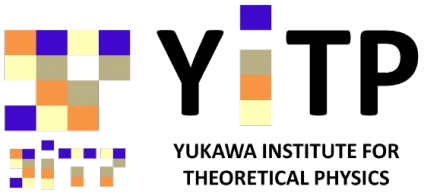
3次元超対称ゲージ理論の局所化

と行列模型



細道和夫（基研）

2012年2月20日, 立教大学

@研究会「行列模型とその周辺」

3次元球面上のSUSYゲージ理論

の物理量が**行列模型**で計算できる。

-- Kapustin-Willett-Yaakov ('09) によって始められる

* cf) Sen('87,'90), Romelsberger('05) : 4D theories on $\mathbb{R}\times S^3$

-- 任意の N=2 SUSY 理論に一般化

Jafferis('10), Hama-KH-Lee('10)

-- 丸くない球面へ拡張

Hama-KH-Lee('11), Imamura-Yokoyama('11)

工程

1. Killing Spinor 方程式を調べる
2. ラグランジアンと変換則を求める
3. 局所化原理をつかって厳密な経路積分

曲がった空間上の Rigid SUSY

. . .**Killing Spinor (KS)** に対応する

$$D_\mu \varepsilon \equiv \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\Gamma_{ab}\omega_\mu^{ab}\right)\varepsilon = \Gamma_\mu \tilde{\varepsilon} \quad \text{for some } \tilde{\varepsilon}$$

まるい 3-球面上には４つのKSがある。 $D_\mu \varepsilon = \pm \frac{i}{2}\Gamma_\mu \varepsilon$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^4$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mu^1\mu^1 + \mu^2\mu^2 + \mu^3\mu^3$$

$\mu^a = e^a_m \mathrm{d}\xi^m$: 左不変 1形式

$R^a = e^{am}\partial_{\xi^m} = 2iJ^a$: SU(2)右 の生成子

KS方程式には拡張がある。

例１：楕円体　$S_b^3 \ : \ b^2(x_0^2+x_1^2)+b^{-2}(x_2^2+x_3^2)=1$

適当なゲージ場（V_μ）を入れてKS方程式を拡張

$$D_\mu \varepsilon^{\pm} \equiv \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\Gamma_{ab}\omega_\mu^{ab} \mp iV_\mu\right)\varepsilon^{\pm} = \Gamma_\mu \tilde{\varepsilon}^{\pm}$$

すると、初めて解がある。

KS方程式には拡張がある。

例２：Squashed ３球面 (Imamura-Yokoyama '11)

$$ds^2 = \mu^1\mu^1 + \mu^2\mu^2 + s^2\,\mu^3\mu^3 \quad (s<1)$$

適当なベクトル場（V_m）をいれてKS方程式を拡張

$$\left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\Gamma_{ab}\omega_\mu^{ab}\right)\varepsilon^{\pm} = -\frac{is}{2}\Gamma_\mu\varepsilon^{\pm} \pm tV^\nu\Gamma_{\mu\nu}\varepsilon^{\pm}$$

$$\left(t\equiv\sqrt{1-s^2}\right)$$

$$b\equiv s+it \quad (|b|=1)$$

すると、解がある。

その他の拡張の方法？

「めのこ」でKS方程式を拡張した場合、
その解を用いてSUSY理論が構成できるかわからない。

超重力理論を用いて一般的議論ができる。
(Festuccia-Seiberg '11)

KS 方程式 Gravitino のSUSY変換が零になるべし

3D N=2 SUSY理論

multiplets:	“gauge”	“matter”
ラベル	G Lie algebra	R Rep of G q U(1) R-charge
場	σ real scalar λ spinor A_μ vector D aux. scalar	ϕ complex scalar ψ spinor F aux. scalar

変換則, ラグランジアン

$\mathbb{R}^3$ 上の表式を Noether手続きで補正して決まる

Vector multiplet:

