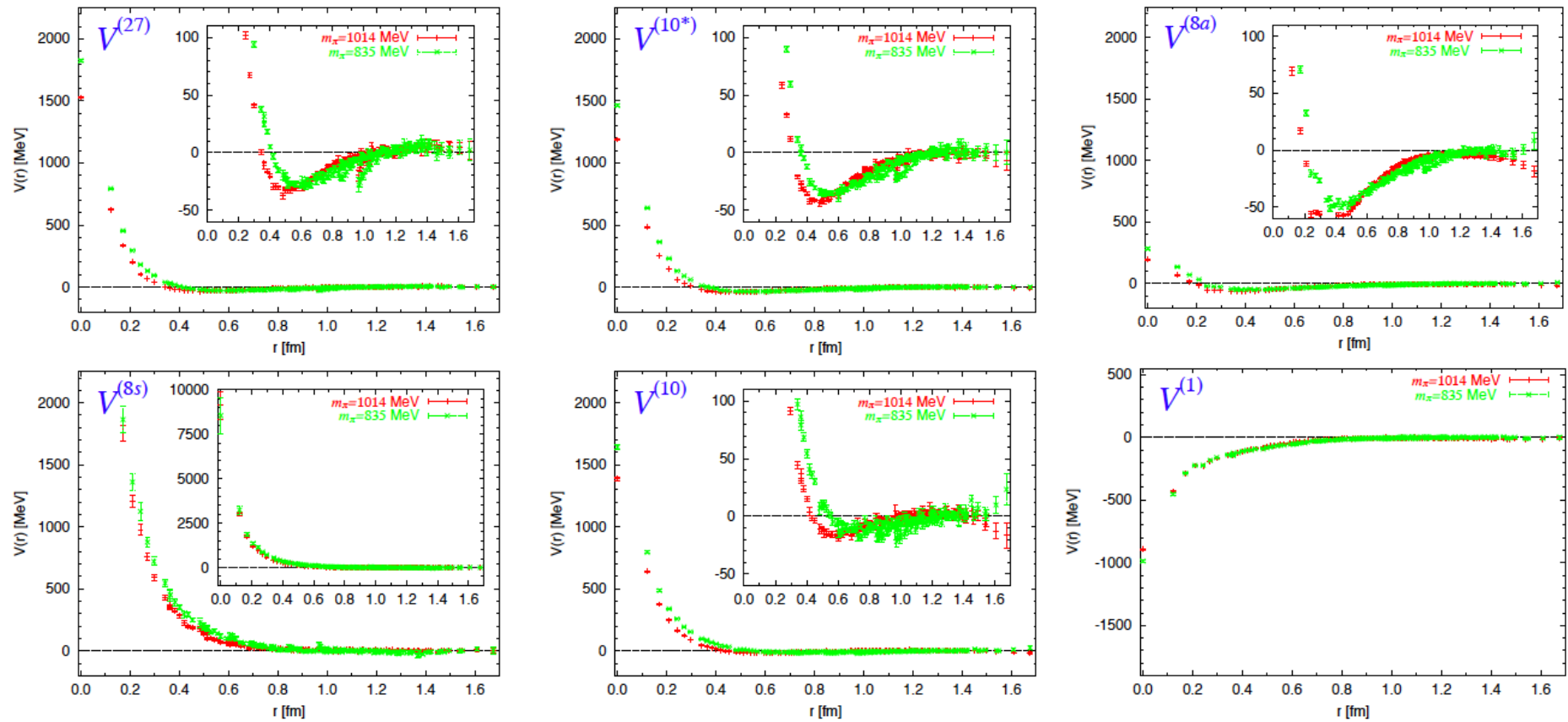

バリオンのための行列

橋本幸士
(理研仁科センター)

arXiv/1202.???? 青木慎也, 飯塚則裕, KH



[HAL-QCD collaboration, 1007.3559(hep-lat)]

Hダイバリオン? [R.L.Jaffe('77)]

