

行列模型とストークス現象

入江 広隆 (IRIE, Hirotaka)

国家理論科学研究中心(NCTS), 台湾

2012年2月21日 研究会「行列模型とその周辺」にて

この講演は

詹傳宗 (CHAN, Chuan-Tsung) (台湾, 東海大学)

葉啟賢 (YEH, Chi-Hsien) (国立台湾大学)

さん達との共同研究に基づく

目標：この研究で見たいこと

「非摂動的に完全な弦理論」の定義を知りたい

- 弦理論の「摂動的定式化」はよく知っている
- 非摂動論的定式化は幾つか提唱されている：
行列模型（構成的定式化）；弦の場の理論（第二量子化）
しかし、弦理論の真空構造について多くの問題が残っている：

巨大な弦理論のランドスケープをどう扱うか？
真の真空は？準安定真空は？どう遷移するのか？真空の寿命は？

- ストークス現象は、ボトムアップのアプローチ：

摂動的定式化から、「非摂動的に完全な弦理論」を再構成する

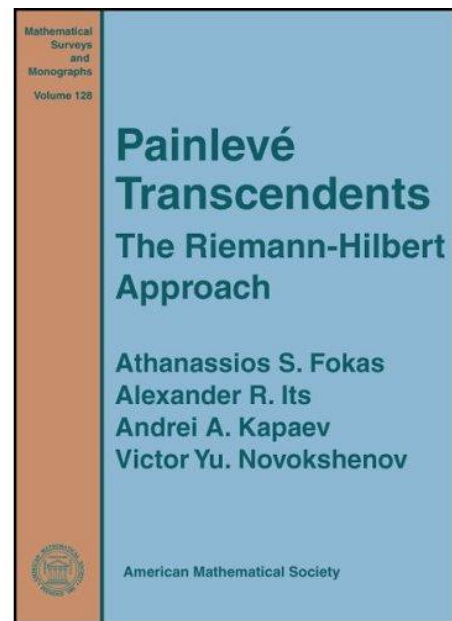
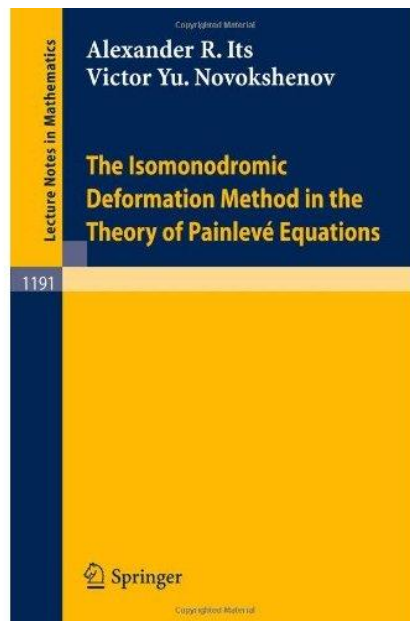
- この講演では、非臨界次元の弦理論、特に「多重カット行列模型」がこれらを定量的に調べるための良いトイモデルを与える事を見る。

目次

1. 何故、ストークス現象なのか？
 - a) 行列模型における「摂動的弦理論」と「その先」
 - b) ストークス現象で何が分かるのか？
2. ストークス現象とモノドロミー保存変形
 - a) ストークス現象入門 (エアリー関数)
 - b) 一般の線形常微分方程式(ODE)におけるストークス現象
3. 非臨界次元の弦理論におけるストークス現象
 - a) 「多重カット拘束条件」
 - b) 量子可積分系(T-systems)との関係
4. まとめと展望

参考文献

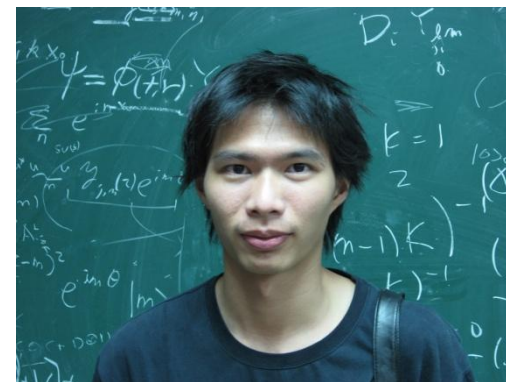
- 行列模型の文脈に、モノドロミー保存変形の議論を初めて導入
(特にエアリー関数、パンルヴェ関数)
[David '91,'93]; [Moore '91]; [Maldacena-Moore-Seiberg-Shih '05]
- モノドロミー保存変形とストークス現象、リーマンヒルベルトの方法
様々な発展についてのレビュー (特にパンルヴェ関数に関して):
[Its-Novokshenov '91]; [Fokas-Its-Kapaev-Novokshenov'06]



[FIKN]

参考文献

- 一般の $k \times k$ モノドロミー保存変形系で、一般のポアンカレ係数の時に、ストークス現象を行列模型との関係を使って解く
[Chan-HI-Yeh 2 '10] ; [Chan-HI-Yeh 3 '11];
[Chan-HI-Yeh 4 '12, in preparation]
- 多重カット行列模型におけるスペクトラル曲線
[Chan-HI-Shih-Yeh '09] ; [Chan-HI-Yeh 1 '10]



(S.-Y. Darren) Shih

[CIY]

[CISY]

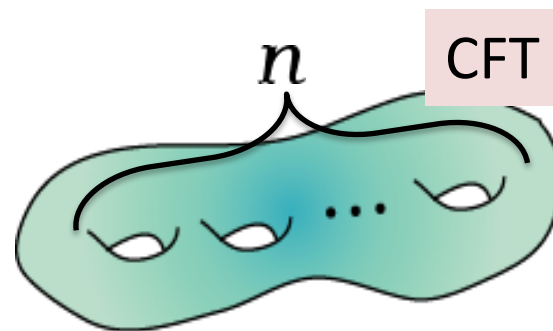
1. 何故、ストークス現象なのか？

Ref) Spectral curves in the multi-cut matrix models:
[CISY '09] [CIY1 '10]

行列模型における「摂動的弦理論」

摂動論的弦理論の定義

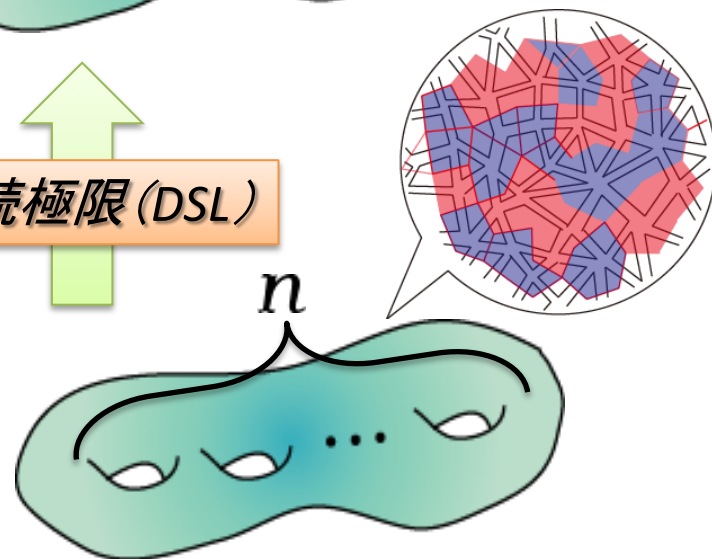
$$\mathcal{F} = \ln Z = \sum_{\substack{\text{possible WS} \\ (\text{genus: } n=0,1,\dots)}} g^{2n-2}$$



行列模型のラージN展開

$$Z_{MM} = \int_{N \times N \text{ matrices}} dM e^{-N \text{tr} V(M)}$$

$$\mathcal{F} = \ln Z_{MM} = \sum_{\substack{\text{Feynman Graph: } G \\ (\text{genus: } n=0,1,\dots)}} N^{2-2n}$$



三角形分割 (世界面重力の正則化)

[Kazakov-Migdal, Gross-Migdal, Douglas-Shenker]

ラージN展開 ⇔ 弦の摂動展開

$$g = N^{-1}$$

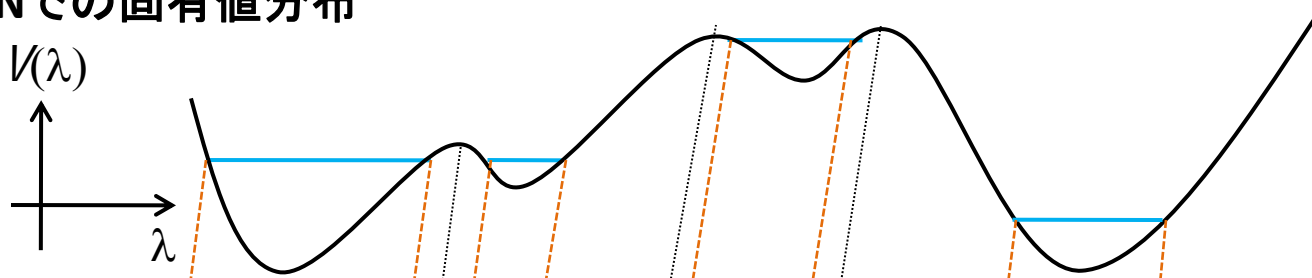
スペクトラル曲線 レゾルヴェント: $W(x) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \frac{1}{x - M} \right\rangle$

対角化 $U^\dagger M U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$

$$Z = \int dM e^{-N \text{tr} V(M)} \longrightarrow Z = \int d^N \lambda \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 e^{-N \sum_i V(\lambda_i)}$$

固有値のN体問題

ラージNでの固有値分布



レゾルヴェントから、固有値分布の情報を読み取れる。

$$W(x) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \frac{1}{x - M} \right\rangle = \int_{\text{cuts}} d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{x - \lambda}$$

