

条件付ブラウン運動・SLE・ ランダム行列・量子戸田格子

香取眞理(かとりまこと)

中央大学理工物理

(統計力学, 確率論)

2012年2月20日

研究会「行列模型とその周辺」(20,21 Feb., 2012)

立教大学

目次

1. Brown 運動, D 次元 Bessel 過程,
条件付 Brown 運動
2. Schramm-Loewner Evolution (SLE)
と臨界現象・フラクタル
3. ランダム行列理論と Dyson 模型
4. 量子戸田格子と O'Connell 過程
5. 　　　　　　　　　　まとめ

目次

1. Brown 運動, D 次元 Bessel 過程,
条件付 Brown 運動
2. Schramm-Loewner Evolution (SLE)
と臨界現象・フラクタル
3. ランダム行列理論と Dyson 模型
4. 量子戸田格子と O'Connell 過程
5. (現時点ではうまく)まとめ(られない)

1. Brown 運動, D 次元 Bessel 過程, 条件付 Brown 運動

1.1 Brown 運動 (Brownian motion : BM)

1 次元上 $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合), $t > 0$

$B(t)$ = Brown 運動の時刻 t での位置

$$\text{Prob}\left(B(t) \in [a, b] \mid B(s) = x\right) = \int_a^b p_{t-s}(x, y) dy.$$

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}.$$

BM の推移確率密度

$$\text{熱核 : } \frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x, y),$$

$$p_0(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{を満たす解 (グリーン関数)}$$

1. Brown 運動, D 次元 Bessel 過程, 条件付 Brown 運動

5

1.1 Brown 運動 (Brownian motion : BM)

1 次元上 $x \in \mathbb{R}$ (実数全体の集合), $t > 0$

$B(t)$ = Brown 運動の時刻 t での位置

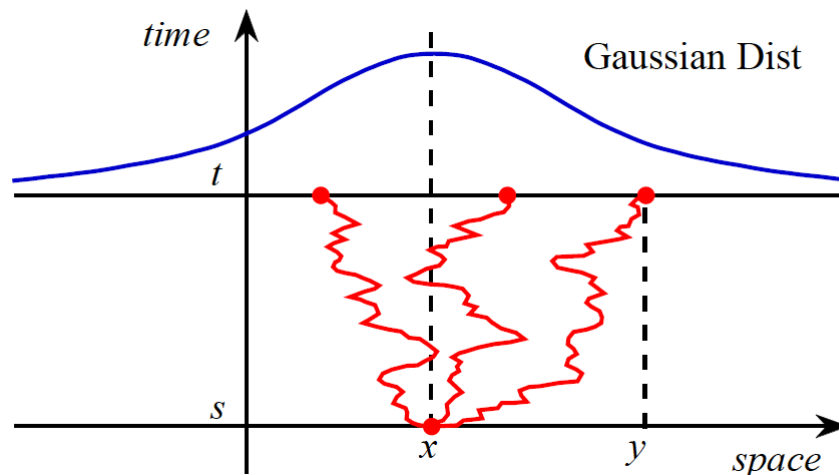
$$\text{Prob}\left(B(t) \in [a, b] \mid B(s) = x\right) = \int_a^b p_{t-s}(x, y) dy.$$

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}.$$

BM の推移確率密度

$$\text{熱核: } \frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t(x, y),$$

$p_0(x, y) = \delta(x - y)$ を満たす解 (グリーン関数)

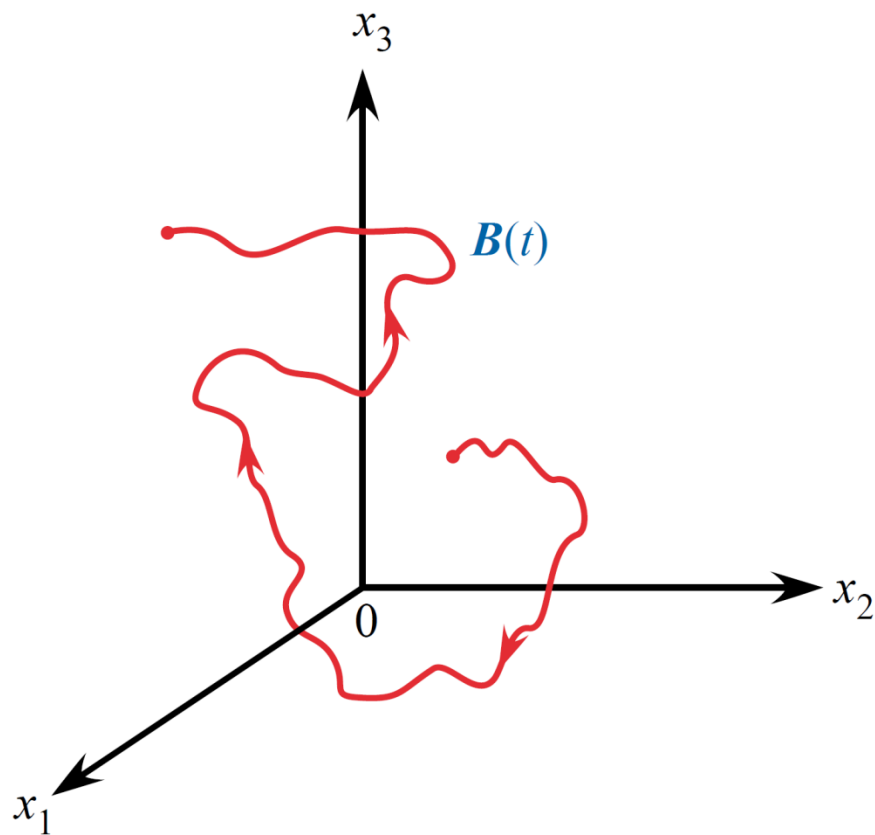


$D \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$ 空間次元

D 次元 BM

$$\mathbf{B}(t) = (B_1(x), B_2(x), \dots, B_D(x))$$

各成分 $B_j(t), 1 \leq j \leq D$ は互いに独立な 1 次元 BM



1.2 D 次元 Bessel 過程

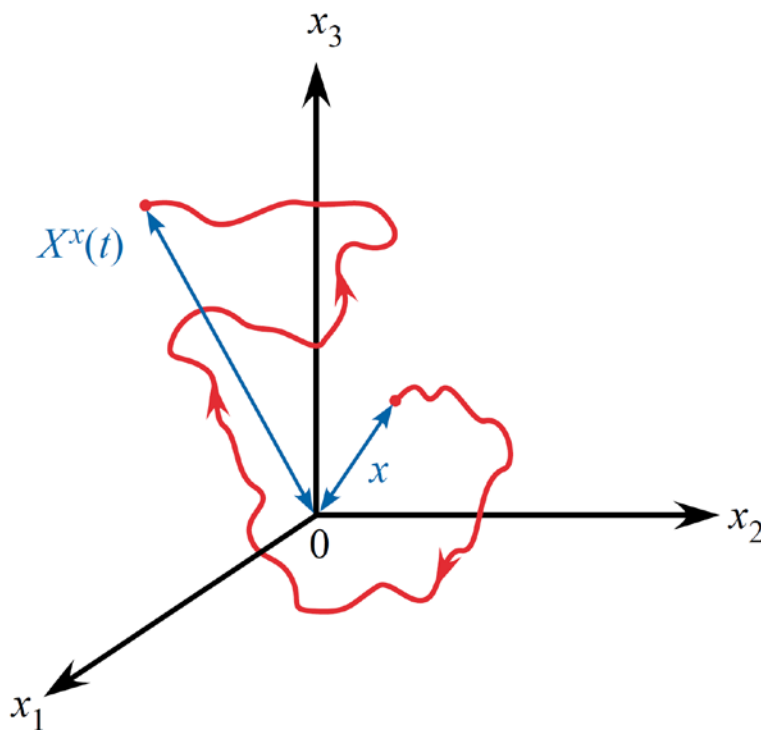
D 次元 BM の動径成分 (原点からの距離)

$$X^x(t) \equiv |\mathbf{B}(t)| = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \cdots + B_D(t)^2}$$

を D 次元 Bessel 過程とよぶ.

ただし, 上付き添え字 $x = X^x(0) = |\mathbf{B}(0)|$

(Bessel 過程の初期値 = D 次元 BM の出発点の原点からの距離).



