c[a}\gamma_{b]} \,. \qquad (3.5b)$$

3.3 Selfdual tensors

上の Levi-Civita invariant tensor を用いて (anti-)self-dual tensors を定義する:

$$\widetilde{F}_{ab} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd} \,, \qquad (\widetilde{F}_{ab})^\dagger = -\widetilde{F}_{ab} \,, \qquad (3.6a)$$

$$F^\pm_{ab} \equiv \frac{1}{2}\big(F_{ab} \pm \widetilde{F}_{ab}\big) = \frac{1}{2}\Big(F_{ab} \pm \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}\Big) \,, \qquad (F^\pm_{ab})^\dagger = F^\mp_{ab} \,. \qquad (3.6b)$$

F_{ab} の構成要素に spinors がある場合があるので、複素共役よりも hermitian conjugate を用いている (例として $\mathcal{O}^{\pm}_{\mu\nu\Lambda}$)。もう少し実用的な表記も残しておく:

$$F^{\pm}_{ab} \;=\; \frac{1}{2}\Big(F_{ab} \pm \widetilde{F}_{ab}\Big)\,, \qquad \widetilde{F}_{ab} \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd} \;=\; (*F)_{ab}\,, \tag{3.7a}$$

$$F^{\pm}_{\mu\nu} \;=\; e_{\mu}{}^{a}e_{\nu}{}^{b}F^{\pm}_{ab}\,, \qquad \widetilde{F}_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}\, e_{\mu}{}^{a}e_{\nu}{}^{b}e_{\rho}{}^{c}e_{\sigma}{}^{d}F^{\rho\sigma} \;=\; \frac{1}{2}e\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\,, \tag{3.7b}$$

$$\epsilon^{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}} \;=\; +\mathrm{i}\,, \qquad \epsilon^{abcd} \;=\; e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, e_{\mu}{}^{a}e_{\nu}{}^{b}e_{\rho}{}^{c}e_{\sigma}{}^{d}\,, \tag{3.7c}$$

$$\epsilon_{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}} \;=\; -\mathrm{i}\,, \qquad \epsilon_{abcd} \;=\; e\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, e_{a}{}^{\mu}e_{b}{}^{\nu}e_{c}{}^{\rho}e_{d}{}^{\sigma}\,. \tag{3.7d}$$

3.4 Dirac conjugate, Majorana and Weyl spinors

[1] で登場する spinor はすべて irreducible である。特に chirality を意識するので、Weyl spinor である。2 つの Majorana spinors ψ^i_{M} $(i = 1, 2)$ をそれぞれ left-, right-Weyl spinors に書き換える:

$$(\psi_{\mathrm{M}})^c \;\equiv\; C\overline{\psi}{}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{M}} \;\equiv\; \psi_{\mathrm{M}}\,, \qquad \overline{\psi}_{\mathrm{M}} \;=\; \psi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{M}}C\,, \tag{3.8a}$$

$$\psi^i \;\equiv\; P_{\mathrm{L}}\psi^i_{\mathrm{M}}\,, \qquad \psi_i \;\equiv\; P_{\mathrm{R}}\psi^i_{\mathrm{M}}\,, \qquad P_{\mathrm{L,R}} \;\equiv\; \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\,. \tag{3.8b}$$

つまりこれより $\gamma_5\psi^i = +\psi^i$, $\gamma_5\psi_i = -\psi_i$ である。また、$\overline{\psi}^i\gamma_5 = +\overline{\psi}^i$。つまり、chiral projection operator は Dirac conjugate の外である。[1] における Dirac conjugate は $\overline{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma_{\dot{0}} = -\psi^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}$ と定義されていることに注意する。一方 [2] や [6] での Dirac conjugate は $\overline{\psi} = \mathrm{i}\psi^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}$ である。本題がどちらにも対応できるように、ここでは一般的な表記を与えよう:

$$\boxed{\begin{array}{c} \overline{\psi} \;\equiv\; a\,\psi^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}\,, \qquad (\psi^{\dagger}\chi)^{\dagger} \;\equiv\; b\,\chi^{\dagger}\psi\,, \qquad (\psi^{\dagger}\chi)^{\mathrm{T}} \;\equiv\; c\,\chi^{\mathrm{T}}\psi^*\,, \\ a \;\in\; \mathbb{C}\,, \qquad b \;=\; \pm 1\,, \qquad c \;=\; \pm 1\,. \end{array}} \tag{3.9}$$

この $\{a, b, c\}$ は互いに関連する。さらに、後の計算のために次の表現を用意しておこう:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{M}} \;&\equiv\; C\overline{\psi}{}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{M}} \;=\; C[a\,\psi^{\dagger}_{\mathrm{M}}\gamma^{\dot{0}}]^{\mathrm{T}} \;=\; a\,C(\gamma^{\dot{0}})^{\mathrm{T}}\psi^*_{\mathrm{M}} \;=\; a\,C(-C\gamma^{\dot{0}}C^{-1})\psi^*_{\mathrm{M}} \;=\; a\gamma^{\dot{0}}C^{-1}\psi^*_{\mathrm{M}}\,, \\ \therefore \quad & \boxed{\psi^*_{\mathrm{M}} \;=\; -\frac{1}{a}C\gamma^{\dot{0}}\psi_{\mathrm{M}}}\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Weyl spinors ψ^i と ψ_i はそれぞれ $SU(2)_{\mathrm{R}}$ の $\mathbf{2}$ 表現、$\overline{\mathbf{2}}$ 表現に属す。つまり互いに charge conjugate であると言える:

$$\begin{aligned} (\psi^i)^c \;&=\; (P_{\mathrm{L}}\psi^i_{\mathrm{M}})^c \;=\; C\big[\overline{P_{\mathrm{L}}\psi^i_{\mathrm{M}}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; C\big[a(P_{\mathrm{L}}\psi^i_{\mathrm{M}})^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; C\big[a(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\dagger}(P_{\mathrm{L}})^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}\big]^{\mathrm{T}} \\ &=\; a\,C(\gamma^{\dot{0}})^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}_{\mathrm{L}}(\psi^i_{\mathrm{M}})^* \;=\; a\,C(-C\gamma^{\dot{0}}C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})\Big(-\frac{1}{a}C\gamma^{\dot{0}}\psi^i_{\mathrm{M}}\Big) \\ &=\; -\gamma^{\dot{0}}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\dot{0}}\psi^i_{\mathrm{M}} \;=\; P_{\mathrm{R}}\psi^i_{\mathrm{M}} \;=\; \psi_i\,, \\ \therefore \quad & \boxed{(\psi^i)^c \;=\; \psi_i\,, \quad (\psi_i)^c \;=\; \psi^i}\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

$\mathcal{N} = 1$ の理論では、ψ_i は ψ^i の charge conjugate であると設定できない。互いに独立な Weyl spinors であることになる。従って、$\mathcal{N} = 1$ 理論に於ける $\psi^i \equiv P_{\mathrm{L}}\psi^i_{\mathrm{M}}$ は、Majorana-Weyl spinors を定義し

てしまうことになる。もちろん 4D Lorentzian space においては Majorana-Weyl spinors は定義できないので、この設定はおかしいことになるが、$\mathcal{N}=2$ の理論においては、$\psi_i = (\psi^i)^c$ という関係が成立し、互いに独立ではなくなるため、Majorana spinors を用いて Weyl spinors を記述することができる。ここに、charge conjugate operator C と恒等式をまとめておく:

$$\boxed{\begin{gathered} C^{\rm T} \ = \ C^{-1} \ = \ C^{\dagger} \ = \ -C\,, \\ C\gamma^a C^{-1} \ = \ -(\gamma^a)^{\rm T}\,, \qquad C\gamma^{a_1\cdots a_n}C^{-1} \ = \ (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(\gamma^{a_1\cdots a_n})^{\rm T}\,, \qquad C\gamma_5 C^{-1} \ = \ (\gamma_5)^{\rm T}\,, \\ (\gamma^a)^{\dagger} \ = \ \gamma_a \ = \ -\gamma^{\dot{0}}\gamma^a(\gamma^{\dot{0}})^{-1}\,, \qquad (\gamma_5)^{\dagger} \ = \ \gamma_5\,, \\ (\gamma^{\dot{0}})^* \ = \ C\gamma^{\dot{0}}C^{-1}\,, \qquad (\gamma^i)^* \ = \ C\gamma^{\dot{0}}\gamma^i(\gamma^{\dot{0}})^{-1}C^{-1}\,, \qquad (\gamma_5)^* \ = \ C\gamma_5 C^{-1}\,. \end{gathered}} \tag{3.12}$$

(Weyl) spinors は互いに反可換なため、扱いには注意を要する。まずは次の性質を見ておこう:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}{}^i\phi^j \ &= \ (\psi^i_{\rm M})^{\rm T}CP_{\rm L}\phi^j_{\rm M} \ = \ -(\phi^j_{\rm M})^{\rm T}(P_{\rm L})^{\rm T}C^{\rm T}\psi^i_{\rm M} \ = \ -(\phi^j_{\rm M})^{\rm T}(CP_{\rm L}C^{-1})(-C)\psi^i_{\rm M} \\ &= \ (\phi^j_{\rm M})^{\rm T}CP_{\rm L}\psi^i_{\rm M} \ = \ \overline{\phi}{}^j\psi^i\,, \end{aligned} \tag{3.13a}$$

$$\begin{aligned} \overline{\psi}{}^i\gamma_\mu\phi_j \ &= \ (\psi^i_{\rm M})^{\rm T}CP_{\rm L}\gamma_\mu P_{\rm R}\phi^j_{\rm M} \ = \ -(\phi^j_{\rm M})^{\rm T}(P_{\rm R})^{\rm T}(\gamma_\mu)^{\rm T}(P_{\rm L})^{\rm T}C^{\rm T}\psi^i_{\rm M} \\ &= \ -(\phi^j_{\rm M})^{\rm T}(CP_{\rm R}C^{-1})(-C\gamma_\mu C^{-1})(CP_{\rm L}C^{-1})(-C)\psi^i_{\rm M} \\ &= \ -(\phi^j_{\rm M})^{\rm T}CP_{\rm R}\gamma_\mu P_{\rm L}\psi^i_{\rm M} \ = \ -\overline{\phi}_j\gamma_\mu\psi^i\,. \end{aligned} \tag{3.13b}$$

さて、bispinors についての転置や hermitian conjugate、そしてこれらを組み合わせた複素共役を整理しよう。次の量を評価することで不定係数 $\{a,b,c\}$ の関係を絞る:

$$\begin{gathered} (\overline{\psi}{}^i\phi^j)^{\dagger}\,, \qquad (\overline{\psi}{}^i\phi^j)^{\rm T}\,, \qquad (\overline{\psi}{}^i\phi^j)^*\,, \\ (\overline{\psi}{}^i\gamma_\mu\phi_j)^{\dagger}\,, \qquad (\overline{\psi}{}^i\gamma_\mu\phi_j)^{\rm T}\,, \qquad (\overline{\psi}{}^i\gamma_\mu\phi_j)^*\,. \end{gathered}$$

実際に計算していこう。まずは gamma matrix が挟まっていないもの:

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}{}^i\phi^j)^{\dagger} \ &= \ \big[a(\psi^i_{\rm M})^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}P_{\rm L}\phi^j_{\rm M}\big]^{\dagger} \ = \ (a^*b)(\phi^j_{\rm M})^{\dagger}(P_{\rm L})^{\dagger}(\gamma^{\dot{0}})^{\dagger}\psi^i_{\rm M} \ = \ (a^*b)(\phi^j_{\rm M})^{\dagger}P_{\rm L}(-\gamma^{\dot{0}})\psi^i_{\rm M} \\ &= \ (-a^*b)(\phi^j_{\rm M})^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}P_{\rm R}\psi^i_{\rm M} \ = \ \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\phi}{}^j_{\rm M}P_{\rm R}\psi^i_{\rm M} \\ &= \ \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\phi}_j\psi_i\,, \end{aligned} \tag{3.14a}$$

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}{}^i\phi^j)^{\rm T} \ &= \ \big[(\psi^i_{\rm M})^{\rm T}CP_{\rm L}\phi^j_{\rm M}\big]^{\rm T} \ = \ c(\phi^j_{\rm M})^{\rm T}(P_{\rm L})^{\rm T}C^{\rm T}\psi^i_{\rm M} \ = \ c(\phi^j_{\rm M})^{\rm T}(CP_{\rm L}C^{-1})(-C)\psi^i_{\rm M} \\ &= \ (-c)\overline{\phi}{}^j_{\rm M}P_{\rm L}\psi^i_{\rm M} \ = \ (-c)\overline{\phi}{}^j\psi^i\,, \end{aligned} \tag{3.14b}$$

$$(\overline{\psi}{}^i\phi^j)^* \ = \ \big[(\overline{\psi}{}^i\phi^j)^{\dagger}\big]^{\rm T} \ = \ \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)\big[\overline{\phi}_j\psi_i\big]^{\rm T} \ = \ \Big(\frac{a^*}{a}bc\Big)\overline{\psi}_i\phi_j\,. \tag{3.14c}$$

続いて、gamma matrix が一つ挟まっているものを評価する:

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}{}^i\gamma_\mu\phi_j)^{\dagger} \ &= \ \big[a(\psi^i_{\rm M})^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}P_{\rm L}\gamma_\mu P_{\rm R}\phi^j_{\rm M}\big]^{\dagger} \ = \ (a^*b)(\phi^j_{\rm M})^{\dagger}(P_{\rm R})^{\dagger}(\gamma_\mu)^{\dagger}(P_{\rm L})^{\dagger}(\gamma^{\dot{0}})^{\dagger}\psi^i_{\rm M} \\ &= \ (a^*b)(\phi^j_{\rm M})^{\dagger}P_{\rm R}(-\gamma^{\dot{0}}\gamma_\mu(\gamma^{\dot{0}})^{-1})P_{\rm L}(-\gamma^{\dot{0}})\psi^i_{\rm M} \ = \ (a^*b)(\phi^j_{\rm M})^{\dagger}\gamma^{\dot{0}}P_{\rm L}\gamma_\mu P_{\rm R}\psi^i_{\rm M} \\ &= \ \Big(\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\phi}{}^j\gamma_\mu\psi_i\,, \end{aligned} \tag{3.15a}$$

$$\begin{aligned}(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi_j)^{\mathrm{T}} &= \big[(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}CP_{\mathrm{L}}\gamma_\mu P_{\mathrm{R}}\phi^j_{\mathrm{M}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; c(\phi^j_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(P_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}}(\gamma_\mu)^{\mathrm{T}}(P_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\psi^i_{\mathrm{M}} \\ &= c(\phi^j_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(CP_{\mathrm{R}}C^{-1})(-C\gamma_\mu C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})(-C)\psi^i_{\mathrm{M}} \;=\; c(\phi^j_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}CP_{\mathrm{R}}\gamma_\mu P_{\mathrm{L}}\psi^i_{\mathrm{M}} \\ &= c\,\overline{\phi}_j\gamma_\mu\psi^i\,, \qquad (3.15\mathrm{b}) \\ (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi^j)^* &= \big[(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi_j)^\dagger\big]^{\mathrm{T}} \;=\; \Big(\frac{a^*}{a}b\Big)\big[\overline{\phi}^j\gamma_\mu\psi_i\big]^{\mathrm{T}} \;=\; \Big(\frac{a^*}{a}bc\Big)\overline{\psi}_i\gamma_\mu\phi^j\,. \qquad (3.15\mathrm{c})\end{aligned}$$

一方で、$(\overline{\psi}^i\phi^j)^*$ や $(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi_j)^*$ などは別の表記もある:

$$\begin{aligned}(\overline{\psi}^i\phi^j)^* &= \big[a(\psi^i_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{L}}\phi^j_{\mathrm{M}}\big]^* \;=\; a^*(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(\gamma^{\dot 0})^*(P_{\mathrm{L}})^*(\phi^j_{\mathrm{M}})^* \\ &= a^*(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(C\gamma^{\dot 0}C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})\Big(-\frac{1}{a}C\gamma^{\dot 0}\phi^j_{\mathrm{M}}\Big) \;=\; \Big(-\frac{a^*}{a}\Big)\overline{\psi}^i_{\mathrm{M}}\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\dot 0}\phi^j_{\mathrm{M}} \\ &= \Big(\frac{a^*}{a}\Big)\overline{\psi}_i\phi_j\,, \qquad (3.16\mathrm{a}) \\ (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi_j)^* &= \big[a(\psi^i_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{L}}\gamma_\mu P_{\mathrm{R}}\phi^j_{\mathrm{M}}\big]^* \;=\; a^*(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(\gamma^{\dot 0})^*(P_{\mathrm{L}})^*(\gamma_\mu)^*(P_{\mathrm{R}})^*(\phi^j_{\mathrm{M}})^* \\ &= a^*(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(C\gamma^{\dot 0}C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})(C\gamma^{\dot 0}\gamma_\mu(\gamma^{\dot 0})^{-1}C^{-1})(CP_{\mathrm{R}}C^{-1})\Big(-\frac{1}{a}C\gamma^{\dot 0}\phi^j_{\mathrm{M}}\Big) \\ &= \Big(\frac{a^*}{a}\Big)\overline{\psi}^i_{\mathrm{M}}\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\dot 0}\gamma_\mu\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{R}}\gamma^{\dot 0}\phi^j_{\mathrm{M}} \;=\; \Big(\frac{a^*}{a}\Big)\overline{\psi}^i_{\mathrm{M}}P_{\mathrm{R}}(\gamma^{\dot 0})^2\gamma_\mu(\gamma^{\dot 0})^2P_{\mathrm{L}}\phi^j_{\mathrm{M}} \\ &= \Big(\frac{a^*}{a}\Big)\overline{\psi}_i\gamma_\mu\phi^j\,. \qquad (3.16\mathrm{b})\end{aligned}$$

上記と比較するとすぐに次が示される:

$$\boxed{bc \;=\; 1}\,. \qquad (3.16\mathrm{c})$$

また、a の大きさは、$(\overline{\psi}^i\phi^j)^\dagger$ を別表記することで求められる:

$$\begin{aligned}(\overline{\psi}^i\phi^j)^\dagger &= \big[(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}CP_{\mathrm{L}}\phi^j_{\mathrm{M}}\big]^\dagger \;=\; b(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger(P_{\mathrm{L}})^\dagger C^\dagger(\psi^i_{\mathrm{M}})^* \;=\; b(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger(P_{\mathrm{L}})C^{-1}\Big(-\frac{1}{a}C\gamma^{\dot 0}\psi^i_{\mathrm{M}}\Big) \\ &= \Big(-\frac{b}{a}\Big)(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{R}}\psi^i_{\mathrm{M}} \;=\; \Big(-\frac{b}{a^2}\Big)\overline{\phi}_j\psi_i\,, \qquad (3.17\mathrm{a}) \\ \therefore\quad -\frac{a^*}{a}b &= -\frac{b}{a^2} \quad\to\quad \boxed{aa^* \;=\; 1}\,. \qquad (3.17\mathrm{b})\end{aligned}$$

de Wit, et. al. [1] の表記 $a^* = a = -1$ では、荷電共役が複素共役そのものであると設定していることがわかる。一般に位相まで一致させる必要はなく、$a = \mathrm{i}$ とする慣習 [6] も存在する。

Lagrangian (2.1) では次の bispinors を扱っている:

$$\begin{array}{cccc}(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\phi^j)^\dagger\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\phi^j)^\dagger\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\phi^j)^\dagger\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\gamma_\rho\phi^j)^\dagger\,, \\ (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\phi^j)^{\mathrm{T}}\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\phi^j)^{\mathrm{T}}\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\phi^j)^{\mathrm{T}}\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\gamma_\rho\phi^j)^{\mathrm{T}}\,.\end{array}$$

個別に評価する:

$$\begin{aligned}(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\phi^j)^\dagger &= \big[a(\psi^i_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{L}}\gamma_\mu\gamma_\nu P_{\mathrm{L}}\phi^j_{\mathrm{M}}\big]^\dagger \;=\; (a^*b)(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger(P_{\mathrm{L}})^\dagger(\gamma_\nu)^\dagger(\gamma_\mu)^\dagger(P_{\mathrm{L}})^\dagger(\gamma^{\dot 0})^\dagger\psi^i_{\mathrm{M}} \\ &= (a^*b)(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger P_{\mathrm{L}}(-\gamma^{\dot 0}\gamma_\nu(\gamma^{\dot 0})^{-1})(-\gamma^{\dot 0}\gamma_\mu(\gamma^{\dot 0})^{-1})P_{\mathrm{L}}(-\gamma^{\dot 0})\psi^i_{\mathrm{M}} \\ &= (-a^*b)(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{R}}\gamma_\nu\gamma_\mu P_{\mathrm{R}}\psi^i_{\mathrm{M}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\phi}_j\gamma_\nu\gamma_\mu\psi_i\,, && (3.18a)\\
(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\phi^j)^{\mathrm{T}} &= \big[(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}CP_{\mathrm{L}}\gamma_\mu\gamma_\nu P_{\mathrm{L}}\phi^j_{\mathrm{M}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; c(\phi^j_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(P_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}}(\gamma_\nu)^{\mathrm{T}}(\gamma_\mu)^{\mathrm{T}}(P_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\psi^i_{\mathrm{M}}\\
&= c(\phi^j_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})(-C\gamma_\nu C^{-1})(-C\gamma_\mu C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})(-C)\psi^i_{\mathrm{M}}\\
&= -c\,\overline{\phi}^j\gamma_\nu\gamma_\mu\psi^i\,, && (3.18b)\\
(\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\phi^j)^\dagger &= \frac{1}{2}\Big[(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\phi^j)^\dagger-(\overline{\psi}^i\gamma_\nu\gamma_\mu\phi^j)^\dagger\Big] \;=\; \frac{1}{2}\Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)\Big[\overline{\phi}_j\gamma_\nu\gamma_\mu\psi_i-\overline{\phi}_j\gamma_\mu\gamma_\nu\psi_i\Big]\\
&= \Big(\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\phi}_j\gamma_{\mu\nu}\psi_i\,, && (3.18c)\\
(\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\phi^j)^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{2}\Big[(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\phi^j)^{\mathrm{T}}-(\overline{\psi}^i\gamma_\nu\gamma_\mu\phi^j)^{\mathrm{T}}\Big] \;=\; -\frac{c}{2}\Big[\overline{\phi}^j\gamma_\nu\gamma_\mu\psi^i-\overline{\phi}^j\gamma_\mu\gamma_\nu\psi^i\Big]\\
&= c\,\overline{\phi}^j\gamma_{\mu\nu}\psi^i\,, && (3.18d)\\
(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\phi_j)^\dagger &= \big[a(\psi^i_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{L}}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho P_{\mathrm{R}}\phi^j_{\mathrm{M}}\big]^\dagger \;=\; (a^*b)(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger(P_{\mathrm{R}})^\dagger(\gamma_\rho)^\dagger(\gamma_\nu)^\dagger(\gamma_\mu)^\dagger(P_{\mathrm{L}})^\dagger(\gamma^{\dot 0})^\dagger\psi^i_{\mathrm{M}}\\
&= (a^*b)(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger P_{\mathrm{R}}(-\gamma^{\dot 0}\gamma_\rho(\gamma^{\dot 0})^{-1})(-\gamma^{\dot 0}\gamma_\nu(\gamma^{\dot 0})^{-1})(-\gamma^{\dot 0}\gamma_\mu(\gamma^{\dot 0})^{-1})P_{\mathrm{L}}(-\gamma^{\dot 0})\psi^i_{\mathrm{M}}\\
&= (a^*b)(\phi^j_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot 0}P_{\mathrm{L}}\gamma_\rho\gamma_\mu P_{\mathrm{R}}\psi^i_{\mathrm{M}}\\
&= \Big(\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\phi}^j\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu\psi_i\,, && (3.18e)\\
(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\phi_j)^{\mathrm{T}} &= \big[(\psi^i_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}CP_{\mathrm{L}}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho P_{\mathrm{R}}\phi^j_{\mathrm{M}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; c(\phi^j_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(P_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}}(\gamma_\rho)^{\mathrm{T}}(\gamma_\nu)^{\mathrm{T}}(\gamma_\mu)^{\mathrm{T}}(P_{\mathrm{L}})^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\psi^i_{\mathrm{M}}\\
&= c(\phi^j_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}(CP_{\mathrm{R}}C^{-1})(-C\gamma_\rho C^{-1})(-C\gamma_\nu C^{-1})(-C\gamma_\mu C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})(-C)\psi^i_{\mathrm{M}}\\
&= c(\phi^j_{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}CP_{\mathrm{R}}\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu P_{\mathrm{L}}\psi^i_{\mathrm{M}}\\
&= c\,\overline{\phi}_j\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu\psi^i\,, && (3.18f)\\
(\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\gamma_\rho\phi_j)^\dagger &= \frac{1}{2}\Big[(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\phi_j)^\dagger-(\overline{\psi}^i\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho\phi_j)^\dagger\Big] \;=\; \frac{1}{2}\Big(\frac{a^*}{a}b\Big)\Big[\overline{\phi}^j\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu\psi_i-\overline{\phi}^j\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\psi_i\Big]\\
&= \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\phi}^j\gamma_\rho\gamma_{\mu\nu}\psi_i\,, && (3.18g)\\
(\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\gamma_\rho\phi_j)^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{2}\Big[(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\phi_j)^{\mathrm{T}}-(\overline{\psi}^i\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho\phi_j)^{\mathrm{T}}\Big] \;=\; \frac{c}{2}\Big[\overline{\phi}_j\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu\psi^i-\overline{\phi}_j\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\nu\psi^i\Big]\\
&= -c\,\overline{\phi}_j\gamma_\rho\gamma_{\mu\nu}\psi^i\,. && (3.18h)
\end{aligned}
$$

