

コンヌの埋め込み予想と量子情報

小澤登高



京都大学数理解析研究所

京大量子情報ユニット ZOOM 講演

2020.05.20

Connes の埋め込み予想と量子情報

量子力学の数学的基礎 (von Neumann 1932) : Hilbert 空間と作用素

作用素環論

Connes の埋め込み予想 (1976)
任意の von Neumann 環 (の内部
で起こること) は適当な意味で
行列環でシミュレートできる

↔
Kirchberg
Fritz,
Junge
et al, 0

量子情報理論

Tsirelson 予想 (1993)
2 人の独立した観測者の間に起
こりうる量子相関に対する 2 つ
の異なる定式化が実は一致する



計算複雑性理論

非局所ゲームの最適値は計算可能

$$\text{MIP}^* = \text{RE}$$

Z. Ji, A. Natarajan, T. Vidick, J. Wright, H. Yuen (arXiv:2001.04383)

Connes の埋め込み予想と量子情報

量子力学の数学的基礎 (von Neumann 1932) : Hilbert 空間と作用素

作用素環論

Connes の埋め込み予想 (1976)

$\forall G$ 群 $\forall g_1, \dots, g_k \in G \ \forall m \in \mathbb{N}$

$\exists N \in \mathbb{N} \ \exists u_1, \dots, u_k \in \mathcal{U}(N)$

$\forall w \in F_k$ 長さ $\leq m$ の語

$\frac{1}{N} \text{Tr } w(u_1, \dots, u_k) > 1 - \varepsilon$ or $< \varepsilon$

d.o. $w(g_1, \dots, g_k) = e_G$ or $\neq e_G$.



Kirchberg
Fritz,
Junge
et al, 0

量子情報理論

Tsirelson 予想 (1993)

2 人の独立した観測者の間に起こりうる量子相関に対する 2 つの異なる定式化が実は一致する

計算複雑性理論

非局所ゲームの最適値は計算可能

$$\text{MIP}^* = \text{RE}$$

Z. Ji, A. Natarajan, T. Vidick, J. Wright, H. Yuen (arXiv:2001.04383)

古典的実在論 vs 量子力学

古典的記述：世界の状態空間 Ω （「確率空間」）

サイコロを振る：出目の種類 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\Omega = \Omega_1 \sqcup \cdots \sqcup \Omega_6$$

現在の状態 $\omega \in \Omega$ が Ω_a にいる 確率 p_a （ここで $\sum_a p_a = 1$ ）

出目は現在の状態により一意に決まる

量子力学的記述：世界の状態空間 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$

サイコロを振る：出目の種類 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\rightsquigarrow$ 射影子 $P_1, \dots, P_6$ such that $P_1 + \cdots + P_6 = I$ （PVM）

現在の状態： $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$

実際の出目：出目が a である確率 $\|P_a \psi\|^2$ （ここで $\sum_a \|P_a \psi\|^2 = 1$ ）

$\rightsquigarrow$ さらに状態が ψ から $\psi' := \frac{1}{\|P_a \psi\|} P_a \psi$ に変化する（「射影仮説」）

（よって、この出目を再測定しても同じ a のままである： $\|P_a \psi'\|^2 = 1$ ）

アリスとボブ

量子力学的記述: 世界の状態空間 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$

サイコロを振る: 出目の種類 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\rightsquigarrow$ 射影子 $P_1, \dots, P_6$ such that $P_1 + \dots + P_6 = I$ (PVM)

現在の状態: $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$

実際の出目: 出目が a である確率 $\|P_a\psi\|^2$ (ここで $\sum_a \|P_a\psi\|^2 = 1$)

$\rightsquigarrow$ さらに状態が ψ から $\psi' := \frac{1}{\|P_a\psi\|} P_a\psi$ に変化する (「射影仮説」)

(よって、この出目を再測定しても同じ i のままである: $\|P_a\psi'\|^2 = 1$)