固有値分布関数

スペクトラル曲線

$$W(x \pm i\epsilon) = \frac{V'(x)}{2} \mp \pi i \rho(x)$$

注: カットの場所 = 固有値が分布する場所

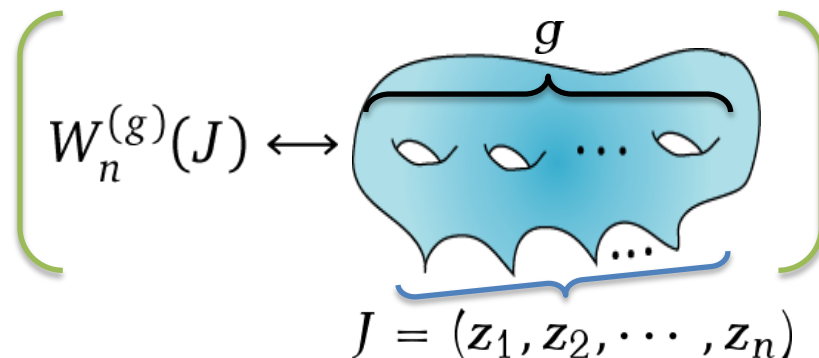
スペクトラル曲線

スペクトラル曲線 $\Leftrightarrow$ 摂動論的弦理論

摂動論におけるの物理量はレゾルベントから漸化的に解ける

$$W_n(z_1, z_2, \dots, z_n) \equiv \left\langle \prod_{j=1}^n \frac{1}{N} \text{tr} \frac{1}{z_j - X} \right\rangle_c$$

$$\simeq \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-n} W_n^{(g)}(z_1, \dots, z_n)$$



レゾルベントから漸化的に解ける(ループ方程式/Schwinger-Dyson方程式)

Topological Recursions [Eynard'04, Eynard-Orantin '07]

$$W_{n+1}^{(g)} = \sum_i \text{Res}_{z \rightarrow a_i} K(z_0, z) \left[W_{n+2}^{(g-1)}(z, \bar{z}, J) + \sum_{h=0}^g \sum_{I \subset J} W_{1+|I|}^{(h)}(z, I) W_{1+n-|I|}^{(g-h)}(\bar{z}, J \setminus I) \right]$$

Input: $W_1^{(0)}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} W_1(z)$, $\left[K(z_0, z) \sim W_2^{(0)}(z_0, z) \text{ : Bergman Kernel} \right]$

摂動物理量は全て、

スペクトラル曲線上の「幾何学的な量」として特徴づけられる

$$\mathcal{F}_{\text{pert}}(\mathcal{C}) = \ln \mathcal{Z}_{\text{pert}}(\mathcal{C}) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n-2} \mathcal{F}_n(\mathcal{C}) \quad (\mathcal{C} : \text{spectral curve})$$

スペクトラル曲線

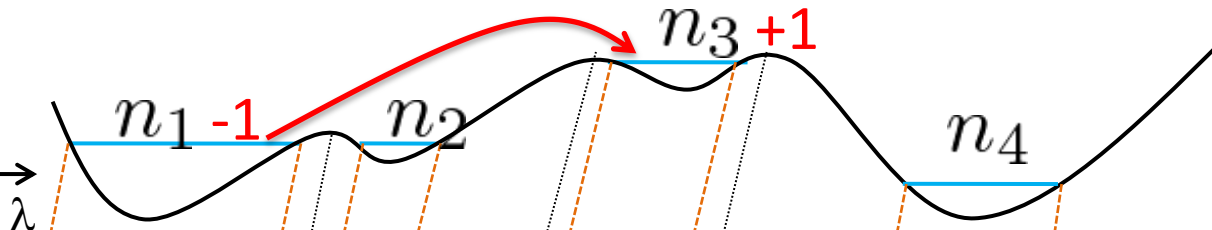
スペクトラル曲線 $\Leftrightarrow$ 摂動論的弦理論

非摂動的補正

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = N$$

ラージN展開

$V(\lambda)$



$$W(x) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \frac{1}{x - M} \right\rangle = \int_{\text{cuts}} d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{x - \lambda}$$

spectral curve

[David '91,'93]

非摂動的分配関数: [Bonnet-David-Eynard '00, Eynard '08, Eynard-Marino '08]

$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \sum_{n_1 + \dots + n_K = N} \underbrace{\theta_1^{n_1} \dots \theta_K^{n_K}}_{\text{固有値移動に関する相対重み}} e^{\mathcal{F}_{\text{pert}}(\mathcal{C}_{n_1}, \dots, \mathcal{C}_{n_K})}$$

固有値移動に関する相対重み

全ての固有値分布を足しあわせる

スペクトラル曲線

スペクトラル曲線 $\Leftrightarrow$ 摂動論的弦理論

非摂動的補正

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = N$$

[David'91,93];[Hanada-Hayakawa-Ishibashi-Kawai-Kuroki-Matsuo-Tada '04];[Kawai-Kuroki-Matsuo '04];[Sato-Tsuchiya '04];[Ishibashi-Yamaguchi '05];[Ishibashi-Kuroki-Yamaguchi '05];[Matsuo '05];[Kuroki-Sugino '06]...

$$W(x) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \frac{1}{x - M} \right\rangle = \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{1}{x - \lambda}$$

Dインスタントン化学ポテンシャル

$$\mathcal{F} = \ln \mathcal{Z} \simeq \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n-2} \mathcal{F}_n + \sum_I \theta_I \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} g^{2n+b_I-2} \mathcal{F}_n^{(I)} \right]$$

非摂動的分配関数: [Bonnet-David-Eynard '00, Eynard '08, Eynard-Marino '08]

$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \sum_{\underbrace{n_1 + \dots + n_K = N}} \underbrace{\theta_1^{n_1} \dots \theta_K^{n_K}}_{\text{固有値移動に関する相対重み}} e^{\mathcal{F}_{\text{pert}}(\mathcal{C}_{n_1}, \dots, \mathcal{C}_{n_K})}$$

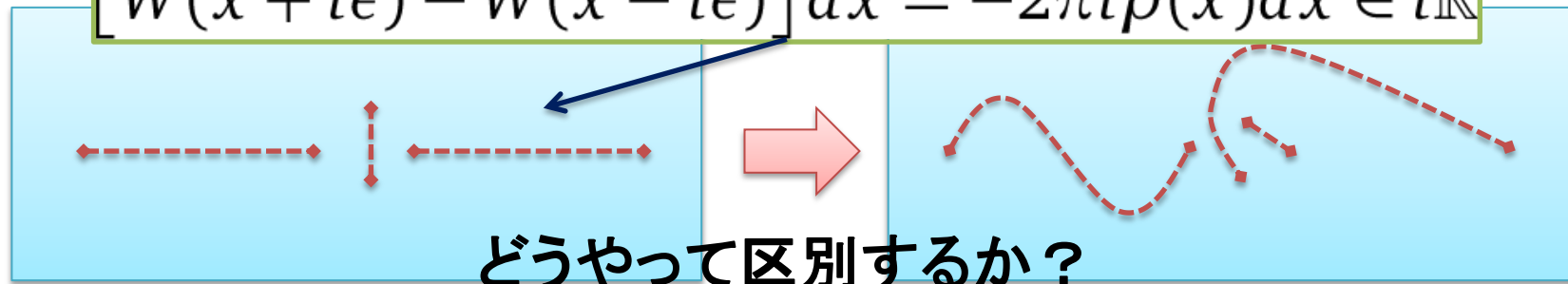
全ての固有値分布を足しあわせる

「重み」はスペクトラル曲線の「幾何学的な量」ではない！（むしろ解析的な量）

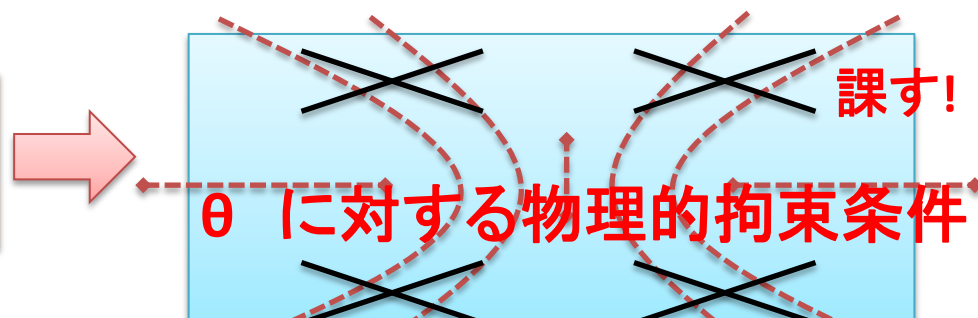
化学ポテンシャルのスペクトラル曲線上での特徴付けは？

固有値分布カットの位置の情報 [CIY 2 '10]

$$[W(x + i\epsilon) - W(x - i\epsilon)] dx = -2\pi i \rho(x) dx \in i\mathbb{R}$$



無限に長いカットを足しても
上の定義と矛盾しない！



後で

⇔ 量子可積分構造(T-systems)に化ける！

“物理的カット”を“**微分方程式**のストークス曲線”と定義

$$\text{Re}[\varphi(x) - \varphi'(x)] = 0 \quad (\Leftrightarrow \rho(x) dx \in \mathbb{R})$$

→ **ストークス現象!**

リーマンヒルベルトの方法(モノドロミー逆問題)から [FIKN]

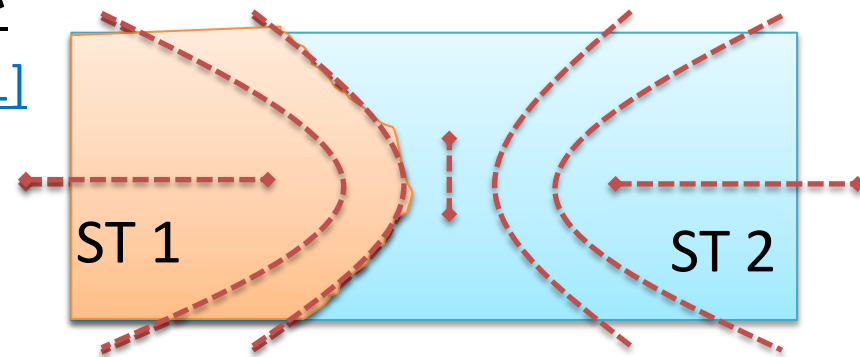
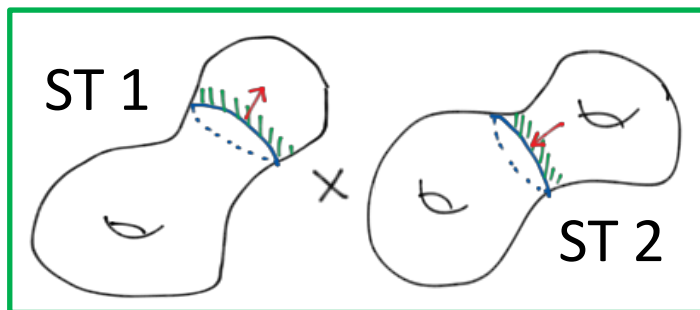
$$\vartheta_l \approx \text{ストークス係数 } s_{\{l, l, j\}}$$

どこが面白いのか？

多重カットにすると面白い [Crinkovic-Moore '91];[Fukuma-HI '06];[HI '09] !