3.5 Hermitian conjugate and hermiticity condition

さて、Lagrangian (2.1) には † つまり hermitian conjugate が登場する。これは bispinors についての作用に相当すると考える。この作用は T_{abij} や ε_{ij} にある $SU(2)$-indices i,j の「複素共役」を示すが「転置」はしない。あくまでも hermitian conjugate は bispinors についてとする:

$$
\big(a_{ij}\overline{\psi}^i\phi^j\big)^\dagger \;\equiv\; (a_{ij})^*\big(\overline{\psi}^i\phi^j\big)^\dagger\,. \qquad (3.19)
$$

Lagrangian は bispinors で記述されるため、reality condition $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}$ よりは hermiticity condition $\mathscr{L}^\dagger=\mathscr{L}$ を要求することになる。同様に bosonic fields の超対称変換則でも、「bosonic fields の複素共役」は「bispinors の hermitian conjugate」として取り扱う。この指導の下で次を評価し、

不定係数の関係を調べる。

$$
\mathscr{L}_\Omega \;=\; -\frac{1}{4}N_{\Lambda\Sigma}\Big[\overline{\Omega}^{i\Lambda}\partial\!\!\!/\Omega_i^\Sigma + \overline{\Omega}_i^\Lambda\partial\!\!\!/\Omega^{i\Sigma}\Big]\,, \qquad \delta e_\mu{}^a \;=\; \overline{\epsilon}^i\gamma^a\psi_{\mu i} + \overline{\epsilon}_i\gamma^a\psi_\mu^i\,,
$$

$$
\Omega_i^\Lambda \;=\; P_{\rm L}\Omega_{\rm M}^{i\Lambda}\,, \quad \Omega^{i\Lambda} \;=\; P_{\rm R}\Omega_{\rm M}^{i\Lambda}\,, \quad \epsilon^i \;=\; P_{\rm L}\epsilon_{\rm M}^i\,, \quad \psi_\mu^i \;=\; P_{\rm L}\psi_{\mu{\rm M}}^i\,, \quad N_{\Lambda\Sigma} \;=\; N_{\Sigma\Lambda} \;\in\; \mathbb{R}\,.
$$

hermiticity condition を課す:

$$
\begin{aligned}
(\overline{\Omega}^{i\Lambda}\partial\!\!\!/\Omega_i^\Sigma)^\dagger \;&=\; \big[a(\Omega_{\rm M}^{i\Lambda})^\dagger\gamma^{\dot 0}P_{\rm R}\gamma^\mu P_{\rm L}\partial_\mu\Omega_{\rm M}^{i\Sigma}\big]^\dagger \;=\; (a^*b)\partial_\mu(\Omega_{\rm M}^{i\Sigma})^\dagger(P_{\rm L})^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(P_{\rm R})^\dagger(\gamma^{\dot 0})^\dagger\Omega_{\rm M}^{i\Lambda} \\
&=\; (a^*b)\partial_\mu(\Omega_{\rm M}^{i\Sigma})^\dagger P_{\rm L}(-\gamma^{\dot 0}\gamma^\mu(\gamma^{\dot 0})^{-1})P_{\rm R}(-\gamma^{\dot 0})\Omega_{\rm M}^{i\Lambda} \;=\; \Big(\frac{a^*}{a}b\Big)\partial_\mu\overline{\Omega}^{i\Sigma}\gamma^\mu\Omega_i^\Lambda \\
&=\; \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\Omega}^{i\Sigma}\gamma^\mu\partial_\mu\Omega_i^\Lambda + \partial_\mu(\cdots)\,,
\end{aligned} \tag{3.20a}
$$

$$
\therefore\quad \mathscr{L}_\Omega^\dagger \;\equiv\; \mathscr{L} \quad\to\quad \boxed{\;a^*b \;=\; -a\;}\,, \tag{3.20b}
$$

$$
\begin{aligned}
(\overline{\epsilon}^i\gamma^a\psi_{\mu i})^\dagger \;&=\; \Big(\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\psi}_\mu^i\gamma^a\epsilon_i \;=\; \Big(\frac{a^*}{a}b\Big)(\psi_{\mu{\rm M}}^i)^{\rm T}CP_{\rm L}\gamma^a P_{\rm R}\epsilon_{\rm M}^i \\
&=\; \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)(\epsilon_{\rm M}^i)^{\rm T}(P_{\rm R})^{\rm T}(\gamma^a)^{\rm T}C^{\rm T}\psi_{\mu{\rm M}}^i \\
&=\; \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)(\epsilon_{\rm M}^i)^{\rm T}(CP_{\rm R}C^{-1})(-C\gamma^aC^{-1})(-C)\psi_{\mu{\rm M}}^i \;=\; \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)(\epsilon_{\rm M}^i)^{\rm T}CP_{\rm R}\gamma^a\psi_{\mu{\rm M}}^i \\
&=\; \Big(-\frac{a^*}{a}b\Big)\overline{\epsilon}_i\gamma^a\psi_\mu^i\,,
\end{aligned} \tag{3.20c}
$$

$$
\therefore\quad (\delta e_\mu{}^a)^\dagger \;\equiv\; \delta e_\mu{}^a \quad\to\quad \boxed{\;a^*b \;=\; -a\;}\,. \tag{3.20d}
$$

ここまでで得られたデータをまとめておく:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\overline{\psi}^i\phi^j \;&=\; \overline{\phi}^j\psi^i\,, & \overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi_j \;&=\; -\overline{\phi}_j\gamma_\mu\psi^i\,, \\
(\overline{\psi}^i\phi^j)^\dagger \;&=\; \overline{\phi}_j\psi_i\,, & (\overline{\psi}^i\phi^j)^{\rm T} \;&=\; (-c)\,\overline{\phi}^j\psi^i\,, \\
(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi_j)^\dagger \;&=\; -\overline{\phi}^j\gamma_\mu\psi_i\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi_j)^{\rm T} \;&=\; c\,\overline{\phi}_j\gamma_\mu\psi^i\,, \\
(\overline{\psi}^i\phi^j)^* \;&=\; \Big(\frac{a^*}{a}\Big)\overline{\psi}_i\phi_j\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\phi_j)^* \;&=\; \Big(\frac{a^*}{a}\Big)\overline{\psi}_i\gamma_\mu\phi^j\,, \\
(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\phi^j)^\dagger \;&=\; \overline{\phi}_j\gamma_\nu\gamma_\mu\psi_i\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\phi^j)^{\rm T} \;&=\; (-c)\,\overline{\phi}^j\gamma_\nu\gamma_\mu\psi^i\,, \\
(\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\phi^j)^\dagger \;&=\; -\overline{\phi}_j\gamma_\nu\gamma_\mu\psi_i\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\phi^j)^{\rm T} \;&=\; c\,\overline{\phi}^j\gamma_\nu\gamma_\mu\psi^i\,, \\
(\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\phi_j)^\dagger \;&=\; -\overline{\phi}^j\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu\psi_i\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\phi_j)^{\rm T} \;&=\; c\,\overline{\phi}_j\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\mu\psi^i\,, \\
(\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\gamma_\rho\phi_j)^\dagger \;&=\; \overline{\phi}^j\gamma_\rho\gamma_{\mu\nu}\psi_i\,, & (\overline{\psi}^i\gamma_{\mu\nu}\gamma_\rho\phi_j)^{\rm T} \;&=\; (-c)\,\overline{\phi}_j\gamma_\rho\gamma_{\mu\nu}\psi^i\,, \\
& aa^* \;=\; 1\,, \quad bc \;=\; 1\,, \quad a^*b \;=\; -a\,, \\
&\text{de Wit's [1]:}\quad a \;=\; -1\,, \quad b \;=\; c \;=\; -1\,; \quad \overline{\psi} \;=\; -\psi^\dagger\gamma^{\dot 0} \;=\; \psi^\dagger\gamma_{\dot 0}\,, \\
&\text{ours [6]:}\quad a \;=\; +{\rm i}\,, \quad b \;=\; c \;=\; +1\,; \quad \overline{\psi} \;=\; {\rm i}\psi^\dagger\gamma^{\dot 0}\,.
\end{aligned}
}
\tag{3.21}
$$

これらのデータを用いて、(2.3) に対する hermitian conjugate (2.4) を、代表例 $\mathcal{D}\epsilon^i$ を見ることで (再度) 評価する:

$$\mathcal{D}_\mu\epsilon^i \;=\; \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} + \frac{1}{2}b_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}A_\mu\Big)\epsilon^i + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\,\epsilon^j\,, \tag{3.22a}$$

$$\mathcal{D}_\mu\epsilon_i \;\equiv\; (\mathcal{D}_\mu\epsilon^i)^c \;=\; C\overline{\mathcal{D}_\mu\epsilon^i}^{\mathrm{T}}\,, \tag{3.22b}$$

$$\epsilon^i \;=\; P_{\mathrm{L}}\epsilon^i_{\mathrm{M}}\,,\quad (\omega_\mu{}^{ab})^* \;=\; \omega_\mu{}^{ab}\,,\quad (b_\mu)^* \;=\; b_\mu\,,\quad (A_\mu)^* \;=\; A_\mu\,,\quad (\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j)^* \;=\; -\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\,, \tag{3.22c}$$

$$(\gamma_{ab})^* \;=\; \frac{1}{2}\Big[(\gamma_a)^*(\gamma_b)^* - (\gamma_b)^*(\gamma_a)^*\Big] \;=\; C\gamma^{\dot{0}}\gamma_{ab}(\gamma^{\dot{0}})^{-1}C^{-1}\,, \tag{3.22d}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu\epsilon^i)^c \;&=\; (P_{\mathrm{L}}\partial_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}})^c \;=\; C\overline{P_{\mathrm{L}}\partial_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}}}^{\mathrm{T}} \;=\; C\big[a(P_{\mathrm{L}}\partial_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot{0}}\big]^{\mathrm{T}} \\
&=\; aC(\gamma^{\dot{0}})^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{L}}^*(\partial_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}})^* \;=\; aC(-C\gamma^{\dot{0}}C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})\Big(-\frac{1}{a}C\gamma^{\dot{0}}\partial_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}}\Big) \\
&=\; -\gamma^{\dot{0}}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\dot{0}}\partial_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}} \\
&=\; \partial_\mu\epsilon_i\,,
\end{aligned} \tag{3.22e}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma_{ab}\epsilon^i)^c \;&=\; C\big[a(\gamma_{ab}P_{\mathrm{L}}\epsilon^i_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot{0}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; C\big[a(\epsilon^i_{\mathrm{M}})^\dagger(P_{\mathrm{L}})^\dagger(\gamma_{ab})^\dagger\gamma^{\dot{0}}\big]^{\mathrm{T}} \\
&=\; aC(\gamma^{\dot{0}})^{\mathrm{T}}(\gamma_{ab})^*(P_{\mathrm{L}})^*(\epsilon^i_{\mathrm{M}})^* \\
&=\; aC(-C\gamma^{\dot{0}}C^{-1})(C\gamma^{\dot{0}}\gamma_{ab}(\gamma^{\dot{0}})^{-1}C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})\Big(-\frac{1}{a}C\gamma^{\dot{0}}\epsilon^i_{\mathrm{M}}\Big) \;=\; -(\gamma^{\dot{0}})^2\gamma_{ab}P_{\mathrm{R}}\epsilon^i_{\mathrm{M}} \\
&=\; \gamma_{ab}\epsilon_i\,,
\end{aligned} \tag{3.22f}$$

$$\begin{aligned}
(b_\mu\epsilon^i)^c \;&=\; C\big[a(P_{\mathrm{L}}b_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot{0}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; aC(\gamma^{\dot{0}})^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{L}}^*(b_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}})^* \\
&=\; aC(-C\gamma^{\dot{0}}C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})\Big(-\frac{1}{a}C\gamma^{\dot{0}}b_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}}\Big) \;=\; -b_\mu\gamma^{\dot{0}}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\dot{0}}\epsilon^i_{\mathrm{M}} \\
&=\; b_\mu\epsilon_i\,,
\end{aligned} \tag{3.22g}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{i}A_\mu\epsilon^i)^c \;&=\; C\big[a(P_{\mathrm{L}}\mathrm{i}A_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot{0}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; aC(\gamma^{\dot{0}})^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{L}}^*(\mathrm{i}A_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}})^* \\
&=\; aC(-C\gamma^{\dot{0}}C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})\Big(\frac{\mathrm{i}}{a}C\gamma^{\dot{0}}A_\mu\epsilon^i_{\mathrm{M}}\Big) \;=\; \mathrm{i}A_\mu\gamma^{\dot{0}}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\dot{0}}\epsilon^i_{\mathrm{M}} \\
&=\; -\mathrm{i}A_\mu\epsilon_i\,,
\end{aligned} \tag{3.22h}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\,\epsilon^j)^c \;&=\; C\big[a(P_{\mathrm{L}}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\,\epsilon^j_{\mathrm{M}})^\dagger\gamma^{\dot{0}}\big]^{\mathrm{T}} \;=\; aC(\gamma^{\dot{0}})^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{L}}^*(\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\,\epsilon^j_{\mathrm{M}})^* \\
&=\; aC(-C\gamma^{\dot{0}}C^{-1})(CP_{\mathrm{L}}C^{-1})\Big(\frac{1}{a}C\gamma^{\dot{0}}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\,\epsilon^j_{\mathrm{M}}\Big) \;=\; \mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\gamma^{\dot{0}}P_{\mathrm{L}}\gamma^{\dot{0}}\epsilon^j_{\mathrm{M}} \\
&=\; -\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\,\epsilon_j\,,
\end{aligned} \tag{3.22i}$$

$$\therefore\quad \mathcal{D}_\mu\epsilon_i \;=\; \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} + b_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}A_\mu\Big)\epsilon_i - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\,\epsilon_j\,. \tag{3.22j}$$

これにより、Weyl spinors についての荷電共役操作が、その係数については複素共役になっていることを確認できた。$a = a^*$ の場合は、これがもっと直接的に言えるが、a は固定されずとも良いことがわかる。

理論を全て hermitian conjugate を用いて記述し続ける限り、$a = -1$ でも $a = +\mathrm{i}$ でも表記は同じになる。そのため、慣習的に $\overline{\psi} = \mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^{\dot{0}}$ を用いても、[1] の記述は変更されない。

3.6 Fierz identity

Dirac (or Majorana) spinors についての恒等式は

$$\phi\overline{\psi} \;=\; -\frac{1}{4}(\overline{\psi}\phi) - \frac{1}{4}(\overline{\psi}\gamma^a\phi)\gamma_a - \frac{1}{4}(\overline{\psi}\gamma_5\phi)\gamma_5 + \frac{1}{4}(\overline{\psi}\gamma^a\gamma_5\phi)\gamma_a\gamma_5 + \frac{1}{8}(\overline{\psi}\gamma^{ab}\phi)\gamma_{ab}\,. \tag{3.23}$$

これは九後教科書の **B-4** (17) において Grassmann 数についての恒等式を再現している:

$$(\overline{\psi}_1\Lambda^1\psi_2)(\overline{\psi}_3\Lambda^2\psi_4) \;=\; -\frac{1}{2^k}\sum_{m=0}^{n}(-)^{[m/2]}\frac{1}{m!}\big(\overline{\psi}_1\gamma^{\mu_1\cdots\mu_m}\psi_4\big)\big(\overline{\psi}_3\Lambda^2\gamma_{\mu_1\cdots\mu_m}\Lambda^1\psi_2\big)\,. \tag{3.24}$$

この公式は、$\Lambda^{1,2}$ が $2^k\times 2^k$ 行列であり、2^k 成分の $SO(1,n-1)$ fermions $\psi_{1\sim 4}$ についての恒等式である。

(3.23) を chiral spinors について適用すると次のようになる (ここでは χ^i, ϕ^i, ψ^i は同じ chirality を持つと仮定する [1]):

$$(\overline{\chi}^k\phi^i)\overline{\psi}^j \;=\; -\frac{1}{2}(\overline{\psi}^j\phi^i)\overline{\chi}^k + \frac{1}{8}(\overline{\psi}^j\gamma^{ab}\phi^i)\overline{\chi}^k\gamma_{ab}\,, \tag{3.25a}$$

$$(\overline{\chi}^k\phi^i)\overline{\psi}_j \;=\; -\frac{1}{2}(\overline{\psi}_j\gamma^a\phi^i)\overline{\chi}^k\gamma_a\,. \tag{3.25b}$$

もう少し実用的にするために右から適切な fermions を作用させる:

$$(\overline{\chi}^k\phi^i)(\overline{\psi}^j\zeta^l) \;=\; -\frac{1}{2}(\overline{\psi}^j\phi^i)(\overline{\chi}^k\zeta^l) + \frac{1}{8}(\overline{\psi}^j\gamma^{ab}\phi^i)(\overline{\chi}^k\gamma_{ab}\zeta^l)\,, \tag{3.26a}$$

$$(\overline{\chi}^k\phi^i)(\overline{\psi}_j\zeta_l) \;=\; -\frac{1}{2}(\overline{\psi}_j\gamma^a\phi^i)(\overline{\chi}^k\gamma_a\zeta_l)\,. \tag{3.26b}$$

3.7 $SU(2)$-invariant tensor ε_{ij}

Spinor の $SU(2)$-indices i,j の上下の位置は、それぞれ left-, right-chirality を示す。これを制御するのは ε_{ij}, ε^{ij} である。

複素共役を考えると添字の上下の位置が入れ替わる。これは、複素共役は spinor では荷電共役であり、chirality が反転することに対応する。ε_{ij} を用いて spinor の添字を変更すると、chirality が反転したことになる。ここでよく使う公式をまとめておく:

$$\varepsilon_{ij} \;=\; -\varepsilon_{ji}\,, \qquad \varepsilon_{12} \;=\; 1\,, \tag{3.27a}$$

$$\varepsilon^{ij} \;=\; -\varepsilon^{ji}\,, \qquad \varepsilon^{12} \;=\; 1\,, \tag{3.27b}$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon^{jk} \;=\; -\delta_i^k\,, \qquad (\varepsilon_{ij})^* \;=\; \varepsilon^{ij}\,. \tag{3.27c}$$

[1] 注意であるが $SU(2)_{\rm R}$ indices が上付だからといって任意の fermions が positive chirality を持つわけではない。実際 $\Omega^{i\Lambda}$ は negative chirality を持つと定義している。

3.8 Anti-hermitian traceless field ${\mathcal V_\mu}^i{}_j$

$SU(2)_{\rm R}$ gauge field ${\mathcal V_\mu}^i{}_j$ は、anti-hermitian で traceless である。ここでしばしば登場する関係式を整理する。まず、anti-hermitian condition $\mathcal V_\mu \equiv -\mathcal V_\mu^\dagger = -(\mathcal V_\mu^*)^{\rm T}$ を具体的に成分で表示しよう [7]:

$$ {\mathcal V_\mu}^i{}_j \ = \ ({\mathcal V_{\mu i}}^j)^* \ = \ -{\mathcal V_{\mu j}}^i \, . \tag{3.28a} $$

「左上-右下」添字 $({\mathcal V_\mu}^i{}_j)$ が通常の $\mathcal V_\mu$ の標準位置であると定義する。その時、$\mathcal V_\mu^{\rm T}$ の各成分は「左上-右下」の位置で $({\mathcal V_\mu}^j{}_i)$ である。「複素共役」をとると、添字の上下が反転するので、$\mathcal V_\mu^*$ の各成分は $({\mathcal V_{\mu i}}^j)$ となる。そして hermitian conjugate は「複素共役の転置」なので、$\mathcal V_\mu^\dagger$ の各成分は $({\mathcal V_{\mu j}}^i)$ となる。つまりこれより、anti-hermitian condition が上のように与えられることが分かる。真ん中の式は「複素共役」の定義である。この表式の複素共役は次の様になる:

$$ ({\mathcal V_\mu}^i{}_j)^* \ = \ {\mathcal V_{\mu i}}^j \ = \ -({\mathcal V_{\mu j}}^i)^* \ = \ -{\mathcal V_\mu}^j{}_i \, . \tag{3.28b} $$