バリオン多体系のための行列模型

[Iizuka, Yi, KH 1003.4988]

$$S = \frac{\lambda N_c}{54\pi} M_{\text{KK}} \int dt \text{tr} \left[(D_0 X^M)^2 - \frac{2}{3} M_{\text{KK}}^2 (X^4)^2 + D_0 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} D_0 w_{\dot{\alpha}i} - \frac{1}{6} M_{\text{KK}}^2 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} w_{\dot{\alpha}i} \right. \\ \left. - \frac{3^6 \pi^2}{4\lambda^2 M_{\text{KK}}^4} \left(\vec{D} \right)^2 + i \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{X}^{\dot{\beta}\alpha} X_{\alpha\dot{\alpha}} + i \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{w}_i^{\dot{\beta}} w_{\dot{\alpha}i} \right] + 4N_c \int dt \text{tr} A_0$$

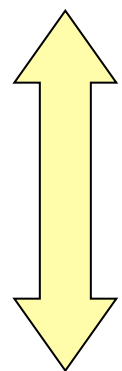
- ・ バリオンA個の低エネルギー有効理論(ラージ N_c 強結合QCD)
- ・ 行列自由度の量子力学
- ・ $U(A)$ ゲージ対称性

field	index	$U(A)$	$SU(N_f)$	$SU(2) \times SU(2)$
$X^M(t)$	$M = 1, 2, 3, 4$	adj.	1	$(2, 2)$
$w_{\dot{\alpha}i}(t)$	$\dot{\alpha} = 1, 2; i = 1, \dots, N_f$	fund.	fund.	$(1, 2)$
$A_0(t)$		adj.	1	$(1, 1)$
$D_s(t)$	$s = 1, 2, 3$	adj.	1	$(1, 3)$

バリオン多体系のための行列模型

[Iizuka, Yi, KH 1003.4988]

$$S = \frac{\lambda N_c}{54\pi} M_{\text{KK}} \int dt \text{tr} \left[(D_0 X^M)^2 - \frac{2}{3} M_{\text{KK}}^2 (X^4)^2 + D_0 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} D_0 w_{\dot{\alpha}i} - \frac{1}{6} M_{\text{KK}}^2 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} w_{\dot{\alpha}i} \right. \\ \left. - \frac{3^6 \pi^2}{4\lambda^2 M_{\text{KK}}^4} (\vec{D})^2 + i \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{X}^{\beta\alpha} X_{\alpha\dot{\alpha}} + i \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{w}_i^{\dot{\beta}} w_{\dot{\alpha}i} \right] + 4N_c \int dt \text{tr} A_0$$



X^M ($M = 1, 2, 3, 4$) : $A \times A$ エルミート行列

$X^{M=1,2,3}$ の固有値 = **A個のバリオンの位置**

パラメータは二つだけ: $M_{\text{KK}}, \lambda = N_c g_{\text{QCD}}^2 \sim \mathcal{O}(15)$

原子核は
量子力学

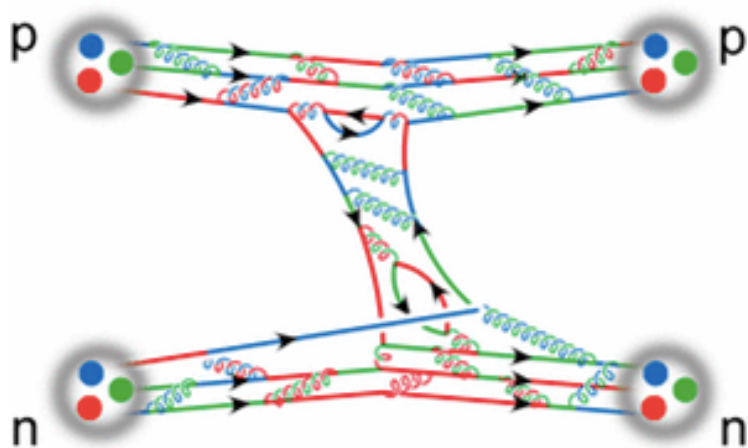
$$S \sim \int dt \left[\sum_{i=1}^A \frac{1}{2} m_N |\partial_t \vec{x}^{(i)}|^2 + \sum_{i \neq j} V(x^{(i)} - x^{(j)}, \dots) + \dots \right]$$