1) 時空に異なる摂動論的弦理論達が
住む世界 [CIY 1 '10];[CIY 2 '10];[CIY 3 '11]

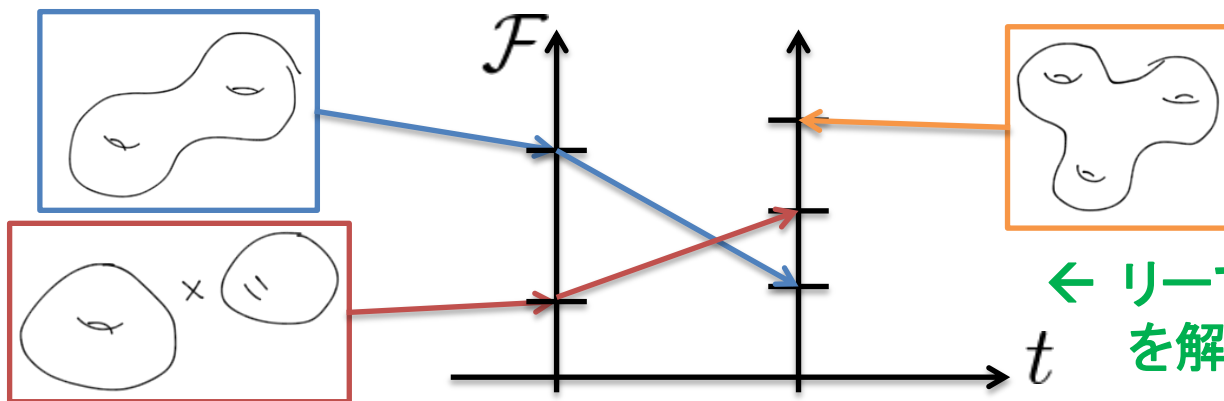
$$F(P, Q) = F_{\text{ST1}}(P, Q) \times F_{\text{ST2}}(P, Q) = 0$$



← スペクトル曲線(摂動論的弦理論)を
非摂動論的にくっつける！(今日のテーマ)

2) 様々な摂動論的真空を含む多様な弦理論ランドスケープ:

[CISY '09]; [CIY 2 '10]



← リーマンヒルベルトの方法
を解く ([FIKN] for PII, 2-cut)

弦理論の真空構造が**第一原理から、定量的に**調べられる!

2. ストークス現象と モノドロミー保存変形

Ref) Stokes phenomena and isomonodromy systems
[Moore '91] [FIKN'06] [CIY 2 '10]

行列模型における「線形常微分方程式系」 (FZZT-branes)

$$W(x) = \left\langle \frac{1}{N} \text{tr} \frac{1}{x - M} \right\rangle \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \psi(x) &= \langle \det(x - X) \rangle \\ &= \langle e^{\text{tr} \ln(x - X)} \rangle \end{aligned}$$

$$g \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow N \rightarrow \infty)$$

$$\psi(x) \sim e^{\frac{1}{g} \varphi(x)}, \quad \text{fixed } \exists x$$

$$\text{レゾルヴェント(スペクトラル曲線): } W(x) = \partial_x \varphi(x)$$

一般に、次の様な「**線形常微分方程式 (ODE)**」を満たす

$$g \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = \mathcal{Q}(x) \psi(x)$$

k-cut $\Leftrightarrow$ k x k matrix Q
[Fukuma-HI '06]; [CIY 2 '10]

簡単のため、次を仮定:

ポアンカレ係数 r

$$\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}_0 x^{r-1} + \mathcal{Q}_1 x^{r-2} + \cdots + \mathcal{Q}_{r-1}$$

$$\mathcal{Q}_0 = \Omega^{-r}, \quad \Omega = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{k-1})$$

エアリー関数のストークス現象

エアリー方程式 $\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta\right)\psi(\zeta) = 0$ $\psi(\zeta) = Ai(\zeta), Bi(\zeta)$

(cf: [猪木-川合, 量子力学II])

$$Bi(\zeta) = e^{\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{\frac{2}{3}\pi i} \zeta) + e^{-\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{-\frac{2}{3}\pi i} \zeta)$$

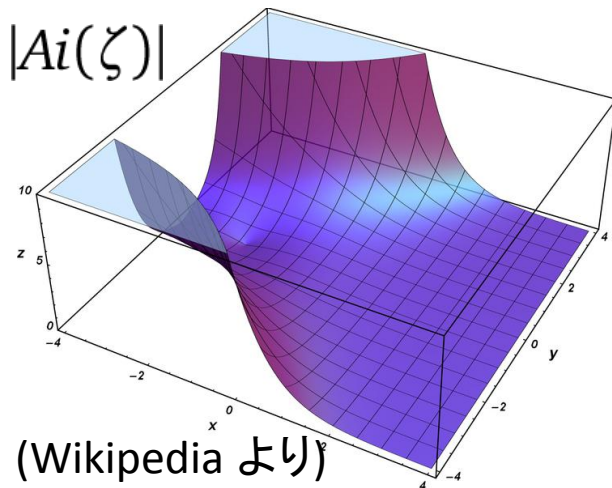
$$\zeta \rightarrow +\infty$$

$$Ai(\zeta) \simeq \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{6})\Gamma(n + \frac{5}{6})}{n!} \zeta^{-\frac{3}{2}n} + \mathcal{O}(e^{-*\zeta^*}) \right] \sim n!$$

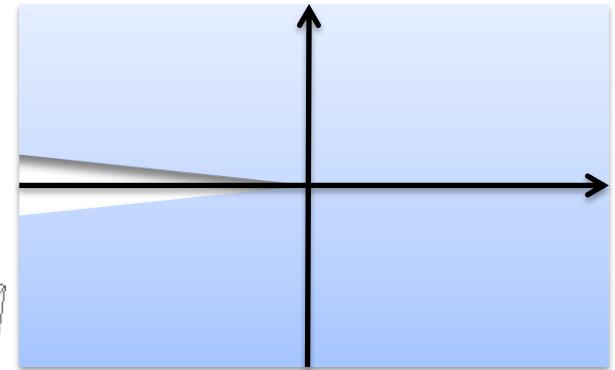
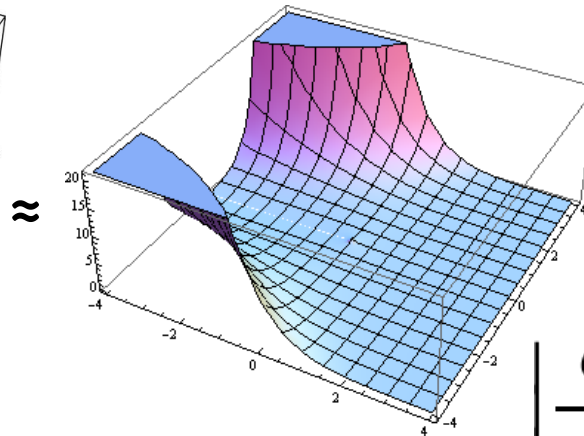
漸近展開!

この展開は次の領域で意味を持つ:

$$\zeta \rightarrow \infty, |\arg(\zeta)| < \pi$$



(Wikipedia より)



$$\left| \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \right|$$

エアリー関数のストークス現象

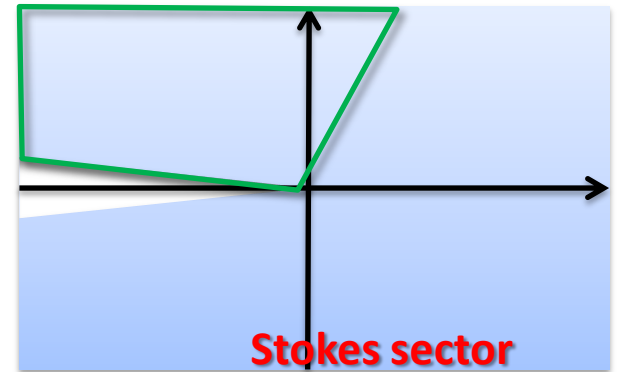
エアリー方程式 $\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta\right)\psi(\zeta) = 0 \quad \psi(\zeta) = Ai(\zeta), Bi(\zeta)$

$$\left[Bi(\zeta) = e^{\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{\frac{2}{3}\pi i} \zeta) + e^{-\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{-\frac{2}{3}\pi i} \zeta) \right]$$

$$\zeta \rightarrow +\infty$$

$$Ai(\zeta) \simeq \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots \right]$$

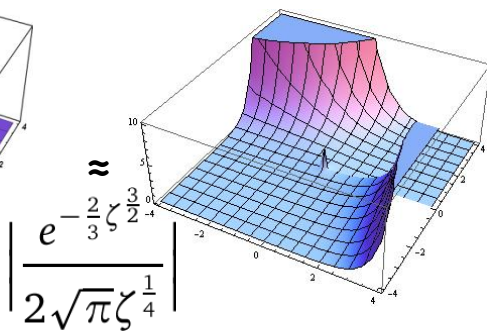
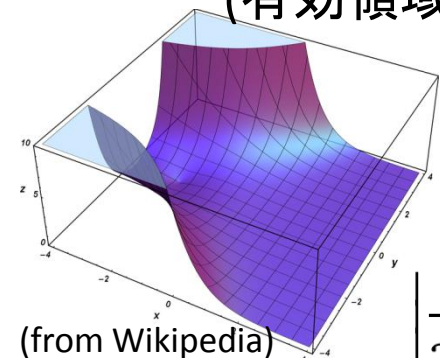
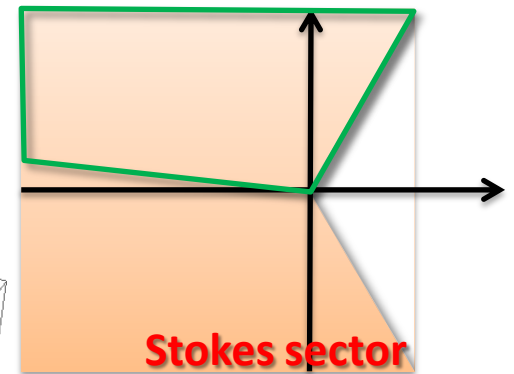
(有効領域: $\zeta \rightarrow \infty, |\arg(\zeta)| < \pi$)