なお、(3.19) を考慮して次の公式を用いた:

$$ \varepsilon^{ij} \ = \ -\varepsilon^{ji} \, , \qquad (\varepsilon_{ij})^* \ = \ \varepsilon^{ij} \, , \qquad (\varepsilon_{ij} {T_{ab}}^{ij})^* \ = \ \varepsilon^{ij} T_{abij} \, , \qquad F_{\Lambda\Sigma\Gamma} \ = \ F_{\Lambda\Gamma\Sigma} \, . \tag{3.29} $$

pseudo-reality condition は ${T_{ab}}^{ij}$ には課さないので、${T_{ab}}^{ij}$ と T_{abij} は互いに独立である。

4 Conventions for geometries

4.1 Kähler potential

$$F(\lambda X) \;=\; \lambda^2 F(X)\,, \quad F(X) \;=\; \frac{1}{2} F_\Lambda X^\Lambda\,, \quad F_\Lambda \;=\; F_{\Lambda\Sigma} X^\Sigma\,, \quad F_{\Lambda\Sigma\Gamma} X^\Gamma \;=\; 0\,, \tag{4.1a}$$

$$N_{\Lambda\Sigma} \;=\; 2\mathrm{Im} F_{\Lambda\Sigma} \;=\; -\mathrm{i} F_{\Lambda\Sigma} + \mathrm{i}\overline{F}_{\Lambda\Sigma}\,, \tag{4.1b}$$

$$K \;=\; -\mathrm{i}\big(\overline{X}^\Lambda F_\Lambda - X^\Lambda \overline{F}_\Lambda\big) \;=\; N_{\Lambda\Sigma} X^\Lambda \overline{X}^\Sigma\,. \tag{4.1c}$$

注意。[2] で登場する Kähler potential の符号は自分のこれまでのそれと同符号である。また $N_{\Lambda\Sigma[1]} = +N_{IJ[2]}$ であるため $K_{[1]} = -N_{[2]}$ でもある。

4.2 Transformations of symplectic vectors

Electric/magnetic duality transformaion $Sp(2n+2;\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} X^\Lambda \\ F_\Lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{X}^\Lambda \\ \widetilde{F}_\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\Lambda{}_\Sigma & Z^{\Lambda\Sigma} \\ W_{\Lambda\Sigma} & V_\Lambda{}^\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\Sigma \\ F_\Sigma \end{pmatrix}, \tag{4.2a}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\widetilde{X}) \;&=\; F(X) - \frac{1}{2} X^\Lambda F_\Lambda(X) + \frac{1}{2}(U^{\mathrm{T}} W)_{\Lambda\Sigma} X^\Lambda X^\Sigma \\ &\quad + \frac{1}{2}(U^{\mathrm{T}} V + W^{\mathrm{T}} Z)_\Lambda{}^\Sigma X^\Lambda F_\Sigma(X) + \frac{1}{2}(Z^{\mathrm{T}} V)^{\Lambda\Sigma} F_\Lambda(X) F_\Sigma(X)\,, \end{aligned} \tag{4.2b}$$

$$\mathcal{S}^\Lambda{}_\Sigma \;\equiv\; \frac{\partial \widetilde{X}^\Lambda}{\partial X^\Sigma} \;=\; U^\Lambda{}_\Sigma + Z^{\Lambda\Gamma} F_{\Gamma\Sigma}\,, \tag{4.2c}$$

$$\widetilde{F}_{\Lambda\Sigma}(\widetilde{X}) \;=\; (V_\Lambda{}^\Gamma F_{\Gamma\Xi}(X) + W_{\Lambda\Xi})[\mathcal{S}^{-1}]^\Xi{}_\Sigma\,, \tag{4.2d}$$

$$\widetilde{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}(\widetilde{X}) \;=\; F_{\Xi\Delta\Omega}(X)[\mathcal{S}^{-1}]^\Xi{}_\Lambda [\mathcal{S}^{-1}]^\Delta{}_\Sigma [\mathcal{S}^{-1}]^\Omega{}_\Gamma\,, \tag{4.2e}$$

$$\widetilde{N}_{\Lambda\Sigma}(\widetilde{X}, \overline{\widetilde{X}}) \;=\; N_{\Gamma\Delta}[\mathcal{S}^{-1}]^\Gamma{}_\Lambda [\overline{\mathcal{S}}^{-1}]^\Delta{}_\Sigma \tag{4.2f}$$

The electric/magnetic duality transformations define equivalence classes of Lagrangians. A subgroup thereof may constitute an invariance of the theory, meaning that the Lagrangian and its underlying function $F(X)$ do not change [9], [10]. More presicely, an invariance implies

$$\widetilde{F}(\widetilde{X}) \;=\; F(\widetilde{X}) \qquad \text{(invariance)}\,, \tag{4.3a}$$

$$F_\Lambda(\widetilde{X}) \;=\; V_\Lambda{}^\Sigma F_\Sigma(X) + W_{\Lambda\Sigma} X^\Sigma\,, \tag{4.3b}$$

$$F_{\Lambda\Sigma}(\widetilde{X}) \;=\; (V_\Lambda{}^\Gamma F_{\Gamma\Xi}(X) + W_{\Lambda\Xi})[\mathcal{S}^{-1}]^\Xi{}_\Sigma\,, \tag{4.3c}$$

$$F_{\Lambda\Sigma\Gamma}(\widetilde{X}) \;=\; F_{\Xi\Delta\Omega}(X)[\mathcal{S}^{-1}]^\Xi{}_\Lambda [\mathcal{S}^{-1}]^\Delta{}_\Sigma [\mathcal{S}^{-1}]^\Omega{}_\Gamma\,, \tag{4.3d}$$

$$\widetilde{\Omega}_i^\Lambda \;=\; \mathcal{S}^\Lambda{}_\Sigma \Omega_i^\Sigma\,, \qquad \widetilde{\mathcal{O}}^-_{\mu\nu\Lambda} \;=\; \mathcal{O}^-_{\mu\nu\Sigma}[\mathcal{S}^{-1}]^\Sigma{}_\Lambda\,, \tag{4.3e}$$

so that the result of the duality leads to a Lagrangian based on $\widetilde{F}(\widetilde{X})$ which is identical to the original Lagrangian. Because $\widetilde{F}(\widetilde{X}) \neq F(X)$, $F(X)$ is not an invariant function.

4.3 Technical objects in hypermultiplets

$$
\begin{aligned}
W_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta} &= \frac{1}{2} R_{ABCD}\, \gamma^A_{i\overline{\alpha}}\, \overline{\gamma}^{iB}_{\beta}\, \gamma^C_{j\overline{\gamma}}\, \overline{\gamma}^{jD}_{\delta}\,, && (4.4a)\\
\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ij} g_{AB}\gamma^A_{i\overline{\alpha}}\gamma^B_{j\overline{\beta}}\,, && (4.4b)\\
\overline{\Omega}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} g^{AB}\overline{V}^{i\overline{\alpha}}_A \overline{V}^{j\overline{\beta}}_B\,, && (4.4c)\\
\overline{\Omega}_{\alpha\beta} &= (\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}})^* \;=\; G_{\overline{\gamma}\alpha}\overline{\Omega}^{\overline{\gamma}\overline{\delta}} G_{\overline{\delta}\beta}\,, && (4.4d)\\
(G_{\overline{\alpha}\beta})^* &= G_{\overline{\beta}\alpha}\,, && (4.4e)\\
\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\gamma}}\overline{\Omega}^{\overline{\gamma}\overline{\beta}} &= -\delta_{\overline{\alpha}}^{\overline{\beta}}\,, && (4.4f)\\
\varepsilon_{ij}\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\overline{V}^{j\overline{\beta}}_A &= g_{AB}\gamma^B_{i\overline{\alpha}} \;=\; G_{\overline{\alpha}\beta}V^\beta_{Ai}\,, && (4.4g)\\
\varepsilon_{ij}\Omega^{\alpha\beta} &= g^{AB} D_A A_i{}^\alpha D_B A_j{}^\beta \;=\; g^{AB} V^\alpha_{Ai} V^\beta_{Bj}\,, && (4.4h)\\
\varepsilon_{ij}\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} &= g_{AB}\gamma^A_{i\overline{\alpha}}\gamma^B_{j\overline{\beta}}\,, && (4.4i)\\
\delta^j_i G^{\alpha\overline{\beta}} &= g^{AB} D_A A_i{}^\alpha D_B A^{j\overline{\beta}} \;=\; g^{AB} V^\alpha_{Ai}\overline{V}^{j\overline{\beta}}_B\,. && (4.4j)
\end{aligned}
$$

g_{AB}: hyper-Kähler cone の実計量 (coordinates: ϕ^A)。$\Omega^{\alpha\beta}$ は skew symmetric。$G_{\overline{\alpha}\beta}$ は hermitian。

$$
\begin{aligned}
A_i{}^\alpha(\phi) &= \chi^B(\phi) V^\alpha_{Bi}(\phi)\,, && (4.5a)\\
A^{i\overline{\alpha}} &= (A_i{}^\alpha)^* \;=\; \varepsilon^{ij}\overline{\Omega}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}} G_{\overline{\beta}\gamma} A_j{}^\gamma \qquad \text{(quaternionic pseudo-reality condition)}\,, && (4.5b)\\
\overline{\Omega}_{\alpha\beta} A_i{}^\alpha A_j{}^\beta &= \varepsilon_{ij}\chi\,, \qquad \chi \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}A_i{}^\alpha A_j{}^\beta \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} A^{i\overline{\alpha}} A^{j\overline{\beta}}\,, && (4.5c)\\
D_B A_i{}^\alpha &= V^\alpha_{Bi}\,, \qquad D_B A^{i\overline{\alpha}} \;=\; \overline{V}^{i\overline{\alpha}}_B\,, \qquad \chi^B D_B A_i{}^\alpha \;=\; A_i{}^\alpha\,, && (4.5d)\\
\delta^i_j \delta^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}} &= \overline{V}^{i\overline{\alpha}}_A \gamma^A_{j\overline{\beta}}\,, \qquad \overline{\gamma}^j_{A\alpha} V^\alpha_{Bi} \;=\; \gamma_{Bi\overline{\alpha}}\overline{V}^{j\overline{\alpha}}_A \;=\; -\overline{\gamma}^j_{B\alpha} V^\alpha_{Ai} + \delta^j_i g_{AB}\,, && (4.5e)\\
\delta^j_i \delta^A{}_B &= \gamma^A_{i\overline{\alpha}} \overline{V}^{j\overline{\alpha}}_B + \overline{\gamma}^{Aj}_\alpha V^\alpha_{Bi}\,, && (4.5f)\\
D_B \gamma^A_{i\overline{\alpha}} &= \partial_B \gamma^A_{i\overline{\alpha}} + \Gamma_{BC}{}^A \gamma^C_{i\overline{\alpha}} - \overline{\Gamma}_B{}^{\overline{\beta}}{}_{\overline{\alpha}} \gamma^A_{i\overline{\beta}} \;=\; 0\,, && (4.5g)\\
D_B V^\alpha_{Ai} &= \partial_B V^\alpha_{Ai} - \Gamma_{BA}{}^C V^\alpha_{Ci} + \Gamma_B{}^\alpha{}_\beta V^\beta_{Ai} \;=\; 0\,. && (4.5h)
\end{aligned}
$$

またこれより、hyper-Kähler potential χ を与える:

$$
\begin{aligned}
G_{\overline{\alpha}\beta} A^{i\overline{\alpha}} A_k{}^\beta &= G_{\overline{\alpha}\beta} A_k{}^\beta \varepsilon^{il} \overline{\Omega}^{\overline{\alpha}\overline{\gamma}} G_{\overline{\gamma}\delta} A_l{}^\delta \;=\; \varepsilon^{il} A_k{}^\beta A_l{}^\delta \overline{\Omega}_{\beta\delta} \;=\; \varepsilon^{il}\varepsilon_{kl}\chi \;=\; \delta^i_k \chi\,, && (4.5i)\\
\therefore\quad \chi &= \frac{1}{2} G_{\overline{\alpha}\beta} A^{i\overline{\alpha}} A_i{}^\beta \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta} A_i{}^\alpha A_j{}^\beta\,. && (4.5j)
\end{aligned}
$$

もう少し掘り下げる。hyper-Kähler potential χ, homothetic vector χ^A の周辺 [4, 5]:

$$
\begin{aligned}
\chi &= \frac{1}{2} G_{\overline{\alpha}\beta} A^{i\overline{\alpha}} A_i{}^\beta \;=\; \frac{1}{2} g_{AB}\chi^A\chi^B \;=\; \frac{1}{2}\chi^A \partial_A \chi\,, && (4.6a)\\
D_A \chi &= \partial_A \chi \;=\; g_{AB}\chi^B \;=\; \chi_A\,, && (4.6b)\\
\chi_B \;=\; D_B\chi &= D_B\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} A^{i\overline{\alpha}} A^{j\overline{\beta}}\right] \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\left[\overline{V}^{i\overline{\alpha}}_B A^{j\overline{\beta}} + A^{i\overline{\alpha}}\overline{V}^{j\overline{\beta}}_B\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= D_B\Big[\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}A_i{}^\alpha A_j{}^\beta\Big] \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\Big[V^\alpha_{Bi}A_j{}^\beta + A_i{}^\alpha V^\beta_{Bj}\Big]\,, && (4.6c)\\
D_A\chi^B &= \delta^B_A\,, && (4.6d)\\
D_AD_B\chi &= g_{AB}\,, && (4.6e)\\
D_AD_BD_C\chi &= 0\,, && (4.6f)
\end{aligned}
$$

$J^{ij}{}_{AB} = J^{ji}{}_{AB} = -J^{ij}{}_{BA}$ は hyper-Kähler cone を定義する 3 つの hermitian complex structures:

$$
\begin{aligned}
J_{ijAB} &= (J^{ij}{}_{AB})^* \;=\; \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}J^{kl}{}_{AB}\,, && (4.7a)\\
J^{ij}{}_A{}^C J^{kl}{}_{CB} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{i(k}\varepsilon^{l)j}g_{AB} + \varepsilon^{(i(k}J^{l)j)}{}_{AB}\,, && (4.7b)\\
J^{ij}{}_{AB} &= \gamma_{Ak\overline{\alpha}}\varepsilon^{k(i}\overline{V}^{j)\overline{\alpha}}_B\,, && (4.7c)\\
\gamma_{Ai\overline{\alpha}}\overline{V}^{j\overline{\alpha}}_B &= \varepsilon_{ik}J^{kj}{}_{AB} + \frac{1}{2}g_{AB}\delta^j_i\,, && (4.7d)\\
J^{ij}{}_{AB}\gamma^B_{k\overline{\alpha}} &= -\delta^{(i}_k\varepsilon^{j)l}\gamma_{Al\overline{\alpha}}\,, && (4.7e)\\
\overline{V}^{i\overline{\alpha}}_A\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\overline{V}^{j\overline{\beta}}_B &= \Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}D_AA^{i\overline{\alpha}}D_BA^{j\overline{\beta}} \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}g_{AB} - J^{ij}{}_{AB}\,, && (4.7f)\\
V^\alpha_{Ai}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}V^\beta_{Bj} &= \overline{\Omega}_{\alpha\beta}D_AA_i{}^\alpha D_BA_j{}^\beta \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}g_{AB} - J_{ijAB}\,. && (4.7g)
\end{aligned}
$$

[4, 1] には明記されていないが、次の関係式が成立する:

$$
\overline{\Omega}^{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = (\Omega^{\alpha\beta})^*\,, \qquad \overline{V}^{i\overline{\alpha}}_A = (V^\alpha_{Ai})^*\,, \qquad \overline{\gamma}^{Ai}_\alpha = (\gamma^A_{i\overline{\alpha}})^*\,. \qquad (4.8a)
$$

$J^{ij}{}_{AB}$ に対する Killing vectors $k_{ij}{}^A$ とその性質を列挙する:

$$
\begin{aligned}
k_{ij}{}^A &\equiv J_{ij}{}^{AB}\chi_B\,, && (4.9a)\\
D_Ak^{ij}{}_B &= -J^{ij}{}_{AB}\,, && (4.9b)\\
k_{ij}{}^Ak^{kl}{}_A &= \delta^k_{(i}\delta^l_{j)}\chi\,, && (4.9c)\\
\chi^Ak^{ij}{}_A &= 0\,, && (4.9d)\\
k^{Bij}\partial_Bk^{Akl} - k^{Bkl}\partial_Bk^{Aij} &= 2k^{A(i(k}\varepsilon^{l)j)}\,, && (4.9e)\\
\overline{\Omega}_{\alpha\beta}A_i{}^\alpha D_BA_j{}^\beta &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\chi_B + k_{ijB}\,. && (4.9f)
\end{aligned}
$$

ϕ^A-dependent matrices $(t_{\mathsf{m}})^\alpha{}_\beta(\phi)$ については次が成立している [4]:

$$
\begin{aligned}
(t_{\mathsf{m}})^\alpha{}_\beta &\equiv \frac{1}{2}V^\alpha_{Ai}\overline{\gamma}^{Bi}_\beta D_Bk^A{}_{\mathsf{m}}\,, && (4.10a)\\
0 &= (t_{\mathsf{m}})^\gamma{}_\beta G_{\overline{\alpha}\gamma} + (\bar{t}_{\mathsf{m}})^{\overline{\gamma}}{}_{\overline{\alpha}}G_{\overline{\gamma}\beta} \;=\; (t_{\mathsf{m}})^{\overline{\gamma}}{}_{[\overline{\alpha}}\Omega_{\overline{\beta}]\overline{\gamma}}\,, && (4.10b)\\
D_A(t_{\mathsf{m}})^\alpha{}_\beta &= R_{AB}{}^\alpha{}_\beta\, k^B{}_{\mathsf{m}}\,, && (4.10c)\\
[t_{\mathsf{m}},t_{\mathsf{n}}]^\alpha{}_\beta &= f_{\mathsf{mn}}{}^{\mathsf{p}}(t_{\mathsf{p}})^\alpha{}_\beta + k^A{}_{\mathsf{m}}k^B{}_{\mathsf{n}}R_{AB}{}^\alpha{}_\beta\,, && (4.10d)\\
[X_{\mathsf{m}},X_{\mathsf{n}}]^\alpha{}_\beta &= -f_{\mathsf{mn}}{}^{\mathsf{p}}(X_{\mathsf{p}})^\alpha{}_\beta\,, \qquad (X_{\mathsf{m}})^\alpha{}_\beta \;\equiv\; \delta^\alpha{}_\beta k^A{}_{\mathsf{m}}D_A - (t_{\mathsf{m}})^\alpha{}_\beta\,. && (4.10e)
\end{aligned}
$$

ただし tri-holomorphic Killing vectors $k^A{}_{\mathsf{m}}$ は次の性質を持っている [4]:

$$
\begin{aligned}
k^C{}_{\mathsf{m}} \partial_C J^{ij}{}_{AB} - 2\partial_{[A} k^C{}_{\mathsf{m}} J^{ij}{}_{B]C} \ &= \ 0\,, & (4.11\text{a})\\
k_{ij}{}^B D_B k^A{}_{\mathsf{m}} \ = \ D_B k_{ij}{}^A k^B{}_{\mathsf{m}} \ &= \ J_{ij}{}^A{}_B k^B{}_{\mathsf{m}}\,, & (4.11\text{b})\\
\chi_A k^A{}_{\mathsf{m}} \ &= \ 0\,, & (4.11\text{c})\\
D_A k_{B\mathsf{m}} + D_B k_{A\mathsf{m}} \ &= \ 0\,, & (4.11\text{d})\\
k^B{}_{\mathsf{m}} \partial_B k^A{}_{\mathsf{n}} - k^B{}_{\mathsf{n}} \partial_B k^A{}_{\mathsf{m}} \ &= \ -f_{\mathsf{mn}}{}^{\mathsf{p}} k^A{}_{\mathsf{p}}\,, \\
\Big(\text{or,} \quad \mathscr{L}_{k_{\mathsf{m}}} k_{\mathsf{n}} \ = \ [k_{\mathsf{m}}, k_{\mathsf{n}}] \ &= \ -f_{\mathsf{mn}}{}^{\mathsf{p}} k_{\mathsf{p}} \ \ \text{with } k_{\mathsf{m}} \ \equiv \ k^A{}_{\mathsf{m}} \frac{\partial}{\partial \phi^A}\,, \Big) & (4.11\text{e})\\
D_A D_B k_{C\mathsf{m}} \ &= \ R_{BCAE} k^E{}_{\mathsf{m}}\,, & (4.11\text{f})\\
k^A{}_{\mathsf{m}} V^\alpha_{Ai} \ = \ k^A{}_{\mathsf{m}} D_A A_i{}^\alpha \ &= \ (t_{\mathsf{m}})^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta\,. & (4.11\text{g})
\end{aligned}
$$

$\partial_C (J^{ij}{}_{AB} k^B{}_{\mathsf{m}}) - \partial_A (J^{ij}{}_{CB} k^B{}_{\mathsf{m}}) = 0$ なので、それに付随して moment maps $\mu^{ij}{}_{\mathsf{m}}$ が存在する:

$$
\begin{aligned}
\mu^{ij}{}_{\mathsf{m}} \ \equiv \ -\frac{1}{2} k^{ij}{}_A k^A{}_{\mathsf{m}}\,, \qquad \partial_A \mu^{ij}{}_{\mathsf{m}} \ = \ J^{ij}{}_{AB} k^B{}_{\mathsf{m}}\,, \qquad \mu_{ij\mathsf{m}} \ &= \ \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\mu^{kl}{}_{\mathsf{m}}\,, & (4.12\text{a})\\
J^{ij}{}_{AB} k^A{}_{\mathsf{m}} k^B{}_{\mathsf{n}} \ &= \ -f_{\mathsf{mn}}{}^{\mathsf{p}} \mu^{ij}{}_{\mathsf{p}}\,, & (4.12\text{b})\\
\mu_{ij\mathsf{m}} \ = \ -\frac{1}{2} k_{Aij} k^A{}_{\mathsf{m}} \ &= \ -\frac{1}{2} \overline{\Omega}_{\alpha\beta} A_i{}^\alpha (t_{\mathsf{m}})^\beta{}_\gamma A_j{}^\gamma\,. & (4.12\text{c})
\end{aligned}
$$

さて、ここまでで 3 種類の Killing vectors が登場した:

χ_A :	homothetic Killing vectors
$k_{ij}{}^A$:	$SU(2)$ Killing vectors
$k^A{}_{\mathsf{m}}$:	tri-holomorphic Killing vectors