アリス (P_a) _{a} とボブ (Q_b) _{b} が同時に状態 ψ の測定を行う

検出結果が (a, b) である確率は、実はアリスが先、ボブが後の場合、

$$\|P_a\psi\|^2 \cdot \|Q_b \frac{1}{\|P_a\psi\|} P_a\psi\|^2 = \|Q_b P_a\psi\|^2$$

その逆の場合 $\|P_a Q_b\psi\|^2$

アリスとボブは離れた場所にいて互いに干渉しない

$\iff$ 状態 $Q_b P_a\psi$ でアリスが再測定すると必ず a が出る

$\iff Q_b P_a = P_a Q_b \quad \forall a, b$

$\iff \|Q_b P_a\psi\|^2 = \|P_a Q_b\psi\|^2 \quad \forall \psi \quad \forall a, b$

Bell テスト

離れた場所にいるアリスとボブがそれぞれいくつかの測定装置を持っている状態を考える。それぞれが手持ちの測定装置から自由に一つを選び、同時に状態 ψ を測定する。



古典的实在論によれば、
12000 個の果物のうち

Big Hard Red Apple 701 個
Big Hard Red Grape 568 個

$$x = \{\text{Apple, Grape}\}$$

$$A = P_A - P_G$$

$$x' = \{\text{Red, Green}\}$$

$$A' = P_R - P_G$$

Small Soft Red Apple 833 個

$$y = \{\text{Hard, Soft}\}$$

$$B = Q_H - Q_S$$

$$y' = \{\text{Big, Small}\}$$

$$B' = Q_B - Q_S$$

後でデータを持ち寄って次の値を計算する。

$$\mathbb{E}^{xy}(AB) + \mathbb{E}^{xy'}(AB') + \mathbb{E}^{x'y}(A'B) - \mathbb{E}^{x'y'}(A'B')$$

Bell テスト

離れた場所にいるアリスとボブがそれぞれいくつかの測定装置を持っている状況を考える。それぞれが手持ちの測定装置から自由に一つを選び、同時に状態 ψ を測定する。



古典的実在論によれば、
12000 個の果物のうち

Big Hard Red Apple 701 個
Big Hard Red Grape 568 個

Small Soft Red Apple 833 個

$$x = \{\text{Apple, Grape}\}$$

$$A = P_A - P_G$$

$$x' = \{\text{Red, Green}\}$$

$$A' = P_R - P_G$$

$$y = \{\text{Hard, Soft}\}$$

$$B = Q_H - Q_S$$

$$y' = \{\text{Big, Small}\}$$

$$B' = Q_B - Q_S$$

後でデータを持ち寄って次の値を計算する。

$$\mathbb{E}^{xy}(AB) + \mathbb{E}^{xy'}(AB') + \mathbb{E}^{x'y}(A'B) - \mathbb{E}^{x'y'}(A'B')$$

Bell テスト

離れた場所にいるアリスとボブがそれぞれいくつかの測定装置を持っている状況を考える。それぞれが手持ちの測定装置から自由に一つを選び、同時に状態 ψ を測定する。



古典的实在論によれば、
12000 個の果物のうち

Big Hard Red Apple 701 個
Big Hard Red Grape 568 個

$$x = \{\text{Apple, Grape}\}$$

$$A = P_A - P_G$$

$$x' = \{\text{Red, Green}\}$$

$$A' = P_R - P_G$$

Small Soft Red Apple 833 個

$$y = \{\text{Hard, Soft}\}$$

$$B = Q_H - Q_S$$

$$y' = \{\text{Big, Small}\}$$

$$B' = Q_B - Q_S$$

後でデータを持ち寄って次の値を計算する。

$$\mathbb{E}^{xy}(AB) + \mathbb{E}^{xy'}(AB') + \mathbb{E}^{x'y}(A'B) - \mathbb{E}^{x'y'}(A'B')$$