話の流れ

1. バリオン多体系のための行列 4ページ
2. バリオン数1:スペクトル 2ページ
3. バリオン数2:ポテンシャル 4ページ

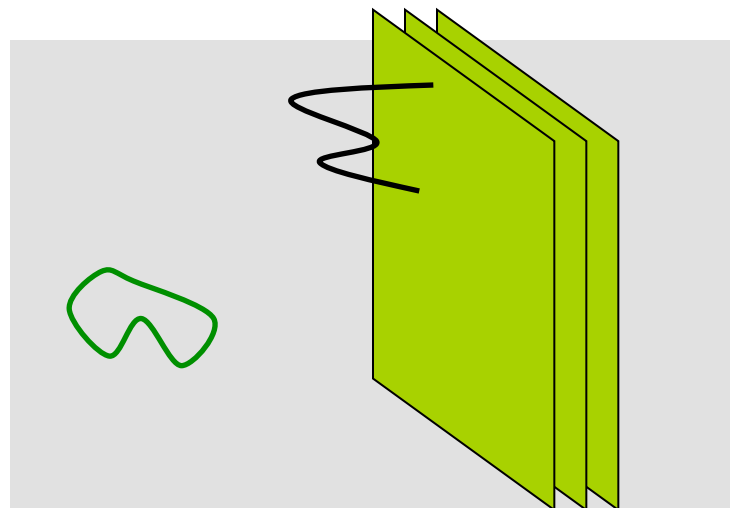
量子色力学を 曲がった時空上の弦理論に写す

ホログラフィー (= ゲージ重力対応 = AdS/CFT対応)



強結合、ラーズ N_c
 $SU(N_c)$ ゲージ理論 (1+3次元)

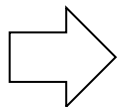
$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}_i (iD_\mu \gamma^\mu - m_i) \psi_i \right]$$