また、蛇足だが d-dimensional space での Killing equations には次のような分類がある:

$$
\begin{aligned}
\text{Killing equation}: \quad D_{(\mu}k_{\nu)} \ &= \ 0\,, & (4.13\text{a})\\
\text{conformal Killing equation}: \quad D_{(\mu}k_{\nu)} \ &= \ \frac{1}{d} g_{\mu\nu} D_\rho k^\rho\,, & (4.13\text{b})\\
\text{homothetic Killing equation}: \quad D_{(\mu}k_{\nu)} \ &= \ \alpha\, g_{\mu\nu} \qquad \text{with constant } \alpha\,. & (4.13\text{c})
\end{aligned}
$$

5 Duality covariant gauged Lagrangian by embedding tensors

5.1 Lagrangian

Embedding tensors を用いた duality covariant gauged Lagrangian [1] を記述する [2]:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\rm kin}^{(1)} + \mathscr{L}_{\rm kin}^{(2)} + \mathscr{L}_{\rm aux} + \mathscr{L}_{\rm conf} + \mathscr{L}_{\rm H,conf} + \mathscr{L}_{\rm top} + \mathscr{L}_{\rm g} + \mathscr{L}_{{\rm g}^2} \,, \tag{5.1a}$$

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm kin}^{(1)} &= -{\rm i}\Omega_{MN}\mathcal{D}_\mu X^M \mathcal{D}^\mu \overline{X}^N + \frac{\rm i}{4}\Omega_{MN}\Big[\overline{\Omega}{}^{iM}\not{\mathcal{D}}\Omega_i^N - \overline{\Omega}{}_i^M \not{\mathcal{D}}\Omega^{iN}\Big] \\
&\quad - \frac{\rm i}{2}\Omega_{MN}\Big[\overline{\psi}{}_\mu^i \not{\mathcal{D}}\overline{X}^M \gamma^\mu \Omega_i^N - \overline{\psi}_{\mu i}\not{\mathcal{D}} X^M \gamma^\mu \Omega^{iN}\Big] \,, &(5.1b)\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm kin}^{(2)} &= \frac{\rm i}{4}\Big[F_{\Lambda\Sigma}\mathcal{H}_{\mu\nu}^{-\Lambda}\mathcal{H}^{-\mu\nu\Sigma} - \overline{F}_{\Lambda\Sigma}\mathcal{H}_{\mu\nu}^{+\Lambda}\mathcal{H}^{+\mu\nu\Sigma}\Big] \\
&\quad + \Big[\mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}^{-}\mathcal{H}^{-\mu\nu\Lambda} - N^{\Lambda\Sigma}\mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}^{-}\mathcal{O}_\Sigma^{-\mu\nu} + ({\rm h.c.})\Big] \,, &(5.1c)\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm aux} &= \frac{1}{8}N^{\Lambda\Sigma}\Big[N_{\Lambda\Gamma}Y_{ij}^\Gamma + \frac{\rm i}{2}\big(F_{\Lambda\Gamma\Pi}\overline{\Omega}{}_i^\Gamma \Omega_j^\Pi - \overline{F}_{\Lambda\Gamma\Pi}\overline{\Omega}{}^{k\Gamma}\Omega^{l\Pi}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\big)\Big] \\
&\qquad \times \Big[N_{\Sigma\Xi}Y^{ij\Xi} - \frac{\rm i}{2}\big(\overline{F}_{\Sigma\Xi\Delta}\overline{\Omega}{}^{i\Xi}\Omega^{j\Delta} - F_{\Sigma\Xi\Delta}\overline{\Omega}{}_m^\Xi \Omega_n^\Delta \varepsilon^{im}\varepsilon^{jn}\big)\Big] \,, &(5.1d)\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm conf} &= \frac{1}{6}K\Big[R + \Big(e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}{}_\mu^i \gamma_\nu \mathcal{D}_\rho \psi_{\sigma i} - \overline{\psi}{}_\mu^i \psi_\nu^j T^{\mu\nu}{}_{ij} + ({\rm h.c.})\Big)\Big] \\
&\quad - K\Big[D + \frac{1}{2}\overline{\psi}{}_\mu^i \gamma^\mu \chi_i + \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu \chi^i\Big] \\
&\quad - \Big[K_\Lambda\Big(\frac{1}{4}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma_\nu \psi_\rho^i \mathcal{D}_\sigma X^\Lambda + \frac{1}{48}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu \gamma_{\rho\sigma}\Omega_j^\Lambda T^{\rho\sigma ij}\Big) + ({\rm h.c.})\Big] \\
&\quad - \Big[K_\Lambda\Big(\frac{1}{3}\overline{\Omega}{}_i^\Lambda \gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu \psi_\nu^i - \overline{\Omega}{}_i^\Lambda \chi^i\Big) + ({\rm h.c.})\Big] \,, &(5.1e)\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm H,conf} &= \frac{1}{6}\chi\Big[R + \Big(e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}{}_\mu^i \gamma_\nu \mathcal{D}_\rho \psi_{\sigma i} - \frac{1}{4}\overline{\psi}{}_\mu^i \psi_\nu^j T^{\mu\nu}{}_{ij} + ({\rm h.c.})\Big)\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi\Big[D + \frac{1}{2}\overline{\psi}{}_\mu^i \gamma^\mu \chi_i + \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu \chi^i\Big] \\
&\quad - \frac{1}{2}G_{\overline{\alpha}\beta}\mathcal{D}_\mu A_i{}^\beta \mathcal{D}^\mu A^{i\overline{\alpha}} - G_{\overline{\alpha}\beta}\big(\overline{\zeta^\alpha}\not{\mathcal{D}}\zeta^\beta + \overline{\zeta}{}^\beta \not{\mathcal{D}}\zeta^{\overline{\alpha}}\big) - \frac{1}{4}W_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta}\,\overline{\zeta^\alpha}\gamma_\mu \zeta^\beta\,\overline{\zeta^\gamma}\gamma^\mu \zeta^\delta \\
&\quad - \chi_A\Big[\gamma_{i\overline{\alpha}}^A\Big(\frac{2}{3}\overline{\zeta^\alpha}\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu \psi_\nu^i + \overline{\zeta^\alpha}\chi^i - \frac{1}{6}\overline{\zeta^\alpha}\gamma_\mu \psi_{\nu i}T^{\mu\nu ij}\Big) + ({\rm h.c.})\Big] \\
&\quad + \Big[\frac{1}{16}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\overline{\zeta}{}^\alpha \gamma^{\mu\nu}T_{\mu\nu ij}\varepsilon^{ij}\zeta^\beta - \frac{1}{2}\overline{\zeta}{}^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_{\mu i}\big(\overline{\psi}{}_\nu^i G_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^{\overline{\beta}} + \varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\overline{\psi}_{\nu j}\zeta^\beta\big) \\
&\qquad + G_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\zeta}{}^\beta \gamma^\mu \not{\mathcal{D}}A^{i\overline{\alpha}}\psi_{\mu i} - \frac{1}{4}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\overline{\alpha}\beta}\overline{\psi}{}_\mu^i \gamma_\nu \psi_{\rho j}A_i{}^\beta \mathcal{D}_\sigma A^{j\overline{\alpha}} + ({\rm h.c.})\Big] \,, &(5.1f)\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\rm top} &= \frac{\rm i}{8}{\rm g}\,e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\big(\Theta^{\Lambda\mathsf{a}}B_{\mu\nu\mathsf{a}} + \Theta^{\Lambda\mathsf{m}}B_{\mu\nu\mathsf{m}}\big) \\
&\qquad \times \Big(2\partial_\rho W_{\sigma\Lambda} + {\rm g}\,T_{MN\Lambda}W_\rho^M W_\sigma^N - \frac{1}{4}{\rm g}\,\Theta_\Lambda{}^{\mathsf{b}}B_{\rho\sigma\mathsf{b}} - \frac{1}{4}{\rm g}\,\Theta_\Lambda{}^{\mathsf{n}}B_{\rho\sigma\mathsf{n}}\Big) \\
&\quad + \frac{\rm i}{3}{\rm g}\,e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}T_{MN\Lambda}W_\mu^M W_\nu^N \Big(\partial_\rho W_\sigma^\Lambda + \frac{1}{4}{\rm g}\,T_{PQ}{}^\Lambda W_\rho^P W_\sigma^Q\Big)
\end{aligned}$$

[2] 普通の gauged Lagrangian を扱っていても面白くない。ここは常人が立ち入らない領域から攻める [2012 9/16]。

$$
\begin{aligned}
& + \frac{\mathrm{i}}{6}\mathrm{g}\, e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{MN}{}^{\Lambda} W_\mu^M W_\nu^N \Big(\partial_\rho W_{\sigma\Lambda} + \frac{1}{4}\mathrm{g}\, T_{PQ\Lambda} W_\rho^P W_\sigma^Q\Big)\,, && (5.1\mathrm{g})\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\mathrm{g}} \;=\; & -\frac{1}{2}\mathrm{g}\Big[\mathrm{i}\Omega_{MQ} T_{PN}{}^{Q} \varepsilon^{ij} \overline{X}^N \overline{\Omega}_i^M \big(\Omega_j^P + \gamma^\mu \psi_{\mu j} X^P\big) + (\mathrm{h.c.})\Big] \\
& + 2\mathrm{g}\Big[k_{AM}\gamma^{A}_{i\overline{\alpha}}\varepsilon^{ij}\overline{\zeta^{\alpha}}\big(\Omega_j^M + \gamma^\mu\psi_{\mu j}X^M\big) + (\mathrm{h.c.})\Big] \\
& + \mathrm{g}\Big[\mu^{ij}{}_M \overline{\psi}_{\mu i}\big(\gamma^\mu \Omega_j^M + \gamma^{\mu\nu}\psi_{\nu j}X^M\big) + (\mathrm{h.c.})\Big] \\
& + 2\mathrm{g}\Big[\overline{X}^M T_M{}^{\gamma}{}_{\alpha}\overline{\Omega}_{\beta\gamma}\overline{\zeta}^{\alpha}\zeta^{\beta} + X^M T_M{}^{\overline{\gamma}}{}_{\overline{\alpha}}\Omega_{\overline{\beta}\overline{\gamma}}\overline{\zeta^{\alpha}}\zeta^{\overline{\beta}}\Big] \\
& - \frac{1}{4}\mathrm{g}\Big[F_{\Lambda\Sigma\Gamma}\mu^{ij\Lambda}\overline{\Omega}_i^{\Sigma}\Omega_j^{\Gamma} + \overline{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}\mu_{ij}{}^{\Lambda}\overline{\Omega}^{i\Sigma}\Omega^{j\Gamma}\Big] \\
& + \mathrm{g}\, Y^{ij\Lambda}\Big[\mu_{ij\Lambda} + \frac{1}{2}(F_{\Lambda\Sigma} + \overline{F}_{\Lambda\Sigma})\mu_{ij}{}^{\Sigma}\Big]\,, && (5.1\mathrm{h})\\
e^{-1}\mathscr{L}_{\mathrm{g}^2} \;=\; & \mathrm{i}\mathrm{g}^2\Omega_{MN}\big(T_{PQ}{}^{M}X^P\overline{X}^Q\big)\big(T_{RS}{}^{N}\overline{X}^R X^S\big) - 2\mathrm{g}^2 k^A{}_M k^B{}_N g_{AB} X^M \overline{X}^N \\
& - \frac{1}{2}\mathrm{g}^2 N_{\Lambda\Sigma}\,\mu_{ij}{}^{\Lambda}\,\mu^{ij\Sigma}\,. && (5.1\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

5.2 Constituents in gauged system

5.2.1 Symplectic vectors

$$X^M = \begin{pmatrix} X^\Lambda \\ F_\Lambda \end{pmatrix}, \quad \Omega_i^M = \begin{pmatrix} \Omega_i^\Lambda \\ F_{\Lambda\Sigma}\Omega_i^\Sigma \end{pmatrix}, \quad \Omega^{iM} = \begin{pmatrix} \Omega^{i\Lambda} \\ \overline{F}_{\Lambda\Sigma}\Omega^{i\Sigma} \end{pmatrix}, \tag{5.2a}$$

$$Z_{ij}^M = \begin{pmatrix} Y_{ij}^\Lambda \\ F_{\Lambda\Sigma}Y_{ij}^\Sigma - \frac{1}{2}F_{\Lambda\Sigma\Gamma}\overline{\Omega}_i^\Sigma\Omega_j^\Gamma \end{pmatrix}, \tag{5.2b}$$

$$\Omega_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_\Lambda{}^\Sigma \\ -\delta^\Lambda{}_\Sigma & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega^{MN}\Omega_{NP} = -\delta^M{}_P, \qquad \Omega_{MN}X^M\Omega_i^N = 0. \tag{5.2c}$$

5.2.2 Kähler potentials

$$\chi_{\text{vector}} \equiv K = -\mathrm{i}\big(\overline{X}^\Lambda F_\Lambda - X^\Lambda \overline{F}_\Lambda\big) = N_{\Lambda\Sigma}X^\Lambda\overline{X}^\Sigma = \mathrm{i}\Omega_{MN}X^M\overline{X}^N, \tag{5.3a}$$

$$\chi_{\text{hyper}} \equiv \chi = \frac{1}{2}g^{AB}D_A\chi D_B\chi = \frac{1}{2}G_{\overline{\alpha}\beta}A^{i\overline{\alpha}}A_i{}^\beta = \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}A_i{}^\alpha A_j{}^\beta. \tag{5.3b}$$

5.2.3 Gauge group embedding into the rigid invariance group $G_{\textbf{rigid}} = G_{\textbf{symp}} \times G_{\textbf{hyper}}$

G_{symp} は、electric/magnetic duality group $Sp(2n_{\text{V}}{+}2;\mathbb{R})$ のうち理論が不変な部分群である: $G_{\text{symp}} \subset Sp(2n_{\text{V}}{+}2;\mathbb{R})$。同様に G_{hyper} は tri-holomorphic Killing vectors $k^A{}_{\mathsf{m}}$ がなす群のうち hypermultiplet sector を不変にする invariance subgroup である。

$$\Theta_M{}^{\mathsf{a}} = (\Theta_\Lambda{}^{\mathsf{a}}, \Theta^{\Lambda\mathsf{a}}), \qquad T_{MN}{}^P = \Theta_M{}^{\mathsf{a}}(t_{\mathsf{a}})_N{}^P, \tag{5.4a}$$

$$\Theta_M{}^{\mathsf{m}} = (\Theta_\Lambda{}^{\mathsf{m}}, \Theta^{\Lambda\mathsf{m}}), \qquad \begin{cases} T_M{}^\alpha{}_\beta = \Theta_M{}^{\mathsf{m}}(t_{\mathsf{m}})^\alpha{}_\beta, \\ k^A{}_M = \Theta_M{}^{\mathsf{m}}k^A{}_{\mathsf{m}}, \\ \mu_{ijM} = \Theta_M{}^{\mathsf{m}}\mu_{ij\mathsf{m}}. \end{cases} \tag{5.4b}$$

$(t_{\mathsf{a}})_N{}^P$ は G_{symp} の generators $(2(n_{\text{V}}{+}1){\times}2(n_{\text{V}}{+}1)$ 表現行列)、$T_{MN}{}^P = (T_M)_N{}^P$ はゲージ化された部分群の表現行列である。一方、$k^A{}_{\mathsf{m}}$ は G_{hyper} の isometry group についての tri-holomorphic Killing vectors であり、$k^A{}_M$ はそのうちゲージ化された部分。また同様に $(t_{\mathsf{m}})^\alpha{}_\beta$ は G_{hyper} の generators $(2(n_{\text{H}}+1)\times 2(n_{\text{H}}+1)$ 表現行列) であり、$T_M{}^\alpha{}_\beta$ は、ゲージ化された部分群の表現行列である。

5.2.4 Gauge generators

ゲージ変換の生成子 $T_M = (T_\Lambda, T^\Lambda)$ の行列表記 $T_{MN}{}^P = (T_M)_N{}^P$ が、symplectic 群 $Sp(2n+2;\mathbb{R})$ の部分群に従うという条件は

$$0 = T_{M[N}{}^Q\Omega_{P]Q} \qquad \Leftrightarrow \qquad \big\{T_{M\Lambda}{}^\Sigma = -T_M{}^\Sigma{}_\Lambda, \ T_{M[\Lambda\Sigma]} = 0 = T_M{}^{[\Lambda\Sigma]}\big\}. \tag{5.5}$$

5.2.5 Identities of $T_{MN}{}^P$

$$
\begin{aligned}
T_{MN\Lambda} X^N &= F_{\Lambda\Sigma} T_{MN}{}^{\Sigma} X^N \,, && (5.6a)\\
T_{MN\Lambda} \Omega_i^N &= F_{\Lambda\Sigma} T_{MN}{}^{\Sigma} \Omega_i^N + F_{\Lambda\Sigma\Gamma} \Omega_i^{\Sigma} T_{MN}{}^{\Gamma} X^N \,, && (5.6b)\\
0 &= T_{MN}{}^Q \Omega_{PQ} X^N U^P \,, \qquad \text{with} \quad U^M \;=\; (U^\Lambda, F_{\Lambda\Sigma} U^\Sigma) \,, && (5.6c)\\
0 &= T_{(MN)}{}^P X^M U^N \,, && (5.6d)\\
0 &= T_{MN}{}^Q \Omega_{PQ} \overline{X}^M X^N X^P \;=\; T_{MN}{}^Q \Omega_{PQ} \overline{X}^M X^N \overline{X}^P \,, && (5.6e)\\
0 &= T_{MN}{}^{\Lambda} X^M \overline{X}^N N_{\Lambda\Sigma} X^\Sigma \,. && (5.6f)
\end{aligned}
$$

5.2.6 Quadratic constraints

$$
\begin{aligned}
0 &= f_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}} \Theta_M{}^{\mathsf{a}} \Theta_N{}^{\mathsf{b}} + (t_{\mathsf{a}})_N{}^P \Theta_M{}^{\mathsf{a}} \Theta_P{}^{\mathsf{c}} \,, && (5.7a)\\
0 &= f_{\mathsf{mn}}{}^{\mathsf{p}} \Theta_M{}^{\mathsf{m}} \Theta_N{}^{\mathsf{n}} + (t_{\mathsf{a}})_N{}^P \Theta_M{}^{\mathsf{a}} \Theta_P{}^{\mathsf{p}} \,. && (5.7b)
\end{aligned}
$$

$f_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}}$ と $f_{\mathsf{mn}}{}^{\mathsf{p}}$ はそれぞれ G_{symp} と G_{hyper} の構造定数である。ゲージ群 G_{gauge} の構造定数はあくまでもこの構造定数の一部である。またこれらの拘束条件は次の交換関係 (Lie 微分) を与える:

$$
[T_M, T_N] \;=\; -T_{MN}{}^P T_P \,, \tag{5.8a}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{k_M} k_N \;=\; [k_M, k_N] \;=\; T_{MN}{}^P k_P \quad \text{with} \quad k_M \;\equiv\; k^A{}_M \frac{\partial}{\partial \phi^A} \,, \\
(\text{or} \quad k^B{}_M \partial_B k^A{}_N - k^B{}_N \partial_B k^A{}_M = T_{MN}{}^P k^A{}_P) \,.
\end{aligned} \tag{5.8b}
$$

5.2.7 Linear (representation) constraint

$$
T_{(MN}{}^Q \Omega_{P)Q} \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad
\begin{cases}
T^{(\Lambda\Sigma\Gamma)} \;=\; 0 \\
2T^{(\Gamma\Lambda)}{}_\Sigma \;=\; T_\Sigma{}^{\Lambda\Gamma} \\
T_{(\Lambda\Sigma\Gamma)} \;=\; 0 \\
2T_{(\Gamma\Lambda)}{}^\Sigma \;=\; T^\Sigma{}_{\Lambda\Gamma}
\end{cases} \tag{5.9}
$$

5.2.8 Mutually local charges

$$
0 \;=\; \Theta^{\Lambda[\mathsf{a}} \Theta_\Lambda{}^{\mathsf{b}]} \,, \qquad 0 \;=\; \Theta^{\Lambda[\mathsf{a}} \Theta_\Lambda{}^{\mathsf{m}]} \,, \qquad 0 \;=\; \Theta^{\Lambda[\mathsf{m}} \Theta_\Lambda{}^{\mathsf{n}]} \,. \tag{5.10}
$$

5.2.9 Symmetric part of the gauge group generator

$$
T_{(MN)}{}^P \;=\; Z^{P,\mathsf{a}} d_{\mathsf{a}MN} \,, \qquad d_{\mathsf{a}MN} \;=\; (t_{\mathsf{a}})_M{}^P \Omega_{NP} \,, \tag{5.11a}
$$

$$
Z^{M,\mathsf{a}} \;=\; \frac{1}{2} \Omega^{MN} \Theta_N{}^{\mathsf{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad
\begin{cases}
Z^{\Lambda\mathsf{a}} = \frac{1}{2} \Theta^{\Lambda\mathsf{a}} \,, \\
Z_\Lambda{}^{\mathsf{a}} = -\frac{1}{2} \Theta_\Lambda{}^{\mathsf{a}} \,,
\end{cases} \tag{5.11b}
$$

$$Z^{M,\mathsf{m}} \;=\; \frac{1}{2}\Omega^{MN}\Theta_N{}^{\mathsf{m}} \qquad\Longrightarrow\qquad \begin{cases} Z^{\Lambda\mathsf{m}} = \frac{1}{2}\Theta^{\Lambda\mathsf{m}}\,, \\ Z_\Lambda{}^{\mathsf{m}} = -\frac{1}{2}\Theta_\Lambda{}^{\mathsf{m}}\,, \end{cases} \tag{5.11c}$$

$$Z^{M,\mathsf{a}}\Theta_M{}^{\mathsf{b}} \;=\; 0 \;=\; Z^{M,\mathsf{a}}\Theta_M{}^{\mathsf{m}}\,, \qquad Z^{M,\mathsf{m}}\Theta_M{}^{\mathsf{a}} \;=\; 0 \;=\; Z^{M,\mathsf{m}}\Theta_M{}^{\mathsf{n}}\,. \tag{5.11d}$$

[注意] $d_{\mathsf{m}MN}$ なるものは存在しない。$Z^{M,\mathsf{m}}$ はあくまで $Z^{M,\mathsf{a}}$ との類似で導入しただけであり、$T_{(MN)}{}^P$ には直接関与していない。

5.2.10 Jacobi identity

$$T_{[NP}{}^R T_{Q]R}{}^M \;=\; \frac{2}{3}Z^{M,\mathsf{a}}d_{\mathsf{a}R[N}T_{PQ]}{}^R\,. \tag{5.12}$$

5.2.11 Gauge symmetry transformations and covariant derivative

$$\delta Y^M \;=\; -\mathrm{g}\Lambda^N T_{NP}{}^M Y^P\,, \qquad \delta Z_M \;=\; \mathrm{g}\Lambda^N T_{NM}{}^P Z_P\,, \tag{5.13a}$$

$$\mathcal{D}_\mu Y^M \;=\; \partial_\mu Y^M + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^M Y^P\,, \qquad \mathcal{D}_\mu Z_M \;=\; \partial_\mu Z_M - \mathrm{g}W_\mu^N T_{NM}{}^P Z_P\,. \tag{5.13b}$$

for arbitrary symplectic vectors Y^M and Z_N.