動的な誤差の伝播 $\iff$ 伊藤の公式

$$dX^x(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X^x(t)}, \quad t > 0.$$

確率微分方程式 stochastic differential equation (SDE)

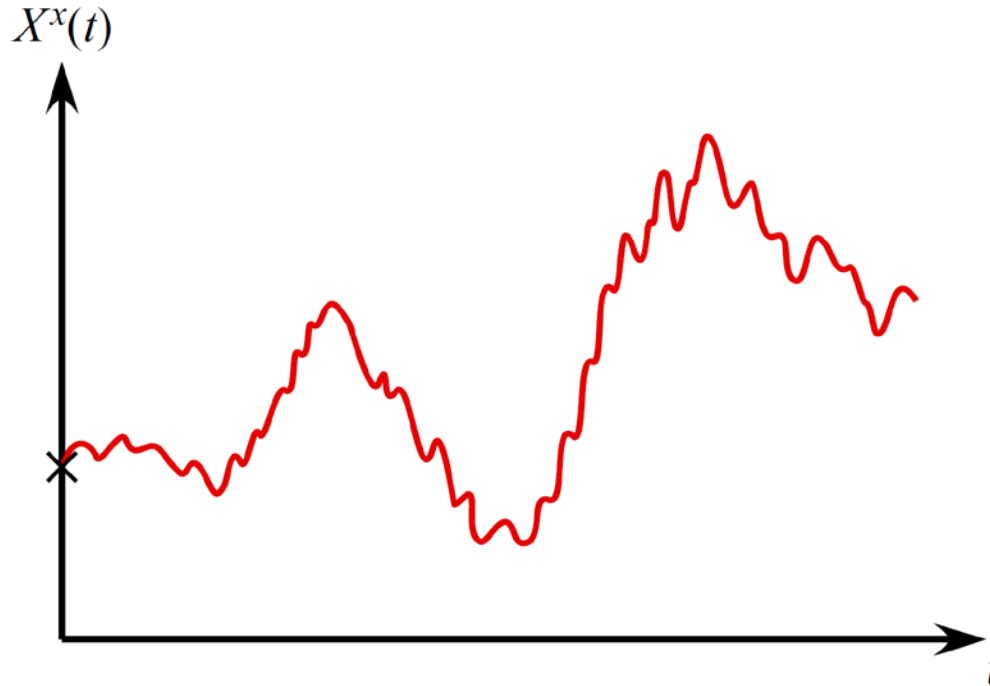
- 右辺第1項の $B(t)$ は $B_j(t), 1 \leq j \leq D$ とは独立な1次元 BM.

$$\langle dB(t) \rangle = 0, \quad \langle (dB(t))^2 \rangle = dt \quad \text{平均 0, 分散 } t \text{ の揺動 (マルチンゲール)}$$

- $D > 1$ とすると $\frac{D-1}{2} > 0$.

$$X^x(t) \searrow \quad D \nearrow \implies \frac{D-1}{2} \frac{1}{X^x(t)} \nearrow$$

右辺第2項=ドリフト項: 原点から外向きに働く斥力



原点からの長距離斥力 $\Leftarrow$ “エントロピー力”

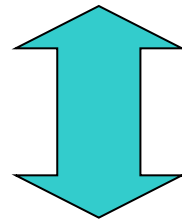
特に原点に戻りたくないわけではない.

ただ、次元 D が高いといろいろな方向に行ける.

その中で原点に戻るルートの重み (割合) は小さくなってしまう.

(確率分布は D 次元空間 $\mathbb{R}^D$ 全体で規格化されている.)

$$\text{SDE: } dX^x(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{1}{X^x(t)} dt$$



推移確率密度関数 $p_t^{(D)}(x, y) : (0, x) \rightsquigarrow (t, y)$ に対する
Fokker-Planck (Kolmogorov) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t^{(D)}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t^{(D)}(x, y) + \frac{D-1}{2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} p_t^{(D)}(x, y)$$

$$p_0^{(D)}(x, y) = \delta(x - y).$$

推移確率密度関数 $p_t^{(D)}(x, y) : (0, x) \rightsquigarrow (t, y)$ に対する

Fokker-Planck (Kolmogorov) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t^{(D)}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_t^{(D)}(x, y) + \frac{D-1}{2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} p_t^{(D)}(x, y)$$

$$p_0^{(D)}(x, y) = \delta(x - y).$$

$$p_t^{(D)}(x, y) = \frac{1}{t} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right)$$

$$\nu = \frac{1}{2}(D - 2) \iff D = 2(\nu + 1)$$

$$\text{modified Bessel function } I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu},$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du \quad (\text{Gamma function}).$$

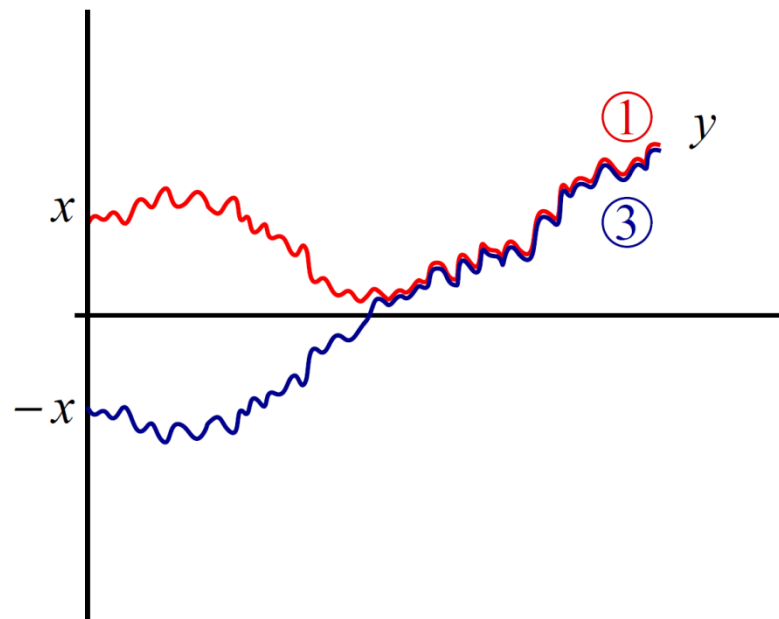
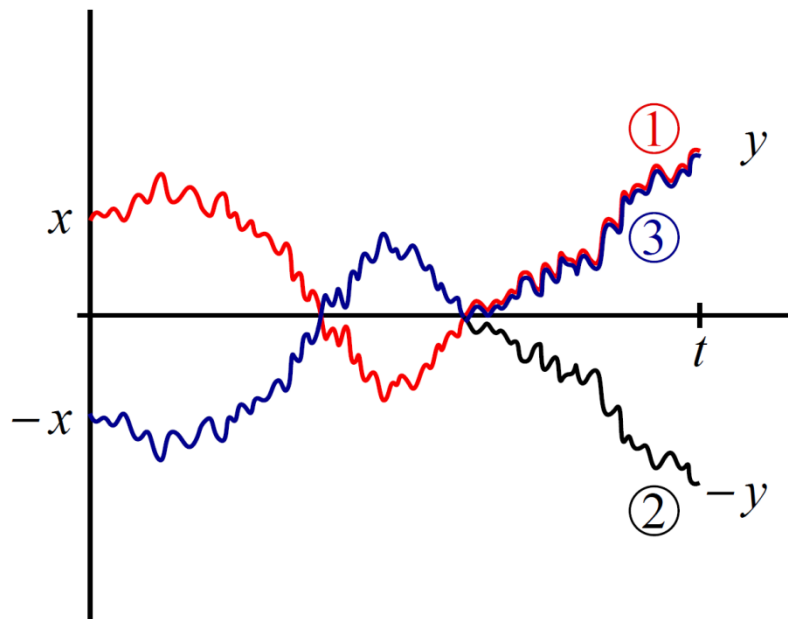
$\implies$ 「Bessel 過程」という名称の由来

$$D = 3 \text{ のとき, } \nu = \frac{1}{2}(3 - 2) = \frac{1}{2}$$

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}(e^z - e^{-z})$$

$$p_t^{(3)}(x, y) = \frac{y}{x} \left\{ p_t(x, y) - p_t(-x, y) \right\}$$

$x > 0$ からスタートした 3 次元 Bessel 過程が原点に戻る確率=0
(推移的)



$$\textcircled{1} = \textcircled{2} = \textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1} - \textcircled{3} = 0$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} > 0$$

$D = 1$ のとき, $\nu = \frac{1}{2}(1 - 2) = -\frac{1}{2}$

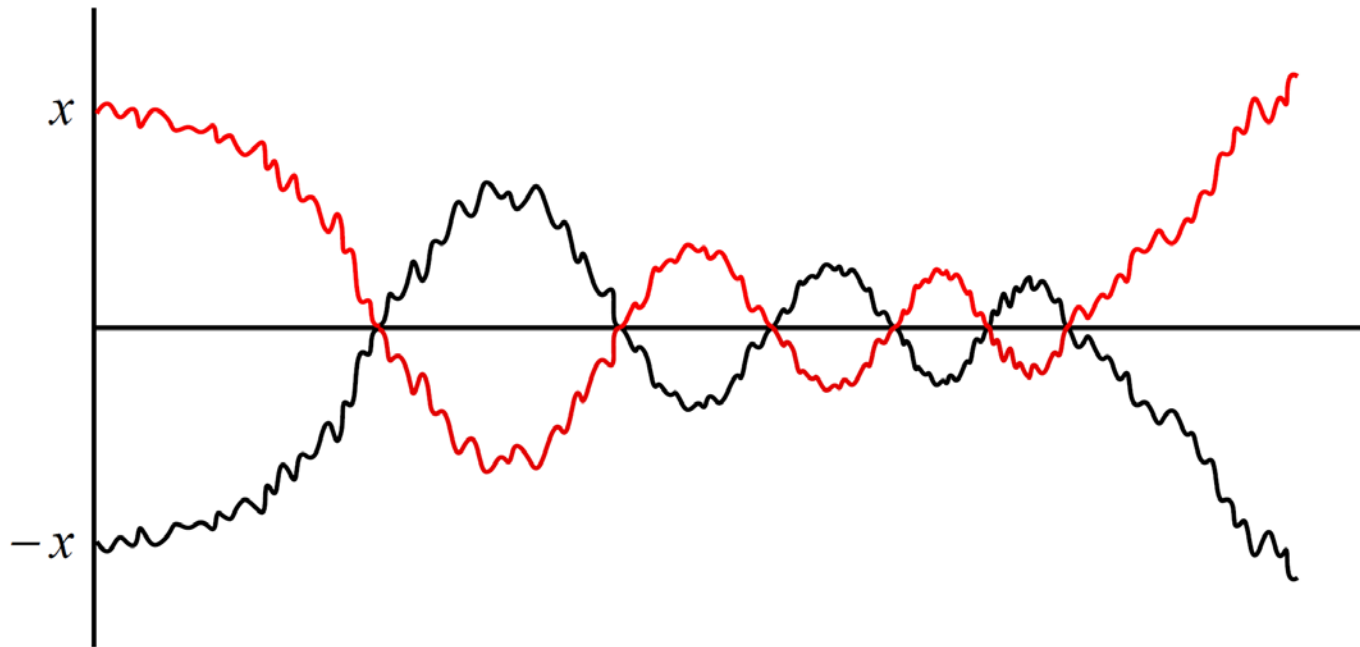
$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}(e^z + e^{-z})$$