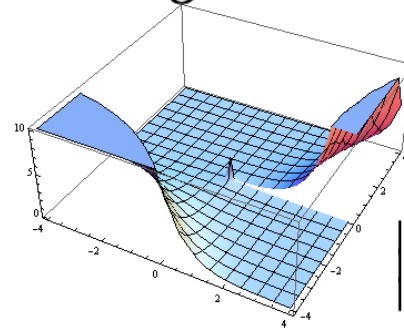
$$\zeta \rightarrow \infty \times e^{\pi i}$$

$$Ai(\zeta) \simeq \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots \right] + i \frac{e^{+\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots \right]$$

(有効領域: $\zeta \rightarrow \infty, |\pi - \arg(\zeta)| < \frac{2\pi}{3}$)



+



$$\left| \frac{e^{+\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \right|$$

エアリー関数のストークス現象

エアリー

1. 漸近展開は特定の角度領域しか使えない
(漸近展開有効領域 = ストークスセクター)
2. 異なるセクターの共通部分では、漸近展開は「一般に互いに異なる」が、違いは指数関数的に小さい。

$$\zeta \rightarrow +\infty$$

$$Ai(\zeta) \simeq \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots \right]$$

(有効領域: $\zeta \rightarrow \infty, |\arg(\zeta)| < \pi$)

$$\zeta \rightarrow \infty \times e^{\pi i}$$

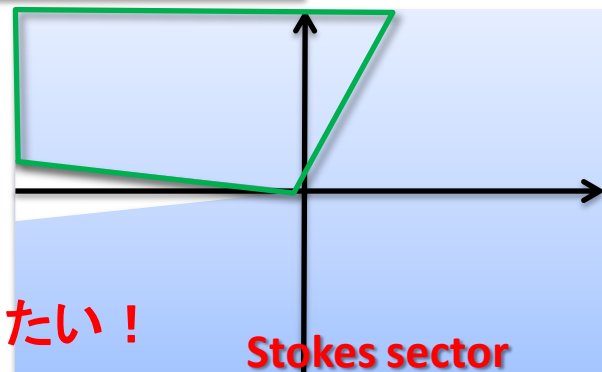
$$Ai(\zeta) \simeq \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots \right] - i \frac{e^{+\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots \right]$$

(有効領域: $\zeta \rightarrow \infty, |\pi - \arg(\zeta)| < \frac{2\pi}{3}$)

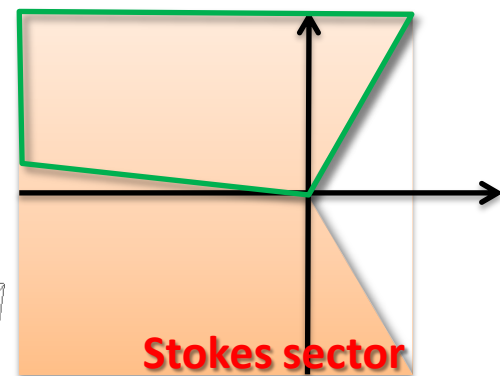
ストークス係数!

これが求めたい!

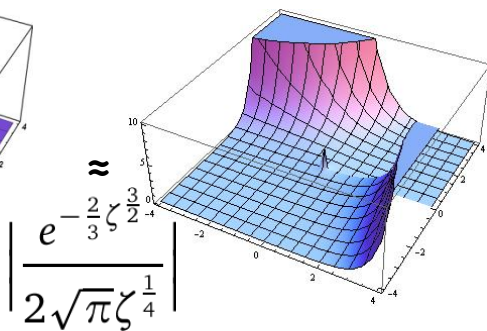
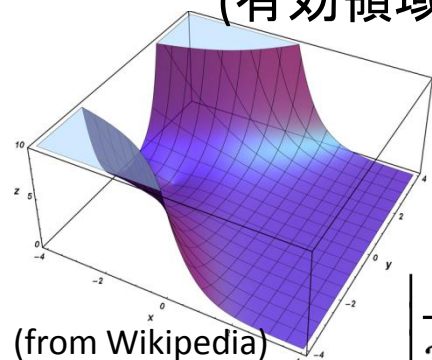
(相対的に) 指数関数的に小さい!



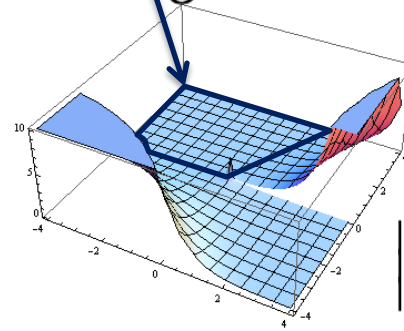
Stokes sector



Stokes sector



+



$$\left| \frac{e^{+\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \right|$$

$$\approx \left| \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \right|$$

(from Wikipedia)

エアリー関数のストークス現象

エアリー方程式 $\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta\right)\psi(\zeta) = 0 \quad \psi(\zeta) = Ai(\zeta), Bi(\zeta)$

$$Bi(\zeta) = e^{\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{\frac{2}{3}\pi i} \zeta) + e^{-\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{-\frac{2}{3}\pi i} \zeta)$$

$$\zeta \rightarrow +\infty$$

$$Ai(\zeta) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots\right]$$

(有効領域 $\zeta \rightarrow \infty, |\arg(\zeta)| < \pi$)

違う!

Keep using

Stokes sectors

$$\zeta \rightarrow \infty \times e^{\pi i}$$

$$Ai(\zeta) - i \left(e^{-\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{-\frac{2}{3}\pi i} \zeta) \right) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots\right]$$

(有効領域 $\zeta \rightarrow \infty, |\pi - \arg(\zeta)| < \frac{2\pi}{3}$)

Stokes sectors

一般の行列模型におけるODEのストークス現象

$$g \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = \mathcal{Q}(x) \psi(x)$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}_0 x^{r-1} + \mathcal{Q}_1 x^{r-2} + \cdots + \mathcal{Q}_{r-1} \\ \mathcal{Q}_0 = \Omega^{-\gamma}, \quad \Omega = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{k-1}) \end{array} \right)$$

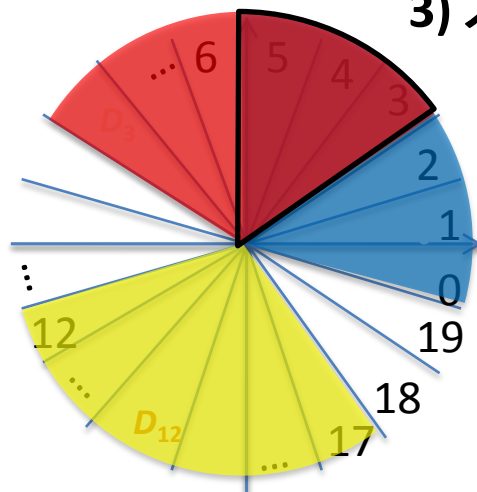
1) 漸近解の完全系を考える:

$$\psi(x) \simeq \psi_{\text{asym}}^{(j)}(x) = \chi^{(j)}(x) e^{\frac{1}{g} \varphi^{(j)}(x)} \left[1 + O(g) \right]$$

$(j = 1, 2, \cdots, k)$

以下、この部分は省略

2) ストークスセクター



3) ストークス現象

(相対的に指数関数的に小さい項を特定、
その項のストークス係数を決める)

一般の行列模型におけるODEのストークス現象

$$g \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = \mathcal{Q}(x) \psi(x)$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}_0 x^{r-1} + \mathcal{Q}_1 x^{r-2} + \cdots + \mathcal{Q}_{r-1} \\ \mathcal{Q}_0 = \Omega^{-\gamma}, \quad \Omega = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{k-1}) \end{array} \right)$$

1) 漸近解の完全系を考える:

$$\psi(x) \simeq \psi_{\text{asym}}^{(j)}(x) = \chi^{(j)}(x) e^{\frac{1}{g} \varphi^{(j)}(x)}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, k)$$

スペクトラル曲線
⇔ 摂動論的弦理論

$$\varphi^{(j)}(x) = \omega^{-\gamma(j-1)} \frac{x^r}{r} + \cdots$$

以下では、解の行列表示を使う:

$$\Psi_{\text{asym}}(x) \equiv (\psi_{\text{asym}}^{(1)}(x), \cdots, \psi_{\text{asym}}^{(k)}(x))$$

$$\left(= (\chi^{(1)}(x), \cdots, \chi^{(k)}(x)) \exp \left[\frac{1}{g} \varphi(x) \right] \right)$$

一般解の表示:

$$\psi_{\vec{C}}(x) \simeq \Psi_{\text{asym}}(x) \vec{C}$$

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{1}{g} \varphi^{(1)}(x)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\frac{1}{g} \varphi^{(k)}(x)} \end{pmatrix}$$

異なる弦理論における波動関数を非摂動論的に重ね合わせている!