$U^\Lambda{}_\Sigma$, $V_\Lambda{}^\Sigma$, $Z^{\Lambda\Sigma}$ and $W_{\Lambda\Sigma}$ in (4.2a) associated with infinitesimal variations (5.13) are

$$U^\Lambda{}_\Sigma \;\approx\; \delta^\Lambda{}_\Sigma - \mathrm{g}\Lambda^M T_{M\Sigma}{}^\Lambda\,, \qquad V_\Lambda{}^\Sigma \;\approx\; \delta_\Lambda{}^\Sigma + \mathrm{g}\Lambda^M T_{M\Lambda}{}^\Sigma\,, \tag{5.14a}$$

$$Z^{\Lambda\Sigma} \;\approx\; -\mathrm{g}\Lambda^M T_M{}^{\Lambda\Sigma}\,, \qquad W_{\Lambda\Sigma} \;\approx\; \mathrm{g}\Lambda^M T_{M\Lambda\Sigma}\,. \tag{5.14b}$$

そのため、(4.3) に代入すると次のようなルールが得られる:

$$\delta F_{\Lambda\Sigma} \;=\; \mathrm{g}\Lambda^M\big(-T_{M\Lambda\Sigma} + 2T_{M(\Lambda}{}^\Gamma F_{\Sigma)\Gamma} + F_{\Lambda\Gamma}T_M{}^{\Gamma\Xi}F_{\Xi\Sigma}\big)\,, \tag{5.15a}$$

$$\delta\mathcal{O}^-_{\mu\nu\Lambda} \;=\; \mathrm{g}\Lambda^M\mathcal{O}^-_{\mu\nu\Sigma}\big(T_{M\Lambda}{}^\Sigma + T_M{}^{\Sigma\Gamma}F_{\Gamma\Lambda}\big)\,. \tag{5.15b}$$

5.2.12 Covariant derivatives w.r.t. M_{ab}, D, $U(1)$, $SU(2)$ and gauge symmetry

(5.13) を用いて、vector multiplets の fields や graviphoton fields の共変微分を拡大する:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu X^\Lambda \;&=\; \big(\partial_\mu - b_\mu + \mathrm{i}A_\mu\big)X^\Lambda + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^\Lambda X^P \\ &\equiv\; \mathcal{D}^0_\mu X^\Lambda + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^\Lambda X^P\,, \end{aligned} \tag{5.16a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu\Omega_i^\Lambda \;&=\; \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{3}{2}b_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}A_\mu\Big)\Omega_i^\Lambda - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\Omega_j^\Lambda + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^\Lambda\Omega_i^P \\ &\equiv\; \mathcal{D}^0_\mu\Omega_i^\Lambda + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^\Lambda\Omega_i^P\,, \end{aligned} \tag{5.16b}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu X_\Lambda \;&=\; \mathcal{D}_\mu F_\Lambda \;=\; F_{\Lambda\Sigma}\mathcal{D}_\mu X^\Sigma \\ &=\; \mathcal{D}^0_\mu X_\Lambda + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP\Lambda}X^P\,, \end{aligned} \tag{5.16c}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu\Omega_{i\Lambda} \;&=\; \mathcal{D}_\mu\big(F_{\Lambda\Sigma}\Omega_i^\Sigma\big) \;=\; F_{\Lambda\Sigma}\mathcal{D}_\mu\Omega_i^\Sigma + F_{\Lambda\Sigma\Gamma}\Omega_i^\Sigma\mathcal{D}_\mu X^\Gamma \\ &=\; \mathcal{D}^0_\mu\Omega_{i\Lambda} + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP\Lambda}\Omega_i^P\,, \end{aligned} \tag{5.16d}$$

$$
\begin{aligned}
T_{MN\Lambda}X^N &\equiv F_{\Lambda\Sigma}T_{MN}{}^{\Sigma}X^N\,, && (5.16e)\\
T_{MN\Lambda}\Omega_i^N &\equiv F_{\Lambda\Sigma}T_{MN}{}^{\Sigma}\Omega_i^N + F_{\Lambda\Sigma\Gamma}\Omega_i^{\Sigma}T_{MN}{}^{\Gamma}X^N\,, && (5.16f)\\
\mathcal{D}_\mu\psi_a^i &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} + \frac{1}{2}b_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}A_\mu\Big)\psi_a^i + \omega_{\mu a}{}^b\psi_b^i + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\psi_a^j\\
&= \mathcal{D}_\mu^0\psi_a^i\,, && (5.16g)\\
\delta Y_{ij}^{\Lambda} &= -\frac{1}{2}\mathrm{g}\Lambda^M T_{MN}{}^{\Lambda}(Z_{ij}^N + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}Z^{klN})\,. && (5.16h)
\end{aligned}
$$

(5.16c), (5.16d) のゲージ結合定数部分についての添字の上下は (5.16e) で定義される ((5.9)[1] 参照)。$\mathcal{D}_\mu^0$ は ungauged system における共変微分。gravitino の共変微分 $\mathcal{D}_\mu\psi_a^i$ はゲージ化される添字を持っていないので変化なし。Y_{ij}^{Λ} は auxiliary fields なので微分項なし。つまり共変微分なし。さて、symplectic vectors として書き表すと次の様になる:

$$
\mathcal{D}_\mu X^M = \mathcal{D}_\mu^0 X^M + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^M X^P\,, \qquad \mathcal{D}_\mu\Omega_i^M = \mathcal{D}_\mu^0\Omega_i^M + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^M\Omega_i^P\,. \tag{5.17}
$$

これらの複素共役は次の様になる:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu\overline{X}^{\Lambda} &= (\partial_\mu - b_\mu - \mathrm{i}A_\mu)\overline{X}^{\Lambda} + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^{\Lambda}\overline{X}^P\\
&= \mathcal{D}_\mu^0\overline{X}^{\Lambda} + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^{\Lambda}\overline{X}^P\,, && (5.18a)\\
\mathcal{D}_\mu\Omega^{i\Lambda} &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{3}{2}b_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}A_\mu\Big)\Omega^{i\Lambda} + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\Omega^{j\Lambda} + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^{\Lambda}\Omega^{iP}\\
&= \mathcal{D}_\mu^0\Omega^{i\Lambda} + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^{\Lambda}\Omega^{iP}\,, && (5.18b)\\
\mathcal{D}_\mu\overline{X}_{\Lambda} &= \mathcal{D}_\mu\overline{F}_{\Lambda} = \overline{F}_{\Lambda\Sigma}\mathcal{D}_\mu\overline{X}^{\Sigma}\\
&= \mathcal{D}_\mu^0\overline{X}_{\Lambda} + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP\Lambda}\overline{X}^P\,, && (5.18c)\\
\mathcal{D}_\mu\Omega_{\Lambda}^i &= \mathcal{D}_\mu\big(\overline{F}_{\Lambda\Sigma}\Omega^{i\Sigma}\big) = \overline{F}_{\Lambda\Sigma}\mathcal{D}_\mu\Omega^{i\Sigma} + \overline{F}_{\Lambda\Sigma\Gamma}\Omega^{i\Sigma}\mathcal{D}_\mu\overline{X}^{\Gamma}\\
&= \mathcal{D}_\mu^0\Omega_{\Lambda}^i + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP\Lambda}\Omega^{iP}\,, && (5.18d)\\
\mathcal{D}_\mu\psi_{ai} &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} + \frac{1}{2}b_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}A_\mu\Big)\psi_a^i + \omega_{\mu a}{}^b\psi_b^i - \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^j{}_i\psi_{aj} = \mathcal{D}_\mu^0\psi_{ai}\,. && (5.18e)
\end{aligned}
$$

もしくはまとめた形式では

$$
\mathcal{D}_\mu\overline{X}^M = \mathcal{D}_\mu^0\overline{X}^M + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^M\overline{X}^P\,, \qquad \mathcal{D}_\mu\Omega^{iM} = \mathcal{D}_\mu^0\Omega^{iM} + \mathrm{g}W_\mu^N T_{NP}{}^M\Omega^{iP}\,. \tag{5.18f}
$$

Hypermultiplets の場に対するゲージ変換 (generators は $k^A{}_M$, $T_M{}^{\alpha}{}_{\beta}$)、conformal theory としての共変微分とそれらの hermitian conjugate は次の様になる:

$$
\begin{aligned}
\delta\phi^A &= \mathrm{g}\Lambda^M k^A{}_M(\phi)\,, && (5.19a)\\
\delta A_i{}^{\alpha} + \delta\phi^A\Gamma_A{}^{\alpha}{}_{\beta}A_i{}^{\beta} &= \mathrm{g}\Lambda^M(T_M)^{\alpha}{}_{\beta}(\phi)A_i{}^{\beta}\,, && (5.19b)\\
\delta\zeta^{\alpha} + \delta\phi^A\Gamma_A{}^{\alpha}{}_{\beta}\zeta^{\beta} &= \mathrm{g}\Lambda^M(T_M)^{\alpha}{}_{\beta}(\phi)\zeta^{\beta}\,, && (5.19c)\\
\mathcal{D}_\mu\phi^A &= \partial_\mu\phi^A - b_\mu\chi^A + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_k\varepsilon^{jk}k_{ij}{}^A - \mathrm{g}W_\mu^M k^A{}_M\\
&= \mathcal{D}_\mu^0\phi^A - \mathrm{g}W_\mu^M k^A{}_M\,, && (5.19d)\\
\mathcal{D}_\mu A_i{}^{\alpha} &= (\partial_\mu - b_\mu)A_i{}^{\alpha} + \frac{1}{2}\mathcal{V}_{\mu i}{}^j A_j{}^{\alpha} + \partial_\mu\phi^A\Gamma_A{}^{\alpha}{}_{\beta}A_i{}^{\beta} - \mathrm{g}W_\mu^M T_M{}^{\alpha}{}_{\beta}A_i{}^{\beta}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{D}^0_\mu A_i{}^\alpha - \mathrm{g} W^M_\mu T_M{}^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta \,, && (5.19e)\\
\mathcal{D}_\mu A^{i\overline{\alpha}} &= (\partial_\mu - b_\mu) A^{i\overline{\alpha}} - \frac{1}{2}\mathcal{V}_{\mu j}{}^i A^{j\overline{\alpha}} + \partial_\mu \phi^A \Gamma_A{}^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}} A^{i\overline{\beta}} - \mathrm{g} W^M_\mu T_M{}^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}} A^{i\overline{\beta}} \\
&= \mathcal{D}^0_\mu A^{i\overline{\alpha}} - \mathrm{g} W^M_\mu T_M{}^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}} A^{i\overline{\beta}} \,, && (5.19f)\\
\mathcal{D}_\mu \zeta^\alpha &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{3}{2} b_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2} A_\mu\Big)\zeta^\alpha + \partial_\mu \phi^A \Gamma_A{}^\alpha{}_\beta \zeta^\beta - \mathrm{g} W^M_\mu T_M{}^\alpha{}_\beta \zeta^\beta \\
&= \mathcal{D}^0_\mu \zeta^\alpha - \mathrm{g} W^M_\mu T_M{}^\alpha{}_\beta \zeta^\beta \,, && (5.19g)\\
\mathcal{D}_\mu \zeta^{\overline{\alpha}} &= \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{3}{2} b_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2} A_\mu\Big)\zeta^{\overline{\alpha}} + \partial_\mu \phi^A \Gamma_A{}^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}} \zeta^{\overline{\beta}} - \mathrm{g} W^M_\mu T_M{}^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}} \zeta^{\overline{\beta}} \\
&= \mathcal{D}^0_\mu \zeta^{\overline{\alpha}} - \mathrm{g} W^M_\mu T_M{}^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\beta}} \zeta^{\overline{\beta}} \,. && (5.19h)
\end{aligned}$$

5.2.13 Modified field strength

The gauge transformations of the auxiliary fields and vector fields are

$$\begin{aligned}
\delta W^M_\mu &= \mathcal{D}_\mu \Lambda^M - \mathrm{g}\big[Z^{M,\mathsf{a}}\Xi_{\mu\mathsf{a}} + Z^{M,\mathsf{m}}\Xi_{\mu\mathsf{m}}\big] \\
&= \partial_\mu \Lambda^M + \mathrm{g} W^P_\mu T_{PQ}{}^M \Lambda^Q - \mathrm{g}\big[Z^{M,\mathsf{a}}\Xi_{\mu\mathsf{a}} + Z^{M,\mathsf{m}}\Xi_{\mu\mathsf{m}}\big] \,, && (5.20a)\\
\mathcal{D}_\mu \Xi_{\nu\mathsf{a}} &= \partial_\mu \Xi_{\nu\mathsf{a}} - \mathrm{g} W^M_\mu T_{M\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}} \Xi_{\nu\mathsf{b}} \,, \qquad T_{M\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}} \equiv -\Theta_M{}^{\mathsf{c}} f_{\mathsf{ca}}{}^{\mathsf{b}} \,, && (5.20b)\\
\mathcal{D}_\mu \Xi_{\nu\mathsf{m}} &= \partial_\mu \Xi_{\nu\mathsf{m}} - \mathrm{g} W^M_\mu T_{M\mathsf{m}}{}^{\mathsf{n}} \Xi_{\nu\mathsf{n}} \,, \qquad T_{M\mathsf{m}}{}^{\mathsf{n}} \equiv -\Theta_M{}^{\mathsf{p}} f_{\mathsf{pm}}{}^{\mathsf{n}} \,. && (5.20c)
\end{aligned}$$

gauge parameters $\Xi_{\mu,\mathsf{a}}$, $\Xi_{\mu,\mathsf{m}}$ を伴った modified field strength と、この gauge parameters によって引き起こされる補助場としての tensor gauge fields $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $B_{\mu\nu\mathsf{m}}$ の共変微分は、次の様に与えられる:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] &\equiv -\mathrm{g}\mathcal{F}^M_{\mu\nu} T_M \,, && (5.21a)\\
\mathcal{F}^M_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^M_\nu - \partial_\nu W^M_\mu + \mathrm{g} T_{[NP]}{}^M W^N_\mu W^P_\nu \,, && (5.21b)\\
\mathcal{H}^M_{\mu\nu} &= \mathcal{F}^M_{\mu\nu} + \mathrm{g}\big[Z^{M,\mathsf{a}} B_{\mu\nu\mathsf{a}} + Z^{M,\mathsf{m}} B_{\mu\nu\mathsf{m}}\big] \,, && (5.21c)\\
\mathcal{D}_\mu B_{\nu\rho\mathsf{a}} &= \partial_\mu B_{\nu\rho\mathsf{a}} - \mathrm{g} W^M_\mu T_{M\mathsf{a}}{}^{\mathsf{b}} B_{\nu\rho\mathsf{b}} \,, && (5.21d)\\
\mathcal{D}_\mu B_{\nu\rho\mathsf{m}} &= \partial_\mu B_{\nu\rho\mathsf{m}} - \mathrm{g} W^M_\mu T_{M\mathsf{m}}{}^{\mathsf{n}} B_{\nu\rho\mathsf{n}} \,, && (5.21e)\\
\mathcal{D}_\rho \mathcal{H}^M_{\mu\nu} &= \partial_\rho \mathcal{H}^M_{\mu\nu} + \mathrm{g} W^P_\rho T_{PN}{}^M \mathcal{H}^N_{\mu\nu} + 2\mathrm{g} W^P_\rho Z^{M,\mathsf{a}} d_{\mathsf{a}PN} (\mathcal{G} - \mathcal{H})^N_{\mu\nu} \,, && (5.21f)
\end{aligned}$$

$\Xi_{\mu,\mathsf{a}}$ と $\Xi_{\mu,\mathsf{m}}$ が導入される理由は、そもそも gauge generators の commutation relations で登場する $T_{MN}{}^P$ が、$T_{(MN)}{}^P = Z^{P,\mathsf{a}} d_{\mathsf{a}MN} \neq 0$ という部分を持つからであり、gauge parameters Λ^M を用いるだけでは W^M_μ の gauge 自由度を正しく追い出せないからである。さらに $T_{(MN)}{}^P \neq 0$ のために、$T_{[MN]}{}^P$ だけで定義できている $\mathcal{F}^M_{\mu\nu}$ の一般の変分 $\delta\mathcal{F}^M_{\mu\nu}$ は共変性を失う:

$$\delta\mathcal{F}^M_{\mu\nu} = 2\mathcal{D}_{[\mu}\delta W^M_{\nu]} - 2\mathrm{g} T_{(PQ)}{}^M W^P_{[\mu}\delta W^Q_{\nu]} \,. \qquad (5.22a)$$

このような事態を避けるため、通常のゲージ理論では $T_{(MN)}{}^P = 0$ と設定するのだが、global duality 変換の下で変換される embedding tensors $\Theta_M{}^{\mathsf{a}}$, $\Theta_M{}^{\mathsf{m}}$ を導入してまでも covariant formulation を目指す一派はそうしなかった。$T_{(MN)}{}^P \neq 0$ を用いたままで W^M_μ の gauge 自由度をきちんと追い出すため、余分に gauge parameters を導入した。それが $\Xi_{\mu,\mathsf{a}}$, $\Xi_{\mu,\mathsf{m}}$ である。この gauge parameters を追加するだけではまだ $\mathcal{F}^M_{\mu\nu}$ は gauge covariant ではない:

$$\delta\mathcal{F}^M_{\mu\nu} = \mathrm{g}\Lambda^P T_{NP}{}^M \mathcal{F}^N_{\mu\nu} - 2\mathrm{g} Z^{M,\mathsf{a}}\big(\mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]\mathsf{a}} + d_{\mathsf{a}PQ} W^P_{[\mu}\delta W^Q_{\nu]}\big) - 2\mathrm{g} Z^{M,\mathsf{m}} \mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]\mathsf{m}} \,. \qquad (5.22b)$$

そのため、新たな補助場 $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $B_{\mu\nu\mathsf{m}}$ を導入して、上記の様に強引に $\mathcal{F}_{\mu\nu}^M \to \mathcal{H}_{\mu\nu}^M$ へと covariantize している。ここで強調しておくと、$B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $B_{\mu\nu\mathsf{m}}$ はあくまで補助場であり、しかも supersymmetric multiplets として導入されていない。

さて、補助場としての tensor gauge fields $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $B_{\mu\nu\mathsf{m}}$ が off-shell 自由度を過不足なく運んでいないならば、つまり端的にはこれらの field strength が gauge covariant でないならば、さらに余計に gauge parameters や高階の tensor gauge fields を導入し続ける必要がある。ここでは $\delta B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $\delta B_{\mu\nu\mathsf{m}}$ を挙げておく ($\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}$ は $\mathscr{L}$ ではなく $e^{-1}\mathscr{L}$ で定義されるべき):

$$Z^{M,\mathsf{a}}\delta B_{\mu\nu\mathsf{a}} = 2Z^{M,\mathsf{a}}\big(\mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]\mathsf{a}} + d_{\mathsf{a}NP}W_{[\mu}^N\delta W_{\nu]}^P\big) - 2T_{(NP)}{}^M\Lambda^P\mathcal{G}_{\mu\nu}^N\,, \tag{5.23a}$$

$$Z^{M,\mathsf{m}}\delta B_{\mu\nu\mathsf{m}} = 2Z^{M,\mathsf{m}}\mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]\mathsf{m}}\,, \tag{5.23b}$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^M \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\mu\nu}^\Lambda \\ \mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda} \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{\pm\Lambda} &=& \mathcal{H}_{\mu\nu}^{\pm\Lambda}\,, \\ \mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}^{-} &=& F_{\Lambda\Sigma}\mathcal{H}_{\mu\nu}^{-\Sigma} - 2\mathrm{i}\mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}^{-}\,, \\ \mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}^{+} &=& \overline{F}_{\Lambda\Sigma}\mathcal{H}_{\mu\nu}^{+\Sigma} + 2\mathrm{i}\mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}^{+}\,, \end{array}\right. \qquad \mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda} = \mathrm{i}e\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial(e^{-1}\mathscr{L})}{\partial\mathcal{H}_{\rho\sigma}^\Lambda}\,. \tag{5.23c}$$

tensor gauge fields は常に embedding tensors と結合しているので、この形式を採用している。これを用いて modified field strength の gauge covariance を見る。まず $\Xi_{\mu\mathsf{a}}$, $\Xi_{\mu\mathsf{m}}$ による tensor gauge transformations においては、$\delta\mathcal{G}_{\mu\nu}^M = (\delta\mathcal{H}_{\mu\nu}^\Lambda, \delta\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda})$ は不変になる。Λ^M による vector gauge transformations は次の通り:

$$\delta\mathcal{G}_{\mu\nu}^{-\Lambda} = -\mathrm{g}\Lambda^P T_{PN}{}^\Lambda\mathcal{G}_{\mu\nu}^{-N} - \mathrm{g}\Lambda^P T^\Gamma{}_P{}^\Lambda\big(\mathcal{G}_{\mu\nu\Gamma}^- - \mathcal{H}_{\mu\nu\Gamma}^-\big)\,, \tag{5.24a}$$

$$\delta\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}^{-} = -\mathrm{g}\Lambda^P T_{PN\Lambda}\mathcal{G}_{\mu\nu}^{-N} - \mathrm{g}F_{\Lambda\Sigma}\Lambda^P T^\Gamma{}_P{}^\Sigma\big(\mathcal{G}_{\mu\nu\Gamma}^- - \mathcal{H}_{\mu\nu\Gamma}^-\big)\,, \tag{5.24b}$$

$$\delta\big(\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}^- - \mathcal{H}_{\mu\nu\Lambda}^-\big) = \mathrm{g}\Lambda^P\big(T^\Gamma{}_{P\Lambda} - T^\Gamma{}_P{}^\Sigma F_{\Sigma\Lambda}\big)\big(\mathcal{G}_{\mu\nu\Gamma}^- - \mathcal{H}_{\mu\nu\Gamma}^-\big)\,. \tag{5.24c}$$

第二項があるため、また gauge covariance を壊しているようにみえる。しかし幸いにして、上記の hermitian conjugate と合わせて $\delta\mathcal{G}_{\mu\nu}^M$ を考えると、その第二項は $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$ の運動方程式

$$0 = \mathrm{g}\Theta^{\Lambda\mathsf{a}}\big(\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda} - \mathcal{H}_{\mu\nu\Lambda}\big)\,, \tag{5.24d}$$