曲がった時空内の
超弦理論
弱結合、1+9次元

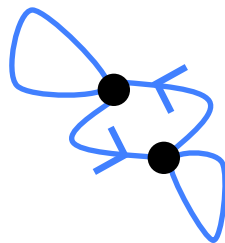
バリオン多体系は行列で記述される

ラージ N_c でのバリオンは重い



バリオン = Dブレーン

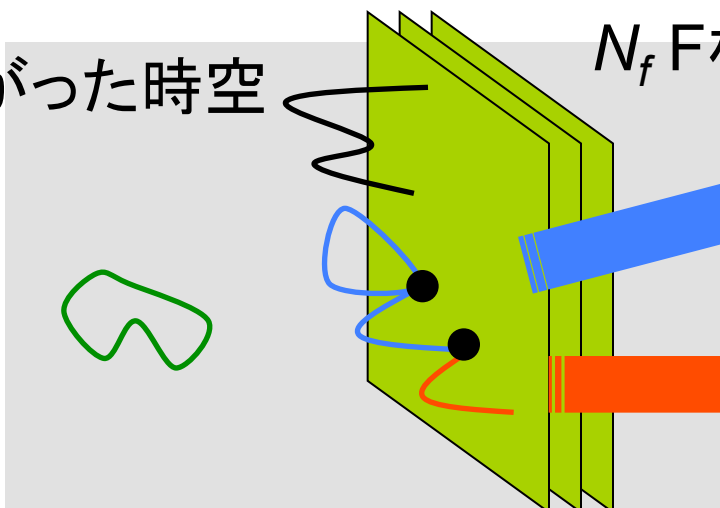
多重Dブレーンは
行列で記述



バリオン多体系は
行列で記述

AdS/CFT対応の重力(弦理論)側

曲がった時空



N_f 枚のフレーバーDブレーン

$A \times A$ 行列 “ $X(t)$ ”
固有値がバリオンの位置

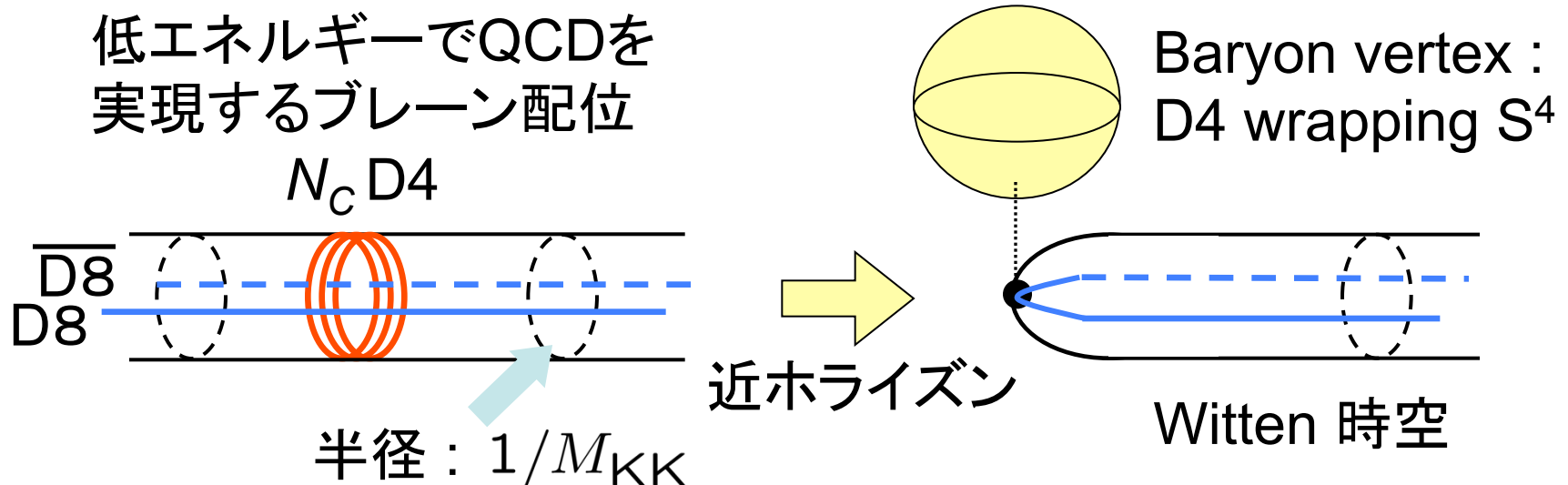
$A \times N_f$ 行列 “ $w(t)$ ”
スピン / アイソスピン

超弦理論における正確な導出

$$S = \frac{\lambda N_c}{54\pi} M_{\text{KK}} \int dt \text{tr} \left[(D_0 X^M)^2 - \frac{2}{3} M_{\text{KK}}^2 (X^4)^2 + D_0 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} D_0 w_{\dot{\alpha}i} - \frac{1}{6} M_{\text{KK}}^2 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} w_{\dot{\alpha}i} \right. \\ \left. - \frac{3^6 \pi^2}{4\lambda^2 M_{\text{KK}}^4} (\vec{D})^2 + i \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{X}^{\dot{\beta}\alpha} X_{\alpha\dot{\alpha}} + i \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{w}_i^{\dot{\beta}} w_{\dot{\alpha}i} \right] + 4N_c \int dt \text{tr} A_0$$

[Iizuka, Yi, KH 1003.4988]

Witten時空内に置かれたA枚のD4ブレーンの有効作用
(フレーバーブレーンとして酒井杉本模型のD8を置く)



行列模型作用の導出(詳細)

$$S = \frac{\lambda N_c}{54\pi} M_{\text{KK}} \int dt \operatorname{tr} \left[(D_0 X^M)^2 - \frac{2}{3} M_{\text{KK}}^2 (X^4)^2 + D_0 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} D_0 w_{\dot{\alpha}i} - \frac{1}{6} M_{\text{KK}}^2 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} w_{\dot{\alpha}i} \right. \\ \left. - \frac{3^6 \pi^2}{4\lambda^2 M_{\text{KK}}^4} \left(\vec{D} \right)^2 + i \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{X}^{\dot{\beta}\alpha} X_{\alpha\dot{\alpha}} + i \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{w}_i^{\dot{\beta}} w_{\dot{\alpha}i} \right] + 4N_c \int dt \operatorname{tr} A_0$$

- 1) Witten時空の先端部分の幾何を背景とする
non-Abelian DBI作用を、場(X)の二次まで展開

$$-T_{\text{D4}} \int d^5\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det(G_{MN} + 2\pi\alpha' F_{MN})} \\ = -\frac{T_{\text{D4}}}{g_s} \int dt \frac{8\pi^2}{3} R^3 U \sqrt{1 - (\partial_0 X^i)^2 - \frac{4}{9} \frac{R^3 U_{\text{KK}}}{U^4} (\partial_0 Z)^2}$$

- 2) D4-D8弦の振動(w)とXの相互作用は、
ADHM行列模型と同じ。(A インスタントン)
- 3) S^4 を貫く背景RRフラックスからChern-Simons項が出る