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -\tfrac{i}{2}(\bar\epsilon\gamma_\mu\lambda - \bar\lambda\gamma_\mu\epsilon), \\
\delta\sigma &= \tfrac{1}{2}(\bar\epsilon\lambda - \bar\lambda\epsilon), \\
\delta\lambda &= \tfrac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\epsilon F_{\mu\nu} - D\epsilon + i\gamma^\mu\epsilon D_\mu\sigma + \tfrac{2i}{3}\sigma\gamma^\mu D_\mu\epsilon, \\
\delta\bar\lambda &= \tfrac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\bar\epsilon F_{\mu\nu} + D\bar\epsilon - i\gamma^\mu\bar\epsilon D_\mu\sigma - \tfrac{2i}{3}\sigma\gamma^\mu D_\mu\bar\epsilon, \\
\delta D &= -\tfrac{i}{2}\bar\epsilon\gamma^\mu D_\mu\lambda - \tfrac{i}{2}D_\mu\bar\lambda\gamma^\mu\epsilon + \tfrac{i}{2}[\bar\epsilon\lambda,\sigma] + \tfrac{i}{2}[\bar\lambda\epsilon,\sigma] \\
&\quad -\tfrac{i}{6}(D_\mu\bar\epsilon\gamma^\mu\lambda + \bar\lambda\gamma^\mu D_\mu\epsilon).
\end{aligned}
$$

Chiral multiplet of U(1) R-charge q :

$$
\begin{aligned}
\delta\phi &= \bar\epsilon\psi, \\
\delta\psi &= i\gamma^\mu\epsilon D_\mu\phi + i\epsilon\sigma\phi + \tfrac{2qi}{3}\gamma^\mu D_\mu\epsilon\phi + \bar\epsilon F, \\
\delta F &= \epsilon(i\gamma^\mu D_\mu\psi - i\sigma\psi - i\lambda\phi) + \tfrac{i}{3}(2q-1)D_\mu\epsilon\gamma^\mu\psi.
\end{aligned}
$$

ラグランジアン

CS term:

$$\mathcal{L}_{\rm CS} = \frac{1}{4\pi i}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}(A_\mu\partial_\nu A_\lambda - \frac{2i}{3}A_\mu A_\nu A_\lambda) - \bar{\lambda}\lambda + 2D\sigma\right].$$

YM term:

$$\mathcal{L}_{\rm YM} = \mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\sigma D^\mu\sigma + \frac{1}{2}(D + \frac{\sigma}{\ell})^2 + \frac{i}{2}\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda + \frac{i}{2}\bar{\lambda}[\sigma,\lambda] - \frac{1}{4\ell}\bar{\lambda}\lambda\Big).$$

Matter kinetic term:

$$\mathcal{L}_{\rm mat} = D_\mu\bar{\phi}D^\mu\phi + \bar{\phi}\sigma^2\phi + \frac{i(2q-1)}{\ell}\bar{\phi}\sigma\phi + \frac{q(2-q)}{\ell^2}\bar{\phi}\phi + i\bar{\phi}D\phi + \bar{F}F - i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi + i\bar{\psi}\sigma\psi - \frac{(2q-1)}{2\ell}\bar{\psi}\psi + i\bar{\psi}\lambda\phi - i\bar{\phi}\bar{\lambda}\psi.$$

その他の不変量: FI term, Superpotential, real mass term.

注意:

1. $\mathcal{L}_{\rm YM}$ と $\mathcal{L}_{\rm mat}$ ($q \neq 1/2$ の場合)は
   $D_m\varepsilon = +\frac{i}{2\ell}\gamma_m\varepsilon$ のSUSYでのみ不変

2. $\mathcal{L}_{\rm YM}$ と $\mathcal{L}_{\rm mat}$ は SUSY exact.

$$\bar{\epsilon}\epsilon\cdot\mathcal{L}_{\rm YM} = \delta_{\bar{\epsilon}}\delta_{\epsilon}{\rm Tr}\left(\frac{1}{2}\bar{\lambda}\lambda - 2D\sigma\right),$$

$$\bar{\epsilon}\epsilon\cdot\mathcal{L}_{\rm mat} = \delta_{\bar{\epsilon}}\delta_{\epsilon}\left(\bar{\psi}\psi - 2i\bar{\phi}\sigma\phi + \frac{2(q-1)}{\ell}\bar{\phi}\phi\right).$$