一般の行列模型におけるODEのストークス現象

2) ストークスセクターとストークス行列

E.g.) $r=2$, 5×5 , $\gamma=2$ (Z_5 symmetric)

2	(4	5)	(1	3)	19
(4	2)	(1	5)	3	18
4	(1	2)	(3	5)	17
(1	4)	(3	2)	5	16
1	(3	4)	(5	2)	15
(3	1)	(5	4)	2	14
3	(5	1)	(2	4)	13
(5	3)	(2	1)	4	12
5	(2	3)	(4	1)	11
(2	5)	(4	3)	1	10
2	(4	5)	(1	3)	9
(4	2)	(1	5)	3	8
4	(1	2)	(3	5)	7
(1	4)	(3	2)	5	6
1	(3	4)	(5	2)	5
(3	1)	(5	4)	2	4
3	(5	1)	(2	4)	3
(5	3)	(2	1)	4	2
5	(2	3)	(4	1)	1
(2	5)	(4	3)	1	0

ストークスセクター

$$D_n \ (n = 0, 1, \dots, 2rk - 1)$$

$$\Psi_{12}(x) \simeq \Psi_{\text{asym}}(x)$$

$$\Psi_{\text{asym}}(x) = (\chi^{(1)}(x), \dots, \chi^{(k)}(x)) \exp \left[\frac{1}{g} \varphi(x) \right]$$

各ストークスセクターの標準解 (展開ではない厳密解)

$$\Psi_n(x) \simeq \Psi_{\text{asym}}(x) \ (x \rightarrow \infty \in D_n)$$

$$\Psi_3(x) \simeq \Psi_{\text{asym}}(x)$$

Keep using

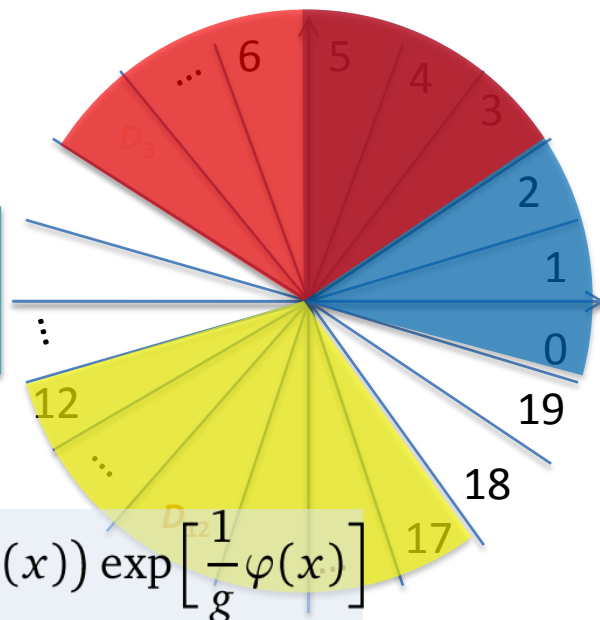
ストークス行列

$$\Psi_{n+1}(x) = \Psi_n(x) S_n$$

$$\Psi_0(x) \simeq \Psi_{\text{asym}}(x)$$

各漸近解の(指数関数的)大小関係を表す

$$|e^{\varphi^{(2)}}| < |e^{\varphi^{(5)}}| < |e^{\varphi^{(4)}}| < |e^{\varphi^{(3)}}| < |e^{\varphi^{(1)}}|$$



一般の行列模型におけるODEのストークス現象

3) ストークス係数をどう読むか？: 大小関係表から読める！ [CIY 2 '10]

E.g.) $r=2$, 5×5 , $\gamma=2$ (Z_5 symmetric)

$$\Psi_1(x) = \Psi_0(x) S_0$$

ストークス行列

$$\Psi_{n+1}(x) = \Psi_n(x) S_n$$

4	(1	2)	(3	5)	7
(1	4)	(3	2)	5)	6
1	(3	4)	(5	2)	5
(3	1)	(5	4)	2)	4
3	(5	1)	(2	4)	3
(5	3)	(2	1)	4)	2
5	(2	3)	(4	1)	1
(2	5)	(4	3)	1)	0

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Annotations: $s_{0,3,4}$ (orange circle), $s_{0,5,2}$ (blue circle). Arrows point from the table to these elements.

定理 [CIY2 '10]

$$\exists (i|j)_l \Leftrightarrow s_{l,j,i} : \text{ストークス係数}$$

ストークス係数 表

逆モノドロミー(リーマンヒルベルト) 問題 [FIKN]

順モノドロミー問題

$$g \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = \mathcal{Q}(x) \psi(x)$$

Given $\mathcal{Q}(x)$

WKB

Solve $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{2rk-1}$

Obtain

$$S_n = \Psi_{n+1}(x) \Psi_n(x)^{-1}$$

解析的問題

逆モノドロミー問題

無矛盾条件 (代数的問題)

Given: ストークス行列

$$\Psi_{n+1}(x) = \Psi_n(x) S_n$$

物理的条件を満たす、
特殊なストークス係数

$$\Psi_{\text{asym}}(x) = \mathcal{X}(x) \exp \left[\frac{1}{g} \varphi(x) \right]$$

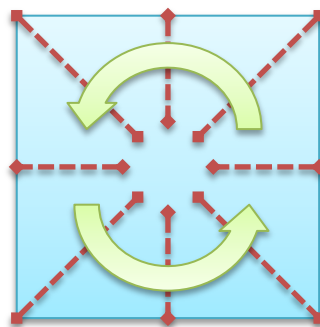
Obtain

$$\mathcal{Q}(x) = g \frac{\partial}{\partial x} \Psi_{\text{asym}}(x) \cdot \Psi_{\text{asym}}(x)^{-1}$$

ストークス行列の代数的問題

1. Z_k -対称性条件

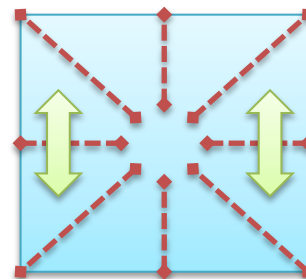
$$S_{n+2r} = \Gamma^{-1} S_n \Gamma$$



$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2. エルミート性条件

$$S_n^* = \Delta \Gamma S_{(2r-1)k-n}^{-1} \Delta \Gamma$$



$$\Delta = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \dots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

3. モノドロミー条件

一番難しい!

$$S_0 S_1 S_2 \cdots S_{2rk-1} = I_k$$

$$\left(\Psi_n(e^{2\pi i} x) = \Psi_n(x) \right)$$

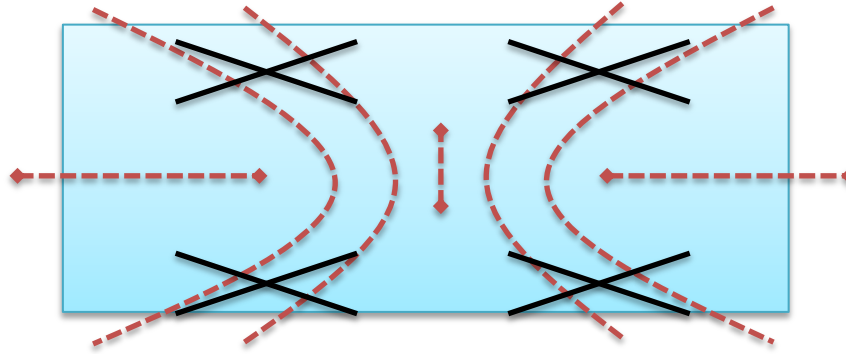
4. 物理的条件: 「多重カット条件」

一般の (k, r) の場合で、ストークス係数の具体的な表式が得られる

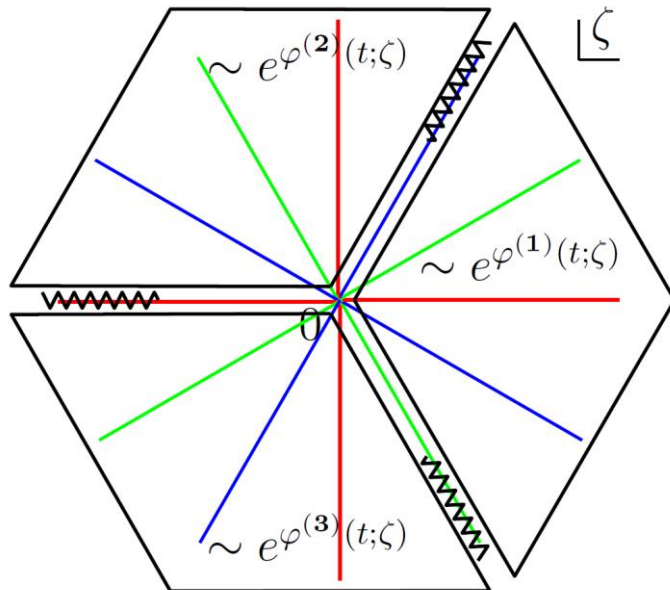
3. 非臨界次元の弦理論における ストークス現象

Ref) Stokes phenomena and quantum integrability
[CIY2 '10][CIY3 '11]

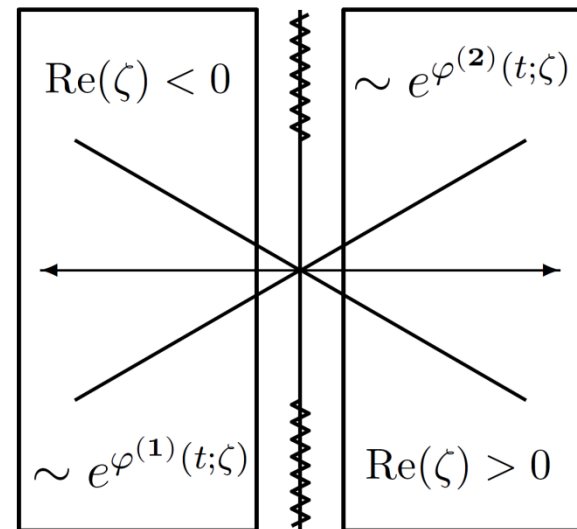
多重カット条件



3-cut case ($q=1$)



2-cut case ($q=2$: pureSUGRA)



エアリー関数におけるストークス現象

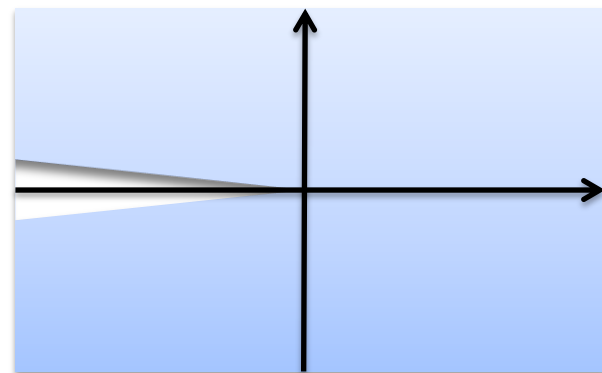
エアリー方程式 $\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - \zeta\right)\psi(\zeta) = 0$ $\psi(\zeta) = Ai(\zeta), Bi(\zeta)$

$$Bi(\zeta) = e^{\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{\frac{2}{3}\pi i} \zeta) + e^{-\frac{\pi}{6}i} Ai(e^{-\frac{2}{3}\pi i} \zeta)$$