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2 \cdot 3!} \int d^5\xi \operatorname{tr} \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\alpha\beta} C_{\mu_1\mu_2\mu_3} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int dt \operatorname{tr} A_0 \int F_4 = N_c \int dt \operatorname{tr} A_0$$

話の流れ

1. バリオン多体系のための行列 4ページ
2. バリオン数1: スペクトル 2ページ
3. バリオン数2: ポテンシャル 4ページ

A=1 : バリオン励起スペクトル

$$S = \frac{\lambda N_c M_{\text{KK}}}{54\pi} \int dt \left[(D_0 X^M)^2 - \frac{2}{3} M_{\text{KK}}^2 (X^4)^2 + D_0 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} D_0 w_{\dot{\alpha}i} - \frac{1}{6} M_{\text{KK}}^2 \bar{w}_i^{\dot{\alpha}} w_{\dot{\alpha}i} \right. \\ \left. + \frac{3^6 \pi^2}{4\lambda^2 M_{\text{KK}}^4} \left(\vec{D} \right) + \vec{D} \cdot \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{w}_i^{\dot{\beta}} w_{\dot{\alpha}i} \right] + N_c \int dt \text{tr}_k A_0$$

1) ラージ λ でADHM条件を解く(D-term条件)

$$\sum_{i=1}^{N_f} w_{\dot{\alpha}=1}^i (w_{\dot{\alpha}=2}^i)^* = \sum_{i=1}^{N_f} w_{\dot{\alpha}=2}^i (w_{\dot{\alpha}=1}^i)^* = 0, \quad \sum_{i=1}^{N_f} |w_{\dot{\alpha}=1}^i|^2 = \sum_{i=1}^{N_f} |w_{\dot{\alpha}=2}^i|^2$$

解は、 $N_f=2$ のとき、 2×2 ユニタリ行列 U を用いて $w_{\dot{\alpha}}^i = U \rho$

2) ハミルトニアンのパテンシャル項は

$$H = \frac{\lambda N_c M_{\text{KK}}}{54\pi} \left[\left(\frac{27\pi}{\lambda M_{\text{KK}}} \right)^2 \frac{1}{2\rho^2} + \frac{1}{3} M_{\text{KK}}^2 \rho^2 + \frac{2}{3} M_{\text{KK}}^2 (X^4)^2 \right] \\ \rho = 2^{-1/4} 3^{7/4} \sqrt{\pi} \lambda^{-1/2} M_{\text{KK}}^{-1} \text{ で極小化される}$$

量子力学系 = SU(2)ユニタリ行列空間 + 調和振動子2つ

A=1 : バリオン励起スペクトル

See [Hata,Sakai,Sugimoto,Yamato 0701280]

ユニタリ行列: $U = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & ia_1 + a_2 \\ ia_1 - a_2 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}$

→ S^3 上の量子力学 $(a_0)^2 + (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 = 1$

$$\nabla_{S^3}^2 \psi(U) = -l(l+2)\psi(U) \quad l/2 = I = J$$

スペクトルは :

$$M = M_0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\sqrt{(2I+1)^2 + N_c^2} + 2n_\rho + 2n_{X^4} + 2 \right]$$

→ $I = J = 1/2 \quad 940^+, 1359^+, 1359^-, 1778^+, 1778^-, \dots$

M_N, M_Δ 実験 : $940^+, 1440^+, 1535^-, 1710^+, 1655^-, \dots$

核子の波動関数は U そのもの $\frac{1}{\pi}(\tau^2 U)_{IJ} = \begin{pmatrix} |p \uparrow\rangle & |p \downarrow\rangle \\ |n \uparrow\rangle & |n \downarrow\rangle \end{pmatrix}_{IJ}$

話の流れ

1. バリオン多体系のための行列 4ページ
2. バリオン数1:スペクトル 2ページ
3. バリオン数2:ポテンシャル 4ページ

A=2 : バリオン間ポテンシャル

1) ラージλでADHM条件を解く(D-term条件)

$$\vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \left(\bar{X}^{\dot{\beta}\alpha} X_{\alpha\dot{\alpha}} + \bar{w}^{\dot{\beta}}_i w_{i\dot{\alpha}} \right)_{BA} = 0 \quad A = 1, 2$$