3. matter 場の変換則、ラグランジアンに q 依存性が入る。

SUSY局所化原理

SUSYのある（経路）積分への非零の寄与は
次を満たす「固定点」に局所化する。

$$\delta_{\mathrm{SUSY}}\Psi = 0 \quad \text{for all fields} \quad \Psi .$$

3次元球面上の $\mathcal{N}=2$ SUSY 理論の固定点では特に,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = \delta_{\mathrm{SUSY}}(\text{some fermion}) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad D_\mu \sigma = F_{\mu\nu} = D + \frac{\sigma}{l} = 0$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mat}} = \delta_{\mathrm{SUSY}}(\text{some fermion}) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \phi = F = 0$$

$$\int D(\text{fields}) e^{-S} \quad \Rightarrow \quad \int d\sigma_0 (\cdots)$$

Path integral **Matrix integral**

σ_0 （＝固定点集合の座標）以外の積分は

ガウス近似がexact.

これは、作用を SUSY-exact な量でずらしても

分配関数の値が変わらないことによる。

$$S \;\rightarrow\; S + t\,\delta_{\mathrm{SUSY}} V \quad \left(\text{s.t.}\;\; \delta^2_{\mathrm{SUSY}} V = 0\right)$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$ と $\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}$ はどちらもこのタイプ。

＊ 分配関数はYM結合定数によらない。

行列積分公式

$$Z = \int [d\sigma_0] \exp\left(-S_{\rm cl}\right) \times \left(\frac{{\rm Det}\Delta_F}{{\rm Det}\Delta_B}\right)$$

* $[d\sigma_0]$: Lie代数上の積分

（対称性を用いて Cartan部分代数まで帰着できる）

* ${\rm Det}\Delta_{B,F}$: “1-loop行列式”

* Δ_B, Δ_F : $\mathcal{L}_{\rm YM}$, $\mathcal{L}_{\rm mat}$ の２次近似から読み取れる波動演算子

N=2 SQED の例： chiral multiplet (ϕ, ψ) の波動演算子は

$$\Delta_\phi = \frac{1}{\ell^2}\left\{4J^aJ^a - (q - i\ell\sigma)(q-2-i\ell\sigma)\right\},$$

$$\Delta_\psi = \frac{1}{\ell}\left\{4J^aS^a + i\ell\sigma + 2 - q\right\}. \qquad J^a, S^a : \text{SU(2) generators}$$

楕円体上の分配関数: (Hama-KH-Lee '11)

$$Z_{S^3_b} = \frac{1}{|\mathrm{Weyl(G)}|}\int \prod_{i=1}^{\mathrm{rank}G} \mathrm{d}\sigma_i \cdot \Delta_{\mathrm{gauge}}(\sigma)\Delta_{\mathrm{mat}}(\sigma)\cdot e^{-S_{\mathrm{cl}}}$$

$$\Delta_{\mathrm{gauge}}(\sigma) = \prod_{\alpha\in\Delta_+} \sinh(b\pi\alpha\cdot\sigma)\sinh(b^{-1}\pi\alpha\cdot\sigma)$$

$$\Delta_{\mathrm{mat}}(\sigma) = \prod_{\rho:\text{weights of } R} s_b\left(\frac{iQ}{2}(1-q)-\rho\cdot\sigma\right)$$

[double-sine function]

$$s_b(x) = \prod_{m,n\geq 0}\frac{mb+nb^{-1}+\frac{Q}{2}-ix}{mb+nb^{-1}+\frac{Q}{2}+ix}, \quad Q\equiv b+b^{-1}$$