$\zeta \rightarrow +\infty$

$$Ai(\zeta) \simeq \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots\right]$$

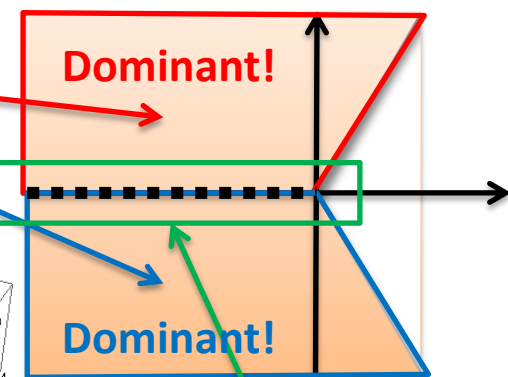
(有効領域: $\zeta \rightarrow \infty, |\arg(\zeta)| < \pi$)



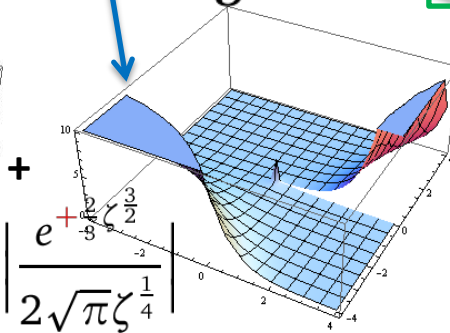
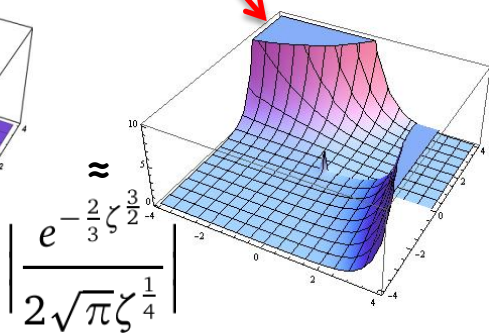
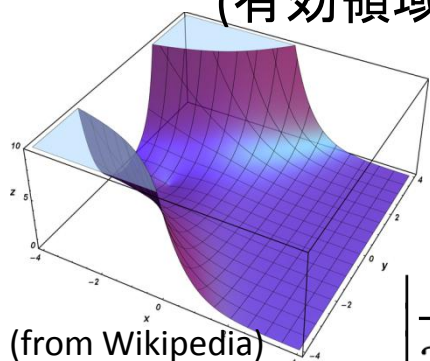
$\zeta \rightarrow \infty \times e^{\pi i}$

$$Ai(\zeta) \simeq \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots\right] + i \frac{e^{+\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots\right]$$

(有効領域: $\zeta \rightarrow \infty, |\pi - \arg(\zeta)| < \frac{2\pi}{3}$)



大小関係が変わる！
(ストークス曲線)



エアリー関数におけるストークス現象

エアリーの系 $\Leftrightarrow$ (2,1) トポロジカル ミニマル弦理論

$$Ai(x) = \langle \det(x - X) \rangle \sim e^{\frac{1}{g} \varphi(x)} \quad W(x) = \partial_x \varphi(x)$$

$$W(x \pm i\epsilon) = \mp \sqrt{x}$$

離散的な飛び $\Leftrightarrow$ 行列模型の固有値カット

物理的なカット = 大小関係が変わる曲線 (ストークス曲線) [MMSS '05]

$$\zeta \rightarrow \infty \times e^{\pi i}$$

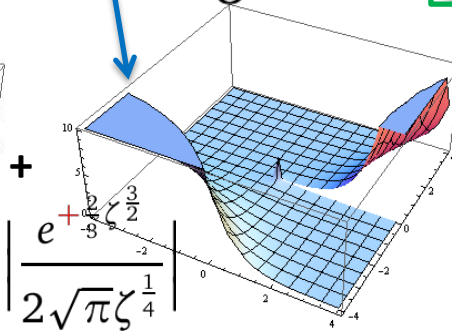
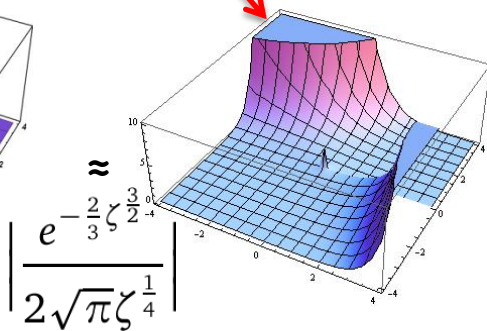
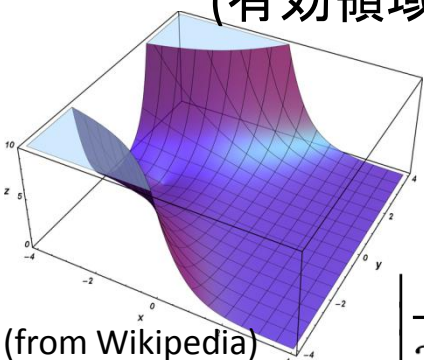
$$Ai(\zeta) \simeq \frac{e^{-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots \right] + i \frac{e^{+\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\zeta^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \dots \right]$$

(有効領域: $\zeta \rightarrow \infty, |\pi - \arg(\zeta)| < \frac{2\pi}{3}$)

Dominant!

Dominant!

大小関係が変わる!
(ストークス曲線)

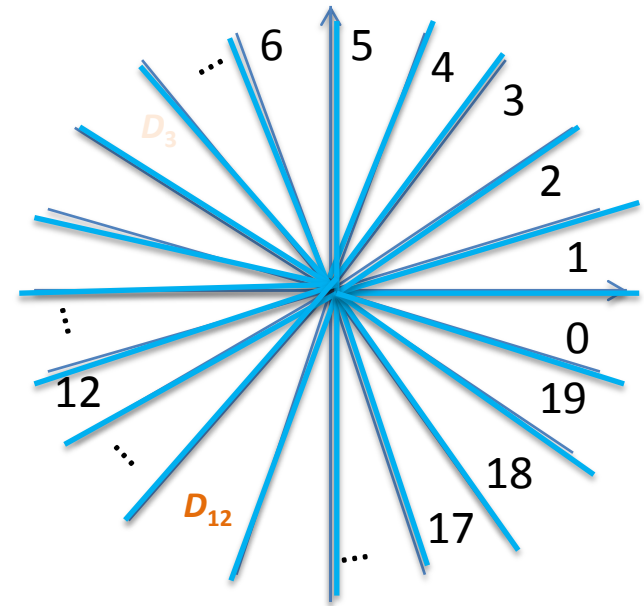


多重カット条件[CIY 2 '10]

E.g.) $r=2$, 5×5 , $\gamma=2$ (Z_5 symmetric)

2	(4	5)	(1	5)	19
(4	2)	(1	5)	3	18
4	(1	2)	(3	5)	17
(1	4)	(3	2)	5	:
1	(3	4)	(5	2)	:
(3	1)	(5	4)	2	:
3	(5	1)	(2	4)	:
(5	3)	(2	1)	4	12
5	(2	3)	(4	1)	:
(2	5)	(4	3)	1	:
2	(4	5)	(1	3)	:
(4	2)	(1	5)	3	8
4	(1	2)	(3	5)	7
(1	4)	(3	2)	5	6
1	(3	4)	(5	2)	5
(3	1)	(5	4)	2	4
3	(5	1)	(2	4)	3
(5	3)	(2	1)	4	2
5	(2	3)	(4	1)	1
(2	5)	(4	3)	1	0

D_0



$$\begin{aligned} \psi_C(x) &= \Psi_0 C^{(0)} = \Psi_1 C^{(1)} = \dots = \Psi_{2rk} C^{(2rk)} \\ &\simeq \psi_{\text{asy}}^{(1)} c_1^{(n)} + \psi_{\text{asy}}^{(2)} c_2^{(n)} + \psi_{\text{asy}}^{(3)} c_3^{(n)} + \psi_{\text{asy}}^{(4)} c_4^{(n)} + \psi_{\text{asy}}^{(5)} c_5^{(n)} \\ &\quad (x \rightarrow \infty \in D_n) \end{aligned}$$

水平な線は全てストークス曲線!

全ての線がカットに成りうる!

$$|e^{\varphi^{(2)}}| < |e^{\varphi^{(5)}}| < |e^{\varphi^{(4)}}| < |e^{\varphi^{(3)}}| < |e^{\varphi^{(1)}}|$$

多重カット条件[CIY 2 '10]

E.g.) $r=2, 5 \times 5, \gamma=2$ (Z_5 symmetric)

2	(4	5)	(1	3)	19
(4	2)	(1	5)	18	◆
4	(1	2)	(3	5)	7
(1	4)	(3	2)	5	→
1	(3	4)	(5	2)	◆
(3	1)	(5	4)	2	◆
3	(5	1)	(2	4)	→
(5	3)	(2	1)	4	12
5	(2	3)	(4	1)	→
(2	5)	(4	3)	1	→
2	(4	5)	(1	3)	→
(4	2)	(1	5)	3	→
4	(1	2)	(3	5)	→
(1	4)	(3	2)	5	→
1	(3	4)	(5	2)	→
(3	1)	(5	4)	2	→
3	(5	1)	(2	4)	→
(5	3)	(2	1)	4	→
5	(2	3)	(4	1)	→
(2	5)	(4	3)	1	→

特殊な“k”本の線を物理的なカットと選ぶ!

k-cut $\Leftrightarrow$ k x k matrix Q
[Fukuma-HI '06];[CIY 2 '10]