Bell テストの結果

後でデータを持ち寄って次の値を計算する。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{xy}(AB) + \mathbb{E}^{xy'}(AB') + \mathbb{E}^{x'y}(A'B) - \mathbb{E}^{x'y'}(A'B') \\ = \mathbb{E}(AB + AB' + A'B - A'B')\end{aligned}$$

古典的实在論によれば、 A, A', B, B' は確率空間の上の関数なので、 $-1 \leq A, A', B, B' \leq 1$ より、次の CHSH 不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}|AB + AB' + A'B - A'B'| &\leq |A||B + B'| + |A'||B - B'| \\ &\leq |B + B'| + |B - B'| \\ &= 2 \max\{|B|, |B'|\} \leq 2\end{aligned}$$

独立した2人の観測者間の相関関係は古典的实在論に基づく限り CHSH 不等式を満たす。実際に行われた実験 (Aspect 1982) では、適切な設定の下でこの不等式が破れていることが確認されている。つまり、量子相関関係には古典より大きな可能性がある ($\rightsquigarrow$ 非局所性)。

量子相関 (m, r) . Tsirelson 予想

(Ω, μ) 確率空間

$$\mathcal{C}_{\text{classical}} = \{ [\mathbb{E}(P_a^x Q_b^y)]_{a,b}^{x,y} : (P_a^x)_{a=1}^m, x = 1, \dots, r, \Omega \text{ の分割 } \}, \\ (Q_b^y)_{b=1}^m, y = 1, \dots, r, \Omega \text{ の分割}$$

$\mathcal{H}$ 有限次元 Hilbert 空間, $\psi \in \mathcal{H}$ 状態

$$\mathcal{C}_q = \{ [\langle \psi, P_a^x Q_b^y \psi \rangle]_{a,b}^{x,y} : (P_a^x)_{a=1}^m, x = 1, \dots, r, \text{ PVMs on } \mathcal{H}, \\ (Q_b^y)_{b=1}^m, y = 1, \dots, r, \text{ PVMs on } \mathcal{H}, \}, \\ P_a^x Q_b^y = Q_b^y P_a^x \text{ for all } a, b \text{ and } x, y$$

$$\mathcal{C}_{\text{qc}} = \{ [\langle \psi, P_a^x Q_b^y \psi \rangle]_{a,b}^{x,y} : \text{同上。ただし } \mathcal{H} \text{ は有限次元とは限らない } \},$$

$$\Theta = \{ [\gamma_{a,b}^{x,y}]_{i,j}^{k,l} : \gamma_{a,b}^{x,y} \geq 0, \sum_{a,b} \gamma_{a,b}^{x,y} = 1 \text{ for } \forall x, y \\ \sum_a \gamma_{a,b}^{x,y} \text{ indep of } x, \sum_b \gamma_{a,b}^{x,y} \text{ indep of } y \}.$$

ここで、 $PQ = QP$ のとき、 PQ も射影子となり、 $\langle \psi, PQ\psi \rangle = \|PQ\psi\|^2$

$$\mathcal{C}_{\text{classical}} \subsetneq \mathcal{C}_q \subsetneq \overline{\mathcal{C}_q} = \mathcal{C}_{\text{qa}} \subsetneq \mathcal{C}_{\text{qc}} \subsetneq \Theta$$