とみなせてゼロになる [11]。また (5.24c) は、field equations が field equations に変換されている。よって、まとめると

$$\delta\mathcal{G}_{\mu\nu}^M = -\mathrm{g}\Lambda^P T_{PN}{}^M\mathcal{G}_{\mu\nu}^N\,, \tag{5.24e}$$

と gauge covariant に変換されることがわかるので、$B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $B_{\mu\nu\mathsf{m}}$ の gauge 自由度は過不足なく追い出せている、つまりさらに余計な gauge parameters や tensor fields を導入しなくても良いことになる。ただし、あくまでも補助場 $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$ の運動方程式の下での話である。これ以外の場はまだ off-shell で扱っている。なおここで $\mathcal{H}_{\mu\nu}^M$ についての Bianchi identity を掲載しておく:

$$\mathcal{D}_{[\mu}\mathcal{H}_{\nu\rho]}^M = \frac{1}{3}\mathrm{g}\Big[Z^{M,\mathsf{a}}\mathcal{H}_{\mu\nu\rho\mathsf{a}} + Z^{M,\mathsf{m}}\mathcal{H}_{\mu\nu\rho\mathsf{m}}\Big]\,, \tag{5.25a}$$

$$\mathcal{H}_{\mu\nu\rho\mathsf{a}} \equiv 3\mathcal{D}_{[\mu}B_{\nu\rho]\mathsf{a}} + 6d_{\mathsf{a}NP}W_{[\mu}^N\Big(\partial_\nu W_{\rho]}^P + \frac{1}{3}\mathrm{g}\,T_{[RS]}{}^P W_\nu^R W_{\rho]}^S + \big(\mathcal{G}_{\nu\rho]}^P - \mathcal{H}_{\nu\rho]}^P\big)\Big)\,, \tag{5.25b}$$

$$\mathcal{H}_{\mu\nu\rho\mathsf{m}} \equiv 3\mathcal{D}_{[\mu}B_{\nu\rho]\mathsf{m}}\,. \tag{5.25c}$$

5.2.14 Supercovariant derivatives

明記されているのが見つからない supercovariant derivatives [2011 12/03]:

$$D_\mu X^\Lambda \ = ?\,, \quad D_\mu \Omega_i^\Lambda \ = ?\,, \quad D_\mu \chi_i \ = ?\,, \quad D_\mu T_{ab}{}^{ij} \ = ?\,, \quad D_a R(\mathsf{Q})^{bc} \ = ?\,. \tag{5.26}$$

Hypermultiplets についての明記された supercovariant derivatives:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi^A &= \mathcal{D}_\mu \phi^A - \gamma^A_{i\overline{\alpha}} \overline{\psi}{}^i_\mu \zeta^{\overline{\alpha}} - \overline{\gamma}{}^{Ai}_\alpha \overline{\psi}_{\mu i} \zeta^\alpha \,, && (5.27a) \\ D_\mu A_i{}^\alpha &= \mathcal{D}_\mu A_i{}^\alpha - \overline{\psi}_{\mu i} \zeta^\alpha - \varepsilon_{ij} G^{\alpha\overline{\beta}} \Omega_{\overline{\beta}\overline{\gamma}} \overline{\psi}{}^j_\mu \zeta^{\overline{\gamma}} \,, && (5.27b) \\ D_\mu \zeta^\alpha &= \mathcal{D}_\mu \zeta^\alpha - \frac{1}{2} \not{D} A_i{}^\alpha \psi^i_\mu - \frac{1}{2} A_i{}^\alpha \phi^i_\mu \,. && (5.27c) \end{aligned}$$

5.2.15 Local supersymmetry transformations modified by gauge symmetry

Vector multiplets:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} X^M &= \overline{\epsilon}^i \Omega_i^M \,, && (5.28a) \\ \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} W_\mu^M &= \varepsilon^{ij} \overline{\epsilon}_i \big(\gamma_\mu \Omega_j^M + 2\psi_{\mu j} X^M \big) + \varepsilon_{ij} \overline{\epsilon}^i \big(\gamma_\mu \Omega^{jM} + 2\psi_\mu^j \overline{X}^M \big) \,, && (5.28b) \\ \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} \Omega_i^M &= 2 \not{D} X^M \epsilon_i + \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \widehat{\mathcal{G}}{}^{-M}_{\mu\nu} \varepsilon_{ij} \epsilon^j + \widehat{Z}{}^M_{ij} \epsilon^j + 2 X^M \eta_i \\ &\quad - 2 g T_{PN}{}^M \overline{X}^P X^N \varepsilon_{ij} \epsilon^j + 2 i g \Omega^{MN} \mu_{ijN} \epsilon^j \,, && (5.28c) \\ \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} Y_{ij}^\Lambda &= 2 \overline{\epsilon}_{(i} \not{D} \Omega^\Lambda_{j)} + 2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} \overline{\epsilon}^{(k} \not{D} \Omega^{l)\Lambda} \\ &\quad - 4 g T_{MN}{}^\Lambda \big[\overline{\Omega}{}^M_{(i} \epsilon^k \varepsilon_{j)k} \overline{X}^N - \overline{\Omega}{}^{kM} \epsilon_{(i} \varepsilon_{j)k} X^N \big] \\ &\quad + 4 i g k^{A\Lambda} \big[\varepsilon_{k(i} \gamma_{j)\overline{\alpha} A} \overline{\epsilon}^k \zeta^{\overline{\alpha}} + \varepsilon_{k(i} \overline{\epsilon}_{j)} \zeta^\alpha \overline{\gamma}{}^k_{\alpha A} \big] \,, && (5.28d) \\ \widehat{Z}{}^M_{ij} &= \begin{pmatrix} Y^\Lambda_{ij} \\ F_{\Lambda\Sigma} Y^\Sigma_{ij} - \tfrac{1}{2} F_{\Lambda\Sigma\Gamma} \overline{\Omega}{}^\Sigma_i \Omega_j{}^\Gamma + 2 i g \big[\mu_{ij\Lambda} + F_{\Lambda\Sigma} \mu_{ij}{}^\Sigma \big] \end{pmatrix} \,, && (5.28e) \\ \widehat{\mathcal{G}}{}^{-\Lambda}_{\mu\nu} &= \widehat{\mathcal{H}}{}^{-\Lambda}_{\mu\nu} \,, && (5.28f) \\ \widehat{\mathcal{G}}{}^{-}_{\mu\nu\Lambda} &= F_{\Lambda\Sigma} \widehat{\mathcal{H}}{}^{-\Sigma}_{\mu\nu} - \frac{1}{8} F_{\Lambda\Sigma\Gamma} \overline{\Omega}{}^\Sigma_i \gamma_{\mu\nu} \Omega^\Gamma_j \varepsilon^{ij} \,, && (5.28g) \\ \widehat{\mathcal{H}}{}^\Lambda_{\mu\nu} &= \mathcal{H}^{+\Lambda}_{\mu\nu} + \mathcal{H}^{-\Lambda}_{\mu\nu} - \varepsilon^{ij} \overline{\psi}_{i[\mu} \big(\gamma_{\nu]} \Omega^\Lambda_j + \psi_{\nu]j} X^\Lambda \big) - \varepsilon_{ij} \overline{\psi}{}^i_{[\mu} \big(\gamma_{\nu]} \Omega^{j\Lambda} + \psi^j_{\nu]} \overline{X}^\Lambda \big) \\ &\quad - \frac{1}{4} \big(X^\Lambda \varepsilon^{ij} T_{\mu\nu ij} + \overline{X}^\Lambda \varepsilon_{ij} T_{\mu\nu}{}^{ij} \big) \,. && (5.28h) \end{aligned}$$

Hypermultiplets:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} \phi^A &= 2 \big(\gamma^A_{i\overline{\alpha}} \overline{\epsilon}^i \zeta^{\overline{\alpha}} + \overline{\gamma}{}^{Ai}_\alpha \overline{\epsilon}_i \zeta^\alpha \big) \,, && (5.29a) \\ \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} A_i{}^\alpha + \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} \phi^B \Gamma_B{}^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta &= 2 \overline{\epsilon}_i \zeta^\alpha + 2 \varepsilon_{ij} G^{\overline{\beta}\alpha} \Omega_{\overline{\beta}\overline{\gamma}} \overline{\epsilon}^j \zeta^{\overline{\gamma}} \,, && (5.29b) \\ \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} \zeta^\alpha + \delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} \phi^A \Gamma_A{}^\alpha{}_\beta \zeta^\beta &= \not{D} A_i{}^\alpha \epsilon^i + A_i{}^\alpha \eta^i + 2 g X^M T_M{}^\alpha{}_\beta A_i{}^\beta \varepsilon^{ij} \epsilon_j \,. && (5.29c) \end{aligned}$$

Tensor gauge fields (under Λ^M, $\Xi_{\mu\mathsf{a}}$, $\Xi_{\mu\mathsf{m}}$, ϵ^i and η^i):

$$\delta_{\mathsf{Q},\mathsf{S}} \widehat{\mathcal{H}}{}^\Lambda_{ab} = -2 \varepsilon_{ij} \overline{\epsilon}^i \gamma_{[a} D_{b]} \Omega^{j\Lambda} - 2 g T_{(NP)}{}^\Lambda \overline{X}^N \overline{\Omega}{}^P_i \gamma_{ab} \epsilon^i - 2 i g \, k^{A\Lambda} \gamma_{Ai\overline{\alpha}} \overline{\zeta^{\overline{\alpha}}} \gamma_{ab} \epsilon^i - \varepsilon^{ij} \overline{\eta}_i \gamma_{ab} \Omega^\Lambda_j$$

$$+\,(\text{h.c.})\,, \tag{5.30a}$$

$$\begin{aligned} Z^{M,\mathsf{a}}\delta B_{\mu\nu\mathsf{a}} &= 2Z^{M,\mathsf{a}}\mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]\mathsf{a}} + 2T_{(NP)}{}^{M}\big(W^{N}_{[\mu}\delta W^{P}_{\nu]} - \Lambda^{N}\mathcal{G}^{P}_{\mu\nu}\big) \\ &\quad - 2T_{(NP)}{}^{M}\big[\overline{X}^{N}\overline{\Omega}{}^{P}_{i}\gamma_{\mu\nu}\epsilon^{i} + X^{N}\overline{\Omega}{}^{iP}\gamma_{\mu\nu}\epsilon_{i} + 2\overline{X}^{N}X^{P}\big(\overline{\epsilon}^{i}\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]i} + \overline{\epsilon}_{i}\gamma_{[\mu}\psi^{i}_{\nu]}\big)\big]\,, \end{aligned} \tag{5.30b}$$

$$\begin{aligned} Z^{M,\mathsf{m}}\delta B_{\mu\nu\mathsf{m}} &= 2Z^{M,\mathsf{m}}\mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]\mathsf{m}} - 2\mathrm{i}\,\Omega^{MN}\,k^{A}{}_{N}\big(\gamma_{Ai\overline{\alpha}}\,\overline{\zeta^{\alpha}}\gamma_{\mu\nu}\epsilon^{i} - \overline{\gamma}{}^{i}_{A\alpha}\,\overline{\zeta}^{\alpha}\gamma_{\mu\nu}\epsilon_{i}\big) \\ &\quad + 4\mathrm{i}\Omega^{MN}\mu_{jkN}\,\varepsilon^{ij}\big(\overline{\psi}_{i[\mu}\gamma_{\nu]}\epsilon^{k} + \overline{\psi}{}^{k}_{[\mu}\gamma_{\nu]}\epsilon_{i}\big)\,. \end{aligned} \tag{5.30c}$$

<u>Weyl multiplet under ϵ^i, η^i, Λ^a_{K}:</u>

Gauged system (5.1) での Weyl multiplet の変換則は ungauged system のそれと同じ:

$$\delta e_\mu{}^a = \overline{\epsilon}^i\gamma^a\psi_{\mu i} + \overline{\epsilon}_i\gamma^a\psi^i_\mu\,, \tag{5.31a}$$

$$\delta\psi^i_\mu = 2\mathcal{D}_\mu\epsilon^i - \frac{1}{8}T_{ab}{}^{ij}\gamma^{ab}\gamma_\mu\epsilon_j - \gamma_\mu\eta^i\,, \tag{5.31b}$$

$$\delta b_\mu = \Big[\frac{1}{2}\overline{\epsilon}^i\phi_{\mu i} - \frac{3}{4}\overline{\epsilon}^i\gamma_\mu\chi_i - \frac{1}{2}\overline{\eta}^i\psi_{\mu i} + (\text{h.c.})\Big] + \Lambda^a_{\mathsf{K}}e_{\mu a}\,, \tag{5.31c}$$

$$\delta A_\mu = \Big[\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\epsilon}^i\phi_{\mu i} + \frac{3\mathrm{i}}{4}\overline{\epsilon}^i\gamma_\mu\chi_i + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\eta}^i\psi_{\mu i} + (\text{h.c.})\Big]\,, \tag{5.31d}$$

$$\delta\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j = \Big[2\overline{\epsilon}_j\phi^i_\mu - 3\overline{\epsilon}_j\gamma_\mu\chi^i + 2\overline{\eta}_j\psi^i_\mu - (\text{h.c.; traceless})\Big]\,, \tag{5.31e}$$

$$\delta T_{ab}{}^{ij} = 8\overline{\epsilon}^{[i}R(\mathsf{Q})_{ab}{}^{j]}\,, \tag{5.31f}$$

$$\delta\chi^i = -\frac{1}{12}\gamma^{ab}\not{D}T_{ab}{}^{ij}\epsilon_j + \frac{1}{6}R(\mathsf{V})_{\mu\nu}{}^i{}_j\gamma^{\mu\nu}\epsilon^j - \frac{\mathrm{i}}{3}R(\mathsf{A})_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\epsilon^i + D\epsilon^i + \frac{1}{12}\gamma_{ab}T^{abij}\eta_j\,, \tag{5.31g}$$

$$\delta D = \overline{\epsilon}^i\not{D}\chi_i + \overline{\epsilon}_i\not{D}\chi^i\,, \tag{5.31h}$$

$$\mathcal{D}_\mu\epsilon^i = \Big(\partial_\mu - \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd} + \frac{1}{2}b_\mu + \frac{\mathrm{i}}{2}A_\mu\Big)\epsilon^i + \frac{1}{2}\mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\epsilon^j\,. \tag{5.31i}$$

5.2.16 Commutation relations of two Q-supersymmetries

Q-supersymmetries の交換関係は、gauged system では次の様になるべきである:

$$\begin{aligned} [\delta(\epsilon_1),\delta(\epsilon_2)] &= \xi^\mu D_\mu + \delta_{\mathsf{M}}(\varepsilon) + \delta_{\mathsf{K}}(\Lambda_{\mathsf{K}}) + \delta_{\mathsf{S}}(\eta) \\ &\quad + \delta_{\text{gauge}}(\Lambda^M) + \delta_{\text{tensor}}(\Xi_{\mu\mathsf{a}}) + \delta_{\text{tensor}}(\Xi_{\mu\mathsf{m}})\,, \end{aligned} \tag{5.32a}$$

$$\xi^\mu = 2\overline{\epsilon}^i_2\gamma^\mu\epsilon_{1i} + (\text{h.c.})\,, \tag{5.32b}$$

$$\varepsilon^{ab} = \overline{\epsilon}^i_1\epsilon^j_2\,T^{ab}{}_{ij} + (\text{h.c.})\,, \tag{5.32c}$$

$$\Lambda^a_{\mathsf{K}} = \overline{\epsilon}^i_1\epsilon^j_2\,D_bT^{ba}{}_{ij} - \frac{3}{2}\overline{\epsilon}^i_2\gamma^a\epsilon_{1i}D + (\text{h.c.})\,, \tag{5.32d}$$

$$\eta^i = 6\overline{\epsilon}^i_{[1}\epsilon^j_{2]}\chi_j\,, \tag{5.32e}$$

$$\Lambda^M = 4\overline{X}^M\overline{\epsilon}^i_2\epsilon^j_1\,\varepsilon_{ij} + (\text{h.c.})\,, \tag{5.32f}$$

$$\Xi_{\mu\mathsf{a}} = -2d_{\mathsf{a}NP}\overline{X}^NX^P\xi_\mu\,, \tag{5.32g}$$

$$\Xi_{\mu\mathsf{m}} = -8\mathrm{i}\,\varepsilon^{ij}\,\mu_{jk\mathsf{m}}\big(\overline{\epsilon}_{2i}\gamma_\mu\epsilon^k_1 + \overline{\epsilon}^k_2\gamma_\mu\epsilon_{1i}\big)\,. \tag{5.32h}$$

ゲージ化されることで大きく変更を受けるのは Y_{ij}^{Λ}, W_{μ}^{M}, $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $B_{\mu\nu\mathsf{m}}$ に作用する交換関係である。それぞれを結果だけ述べる [1]。

Commutation relation on Y_{ij}^{Λ}:

$$[\delta(\epsilon_1),\delta(\epsilon_2)]Y_{ij}^{\Lambda} \;=\; \ldots\,. \tag{5.33}$$

これが閉じるために、補助場 $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $B_{\mu\nu\mathsf{m}}$, $W_{\mu\Lambda}$ の運動方程式が必要となる:

$$0 \;=\; \Theta^{\Lambda\mathsf{a}}\big(\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}-\mathcal{H}_{\mu\nu\Lambda}\big)\,, \tag{5.34a}$$

$$0 \;=\; \Theta^{\Lambda\mathsf{m}}\big(\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}-\mathcal{H}_{\mu\nu\Lambda}\big)\,, \tag{5.34b}$$

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& \frac{1}{6}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\big(Z^{\Lambda,\mathsf{a}}\mathcal{H}_{\nu\rho\sigma\mathsf{a}}+Z^{\Lambda,\mathsf{m}}\mathcal{H}_{\nu\rho\sigma\mathsf{m}}\big)\\
&+T_{(MN)}{}^{\Lambda}\Big[-2\overline{X}^{M}\overleftrightarrow{\mathcal{D}}^{\mu}X^{N}+\overline{\Omega}^{iM}\gamma^{\mu}\Omega_i^{N}+\overline{X}^{M}\overline{\psi}_{\nu}^{i}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\Omega_i^{N}-X^{M}\overline{\psi}_{\nu i}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\Omega^{iN}\\
&\qquad -\frac{1}{2}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_{\nu i}\gamma_{\rho}\psi_{\sigma}^{i}\overline{X}^{M}X^{N}\Big]\\
&+\mathrm{i}G_{\overline{\alpha}\beta}T^{\Lambda\beta}{}_{\gamma}\Big[\frac{1}{2}A^{i\overline{\alpha}}\overleftrightarrow{\mathcal{D}}^{\mu}A_i{}^{\gamma}-2\overline{\zeta^{\alpha}}\gamma^{\mu}\zeta^{\gamma}+\overline{\psi}_{\nu}^{i}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\zeta^{\overline{\alpha}}A_i{}^{\gamma}-\overline{\psi}_{\nu i}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\zeta^{\gamma}A^{i\overline{\alpha}}\Big]\\
&-\mathrm{i}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\overline{\psi}_{\nu}^{i}\gamma_{\rho}\psi_{\sigma j}\,\varepsilon^{jk}\mu_{ik}{}^{\Lambda}\,.
\end{aligned} \tag{5.34c}$$

途中、Bianchi identity (5.25) を用いている。

Commutation relation on W_{μ}^{M}:

$$\begin{aligned}
[\delta(\epsilon_1),\delta(\epsilon_2)]W_{\mu}^{M} \;=\;& \xi^{\rho}\mathcal{G}_{\rho\mu}^{M}+\mathcal{D}_{\mu}\Lambda^{M}-\mathrm{g}Z^{M,\mathsf{a}}\Xi_{\mu\mathsf{a}}-\mathrm{g}Z^{M,\mathsf{m}}\Xi_{\mu\mathsf{m}}\\
&-\xi^{\rho}\Big[\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\,\overline{\psi}_{\rho}^{i}\gamma_{\mu}\Omega^{jM}+\varepsilon_{ij}\overline{X}^{M}\,\overline{\psi}_{\rho}^{i}\psi_{\mu}^{j}+(\text{h.c.})\Big]\,.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Commutation relations on $B_{\mu\nu\mathsf{a}}$, $B_{\mu\nu\mathsf{m}}$:

$$\begin{aligned}
&Z^{\Lambda,\mathsf{a}}[\delta(\epsilon_1),\delta(\epsilon_2)]B_{\mu\nu\mathsf{a}}\\
&\;=\; 2Z^{\Lambda,\mathsf{a}}\mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]\mathsf{a}}-2T_{(MN)}{}^{\Lambda}\Lambda^{M}\mathcal{G}_{\mu\nu}^{N}+2T_{(MN)}{}^{\Lambda}W_{[\mu}^{M}[\delta(\epsilon_1),\delta(\epsilon_2)]W_{\nu]}^{N}\\
&\quad+T_{(MN)}{}^{\Lambda}\xi^{\rho}\Big[\overline{X}^{M}\overline{\Omega}_i^{N}\gamma_{\mu\nu}\psi_{\rho}^{i}-2\overline{\psi}_{\rho}^{i}\gamma_{[\mu}\psi_{\nu]i}\overline{X}^{M}X^{N}+(\text{h.c.})\Big]\\
&\quad+e\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}T_{(MN)}{}^{\Lambda}\xi^{\rho}\Big[-2\overline{X}^{M}\overleftrightarrow{\mathcal{D}}^{\sigma}X^{N}+\overline{\Omega}^{iM}\gamma^{\sigma}\Omega_i^{N}+\overline{X}^{M}\overline{\psi}_{\lambda}^{i}\gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda}\Omega_i^{N}-X^{M}\overline{\psi}_{\lambda i}\gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda}\Omega^{iN}\\
&\qquad\qquad -\frac{1}{2}e^{-1}\varepsilon^{\sigma\lambda\tau\omega}\overline{\psi}_{\lambda i}\gamma_{\tau}\psi_{\omega}^{i}\overline{X}^{M}X^{N}\Big]\\
&\quad+16\mathrm{i}\,\mathrm{g}\,T_{(MN)}{}^{\Lambda}\Omega^{MP}\Big[X^{N}\mu^{ij}{}_{P}\,\overline{\epsilon}_{2i}\gamma_{\mu\nu}\epsilon_{1j}-\overline{X}^{N}\mu_{ijP}\,\overline{\epsilon}_{2}^{i}\gamma_{\mu\nu}\epsilon_{1}^{j}\Big]\,,
\end{aligned} \tag{5.36a}$$

$$\begin{aligned}
&Z^{\Lambda,\mathsf{m}}[\delta(\epsilon_1),\delta(\epsilon_2)]B_{\mu\nu\mathsf{m}}\\
&\;=\; 2Z^{\Lambda,\mathsf{m}}\mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]\mathsf{m}}+\mathrm{i}\xi^{\rho}\Big[k^{A\Lambda}\gamma_{Ai\overline{\alpha}}\overline{\zeta^{\alpha}}\gamma_{\mu\nu}\psi_{\rho}^{i}-2\varepsilon^{ij}\,\mu_{jk}{}^{\Lambda}\,\overline{\psi}_{i[\mu}\gamma_{\nu]}\psi_{\rho}^{k}-(\text{h.c.})\Big]\\
&\quad-16\mathrm{i}\,\mathrm{g}\,T_{(MN)}{}^{\Lambda}\Omega^{MP}\Big[X^{N}\mu^{ij}{}_{P}\,\overline{\epsilon}_{2i}\gamma_{\mu\nu}\epsilon_{1j}-\overline{X}^{N}\mu_{ijP}\,\overline{\epsilon}_{2}^{i}\gamma_{\mu\nu}\epsilon_{1}^{j}\Big]\\
&\quad+\mathrm{i}e\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\xi^{\rho}\Big[G_{\overline{\alpha}\beta}T^{\Lambda\beta}{}_{\gamma}\Big(\frac{1}{2}A^{i\overline{\alpha}}\overleftrightarrow{\mathcal{D}}^{\sigma}A_i{}^{\gamma}-2\overline{\zeta^{\alpha}}\gamma^{\sigma}\zeta^{\gamma}+\overline{\psi}_{\lambda}^{i}\gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda}\zeta^{\overline{\alpha}}A_i{}^{\gamma}-\overline{\psi}_{\lambda i}\gamma^{\sigma}\gamma^{\lambda}\zeta^{\gamma}A^{i\overline{\alpha}}\Big)\\
&\qquad\qquad -e^{-1}\varepsilon^{\sigma\lambda\tau\omega}\,\overline{\psi}_{\lambda}^{i}\gamma_{\tau}\psi_{\omega j}\,\varepsilon^{jk}\,\mu_{ik}{}^{\Lambda}\Big]\,.
\end{aligned} \tag{5.36b}$$