応用

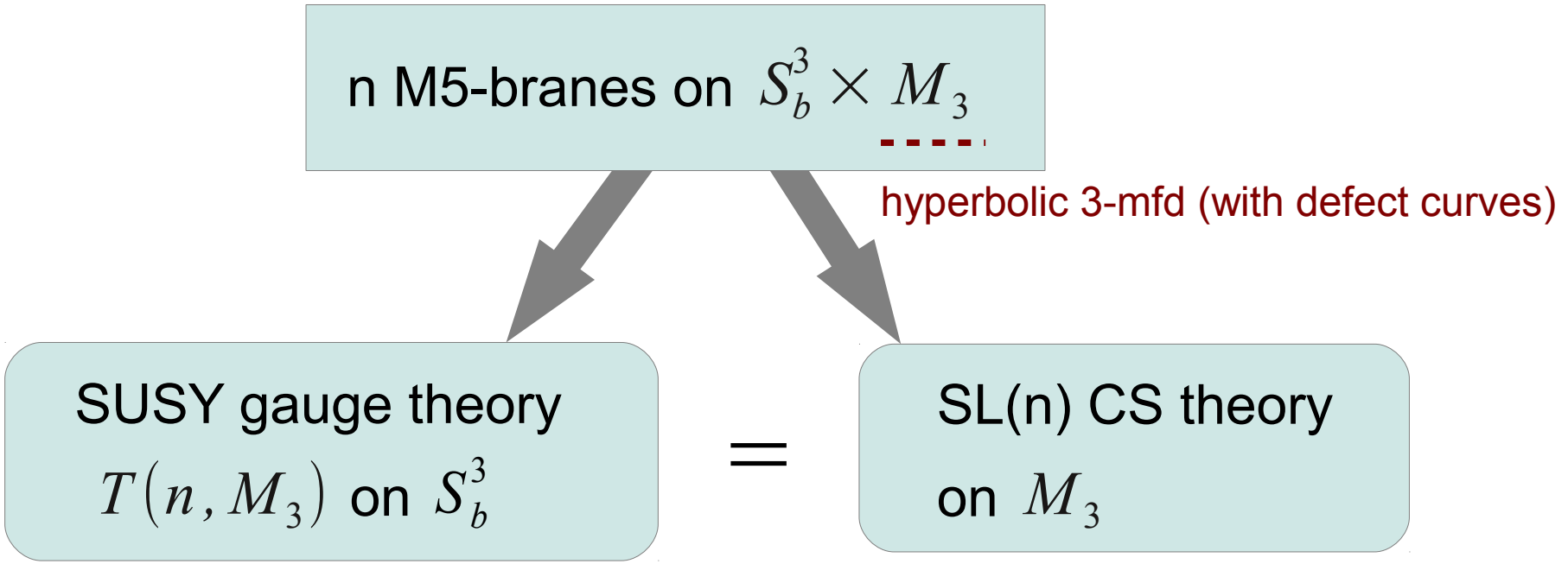
* M5-brane (6=3+3)

* M2-branes (ABJM模型など)

6=3+3への応用 (Dimofte-Gaiotto-Gukov, Cecotti-Cordova-Vafa)

3D N=2 SUSY ゲージ理論の S_b^3 分配関数

= SL(n) Chern-Simons理論の経路積分



ABJ(M)模型への応用

$U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k}$ Chern-Simons理論

with * chirals $X_1, X_2 : \ (N_1, \bar{N}_2)$

$Y_1, Y_2 : \ (\bar{N}_1, N_2)$

* 4次のsuperpotential

$N_1 = N_2 = N$ のとき、$C^4/\mathbb{Z}_k$ 上の N枚の M2-brane の理論

行列積分公式をつかって分配関数を計算

注意

* N=3 以上のSUSYのとき、物質場はhypermultiplet をなす。
（＝反対電荷の chiral multiplet の対、$q = 1/2$)