バリオンが遠いとき: $X_M = \begin{pmatrix} r_M/2 & 0 \\ 0 & -r_M/2 \end{pmatrix}, \quad w^A = U^{(A)} \rho_A$

解は、ラージ r^3_M の展開で

$$X_M = \frac{1}{2} r_M^a \tau_a$$

$$w^A = U^{(A)} \begin{pmatrix} \rho_A & 0 \\ 0 & \rho_A \\ 0 & 0 \\ \dots\dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1_{2 \times 2} + \epsilon^{(A)})$$

$$r_M^1 \sigma_M = \frac{-\rho_1 \rho_2}{|r^3|^2} r_M^3 \sigma_M (P_{12} - P_{12}^\dagger),$$

$$r_M^2 \sigma_M = \frac{-i \rho_1 \rho_2}{|r^3|^2} r_M^3 \sigma_M (P_{12} + P_{12}^\dagger),$$

$$\epsilon^{(1)} = \frac{-\rho_2^2}{4|r^3|^2} [P_{12}, P_{12}^\dagger], \quad \epsilon^{(2)} = \frac{\rho_1^2}{4|r^3|^2} [P_{12}, P_{12}^\dagger]$$

$$P_{12} \equiv \mathbf{P} [(U^{(1)})^\dagger U^{(2)}]$$

P: 左上の2 x 2 を抜き出す射影

フレーバーにユニバーサルな斥力芯

2) A_0 を積分 $A_0 = A_0^0 1_{2 \times 2} + A_0^a \tau^a$

$$S_{A_0} = \frac{\lambda N_c M_{\text{KK}}}{54\pi} \int dt \left[2(A_0^a)^2 (r_M^b)^2 - 2(A_0^a r_M^b)^2 \right. \\ + ((A_0^0)^2 + A_0^a)^2 (|w^{A=1}|^2 + |w^{A=2}|^2) \\ + 2A_0^0 A_0^1 (w^{A=1} \bar{w}^{A=2} + w^{A=2} \bar{w}^{A=1}) \\ - 2i A_0^0 A_0^2 (w^{A=1} \bar{w}^{A=2} - w^{A=2} \bar{w}^{A=1}) \\ \left. + 2A_0^0 A_0^3 (|w^{A=1}|^2 - |w^{A=2}|^2) + \frac{108\pi}{\lambda M_{\text{KK}}} A_0^0 \right].$$

3) A_0 を積分した作用にD-termの解を代入し、
ラージ r^3_M の展開初項をとってみると

$$V_{2\text{-body}} = \frac{27\pi N_c}{4\lambda M_{\text{KK}}} \frac{1}{|\vec{r}|^2} \left(|\text{tr} P_{12}|^2 + |\text{tr} [\vec{\hat{r}} \cdot \vec{\tau} P_{12}]|^2 \right) \\ P_{12} \equiv \mathbf{P} [(U^{(1)})^\dagger U^{(2)}]$$

$1/r^2$ 斥力芯 (フレーバーにユニバーサル)