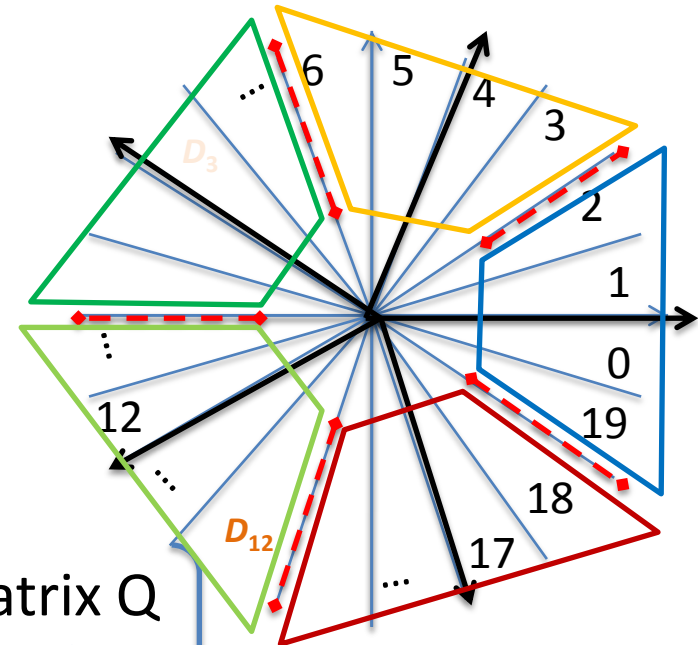
$$\psi_C(x) = \Psi_0 C^{(0)} = \Psi_1 C^{(1)} = \dots = \Psi_{2rk} C^{(2rk)}$$

$$\simeq \underbrace{\psi_{\text{asy}}^{(1)} c_1^{(0)}}_{\neq 0} + \underbrace{\psi_{\text{asy}}^{(2)} c_2^{(0)}}_{\neq 0} + \psi_{\text{asy}}^{(3)} c_3^{(0)} + \underbrace{\psi_{\text{asy}}^{(4)} c_4^{(0)}}_{=0} + \psi_{\text{asy}}^{(5)} c_5^{(0)}$$

($x \rightarrow \infty \in D_0$)

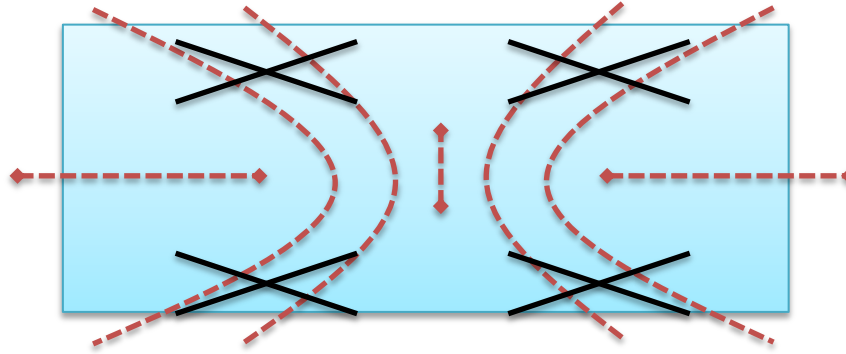
$$C^{(n)} = S_n C^{(n+1)}$$

S_n に拘束条件!

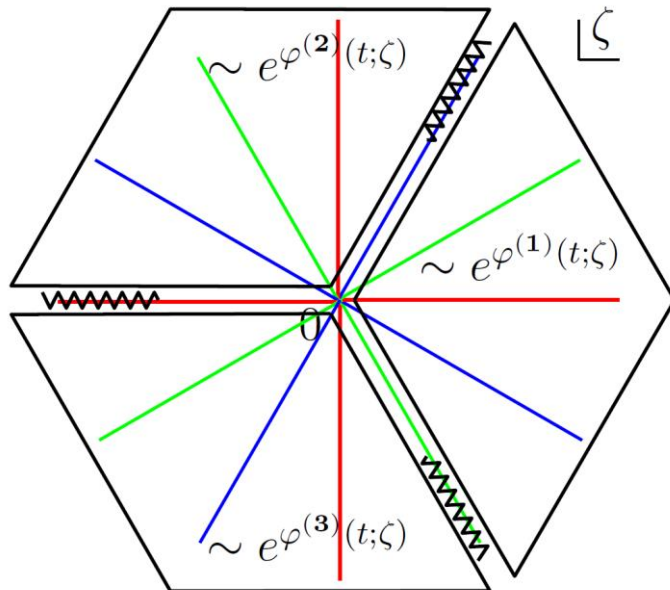


$$|e^{\varphi^{(2)}}| < |e^{\varphi^{(5)}}| < |e^{\varphi^{(4)}}| < |e^{\varphi^{(3)}}| < |e^{\varphi^{(1)}}|$$

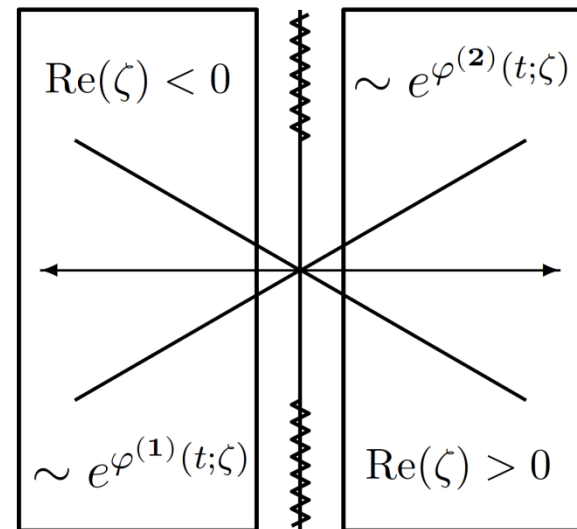
多重カット条件



3-cut case ($q=1$)



2-cut case ($q=2$: pureSUGRA)



ストークス係数を特定するには?

大小関係表を使う! [CIY 2 '10]

E.g.) $r=2$, 5×5 , $\gamma=2$ (Z_5 symmetric)

$$\Psi_1(x) = \Psi_0(x) S_0$$

4	(1	2)	(3	5)	7
(1	4)	(3	2)	5	6
1	(3	4)	(5	2)	5
(3	1)	(5	4)	2	4
3	(5	1)	(2	4)	3
(5	3)	(2	1)	4	2
5	(2	3)	(4	1)	1
(2	5)	(4	3)	1	0

D_1 (red box) and D_0 (blue box) are indicated on the right side of the table.

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Arrows point from the table to the matrix elements: $s_{0,3,4}$ (circled in black) and $s_{0,5,2}$ (circled in green).

定理 [CIY2 '10]

$$\exists (i|j)_l \Leftrightarrow s_{l,j,i} : \text{ストークス係数}$$

ストークス係数表!

量子可積分性 [CIY 3 '11]

E.g.) $r=2, 5 \times 5, \gamma=2$ (Z_5 symmetric)

$$C^{(n)} = S_n C^{(n+1)}$$

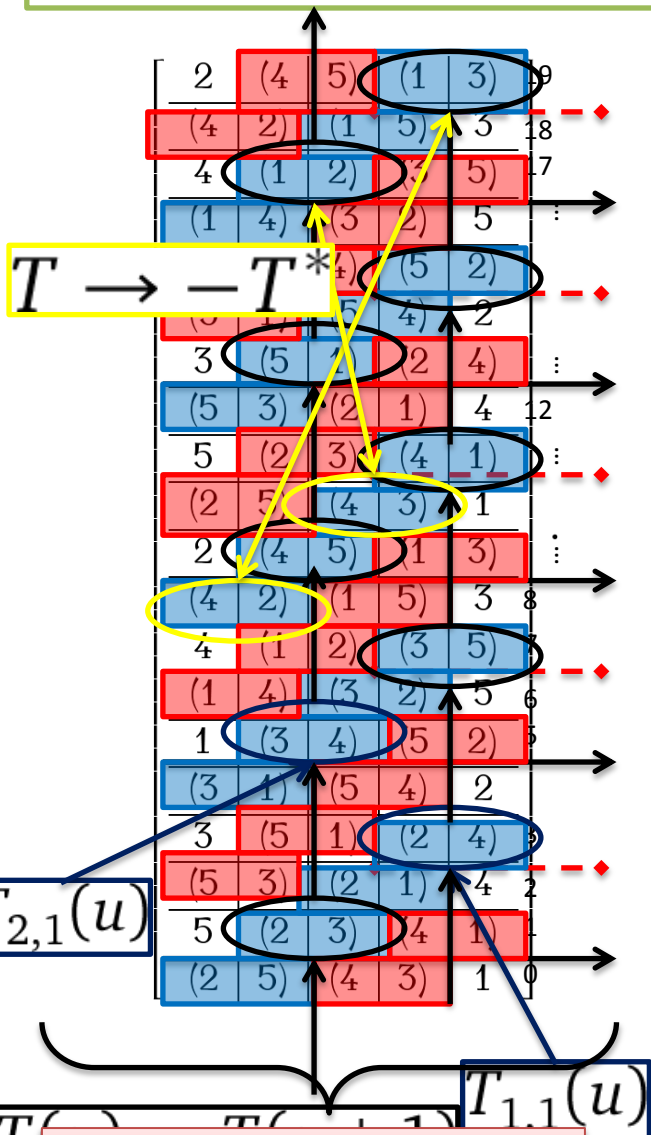
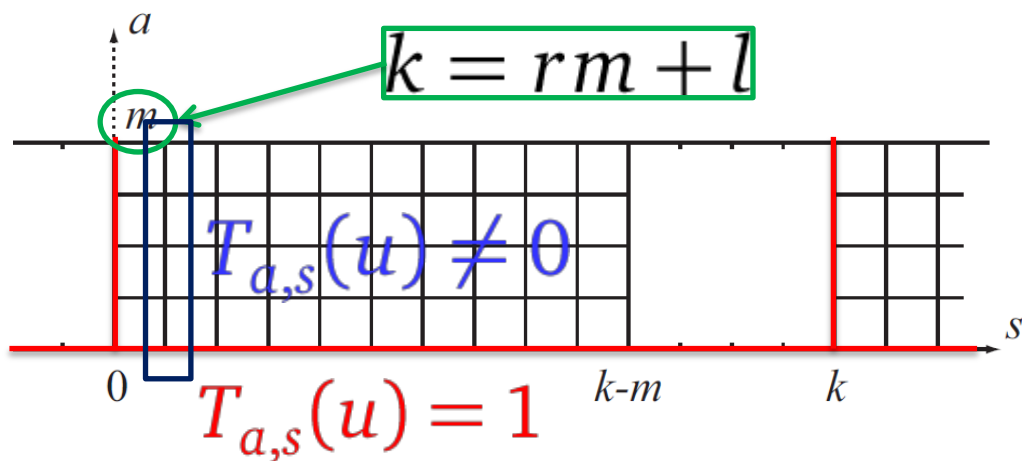
この方程式は以下の係数のみを含む:

$$(i|j)_l \Leftrightarrow s_{l,j,i}$$

そして、T-systemに化ける!

$$\begin{aligned} T_{a,s}(u+1)T_{a,s}(u-1) \\ = T_{a,s+1}(u)T_{a,s-1}(u) + T_{a+1,s}(u)T_{a-1,s}(u) \end{aligned}$$

T-systemの境界条件:



ストークス係数表!