* hypermultiplet の球面上の行列式は簡単。

$$s_b(\tfrac{iQ}{2}(1-q)-\sigma)s_b(\tfrac{iQ}{2}(1-q)+\sigma)\Big|_{b=1,q=1/2}$$

$$= \frac{1}{2\cosh \pi\sigma}$$

球面上の分配関数 (Drukker-Marino-Putrov '10)

$$Z_{\rm ABJ}(N_1, N_2, g_s \equiv \tfrac{2\pi i}{k})$$

$$= \frac{i^{-\frac{1}{2}(N_1^2 - N_2^2)}}{N_1! N_2!} \int \prod_{i=1}^{N_1} \frac{d\mu_i}{2\pi} \prod_{j=1}^{N_2} \frac{d\nu_j}{2\pi} \prod_{i<j}^{N_1} \left(2\sinh\frac{\mu_i - \mu_j}{2}\right)^2 \prod_{i<j}^{N_2} \left(2\sinh\frac{\nu_i - \nu_j}{2}\right)^2$$

$$\prod_{i=1}^{N_1}\prod_{j=1}^{N_2} \left(2\cosh\frac{\mu_i - \nu_j}{2}\right)^{-2} \exp\left[-\frac{1}{2g_s}\left(\sum_{i=1}^{N_1}\mu_i^2 - \sum_{i=1}^{N_2}\nu_i^2\right)\right]$$

Large-N 行列模型と思って固有値分布に基づく解析をすると
強結合相での自由エネルギーの
スケーリング則を再現できる。

$$F \simeq \frac{\sqrt{2}\pi}{3} k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{2}}$$

よくある質問

1. 分配関数の全体の規格化はどうするのか？
   M2-brane の自由エネルギーの計算に重要では？
   （Hさん）

2. CSレベルは量子補正でずれるのではなかったか？
   （Oさん）

1. 全体の規格化の問題

* chiral multiplet の1-loop行列式は規格化も込めて正しい。

２個の chiral 場 ϕ, ϕ'（R電荷 q, q' , U(1) ゲージ電荷 ± 1）の生じる行列式は

$$s_b(\tfrac{iQ}{2}(1-q)-\sigma)s_b(\tfrac{iQ}{2}(1-q')+\sigma)$$

$$=1 \quad (q+q'=2 \text{ のとき})$$

（F-term 変形で
脱落させられるので）

* Gauge multiplet の寄与の規格化は正しくない。

Pure bosonic CS理論の厳密な結果（Witten '89）と比較して決める。

CS理論の場合、G=U(N)

$$Z = C \int \prod_{i=1}^{N} d\sigma_i \prod_{i<j} \left(2 \sinh \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \right)^2 \cdot e^{i\pi k \sum_i \sigma_i^2}$$

Weylの分母公式で sinh を展開し、ガウス積分

$$= C \cdot (2\pi)^N N! i^{\frac{N^2}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi N(N^2-1)}{6k}} \cdot k^{-\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} 2 \sin^{N-j} \left(\frac{j\pi}{k} \right)$$

1!

Bosonic CS理論に内在する
位相不定性

Wittenの厳密公式
(bosonic **SU(N)k-N** CS)

2. CSレベル k への量子補正

. . . は、$\mathcal{N}=2$ SUSY 理論では**無し。**

$\mathcal{N}$-SUSY YM-CS 理論における1-loop補正

$$\mathcal{L} = k\mathcal{L}_{\rm CS}^{(\mathcal{N})} + \frac{1}{g^2}\mathcal{L}_{\rm YM}^{(\mathcal{N})}$$

(Kao-Lee-Lee '95)

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}=0 \qquad \delta k &= N \\
\mathcal{N}=1 \qquad \delta k &= N(1-\tfrac{1}{2}) \\
\mathcal{N}=2 \qquad \delta k &= N(1-\tfrac{2}{2}) \\
\mathcal{N}=3 \qquad \delta k &= N(1-\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