$$p_t^{(1)}(x, y) = \left\{ p_t(x, y) + p_t(-x, y) \right\}$$

1 次元 Bessel 過程 = 反射壁ブラウン運動 $X^x(t) = |B(t)|$

原点に何度も戻る. (再帰的)

そのたびに全反射するプロセス.



$$p_t^{(D)}(x, y) = \frac{1}{t} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right)$$

$$\nu = \frac{1}{2}(D - 2) \iff D = 2(\nu + 1)$$

この推移確率関数は ν の整関数 (entire function)

$$-1 < \nu < \infty \iff 0 < D < \infty$$

次元 D は正の実数全体に拡張して考えることができる.

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu + \cdots$$

$$-1 < \nu < 0 \iff 0 < D < 2 \text{ で } z = 0 \text{ は singular point}$$

$\iff D < 2$ では Bessel 過程は何度も原点を訪れる (多価性 = 再帰的).

Lamperiti の関係式

$$B^x(t) + \nu t = \text{ドリフト付き 1 次元 BM, } B^x(0) = x > 0,$$

$$X^{x'}(\tilde{t}^{(D)}(t)) = \exp\left(B^x(t) + \nu t\right) \text{ 指数 BM (幾何 BM)}$$

$$\tilde{t}^{(D)}(t) = \int_0^t \left\{ \exp\left(B^x(s) + \nu s\right) \right\}^2 ds \text{ ランダムな時間変更}$$

$$\nu = \frac{1}{2}(D - 2), \quad x' = e^x$$

$x > 0$ から出発した D 次元 Bessel 過程が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す； 15

$$T_x = \inf \left\{ t > 0 : X_t^x = 0 \right\}.$$

定理 1.1.

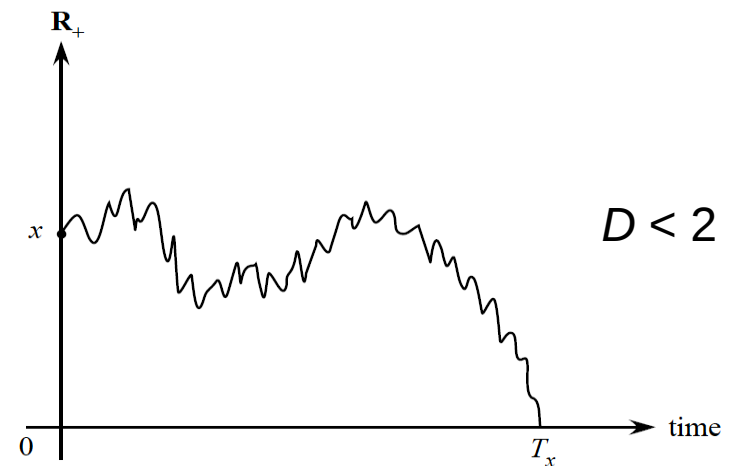
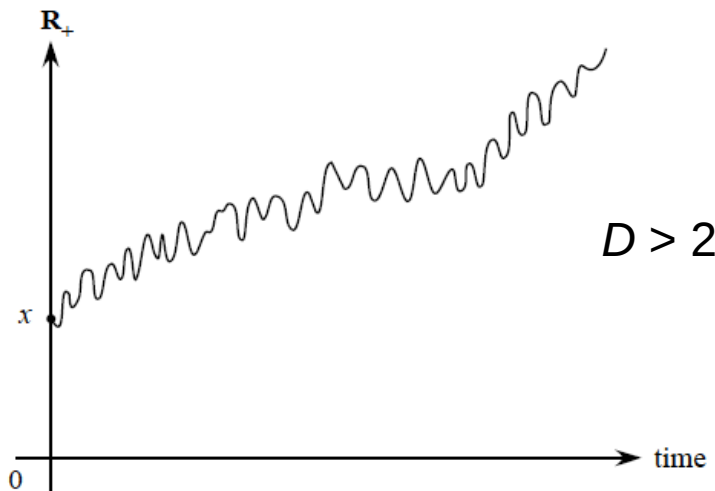
(i) $D \geq 2 \implies T_x = \infty, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

(ii) $D > 2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} X_t^x = \infty, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

(iii) $D = 2 \implies \inf_{t > 0} X_t^x = 0, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

つまり、 $x > 0$ から出発した 2 次元 Bessel 過程は原点にはぶつからないが、原点に無限に近づく.

(iv) $1 \leq D < 2 \implies T_x < \infty, \forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.



1.3 Bessel flow と超幾何関数

$1 \leq D < 2$ の場合を考えることにする.

$x > 0$ に対して, 共通の BM, $B(t)$ を用いて

$$dX(t) = dB^x(t) + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X^x(t)}, \quad B^x(t) = x + B(t)$$

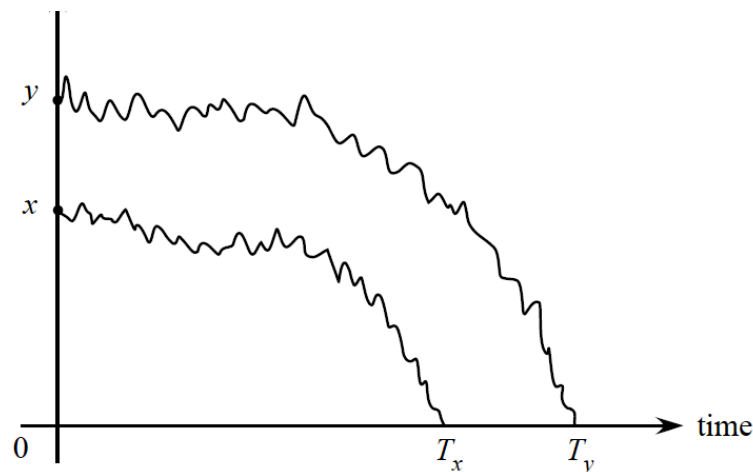
$$\iff X^x(t) = x + B(t) + \frac{D-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X^x(s)}, \quad t \leq T_x$$

で与えられる D 次元ベッセル過程の集合 $\{X^x(t)\}_{x>0}$ を考えることにする.
この定義より

$$x < y \implies X^x(t) < X^y(t), \forall t < T_x \implies T_x \leq T_y$$

である.

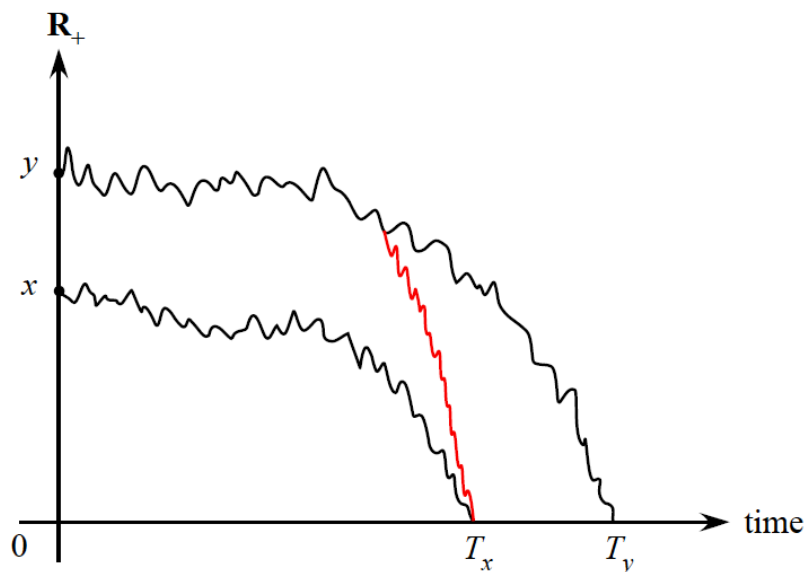
$x < y$ だが, $T_x = T_y$ となることはあり得るであろうか.