6 Towards Poincaré supergravity

6.1 Equation of motion for D

D は $\mathscr{L}_{\rm conf}$ (2.1d) と $\mathscr{L}_{\rm H,conf}$ (2.1e) にのみ登場する。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta(e^{-1}\mathscr{L})}{\delta D} = \frac{\delta(e^{-1}\mathscr{L}_{\rm conf})}{\delta D} + \frac{\delta(e^{-1}\mathscr{L}_{\rm H,conf})}{\delta D} \\ &= -K + \frac{1}{2}\chi\,. \end{aligned} \tag{6.1}$$

これにより 2 つの Kähler potential に関係を付ける。

6.2 Equations of motion for χ^i, χ_i

χ^i は $\mathscr{L}_{\rm conf}$ (2.1d) と $\mathscr{L}_{\rm H,conf}$ (2.1e) にのみ登場する。

$$\begin{aligned} \delta(e^{-1}\mathscr{L}_{\rm conf}) &= -\frac{1}{2}K\Big[\overline{\psi}^i_\mu\gamma^\mu\delta\chi_i + \overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu\delta\chi^i\Big] + \Big[\big(K_\Lambda\overline{\Omega}^\Lambda_i\delta\chi^i\big) + \big(K_\Lambda\overline{\Omega}^\Lambda_i\delta\chi^i\big)^\dagger\Big] \\ &= \frac{1}{2}K\Big[\delta\overline{\chi}_i\gamma^\mu\psi^i_\mu + \delta\overline{\chi}^i\gamma^\mu\psi_{\mu i}\Big] + \Big[K_\Lambda\delta\overline{\chi}^i\Omega^\Lambda_i + (K_\Lambda)^*\delta\overline{\chi}_i\Omega^{i\Lambda}\Big]\,, \end{aligned} \tag{6.2a}$$

$$\begin{aligned} \delta(e^{-1}\mathscr{L}_{\rm H,conf}) &= \frac{1}{4}\chi\Big[\overline{\psi}^i_\mu\gamma^\mu\delta\chi_i + \overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu\delta\chi^i\Big] - \chi_A\Big[\big(\gamma^A_{i\overline{\alpha}}\overline{\zeta^\alpha}\delta\chi^i\big) + \big(\gamma^A_{i\overline{\alpha}}\overline{\zeta^\alpha}\delta\chi^i\big)^\dagger\Big] \\ &= -\frac{1}{4}\chi\Big[\delta\overline{\chi}_i\gamma^\mu\psi^i_\mu + \delta\overline{\chi}^i\gamma^\mu\psi_{\mu i}\Big] - \chi_A\Big[\gamma^A_{i\overline{\alpha}}\delta\overline{\chi}^i\zeta^{\overline{\alpha}} + \overline{\gamma}^{Ai}_\alpha\delta\overline{\chi}_i\zeta^\alpha\Big]\,, \end{aligned} \tag{6.2b}$$

各項を (3.21) を用いて次の様に書き換える:

$$\overline{\psi}^i_\mu\gamma^\mu\delta\chi_i = -\delta\overline{\chi}_i\gamma^\mu\psi^i_\mu\,, \qquad \big(\overline{\psi}^i_\mu\gamma^\mu\delta\chi_i\big)^\dagger = -\delta\overline{\chi}^i\gamma^\mu\psi_{\mu i}\,, \tag{6.3a}$$

$$\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu\delta\chi^i = -\delta\overline{\chi}^i\gamma^\mu\psi_{\mu i}\,, \qquad \big(\overline{\psi}_{\mu i}\gamma^\mu\delta\chi^i\big)^\dagger = -\delta\overline{\chi}_i\gamma^\mu\psi^i_\mu\,, \tag{6.3b}$$

$$\overline{\Omega}^\Lambda_i\delta\chi^i = \delta\overline{\chi}^i\Omega^\Lambda_i\,, \qquad \big(\overline{\Omega}^\Lambda_i\delta\chi^i\big)^\dagger = \delta\overline{\chi}_i\Omega^{i\Lambda}\,, \tag{6.3c}$$

$$\overline{\zeta^\alpha}\delta\chi^i = \delta\overline{\chi}^i\zeta^{\overline{\alpha}}\,, \qquad \big(\overline{\zeta^\alpha}\delta\chi^i\big)^\dagger = \delta\overline{\chi}_i\zeta^\alpha\,. \tag{6.3d}$$

ここで左微分にした方が運動方程式の扱いが不便ではなくなる。また χ^i と χ_i は chirality が逆なので当然ながら互いに独立であり、別々に変分する。まとめると

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\overline{\chi}_i\backslash\delta(e^{-1}\mathscr{L}) = \delta\overline{\chi}_i\backslash\delta(e^{-1}\mathscr{L}_{\rm conf}) + \delta\overline{\chi}_i\backslash\delta(e^{-1}\mathscr{L}_{\rm H,conf}) \\ &= \frac{1}{2}\Big(K - \frac{1}{2}\chi\Big)\gamma^\mu\psi^i_\mu + (K_\Lambda)^*\Omega^{i\Lambda} - \chi_A\overline{\gamma}^{Ai}_\alpha\zeta^\alpha\,, \end{aligned} \tag{6.4a}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\overline{\chi}^i\backslash\delta(e^{-1}\mathscr{L}) = \delta\overline{\chi}^i\backslash\delta(e^{-1}\mathscr{L}_{\rm conf}) + \delta\overline{\chi}^i\backslash\delta(e^{-1}\mathscr{L}_{\rm H,conf}) \\ &= \frac{1}{2}\Big(K - \frac{1}{2}\chi\Big)\gamma^\mu\psi_{\mu i} + K_\Lambda\Omega^\Lambda_i - \chi_A\gamma^A_{i\overline{\alpha}}\zeta^{\overline{\alpha}}\,. \end{aligned} \tag{6.4b}$$

これは 3 つの fermions ψ^i_μ, $\Omega^{i\Lambda}$, ζ^α に拘束条件である (D の運動方程式 (6.1) により実質は $\Omega^{i\Lambda}$ と ζ^α に対する拘束条件)。

6.3 Superconformal gauge fixings

Superconformal algebra から super-Poincaré algebra に簡約するため、K-, D-, $U(1)_{\mathrm{R}}$-, $SU(2)_{\mathrm{R}}$-, and S-gauge fixings を行う。

6.3.1 K-gauge fixing

b_μ は共変微分 $\mathcal{D}_\mu$ にのみ登場する。[2] に倣って次の様に固定する:

$$b_\mu \ = \ 0\,. \tag{6.5}$$

6.3.2 D-gauge fixing

Einstein-Hilbert 項が canonical にするためのゲージ固定条件である。このノートでは $\kappa = 1$ に設定する。Einstein-Hilbert 項は $\mathscr{L}_{\mathrm{conf}}$ (2.1d) と $\mathscr{L}_{\mathrm{H,conf}}$ (2.1e) にのみ現れる:

$$e^{-1}\mathscr{L} \ = \ \frac{1}{6}KR + \frac{1}{6}\chi R + \ldots\,.$$

よって固定条件を次の様にする (see appendix A):

$$\frac{1}{6}K + \frac{1}{6}\chi \ = \ -\frac{1}{2}\,. \tag{6.6}$$

補助場 D の運動方程式の解 (6.1) と合わせると、次のように値が決まる:

$$K \ = \ -1\,, \qquad \chi \ = \ -2\,. \tag{6.7}$$

これは、vector multiplets のスカラー場 X^Λ 全てが独立というわけではないこと、合わせて hyper-multiplets のスカラー場 A_i^α も全てが独立というわけではないことを意味する。

6.3.3 $U(1)_{\mathbf{R}}$-gauge fixing

これは (6.7) がスカラー場 X^Λ の少なくとも一つが他に従属であることを意味することに伴って、その従属場の位相を固定するものである。[7] section 4 のコメントに従い、しばらくはこの固定を気にしないことにする [3]。具体的な固定例は、例えば section 6.4 (6.12) を参照。

6.3.4 $SU(2)_{\mathbf{R}}$-gauge fixing

これは (6.7) がスカラー場 A_i^α の少なくとも一つが他に従属であることを意味することに伴って、その従属場の $SU(2)$ 変換の自由度を固定するものである。[7] section 4 のコメントに従い、しばらくはこの固定を気にしないことにする [4]。具体的な固定例は、例えば section 6.5 (6.21) を参照。

[3] 固定は $(4.22)_{[7]}$ の様にする。
[4] 固定は $(4.22)_{[7]}$ の様にする。

6.3.5 S-gauge fixing

補助場 D の運動方程式の解 (6.1) から、gravitino ψ_μ^i と補助場 χ^i の混合項 $\overline{\psi}_\mu^i\gamma^\mu\chi_i$ は自然となくなる。しかし gravitino ψ_μ^i と gaugino Ω_i^Λ そして hyperino ζ^α との運動混合項は非自明である。これが消えるように gauge-fixing を行う。$\mathscr{L}_{\text{conf}}$ (2.1d) と $\mathscr{L}_{\text{H,conf}}$ (2.1e) を合わせると、この混合項は

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{3}K_\Lambda\overline{\Omega}_i^\Lambda\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\psi_\nu^i-\frac{2}{3}\chi_A\gamma_{i\overline{\alpha}}^A\overline{\zeta^{\alpha}}\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\psi_\nu^i+(\text{h.c.}) \\ &\quad= -\frac{1}{3}\Big(K_\Lambda\overline{\Omega}_i^\Lambda+2\chi_A\gamma_{i\overline{\alpha}}^A\overline{\zeta^{\alpha}}\Big)\gamma^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\psi_\nu^i+(\text{h.c.})\,, \end{aligned} \tag{6.8}$$

であるので、これが消える条件は

$$0 \;=\; K_\Lambda\Omega_i^\Lambda+2\chi_A\gamma_{i\overline{\alpha}}^A\zeta^{\overline{\alpha}}\,, \qquad 0 \;=\; (K_\Lambda)^*\Omega^{i\Lambda}+2\chi_A\overline{\gamma}_\alpha^{Ai}\zeta^\alpha\,, \tag{6.9}$$

となる。補助場 χ^i の運動方程式の解 (6.4) と合わせると、次が得られる:

$$0 \;=\; K_\Lambda\Omega_i^\Lambda\,, \qquad 0 \;=\; \chi_A\gamma_{i\overline{\alpha}}^A\zeta^{\overline{\alpha}}\,, \tag{6.10a}$$

$$0 \;=\; (K_\Lambda)^*\Omega^{i\Lambda}\,, \qquad 0 \;=\; \chi_A\overline{\gamma}_\alpha^{Ai}\zeta^\alpha\,. \tag{6.10b}$$

homothetic vector χ_A を用いた拘束条件より、(4.5), (4.6) を用いて $A^{i\overline{\alpha}}$ の拘束条件に書き直すと [7] との相性が少し良くなる:

$$\begin{aligned} \chi_A\gamma_{i\overline{\alpha}}^A &= \frac{1}{2}\varepsilon_{kl}\Omega_{\overline{\gamma}\overline{\lambda}}\Big[\overline{V}_A^{k\overline{\gamma}}A^{l\overline{\lambda}}+A^{k\overline{\gamma}}\overline{V}_A^{l\overline{\lambda}}\Big]\gamma_{i\overline{\alpha}}^A \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon_{kl}\Omega_{\overline{\gamma}\overline{\lambda}}\Big[\delta_i^k\delta_{\overline{\alpha}}^{\overline{\gamma}}A^{l\overline{\lambda}}+\delta_i^l\delta_{\overline{\alpha}}^{\overline{\lambda}}A^{k\overline{\gamma}}\Big] \\ &= \varepsilon_{ij}\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\,A^{j\overline{\beta}}\,, \\ \chi_A\overline{\gamma}_\alpha^{Ai} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{kl}\overline{\Omega}_{\gamma\lambda}\Big[V_{Ak}^\gamma A_l{}^\lambda+A_k{}^\gamma V_{Al}^\lambda\Big]\overline{\gamma}_\alpha^{Ai} \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon^{kl}\overline{\Omega}_{\gamma\lambda}\Big[\delta_k^i\delta_\alpha^\gamma A_l{}^\lambda+\delta_l^i\delta_\alpha^\lambda A_k{}^\gamma\Big] \\ &= \varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\,A_j{}^\beta\,, \end{aligned}$$

$$\therefore\quad 0 \;=\; \chi_A\gamma_{i\overline{\alpha}}^A\zeta^{\overline{\alpha}} \;=\; \varepsilon_{ij}\Omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}\,A^{j\overline{\beta}}\zeta^{\overline{\alpha}}\,, \tag{6.10c}$$

$$0 \;=\; \chi_A\overline{\gamma}_\alpha^{Ai}\zeta^\alpha \;=\; \varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}\,A_j{}^\beta\zeta^\alpha\,. \tag{6.10d}$$

6.4 Reduction of vector multiplets' space

Conformal supergravity (2.1) において vector multiplets の scalar fields は $2(n_{\text{V}}+1)$-dimensional rigid special Kähler manifold に値を取る。Poincaré supergravity では、Kähler form cohomology が偶数になる $2n_{\text{V}}$-dimensional local special Kähler、つまり Hodge-Kähler manifold ([2] p.77) になる。

vector multiplets において、gauge-fixing conditions (6.7), (6.10) によって得られた constraints を再度書いておこう:

$$K \;=\; N_{\Lambda\Sigma}(X,\overline{X})X^\Lambda\overline{X}^\Sigma \;=\; -\mathrm{i}\big(\overline{X}^\Lambda F_\Lambda-X^\Lambda\overline{F}_\Lambda\big) \;=\; -1\,, \qquad K_\Lambda\Omega_i^\Lambda \;=\; 0\,. \tag{6.11}$$

rigid special Kähler $(X^\Lambda,\Omega_i^\Lambda,K)$ から Hodge-Kähler $(Z^\Lambda,\widehat{\Omega}_i^\Lambda,\mathcal{K})$ に移行する。まず次の様にする:

$$X^\Lambda \;\equiv\; Y(Z,\overline{Z})\cdot Z^\Lambda\,, \qquad \overline{X}^\Lambda \;\equiv\; \overline{Y}(Z,\overline{Z})\cdot\overline{Z}^\Lambda\,, \tag{6.12a}$$

$$Y(Z,\overline{Z}) \;\equiv\; \mathrm{e}^{\mathcal{K}/2} \;=\; \overline{Y}(Z,\overline{Z}) \qquad\qquad (\text{by } U(1)_{\mathrm{R}}\text{-gauge fixing})\,. \tag{6.12b}$$

$F_{\Lambda\Sigma}(X)$ は X^Λ について homogeneous of degree zero ($F(X)$ が homogeneous of degree two) であることから次の関係が成立する:

$$F_{\Lambda\Sigma}(X) \;=\; \mathcal{F}_{\Lambda\Sigma}(Z)\,, \quad N_{\Lambda\Sigma}(X,\overline{X}) \;\equiv\; 2\mathrm{Im}F_{\Lambda\Sigma} \;=\; N_{\Lambda\Sigma}(Z,\overline{Z})\,, \tag{6.13a}$$

$$(X^\Lambda, F_\Lambda) \;\equiv\; \mathrm{e}^{\mathcal{K}/2}(Z^\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda)\,. \tag{6.13b}$$

この $Y = \mathrm{e}^{\mathcal{K}/2}$ は、rigid special Kähler から Hodge-Kähler を作るときの scale factor を表すことに相当する。この分離により、rigid Kähler potential K から Hodge-Kähler potential $\mathcal{K}$ が得られる:

$$-1 \;=\; N_{\Lambda\Sigma}(X,\overline{X})X^\Lambda\overline{X}^\Sigma \;\equiv\; -|Y|^2\mathrm{e}^{-\mathcal{K}}\,, \tag{6.14a}$$

$$\mathcal{K} \;=\; -\log\Big[-\frac{K}{|Y|^2}\Big] \;=\; -\log\Big[\mathrm{i}\big(\overline{Z}^\Lambda\mathcal{F}_\Lambda - Z^\Lambda\overline{\mathcal{F}}_\Lambda\big)\Big]\,. \tag{6.14b}$$

fermionic fields Ω_i^Λ についても書き換える:

$$\widehat{\Omega}_i^\Lambda \;\equiv\; \Omega_i^\Lambda - \frac{X^\Lambda}{X^0}\Omega_i^0\,, \qquad \widehat{\Omega}_i^0 \;=\; 0\,, \tag{6.15a}$$

$$\begin{aligned} \Omega_i^\Lambda \;&=\; \widehat{\Omega}_i^\Lambda + \frac{1}{K}N_{\Sigma\Gamma}X^\Lambda\overline{X}^\Sigma\,\widehat{\Omega}_i^\Gamma \;=\; \widehat{\Omega}_i^\Lambda - N_{\Sigma\Gamma}X^\Lambda\overline{X}^\Sigma\,\widehat{\Omega}_i^\Gamma \\ &=\; \widehat{\Omega}_i^\Lambda - \mathrm{e}^{\mathcal{K}}N_{\Sigma\Gamma}Z^\Lambda\overline{Z}^\Sigma\,\widehat{\Omega}_i^\Gamma\,. \end{aligned} \tag{6.15b}$$

ついでにここで period matrix $\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}$ との関係を示しておこう。period matrix の定義そのものは

$$F_\Lambda \;\equiv\; \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}X^\Sigma\,, \qquad D_aF_\Lambda \;\equiv\; \overline{\mathcal{N}}_{\Lambda\Sigma}D_aX^\Sigma\,, \qquad D_aX^M \;\equiv\; \Big(\partial_a + \frac{1}{2}\partial_a\mathcal{K}\Big)X^M\,, \tag{6.16a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}(\mathfrak{t},\bar{\mathfrak{t}}) \;&=\; \overline{F}_{\Lambda\Sigma} + \mathrm{i}\frac{(N_{\Lambda\Gamma}X^\Gamma)(N_{\Sigma\Pi}X^\Pi)}{N_{\Delta\Xi}X^\Delta X^\Xi} \;=\; \overline{\mathcal{F}}_{\Lambda\Sigma} + \mathrm{i}\frac{(N_{\Lambda\Gamma}Z^\Gamma)(N_{\Sigma\Pi}Z^\Pi)}{N_{\Delta\Xi}Z^\Delta Z^\Xi} \\ &=\; \overline{\mathcal{F}}_{\Lambda\Sigma} + 2\mathrm{i}\frac{(\mathrm{Im}\mathcal{F}_{\Lambda\Gamma}Z^\Gamma)(\mathrm{Im}\mathcal{F}_{\Sigma\Pi}Z^\Pi)}{Z^\Delta(\mathrm{Im}\mathcal{F}_{\Delta\Xi})Z^\Xi}\,, \end{aligned} \tag{6.16b}$$

である。ここで $\mathfrak{t}^a = Z^a/Z^0$ である。また $\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \in \mathbb{C}$, $N_{\Lambda\Sigma} \in \mathbb{R}$ であることも注意。比較する:

$$\begin{aligned} N_{\Lambda\Sigma} \;&=\; \frac{1}{\mathrm{i}}\big(F_{\Lambda\Sigma} - \overline{F}_{\Lambda\Sigma}\big) \\ &=\; -2\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} + \frac{(N_{\Lambda\Gamma}X^\Gamma)(N_{\Sigma\Pi}X^\Pi)}{N_{\Delta\Xi}X^\Delta X^\Xi} + \frac{(N_{\Lambda\Gamma}\overline{X}^\Gamma)(N_{\Sigma\Pi}\overline{X}^\Pi)}{N_{\Delta\Xi}\overline{X}^\Delta\overline{X}^\Xi}\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

両辺に $X^\Lambda\overline{X}^\Sigma$ を作用させると $\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}$ が $N_{\Lambda\Sigma}$ 同様に negative definite であることがわかる:

$$N_{\Lambda\Sigma}X^\Lambda\overline{X}^\Sigma \;=\; -2(\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma})X^\Lambda\overline{X}^\Sigma + 2N_{\Sigma\Pi}X^\Pi\overline{X}^\Sigma\,, \qquad N_{\Lambda\Sigma}X^\Lambda\overline{X}^\Sigma \;=\; -1\,, \tag{6.18a}$$

$$\therefore\quad (\mathrm{Im}\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma})X^\Lambda\overline{X}^\Sigma \;=\; -\frac{1}{2}\,. \tag{6.18b}$$

6.5 Reduction of hypermultiplets' space

Conformal supergravity (2.1) における hypermultiplets の scalar fields ϕ^A $(A=1,2,\ldots,4(n_{\rm H}+1))$ は、hyper-Kähler cone に値を取る。この hyper-Kähler cone は cone over tri-Sasakian manifold である。tri-Sasakian はさらに、$Sp(1)$ fibrations of $4n_{\rm H}$-dimensional quaternionic Kähler manifold になっている。この quaternionic Kähler が、Poincaré supergravity における hypermultiplets' scalar fields が住む空間である。