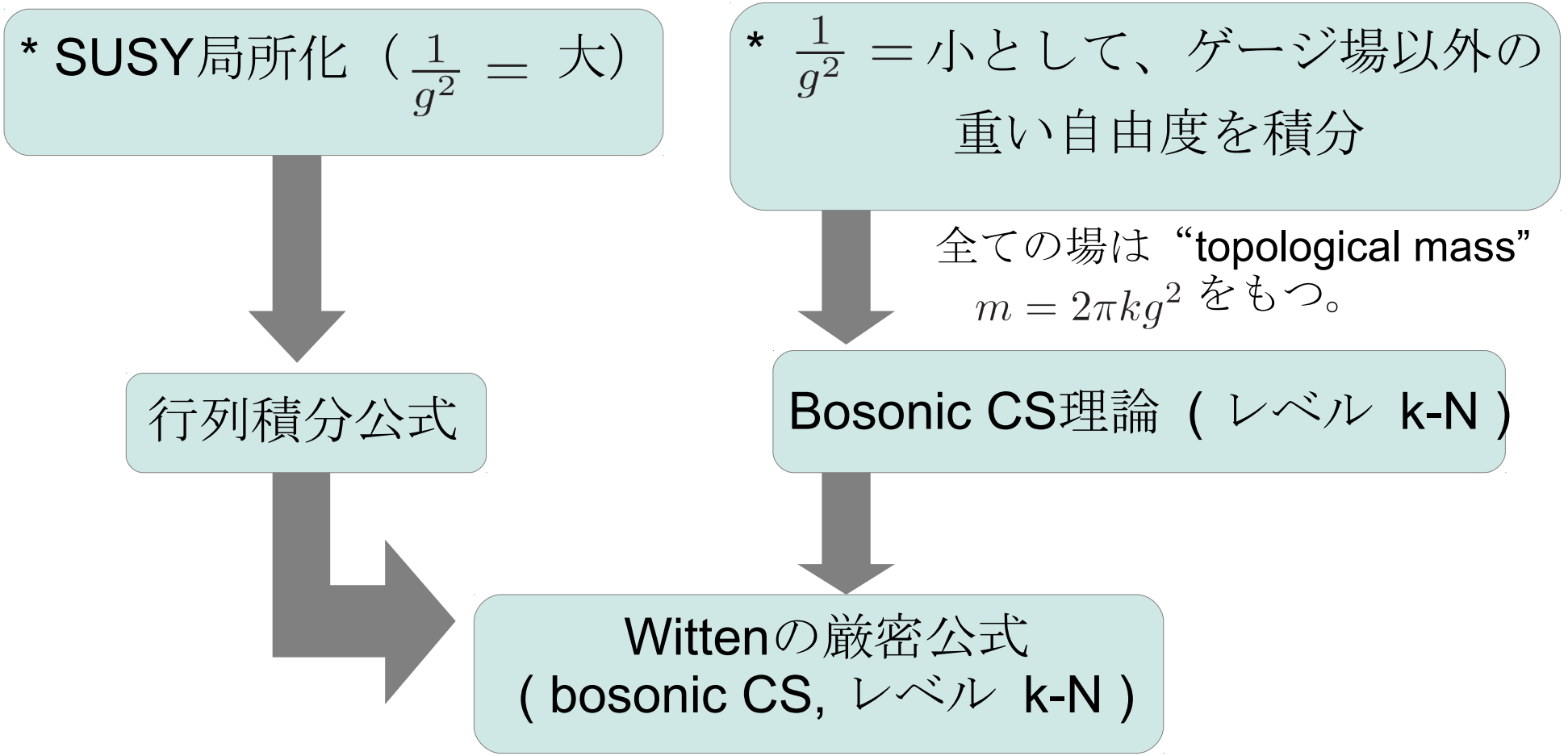
gauge boson

SO($\mathcal{N}$) singlet fermion

SO($\mathcal{N}$) $\mathcal{N}$-plet fermion

2. CSレベル k への量子補正

$\mathcal{N} = 2$ U(N) YM-CS理論の分配関数を２通りに計算できる。



結論

3次元球面上の N=2 超対称ゲージ理論の分配関数が

全体の規格化も含めて有限次元積分で書けている。