定理 1.2.

(i) $\frac{3}{2} < D < 2 \implies x < y$ に対して $\text{Prob}(T_x = T_y) > 0$.

(ii) $1 \leq D \leq \frac{3}{2} \implies x < y$ に対して, $T_x < T_y$ が確率 1 で成り立つ.



- D が小 ($1 < D \leq 3/2$): 原点からの斥力は弱く, 原点に近いほど早く戻る.
- D が中途半端に小さい ($3/2 < D < 2$): 斥力が中程度に強く, 遠くからスタートしたものと同着がありえる.

$\frac{3}{2} < D < 2$ のときは, $0 < x < y$ に対して

$$\text{Prob}(T_x = T_y) > 0$$

であることを述べたが, この確率の x, y 依存性は**ガウスの超幾何関数**

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (c)_k \equiv \Gamma(c+k)/\Gamma(c) = c(c+1) \cdots (c+(k-1))$$

を用いて, 正確に表すことができる (“Cardy’s formula (1992)”).

命題 1.3. $\frac{3}{2} < D < 2$ のとき, $0 < x < y$ に対して

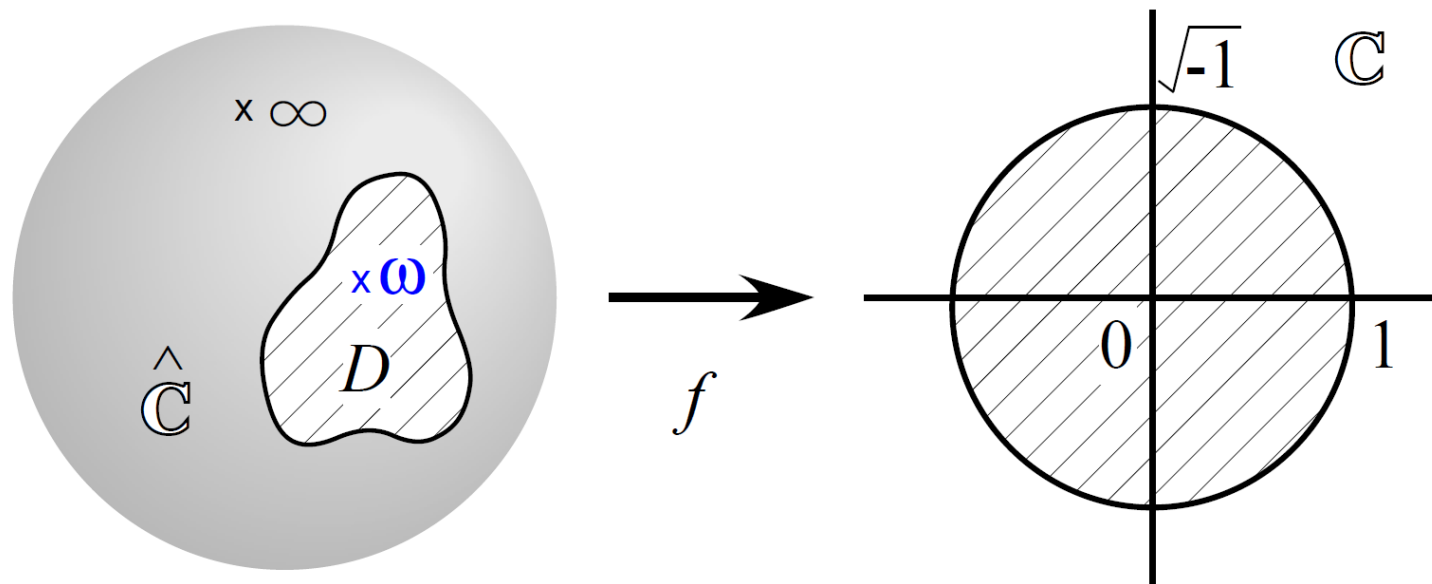
$$\text{Prob}(T_x = T_y) = 1 - \frac{\Gamma(D-1)}{\Gamma(2(D-1))\Gamma(2-D)} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{2D-3} F \left(2D-3, D-1, 2(D-1); \frac{y-x}{y} \right).$$

2. Stochastic Loewner Evolution (SLE) と フラクタル・臨界現象

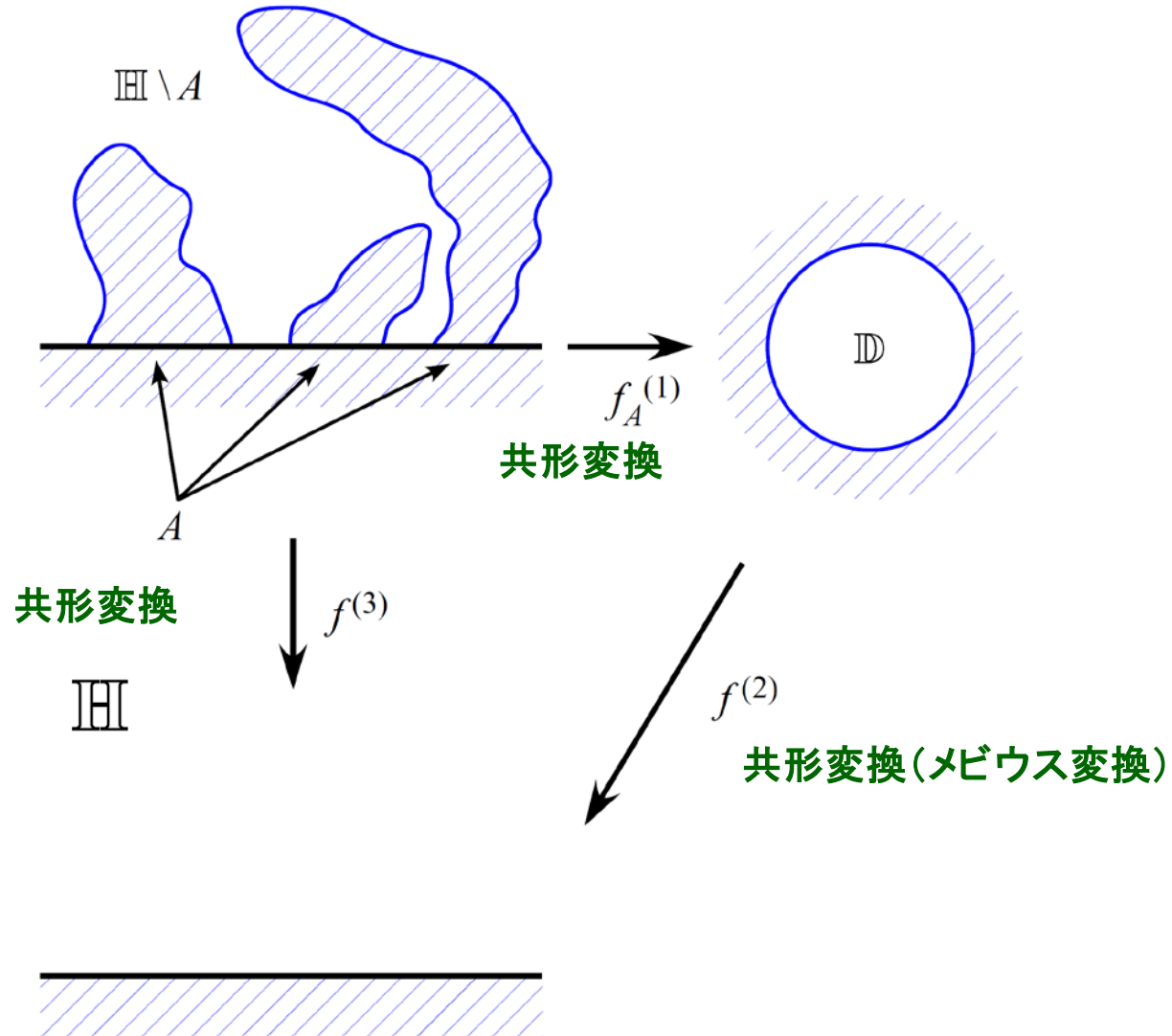
定理 2.1 [Riemann mapping theorem] D が $\mathbb{C}$ (複素平面) 全体ではない単連結領域であるとする. この D 内の 1 点 $\omega \in D$ を選ぶ. このとき, D を単位円 $\mathbb{D}$ に写す共形変換で

$$f(\omega) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(\omega) > 0$$

であるものが存在し, それは一意的に定まる.



複素上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ と書く.