フレーバー シングレット の特殊性: 斥力芯の消失

得られたバリオン間ポテンシャルは状態に強く依存している。

フレーバーシングレットなコンビネーションの場合

$$\psi(U^{(1)}, U^{(2)}) = \text{tr}[(U^{(1)})^\dagger U^{(2)}]$$

理由1) フレーバー回転: $U^{(1)} \mapsto GU^{(1)} \quad U^{(2)} \mapsto GU^{(2)}$

理由2) 核子の波動関数は U

この波動関数で、ポテンシャルの期待値をとる。

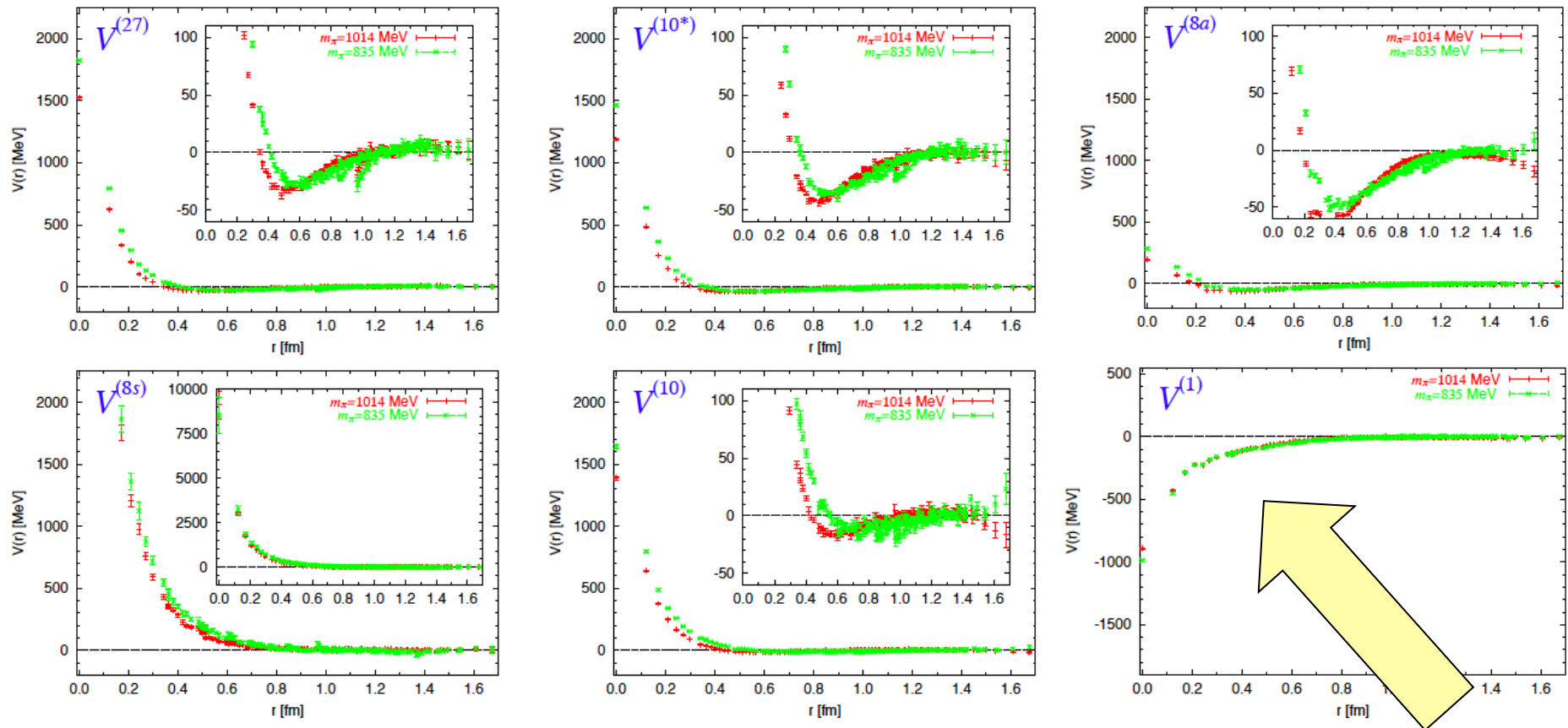
$$V_{2\text{-body}} = \frac{27\pi N_c}{4\lambda M_{\text{KK}}} \frac{1}{|\vec{r}|^2} \left(|\text{tr} P_{12}|^2 + |\text{tr} [\vec{r} \cdot \vec{\tau} P_{12}]|^2 \right)$$

$$P_{12} \equiv \text{P} [(U^{(1)})^\dagger U^{(2)}] \quad \text{P: 左上の} 2 \times 2 \text{ を抜き出す射影}$$

特に、 $N_f \rightarrow \infty$ で、 $1/N_f^2$ のように斥力芯が消える

議論: $N_f = N_c = 3$

$N_f = N_c = 3$ (ストレンジネスの入ったハイペロン系)は
 $N_f \rightarrow \infty, \quad N_c \rightarrow \infty$ とも近似できる?



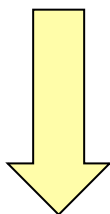
話の流れ

1. バリオン多体系のための行列 4ページ
2. バリオン数1:スペクトル 2ページ
3. バリオン数2:ポテンシャル 4ページ

素粒子と原子核をつなぐ



クォーク・グルーオン



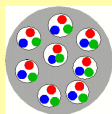
格子QCD



核子(ハドロン)



原子核物理



原子核

AdS/CFT
(超弦理論)