Bell

1964

CHSH

Slofstra

2017

$\neg$ Connes 予想

JNVWY

MIP*=RE

非局所ゲーム

$$G = (Q, A, \mu, D)$$

$Q = \{x, y, \dots\}$ クエスチョン集合

$A = \{a, b, \dots\}$ アンサー集合

$$D: Q \times Q \times A \times A \rightarrow \{0, 1\}$$

μ $Q \times Q$ 上の確率測度

アリス&ボブの戦略 $p(a, b|x, y)$ の期待値

$$\omega(G, p) = \sum_{x, y, a, b} \mu(x, y) p(a, b|x, y) D(x, y, a, b)$$

最適値

$$\omega_{\text{classical}}(G) = \sup_{p \in \mathcal{C}_{\text{classical}}} \omega(G, p)$$

$$\omega_{\text{q}}(G) = \sup_{p \in \mathcal{C}_{\text{q}}} \omega(G, p) = \sup_{p \in \mathcal{C}_{\text{qa}}} \omega(G, p)$$

$$\omega_{\text{qc}}(G) = \sup_{p \in \mathcal{C}_{\text{qc}}} \omega(G, p)$$

例: CHSH ゲーム

$$Q = A = \{0, 1\}, \quad D(x, y, a, b) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \oplus b = x \wedge y \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad \mu \text{ 一様測度}$$

$$\rightsquigarrow \omega_{\text{classical}} = \frac{3}{4} < \omega_{\text{q}} = \omega_{\text{qc}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\omega_q(G)$ の計算可能性

$\mathcal{H}$ 有限次元 Hilbert 空間, $\psi \in \mathcal{H}$ 状態

$$\mathcal{C}_q = \left\{ [\langle \psi, P_a^x Q_b^y \psi \rangle]_{a,b}^{x,y} : \begin{array}{l} (P_a^x)_{a=1}^m, x = 1, \dots, r, \text{ PVMs on } \mathcal{H}, \\ (Q_b^y)_{b=1}^m, y = 1, \dots, r, \text{ PVMs on } \mathcal{H}, \\ P_a^x Q_b^y = Q_b^y P_a^x \text{ for all } a, b \text{ and } x, y \end{array} \right\}$$

$$= \bigcup_d \{ [\langle \psi, P_a^x Q_b^y \psi \rangle]_{a,b}^{x,y} : \text{同上、ただし } \dim \mathcal{H} \leq d \}$$

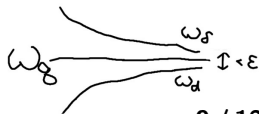
$$\rightsquigarrow \omega_d(G) \nearrow \omega_q(G), \text{ ここで } \omega_d(G) \text{ は計算可能}$$

$\dim \mathcal{H} \leq (mr)^{8/\delta}, \psi \in \mathcal{H}$ 状態

$$\mathcal{C}_{qc} = \bigcap_{\delta > 0} \left\{ [\langle \psi, P_a^x Q_b^y \psi \rangle]_{a,b}^{x,y} : \begin{array}{l} (P_a^x)_{a=1}^m, x = 1, \dots, r, \text{ PVMs on } \mathcal{H}, \\ (Q_b^y)_{b=1}^m, y = 1, \dots, r, \text{ PVMs on } \mathcal{H}, \\ \|P_a^x Q_b^y - Q_b^y P_a^x\| < \delta \text{ for } \forall a, b, x, y \end{array} \right\}$$

$$\rightsquigarrow \omega_\delta(G) \searrow \omega_{qc}(G), \text{ ここで } \omega_\delta(G) \text{ は計算可能}$$

もし $\mathcal{C}_{qa} = \mathcal{C}_{qc}$ なら $\omega_q = \omega_{qc}$ は計算可能



MIP*=RE

Theorem (Turing 1936)

Turing 機械の停止性問題を解くアルゴリズムは存在しない

Theorem (MIP*=RE, Ji–Natarajan–Vidick–Wright–Yuen 2020)

Turing 機械 M から非局所ゲーム G_M を構成して

- M が停止するなら $\omega_q(G_M) = 1$
 - M が停止しないなら $\omega_q(G_M) \leq 1/2$
- となるようにできる

Corollary

ω_q を誤差 $1/2$ 以内で計算するアルゴリズムは存在しない

Corollary

Connes の埋め込み予想、Tsirelson 予想は正しくない

$\omega_q(G_M) \leq 1/2 < \omega_{qc}(G_M) = 1$ となる G_M を「具体的に」構成できる

JNVWYの仕事（注：ぜんぜん理解してないよ）

$\mathcal{E}(G, \alpha) := \min\{ \text{ゲーム } G \text{ を期待値 } \geq \alpha \text{ で行うのに必要な「}\mathcal{H}\text{」の次元} \}$

例： $\mathcal{E}(\text{CHSH}, 3/4) = 1, \quad \mathcal{E}(\text{CHSH}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}) = 2 \times 2$

WANTED!