Stochastic Loewner Evolution (SLE)

Schramm-Loewner Evolution (SLE) (2000年～)

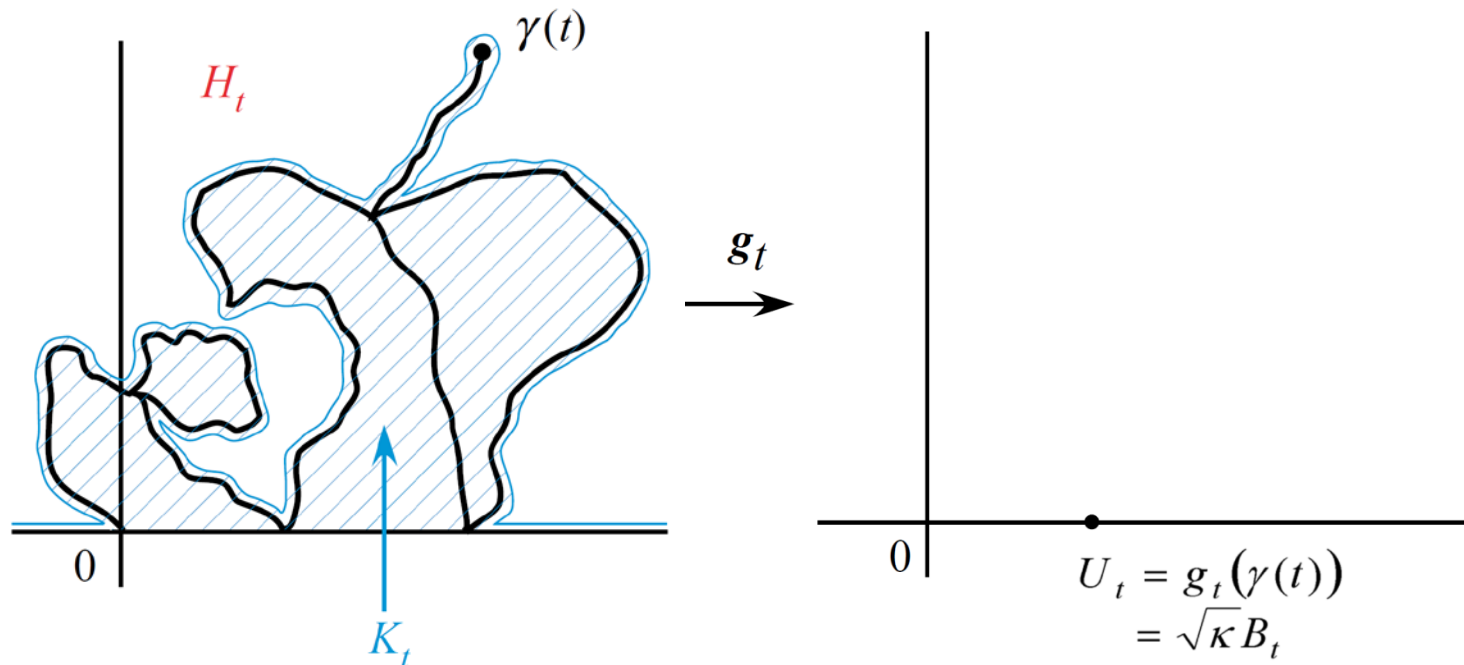
$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) + B(t)}, \quad t \geq 0, \quad g_0(z) = z$$

$$a = \frac{2}{\kappa}, \quad \kappa > 0 \quad (\text{唯一の実パラメータ})$$

$B(t)$: 1次元 BM

$g_t(z) : H_t = \mathbb{H} \setminus K_t \mapsto \mathbb{H}$ 共形変換

$\{g_t(z) : t \geq 0\}$; 共形変換の確率過程 (共形変換のランダムな時間発展)

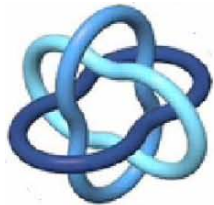




Oded Schramm (December 10, 1961 in Jerusalem, Israel
– September 1, 2008, Washington State, USA)

The 2006 Fields Medals

23



Wendelin Werner



**Laboratoire de
Mathématiques
Université Paris-Sud**

for his contributions to the development of stochastic Loewner evolution, the geometry of two-dimensional Brownian motion, and conformal field theory

The 2010 Fields medals

Stanislav Smirnov



Section de
Mathématiques,
Université de Genève

**for the proof of conformal invariance of
percolation and the planar Ising model
in statistical physics.**

SLE_κ/BES_D 対応

$$dX^x(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X^x(t)}$$

⇓

複素化

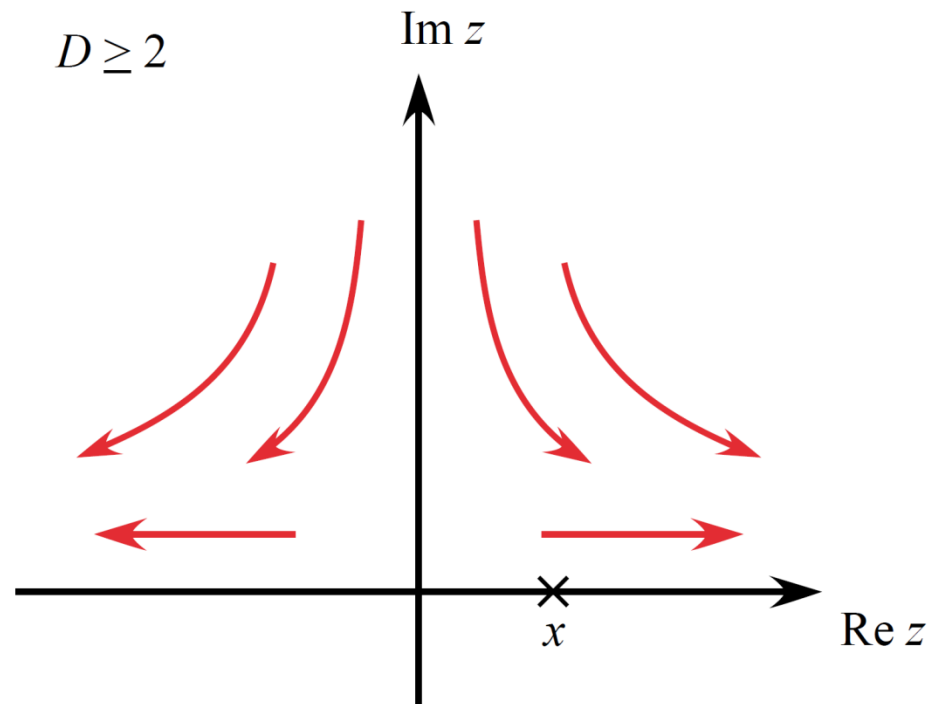
$$dZ^z(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{Z^z(t)}, \quad \text{初期点 } z = x + iy \in \overline{\mathbb{H}} \equiv \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$$

ポイント: Brown 運動は 1 次元実 BM のまま

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow dX^x(t) + idY^y(t) &= dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{X^x(t) + iY^y(t)} \\ &= dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{X^x(t) - iY^y(t)}{(X^x(t))^2 + (Y^y(t))^2} dt \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} dX^x(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{X^x(t)}{(X^x(t))^2 + (Y^y(t))^2} dt \\ dY^y(t) = -\frac{D-1}{2} \frac{Y^y(t)}{(X^x(t))^2 + (Y^y(t))^2} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} dX^x(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{X^x(t)}{(X^x(t))^2 + (Y^y(t))^2} dt \\ dY^y(t) = -\frac{D-1}{2} \frac{Y^y(t)}{(X^x(t))^2 + (Y^y(t))^2} dt \end{cases}$$



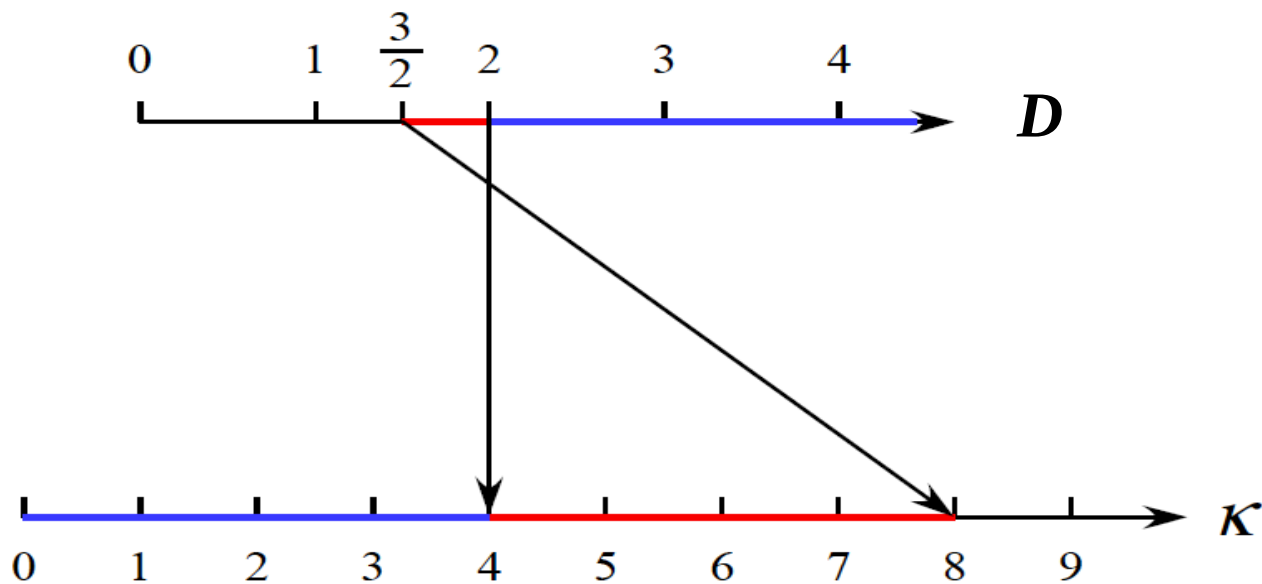
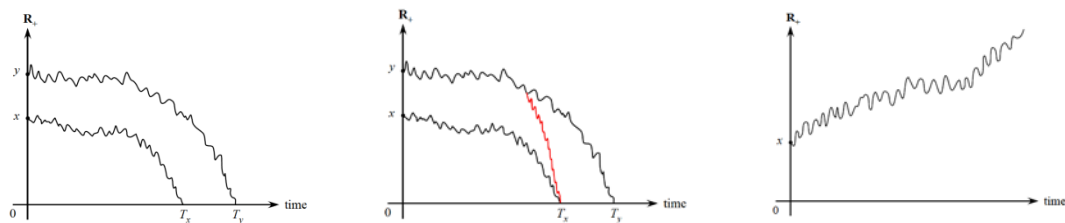
“複素 Bessel flow”