量子可積分性 [CIY 3 '11]

E.g.) $r=2, 5 \times 5, \gamma=2$ (Z_5 symmetric)

$$C^{(n)} = S_n C^{(n+1)}$$

cf) **ODE/IM 対応** [Dorey-Tateo '98]; [J. Suzuki '99]

特殊なクラスのシュレディンガー方程式の

ストークス係数は量子可積分系のT-systemを満たす

$$T \rightarrow -T^*$$

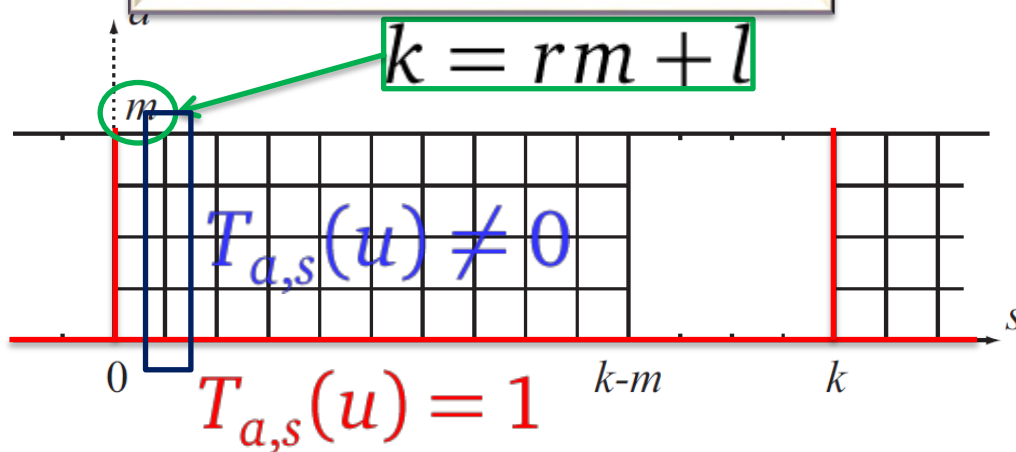
そして、T-systemに化ける！

$$\begin{aligned} T_{a,s}(u+1)T_{a,s}(u-1) \\ = T_{a,s+1}(u)T_{a,s-1}(u) + T_{a+1,s}(u)T_{a-1,s}(u) \end{aligned}$$

T-system

他のストークス係数は？

$$k = rm + l$$



$$T_{2,1}(u)$$

$$T_{1,1}(u)$$

ストークス係数表！

相補的多重カット条件[CIY 3 '11]

多重カット条件をずらす!

E.g.) $r=2, 5 \times 5, \gamma=2$ (Z_5 symmetric)

$$\tilde{C}^{(n)} = S_n \tilde{C}^{(n+1)}$$

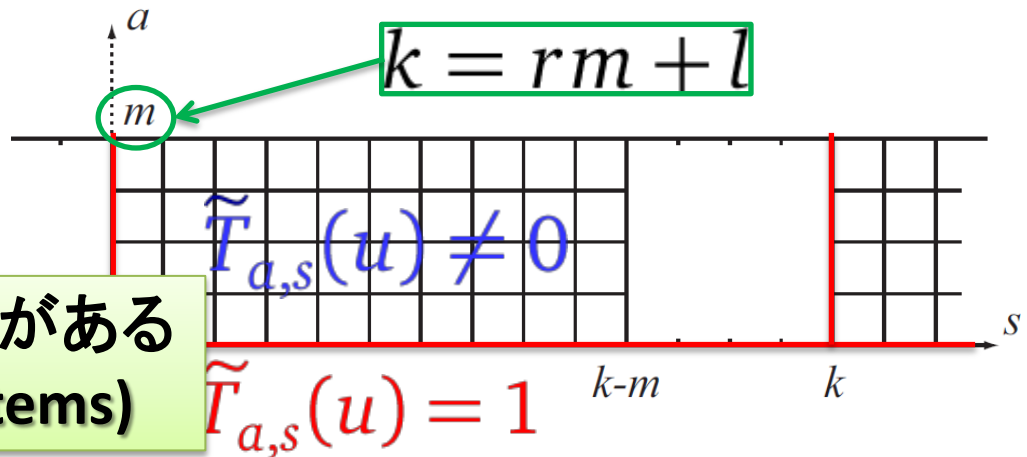
この方程式は以下の係数のみを含む

$$(i|j)_l \iff s_{l,j,i}$$

そして、T-systemsに化ける!

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{a,s}(u+1)\tilde{T}_{a,s}(u-1) \\ = \tilde{T}_{a,s+1}(u)\tilde{T}_{a,s-1}(u) + \tilde{T}_{a+1,s}(u)\tilde{T}_{a-1,s}(u) \end{aligned}$$

T-systemの境界条件:



一般に“ r ”個の異なる条件がある
(Coupled multiple T-systems)

多重カット行列模型における解:

(Ex: $r=2, k=2m+1$):

	m-7	m-6	m-5	m-4	m-3	m-2	m-1	m
8	7	6	5	4	3	2	1	
	m-7	m-6	m-5	m-4	m-3	m-2	m-1	m
8	7	6	5	4	3	2	1	



3	(5 1)	(2 4)
(5 3)	(2 1)	4
5	(2 3)	(4 1)
(2 5)	(4 3)	1

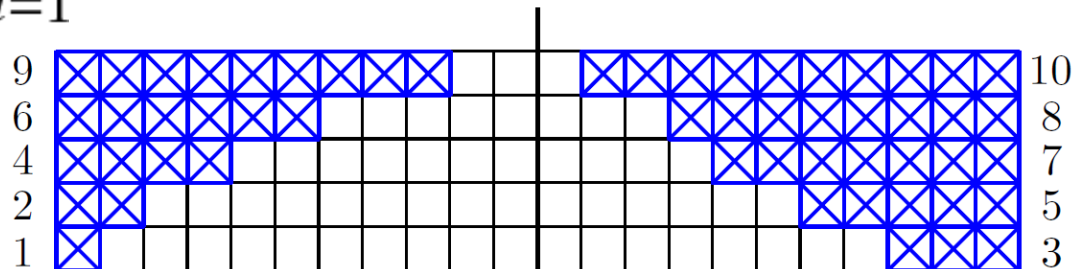
$$\boxed{n} = \theta_n^{(0)}, \quad \boxed{n} = -(\theta_n^{(0)})^*, \quad \boxed{n} = \theta_n^{(2)}, \quad \boxed{n} = -(\theta_n^{(2)})^*$$

$$\theta_n^{(2p)} = \text{Sym}[n, \{\omega^{n_i^{(2p)}}\}_{i=1}^m] \quad [\text{CIY 2 '10}] [\text{CIY3 '11}]$$

(一般線形群GLの反対称表現の指標)

さらに、これは“coupled multiple T-systems”なので

$\{n_i^{(0)}; n_i^{(2)}\}_{i=1}^m$ 解はヤング図形でラベル出来る！(雪崩):



まとめ

1. Dインスタントン化学ポテンシャルは、摂動論的弦理論では捉えられない情報である。
2. これは **弦理論における摂動論的真空の非摂動論的関係を定める情報を持つ**、つまり、弦理論の真空構造(ランドスケープ)を第一原理から理解する上で重要な情報である。
3. 非臨界次元の弦理論において、この情報は物理的カット(固有値分布の位置)で与えられる。
4. 多重カット条件は**量子可積分系のT-systemとして表されるが**、非摂動論的弦理論に対する**一部の条件**でしかない。
5. 相補的多重カット条件が持つ物理的意味はまだよく分からないが (in progress [CIY 4 '12])、ストークス係数の**具体的表式を得ることが出来る**という点で数学的にも興味深い。

議論と展望

1. 相補的多重カット条件の物理的意味は?

→ 弦理論(もしくは行列模型)を非摂動論的に特徴づけるには、
レゾルベントだけでは足りない?

その他の自由度の候補: **FZZT-Cardy branes**

[CIY 3 '11]; [CIY4 '12 in progress]

FZZT-Cardy branes は近年徐々に調べられてきた:

[Ishiki-Rim][Bourgine-Ishiki-Rim] [Atkin-Wheater]

特に [Seiberg-Shih '03] 以降、これらは従属的自由度と思われてきたが、弦理論の高次補正で違いが見えてきている。

議論と展望

2. 行列模型では、Dインスタントン化学ポテンシャルは、量子化積分系で表される「奇妙な境界条件」を満たす

多重カット条件のもっと直感的な理解はないのか？

→ デュアリティを使う？

多重カット行列模型において、弦理論の強結合双対は「非臨界次元のM理論」 M理論側では“摂動論”で求まる？

→ ゲージ理論との対応？

数学的構造だけを追えば、Cecotti-Vafa の $N=2$ QFT と同様の「モノドロミー保存系 ($r=1$)」で記述される。この場合、 $N=2$ QFT はちょうど強結合双対の記述に対応して、化学ポテンシャルも物理的に意味がある量である。

3. 一般のResurgent 解析から調べる[Aniceto-Schiappa-Vonk]

→ Finite N でも調べられる！

4. リーマンヒルベルト問題を解く＝真空構造の定量的解析

→ 非臨界次元では解析的に解ける！ 臨界弦への応用は？