Reduction の方法は [7] を模倣する。gauge-fixing conditions (6.7), (6.10) によって得られた constraints を再度記載しておく:

$$\chi \ = \ \frac{1}{2}g_{AB}\chi^A\chi^B \ = \ \frac{1}{2}G_{\overline{\alpha}\beta}A^{i\overline{\alpha}}A_i{}^{\beta} \ = \ -2\,, \qquad \varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}A_j{}^{\beta}\zeta^{\alpha} \ = \ 0\,. \tag{6.19}$$

hyper-Kähler cone $(A_i{}^{\alpha},\zeta^{\alpha})$ から quaternionic Kähler $(B_a{}^{\alpha},\widehat{\zeta}^{\alpha})$ に移行する。まずは bosonic fields $A_i{}^{\alpha}$ の拘束条件を次で解く $(\alpha=1,2,\ldots,2(n_{\rm H}+1);\ a\equiv 1,2)$:

$$B_a{}^{\alpha} \ \equiv \ (A^{-1})^i{}_a A_i{}^{\alpha}\,, \qquad A_i{}^{\alpha} \ = \ A_i{}^a B_a{}^{\alpha}\,, \qquad B_a{}^b \ = \ \delta_a^b \tag{6.20a}$$

$B_a{}^{\alpha}$ は $A_i{}^{\alpha}$ 同様に quaternionic pseudo-reality condition (4.5b) を満たす:

$$B^{a\overline{\alpha}} \ = \ (B_a{}^{\alpha})^* \ = \ \varepsilon^{ab}\overline{\Omega^{\alpha\beta}}G_{\overline{\beta}\gamma}B_b{}^{\gamma}\,. \tag{6.20b}$$

さてここで [7] を模倣して、(6.20) を constraint に代入する:

$$\begin{aligned}
\chi \ = \ -2 \ &= \ \frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}(A_i{}^aB_a{}^{\alpha})(A_j{}^bB_b{}^{\beta}) \ = \ \frac{1}{2}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}B_a{}^{\alpha}B_b{}^{\beta}\cdot\varepsilon^{ij}\Big(\frac{1}{2}\Omega^{ab}A_i{}^cA_j{}^d\Omega_{cd}\Big) \\
&\equiv \ C(B)\Big(\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\Omega_{cd}A_i{}^cA_j{}^d\Big)\,, \qquad (6.20c) \\
C(B) \ &\equiv \ \frac{1}{2}\Omega^{ab}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}B_a{}^{\alpha}B_b{}^{\beta} \ = \ -4\Big(\varepsilon^{ij}\Omega_{cd}A_i{}^cA_j{}^d\Big)^{-1}\,. \qquad (6.20d)
\end{aligned}$$

ここで任意の $X^{[ab]}$ について $X^{ab}=\frac{1}{2}\Omega^{ab}(X^{cd}\Omega_{cd})$ を用いた。この $C(B)$ は、vector multiplets sector における Y とほぼ同様の役割を果たしている。つまり hyper-Kähler cone の cone coordinate に相当しており、reduced geometry である quaternionic geometry の potential そのものである。さらにここから quaternionic Kähler を取り出すために、$Sp(1)$-fibration 方向を固定する。つまり δ_i^a を用いることで $SU(2)_{\rm R}$-gauge fixing を行う:

$$A_i{}^a \ \equiv \ \delta_i^a\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon^{kl}\varepsilon_{bc}A_k{}^bA_l{}^c} \ = \ \delta_i^a\sqrt{-\frac{2}{C(B)}}\,, \quad \Omega^{ab} \ \equiv \ \varepsilon^{ab} \qquad (SU(2)_{\rm R}\text{-gauge fixing})\,. \tag{6.21}$$

$A_i{}^a$ $(a=1,2)$ はもはや独立でない場であり、$B_a{}^{\alpha}$ が独立な、quaternionic Kähler geometry の coordinates となる。

fermionic fields ζ^{α} についても、(4.4d), (4.5b), (4.5i) を用いて constraints (6.10) を解く:

$$\begin{aligned}
\widehat{\zeta}^{\alpha} \ &\equiv \ \zeta^{\alpha}-B_a{}^{\alpha}\zeta^a\,, \qquad \widehat{\zeta}^a \ = \ 0\,, \qquad (6.22a) \\
\zeta^{\alpha} \ &= \ \widehat{\zeta}^{\alpha}-\frac{1}{\chi}\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\gamma\beta}A_i{}^{\alpha}A_j{}^{\beta}\,\widehat{\zeta}^{\gamma} \ = \ \widehat{\zeta}^{\alpha}+\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}\overline{\Omega}_{\gamma\beta}A_i{}^{\alpha}A_j{}^{\beta}\,\widehat{\zeta}^{\gamma} \\
&= \ \widehat{\zeta}^{\alpha}-\frac{1}{C(B)}\varepsilon^{ab}\overline{\Omega}_{\gamma\beta}B_a{}^{\alpha}B_b{}^{\beta}\,\widehat{\zeta}^{\gamma}\,. \qquad (6.22b)
\end{aligned}$$

Appendix

A Various signs

B. de Wit [1] の Einstein-Hilbert term の定義は、[2] Appendix C でいうところの

$$(s_1, s_2, s_3) \ = \ (+, -, -)$$

である ([2] や [6] のそれは $(+,+,+)$。[14] は $(-,-,+)$)。それぞれの符号は次に登場する:

$$e^{-1}\mathscr{L} \ = \ -s_1(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{s_1 s_3}{2\kappa^2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,, \tag{A.1a}$$

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \ = \ s_2 \big(\partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \big) \,, \tag{A.1b}$$

$$8\pi T_{\mu\nu} \ = \ s_3 \Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \Big) \,, \qquad T_{00} \ \geq \ 0 \,, \tag{A.1c}$$

$$s_2 s_3 R_{\mu\nu} \ = \ R^\rho{}_{\nu\rho\mu} \,, \tag{A.1d}$$

$$D_\mu \psi \ = \ \Big(\partial_\mu + \frac{s_2}{4} \omega_\mu{}^{ab} \gamma_{ab} \Big) \psi \,, \qquad D_\mu V^a \ = \ \partial_\mu V^a + s_2 \omega_\mu{}^a{}_b V^b \,. \tag{A.1e}$$

B Duality transformations of the prepotential

(4.2b) を証明する。本質的なものは symplectic matrix である。

Electric/magnetic duality transformations によって、symplectic vector $X^M = (X^\Lambda, F_\Lambda)$ は次の変換を受けるとする:

$$\begin{pmatrix} X^\Lambda \\ F_\Lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{X}^\Lambda \\ \widetilde{F}_\Lambda \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} U^\Lambda{}_\Sigma & Z^{\Lambda\Sigma} \\ W_{\Lambda\Sigma} & V_\Lambda{}^\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\Sigma \\ F_\Sigma \end{pmatrix} \,, \tag{B.1a}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} U^{\rm T} & W^{\rm T} \\ Z^{\rm T} & V^{\rm T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & Z \\ W & V \end{pmatrix} \,, \tag{B.1b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad U^{\rm T} W \ &= \ W^{\rm T} U \,, \qquad Z^{\rm T} V \ = \ V^{\rm T} Z \,, \\ \mathbb{1} \ &= \ U^{\rm T} V - W^{\rm T} Z \,, \qquad \mathbb{1} \ = \ V^{\rm T} U - Z^{\rm T} W \,. \end{aligned} \tag{B.1c}$$

ここで $U^\Lambda{}_\Sigma$, $Z^{\Lambda\Sigma}$, $W_{\Lambda\Sigma}$, $V_\Lambda{}^\Sigma$ は定数行列。(B.1a) によって、$\widetilde{F}_\Lambda = \partial \widetilde{F} / \partial \widetilde{X}^\Lambda$ から次のような微分方程式が得られる:

$$\begin{aligned} {\rm d}\widetilde{F} \ &= \ {\rm d}\widetilde{X}^\Lambda \Big(W_{\Lambda\Sigma} X^\Sigma + V_\Lambda{}^\Sigma F_\Sigma \Big) \ = \ {\rm d}X^\Sigma \Big((U^{\rm T})_\Sigma{}^\Lambda + F_{\Sigma\Gamma} (Z^{\rm T})^{\Gamma\Lambda} \Big) \Big(W_{\Lambda\Delta} X^\Delta + V_\Lambda{}^\Delta F_\Delta \Big) \\ &= \ {\rm d}X^\Sigma \Big[(U^{\rm T} W)_{\Sigma\Delta} X^\Delta + (U^{\rm T} V)_\Sigma{}^\Delta F_\Delta + F_{\Sigma\Gamma} (Z^{\rm T} W)^\Gamma{}_\Delta X^\Delta + F_{\Sigma\Gamma} (Z^{\rm T} V)^{\Gamma\Delta} F_\Delta \Big] \,. \end{aligned} \tag{B.2}$$

各項を変形して全微分項にする:

$$\begin{aligned} {\rm d}X^\Sigma (U^{\rm T} W)_{\Sigma\Delta} X^\Delta \ &= \ {\rm d}\big[X^\Sigma (U^{\rm T} W)_{\Sigma\Delta} X^\Delta \big] - X^\Sigma (U^{\rm T} W)_{\Sigma\Delta} {\rm d}X^\Delta \\ &= \ {\rm d}\big[X^\Sigma (U^{\rm T} W)_{\Sigma\Delta} X^\Delta \big] - {\rm d}X^\Delta (W^{\rm T} U)_{\Delta\Sigma} X^\Sigma \\ &= \ {\rm d}\big[X^\Sigma (U^{\rm T} W)_{\Sigma\Delta} X^\Delta \big] - {\rm d}X^\Delta (U^{\rm T} W)_{\Delta\Sigma} X^\Sigma \\ &= \ \frac{1}{2} {\rm d}\Big[X^\Sigma (U^{\rm T} W)_{\Sigma\Delta} X^\Delta \Big] \,, \end{aligned} \tag{B.3a}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X^\Sigma F_{\Sigma\Gamma}(Z^\mathrm{T}W)^\Gamma{}_\Delta X^\Delta &= \mathrm{d}\Big[X^\Sigma F_{\Sigma\Gamma}(Z^\mathrm{T}W)^\Gamma{}_\Delta X^\Delta\Big] - \cancel{X^\Sigma F_{\Sigma\Gamma\Pi}}\mathrm{d}X^\Pi(Z^\mathrm{T}W)^\Gamma{}_\Delta X^\Delta \\
&\quad - X^\Sigma F_{\Sigma\Gamma}(Z^\mathrm{T}W)^\Gamma{}_\Delta \mathrm{d}X^\Delta \\
&= \mathrm{d}\Big[F_\Gamma(Z^\mathrm{T}W)^\Gamma{}_\Delta X^\Delta\Big] - \mathrm{d}X^\Delta(W^\mathrm{T}Z)_\Delta{}^\Gamma F_{\Gamma\Sigma}X^\Sigma \\
&= \mathrm{d}\Big[X^\Delta(W^\mathrm{T}Z)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma\Big] + \mathrm{d}X^\Delta\big\{\delta^\Gamma_\Delta - (U^\mathrm{T}V)_\Delta{}^\Gamma\big\}F_{\Gamma\Sigma}X^\Sigma \\
&= \mathrm{d}\Big[X^\Delta(W^\mathrm{T}Z)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma\Big] + \mathrm{d}X^\Gamma F_{\Gamma\Sigma}X^\Sigma - \mathrm{d}X^\Delta(U^\mathrm{T}V)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma \\
&= \mathrm{d}\Big[X^\Delta(W^\mathrm{T}Z)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma\Big] + \mathrm{d}\Big[X^\Gamma F_{\Gamma\Sigma}X^\Sigma\Big] - \cancel{X^\Gamma F_{\Gamma\Sigma\Delta}}\mathrm{d}X^\Delta X^\Sigma \\
&\quad - X^\Gamma F_{\Sigma\Gamma}\mathrm{d}X^\Sigma - \mathrm{d}X^\Delta(U^\mathrm{T}V)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma \\
&= \mathrm{d}\Big[X^\Delta(W^\mathrm{T}Z)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma\Big] + \frac{1}{2}\mathrm{d}\Big[X^\Gamma F_{\Gamma\Sigma}X^\Sigma\Big] - \mathrm{d}X^\Delta(U^\mathrm{T}V)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma\,, \qquad \text{(B.3b)} \\
\mathrm{d}X^\Sigma F_{\Sigma\Gamma}(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta &= \mathrm{d}\Big[X^\Sigma F_{\Sigma\Gamma}(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta\Big] \\
&\quad - \cancel{X^\Sigma F_{\Sigma\Gamma\Pi}}\mathrm{d}X^\Pi(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta - X^\Sigma F_{\Sigma\Gamma}(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_{\Delta\Pi}\mathrm{d}X^\Pi \\
&= \mathrm{d}\Big[F_\Gamma(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta\Big] - \mathrm{d}X^\Pi F_{\Pi\Delta}(V^\mathrm{T}Z)^{\Delta\Gamma}F_{\Gamma\Sigma}X^\Sigma \\
&= \mathrm{d}\Big[F_\Gamma(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta\Big] - \mathrm{d}X^\Pi F_{\Pi\Delta}(Z^\mathrm{T}V)^{\Delta\Gamma}F_{\Gamma\Sigma}X^\Sigma \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}\Big[F_\Gamma(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta\Big]\,. \qquad \text{(B.3c)}
\end{aligned}
$$

途中、適切なところで (B.1c) を用いた。これらを (B.2) に代入する:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\widetilde{F} &= \frac{1}{2}\mathrm{d}\Big[X^\Sigma(U^\mathrm{T}W)_{\Sigma\Delta}X^\Delta\Big] + \mathrm{d}\Big[X^\Delta(W^\mathrm{T}Z)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma\Big] + \frac{1}{2}\mathrm{d}\Big[X^\Gamma F_{\Gamma\Sigma}X^\Sigma\Big] + \frac{1}{2}\mathrm{d}\Big[F_\Gamma(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta\Big] \\
&= \mathrm{d}\Big[F + \frac{1}{2}X^\Sigma(U^\mathrm{T}W)_{\Sigma\Delta}X^\Delta + \frac{1}{2}X^\Delta(W^\mathrm{T}Z)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma + \frac{1}{2}X^\Delta(U^\mathrm{T}V - \mathbb{1})_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma + \frac{1}{2}F_\Gamma(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta\Big] \\
&= \mathrm{d}\Big[F - \frac{1}{2}X^\Delta F_\Delta\Big] + \frac{1}{2}\mathrm{d}\Big[X^\Sigma(U^\mathrm{T}W)_{\Sigma\Delta}X^\Delta + X^\Delta(W^\mathrm{T}Z + U^\mathrm{T}V)_\Delta{}^\Gamma F_\Gamma + F_\Gamma(Z^\mathrm{T}V)^{\Gamma\Delta}F_\Delta\Big]\,, \\
\therefore\quad \widetilde{F} &= F - \frac{1}{2}X^\Lambda F_\Lambda \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[X^\Lambda(U^\mathrm{T}W)_{\Lambda\Sigma}X^\Sigma + X^\Lambda(U^\mathrm{T}V + W^\mathrm{T}Z)_\Lambda{}^\Sigma F_\Sigma + F_\Lambda(Z^\mathrm{T}V)^{\Lambda\Sigma}F_\Sigma\Big]\,. \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

prepotential $F(X)$ は X^Λ について homogeneous of second degree。これに見合う積分定数はない。

C Selfdual tensors in Lorentzian space

Levi-Civita invariant tensor $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を用いた (anti)-selfdual tensor について、ここで一般的な議論を展開しておく。[1] ($\epsilon^{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}} = +\mathrm{i}$) type と [11] ($\epsilon^{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}} = 1$) type があるので、同じ B. de Wit の論文でも、こちらが混乱する場合がある。一般に、次の様に invariant tensor を用意しよう:

$$\epsilon^{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}} \equiv \alpha\,, \qquad \epsilon_{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}} \equiv -\alpha\,, \tag{C.1a}$$

$$\epsilon^{abcd} = e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, e_\mu{}^a e_\nu{}^b e_\rho{}^c e_\sigma{}^d\,, \qquad \epsilon_{abcd} = e\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, e_a{}^\mu e_b{}^\nu e_c{}^\rho e_d{}^\sigma\,. \tag{C.1b}$$

計量は mostly plus Lorentzian signature を持つとする。contractions は次の様になる:

$$\epsilon^{abcd}\epsilon_{abcd} = 4!(-\alpha^2)\,, \qquad \epsilon^{abcd}\epsilon_{ebcd} = 3!(-\alpha^2)\delta^a_e\,, \tag{C.2a}$$

$$\epsilon^{abcd}\epsilon_{efcd} = (2!)^2(-\alpha^2)\delta^{ab}_{ef} = 2!(-\alpha^2)\big(\delta^a_e\delta^b_f - \delta^a_f\delta^b_e\big)\,. \tag{C.2b}$$

さて、(anti)-selfdual tensors を定義する:

$$F^\pm_{ab} \equiv \frac{1}{2}\Big(F_{ab} \pm \frac{\beta}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}\Big)\,, \qquad F^\pm_{\mu\nu} = F^\pm_{ab}e_\mu{}^a e_\nu{}^b = \frac{1}{2}\Big(F_{\mu\nu} \pm \frac{\beta}{2}e\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\Big)\,, \tag{C.3a}$$

$$F^{\pm ab} \equiv \frac{1}{2}\Big(F^{ab} \pm \frac{\gamma}{2}\epsilon^{abcd}F_{cd}\Big)\,, \qquad F^{\pm\mu\nu} = F^{\pm ab}e_a{}^\mu e_b{}^\nu = \frac{1}{2}\Big(F^{\mu\nu} \pm \frac{\gamma}{2}e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\Big)\,. \tag{C.3b}$$

これらの間の最も強い条件は直交性 $F^\pm_{ab}G^{\mp ab} = 0$ である:

$$\begin{aligned}
0 \equiv F^+_{ab}G^{-ab} &= \frac{1}{4}\Big(F_{ab} + \frac{\beta}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}\Big)\Big(G^{ab} - \frac{\gamma}{2}\epsilon^{abef}G_{ef}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big[F_{ab}G^{ab} - \frac{\beta\gamma}{4}\epsilon_{abcd}\epsilon^{abef}F^{cd}G_{ef} + \frac{\beta}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}G^{ab} - \frac{\gamma}{2}\epsilon^{abef}F_{ab}G_{ef}\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[F_{ab}G^{ab}(1+\alpha^2\beta\gamma) + \frac{\beta}{2}\epsilon_{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}}\big(F^{\dot{0}\dot{1}}G^{\dot{2}\dot{3}} + \ldots\big) - \frac{\gamma}{2}\epsilon^{\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}}\big(F_{\dot{0}\dot{1}}G_{\dot{2}\dot{3}} + \ldots\big)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[F_{ab}G^{ab}(1+\alpha^2\beta\gamma) + \big(F_{\dot{0}\dot{1}}G_{\dot{2}\dot{3}} + \ldots\big)\big(\alpha\beta - \alpha\gamma\big)\Big]\,,
\end{aligned} \tag{C.4a}$$

$$\therefore \quad 0 = 1 + \alpha^2\beta\gamma\,, \qquad \beta = \gamma\,. \tag{C.4b}$$

ここで [1] は $\alpha = +\mathrm{i}, \beta = \gamma = 1$ であり、[11] は (Chern-Simons like terms により) $\alpha = 1, \beta = \gamma = \mathrm{i}$ である。どちらにせよ、$\beta = \gamma$ なので、

$$F^{\pm ab} = \eta^{ac}\eta^{bd}F^\pm_{cd}\,, \qquad F^{\pm\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F^\pm_{\rho\sigma}\,, \tag{C.5}$$

のように、普通に metric を用いて添字の上下を変更する。注意は Levi-Civita tensors 同士の contractions (α^2 の扱い) である。

References

[1] B. de Wit and M. van Zalk, "*Electric and magnetic charges in $N = 2$ conformal supergravity theories*," arXiv:1107.3305 [hep-th].

M. van Zalk, "*New deformations of $N = 2$ supergravity*," Ph.D. Thesis, Utrecht University, September 2011.

[2] A. Van Proeyen, "*$N = 2$ supergravity in $d = 4, 5, 6$ and its matter couplings*," Extended version of Lectures given during the semester "Supergravity, superstrings and M-theory" at Institut Henri Poincaré, Paris, November 2000 (last update: February 19, 2008).

[3] T. Mohaupt, "*Black hole entropy, special geometry and strings*," Fortsch. Phys. **49** (2001) 3 [hep-th/0007195].

[4] B. de Wit, B. Kleijn and S. Vandoren, "*Superconformal hypermultiplets*," Nucl. Phys. B **568** (2000) 475 [arXiv:hep-th/9909228].

[5] B. de Wit, M. Rocek and S. Vandoren, "*Hypermultiplets, hyper-Kähler cones and quaternion-Kähler geometry*," JHEP **0102** (2001) 039 [hep-th/0101161].

[6] T. Kimura, "*A technical note on 4D $\mathcal{N} = 2$ gauged supergravity*," `TK-NOTE/11-02`.

[7] B. de Wit, P. G. Lauwers and A. Van Proeyen, "*Lagrangians of $\mathcal{N} = 2$ supergravity-matter systems*," Nucl. Phys. B **255** (1985) 569.

[8] B. de Wit, M. Rocek and S. Vandoren, "*Gauging isometries on hyperKähler cones and quaternion Kähler manifolds*," Phys. Lett. B **511** (2001) 302 [arXiv:hep-th/0104215].

[9] B. de Wit and A. Van Proeyen, "*Potentials and symmetries of general gauged $N = 2$ supergravity: Yang-Mills models*," Nucl. Phys. B **245** (1984) 89.

[10] B. de Wit, "*Electric magnetic dualities in supergravity*," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **101** (2001) 154 [hep-th/0103086].

[11] B. de Wit, H. Samtleben and M. Trigiante, "*Magnetic charges in local field theory*," JHEP **0509** (2005) 016 [hep-th/0507289].

[12] M. de Vroome and B. de Wit, "*Lagrangians with electric and magnetic charges of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theories*," JHEP **0708** (2007) 064 [arXiv:0707.2717 [hep-th]].

[13] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, "*Conformal supergravity*," Phys. Rept. **119** (1985) 233.

[14] L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Ceresole, R. D'Auria, S. Ferrara, P. Fre and T. Magri, "*$\mathcal{N} = 2$ supergravity and $\mathcal{N} = 2$ super Yang-Mills theory on general scalar manifolds: symplectic covariance, gaugings and the momentum map*," J. Geom. Phys. **23** (1997) 111 [arXiv:hep-th/9605032].