$$dZ^z(t) = dB(t) + \frac{D-1}{2} \frac{dt}{Z^z(t)}$$

$$\iff d(Z^z(t) - B(t)) = \frac{D-1}{2} \frac{dt}{(Z^z(t) - B(t)) + B(t)}$$

$$g_t(z) \equiv Z^z(t) - B(t), \quad z \in \overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \quad \text{とおく と}$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) + B(t)}, \quad a = \frac{D-1}{2} = \frac{2}{\kappa} \quad \mathbf{SLE}_{\kappa}$$



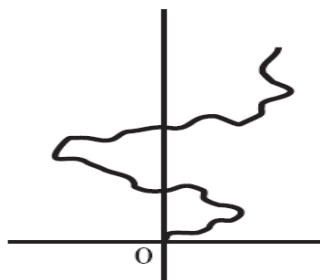
$$a = \frac{2}{\kappa} = \frac{D-1}{2}$$



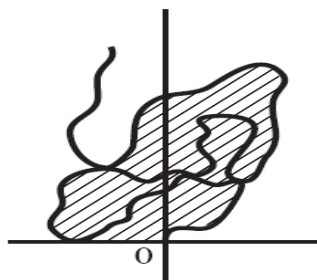
$$\kappa = \frac{4}{D-1}$$



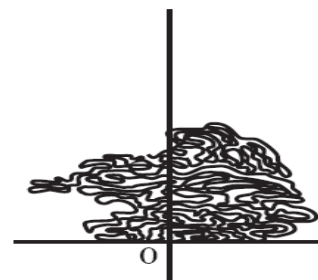
$$D = \frac{4}{\kappa} + 1$$



(a)

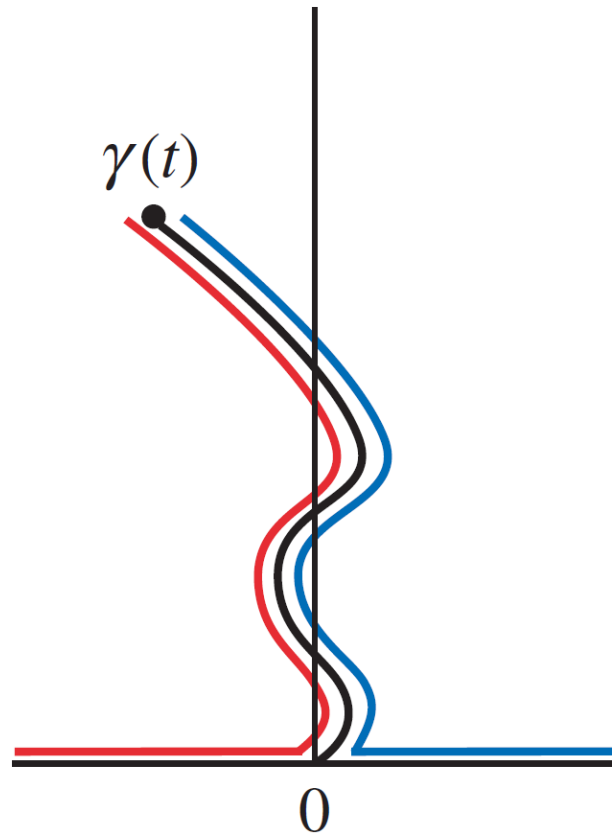


(b)

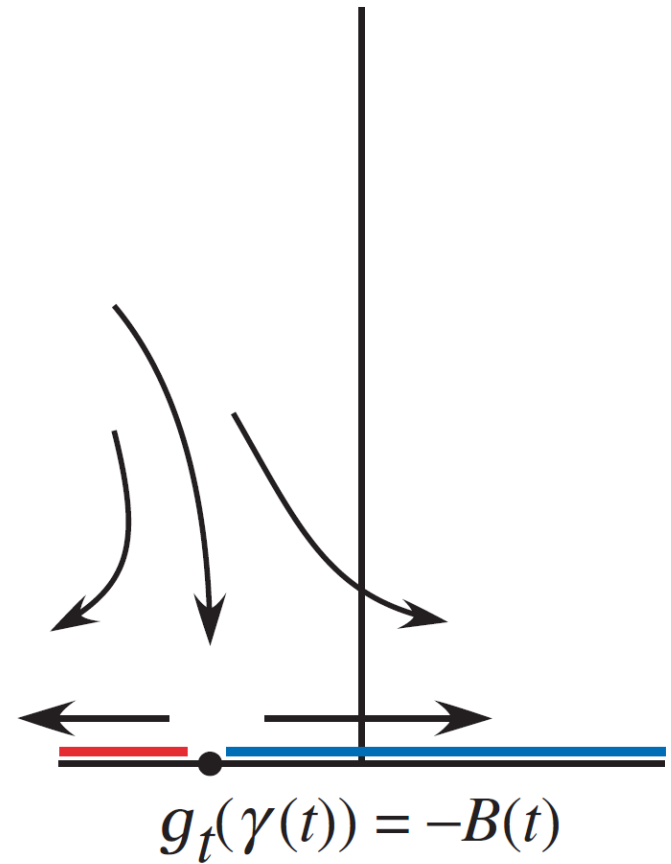
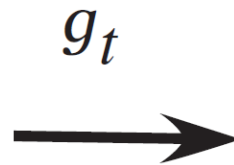


(c)

$$0 < \kappa \leq 4 \quad (D \geq 2)$$

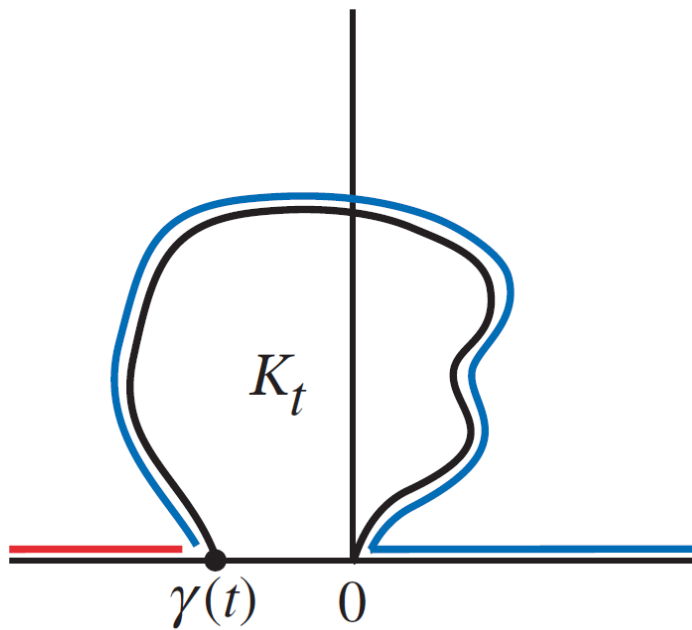


(a)

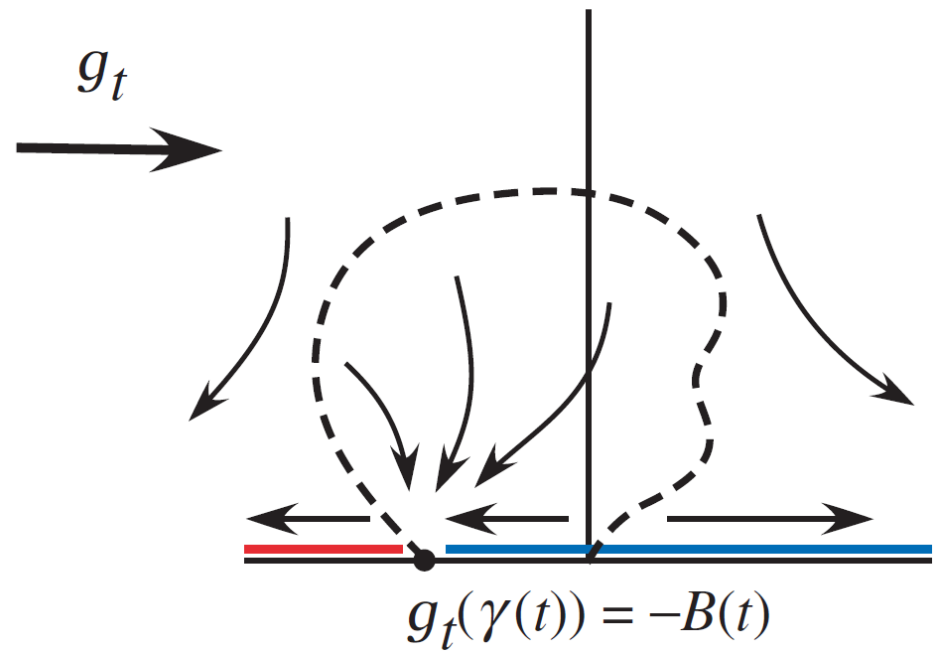


(b)