- $\omega_{\text{qc}}(G) = 1$ かつ $\mathcal{E}(G, 1/2) = \infty$ のような局所ゲーム G
- $n \mapsto \mathcal{E}(G_n, \omega_{\text{q}}(G_n) - 1/2)$ が計算不可能な $G_1, G_2, \dots$

セッティング： $\mathcal{G}(n)$ がゲーム G_n を記述する多項式時間 Turing 機械 $\mathcal{G}$

Theorem (Compression Theorem)

$\exists$ 多項式時間 Turing 機械 $\text{Compress}: \mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{G}'$

- $\text{Complexity}(G'_n) = \text{Polylog}(G_n)$
- $\omega_{\text{q}}(G_n) = 1 \Rightarrow \omega_{\text{q}}(G'_n) = 1$
- $\mathcal{E}(G'_n, 1/2) \geq \max\{2^n, \mathcal{E}(G_n, 1/2)\}$

(Compress Theorem $\Rightarrow$ MIP*=RE) の証明のスケッチ

$\mathcal{M}$ Turing 機械 $\rightsquigarrow G_1, G_2, \dots$

G_n : $\mathcal{M}$ が n ステップまでに停止するなら $D = 1$

そうでなければ $\mathcal{G}' = \text{Compress}(\mathcal{G})$ について $G_n := G'_{n+1}$

$G_{\mathcal{M}} := G_1$

JNVWYの仕事2 (注: ぜんぜん理解してないよ)

(Compress Theorem $\Rightarrow$ MIP*=RE) の証明のスケッチ

Theorem (Compression Theorem)

$\exists$ 多項式時間 Turing 機械 Compress: $\mathcal{G} \rightsquigarrow \mathcal{G}'$

- Complexity(G'_n) = Polylog(G_n)
- $\omega_q(G_n) = 1 \Rightarrow \omega_q(G'_n) = 1$
- $\mathcal{E}(G'_n, 1/2) \geq \max\{2^n, \mathcal{E}(G_n, 1/2)\}$

$\mathcal{M}$ Turing 機械 $\rightsquigarrow G_1, G_2, \dots, G_{\mathcal{M}} := G_1$

G_n : $\mathcal{M}$ が n ステップまでに停止するなら $D = 1$
そうでなければ $\mathcal{G}' = \text{Compress}(\mathcal{G})$ について $G_n := G'_{n+1}$

$\mathcal{M}$ が停止するなら $\omega_q(G_{\mathcal{M}}) = 1$ であること:

停止時間を T とすると、 $\omega_q(G_T) = 1$

$n \leq T$ かつ $\omega_q(G_n) = 1$ なら、 $\omega_q(G_{n-1}) = \omega_q(G'_n) = \omega_q(G_n) = 1$

$\mathcal{M}$ が停止しないなら $\omega_q(G_{\mathcal{M}}) \leq 1/2$ であること:

$\mathcal{E}(G_n, 1/2) = \mathcal{E}(G'_{n+1}, 1/2) \geq \mathcal{E}(G_{n+1}, 1/2) \geq \dots$

よって $\mathcal{E}(G_{\mathcal{M}}, 1/2) \geq \mathcal{E}(G_n, 1/2) \geq 2^{n+1} \forall n \rightsquigarrow \omega_q(G_{\mathcal{M}}) \leq 1/2$