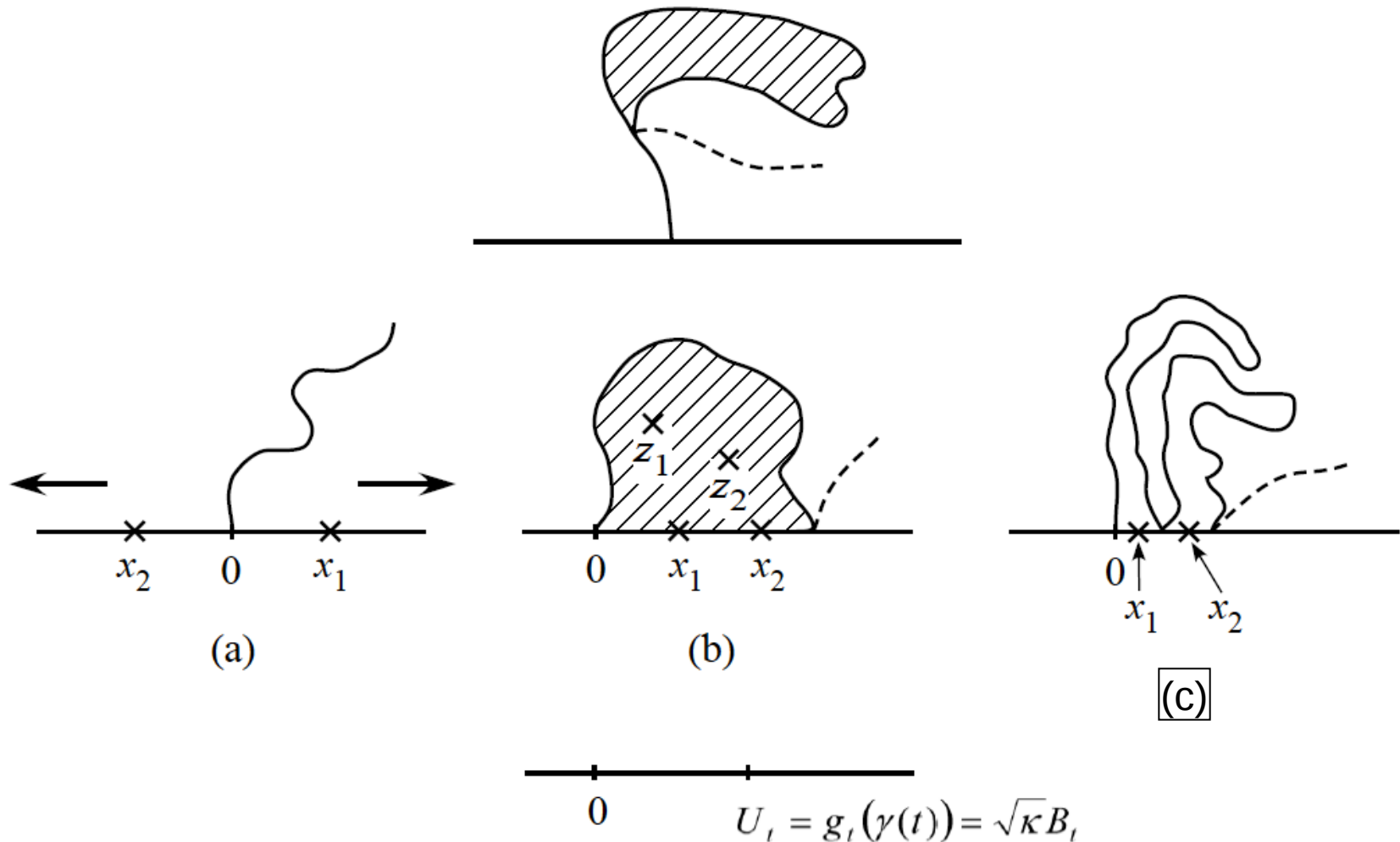
$$4 < \kappa < 8 \quad (1.5 < D < 2)$$



(a)



(b)



(b) の場合: $\gamma(t)$ が実軸 $\mathbf{R}$ と接した瞬間に、斜線領域内の点はすべて同時に**呑み込まれて(swallowed)**, $\gamma(t)$ とともに U_t に写されてしまう.

(c) の場合: γ には隙間はなく、実軸上の点 $x_1, x_2, \dots$ は原点に近いものから順に U_t に写されていく.

SLE $_{\kappa}$ 曲線の 3相(3態)

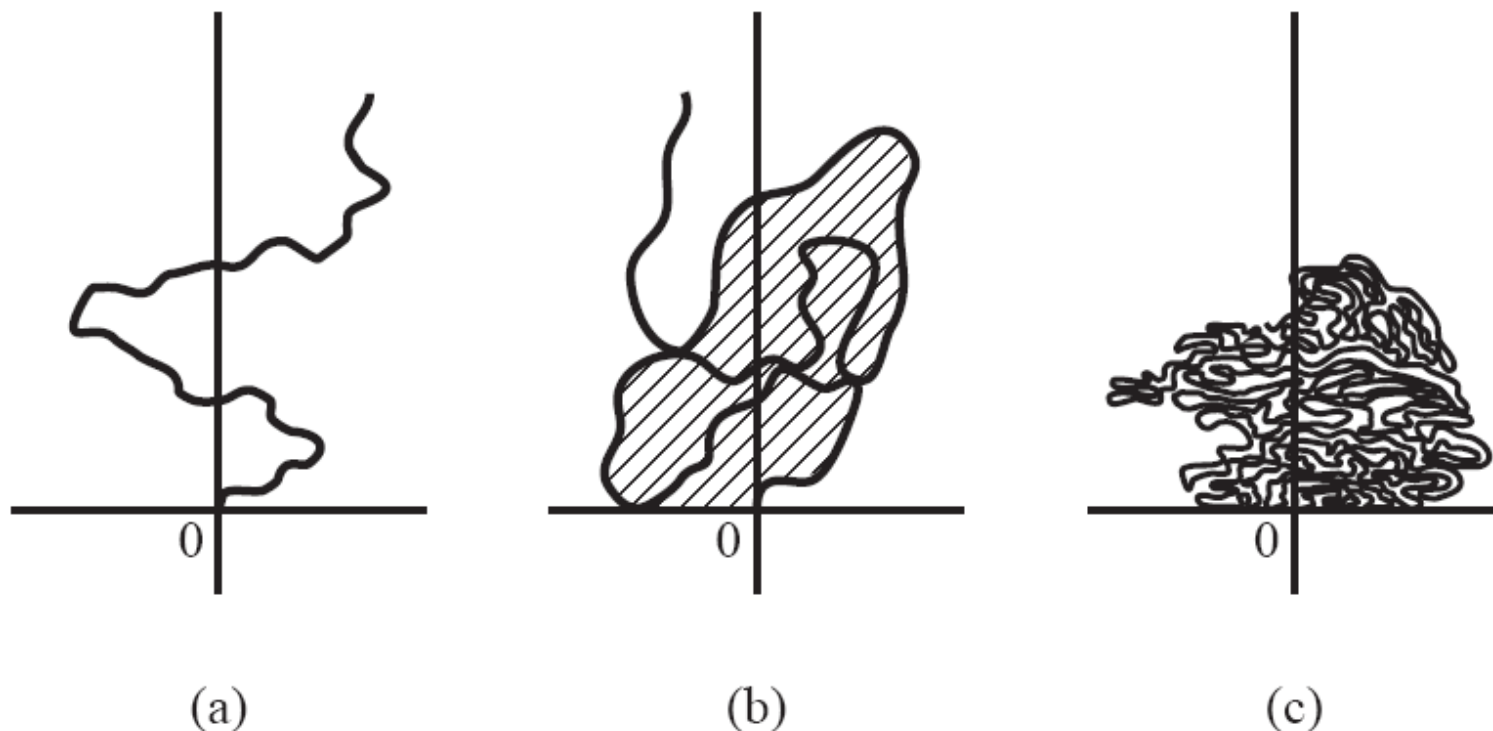
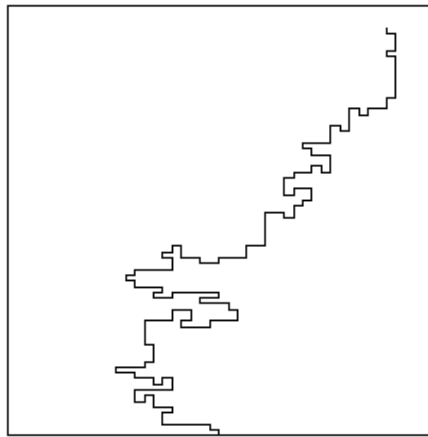
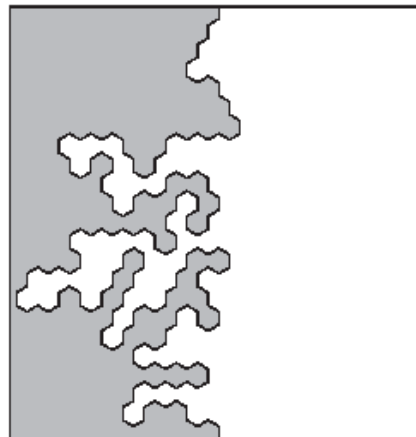


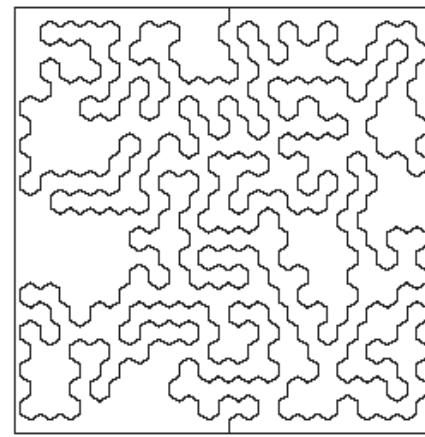
図 2: (a) 単純曲線. $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域(斜線部分)は上半平面を覆いつくしていくが, 曲線自身で半平面が埋めつくされることはない. $4 < \kappa < 8$ のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面を埋めつくしていく曲線. $\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子.



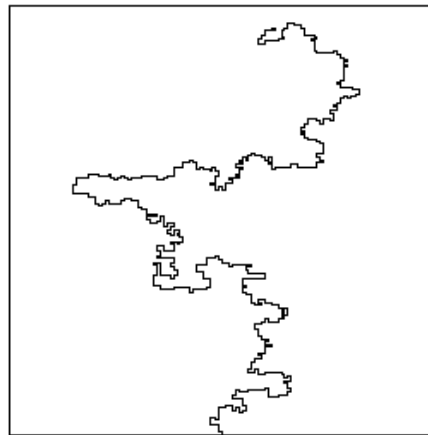
(a1)



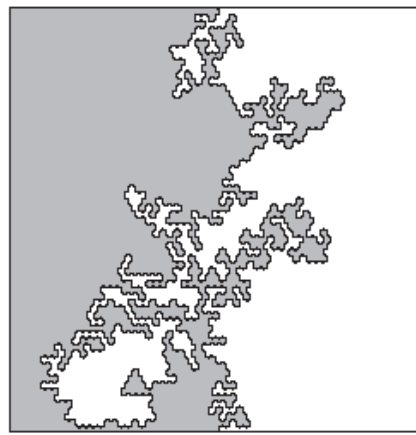
(b1)



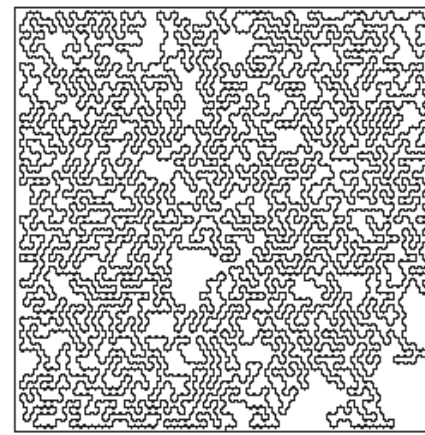
(c1)



(a2)



(b2)



(c2)

計算機シミュレーションで描いた2次元格子上的フラクタル曲線

(a1), (a2) 自己回避ウォーク(SAW)

(b1), (b2) 臨界点におけるサイト・パーコレーションモデルの浸透領域の界面

(c1), (c2) Harmonic Anti-Navigator という界面成長モデルの時間発展

$$\kappa = \frac{8}{3}$$

$\text{SLE}_{8/3}$

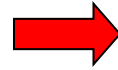
$$\kappa = 6$$

SLE_6

$$\kappa = 8$$

SLE_8

$$\begin{aligned} b &= \frac{6 - \kappa}{2\kappa} \\ c &= \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa} \end{aligned}$$



$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

Virasoro 代数

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$L_n|b\rangle = 0, n \geq 1, L_0|b\rangle = b|b\rangle$ となる固有値と固有ベクトルの対 $(b, |b\rangle)$ を導入.
最高ウェイト表現 $\mathcal{H}_b = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|b\rangle$ を考える.

$$\det \begin{pmatrix} \langle b|L_2L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_2L_{-1}L_{-1}|b\rangle \\ \langle b|L_1L_1L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_1L_1L_{-1}L_{-1}|b\rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4b + c/2 & 6b \\ 6b & 4b(1 + 2b) \end{pmatrix} = 0$$

となるとき、**レベル 2 の退化表現**が得られる (Kac 公式).

$b \neq 0$ とすると、この条件式は

$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

に等しい

2次元格子上的統計物理模型の連続(スケーリング)極限と SLE_κ は次のように対応していることが“知られている”.

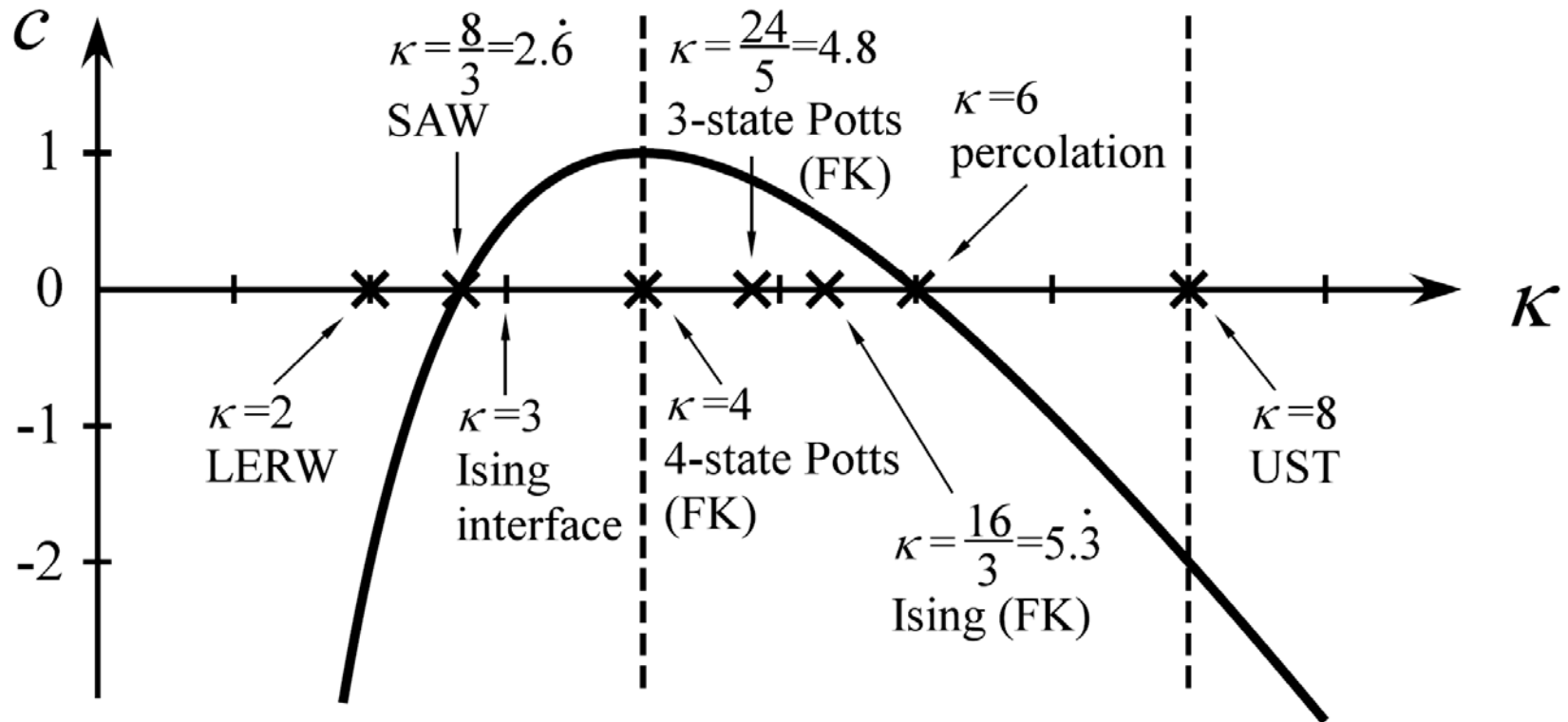
$\kappa = 2$ ($D = 3$)	$\iff$	ループ除去ランダムウォーク (LERW)
$\kappa = \frac{8}{3} = 2.\dot{6}$ ($D = 2.5$)	$\iff$	自己回避ウォーク (SAW)
$\kappa = 3$ ($D = \frac{7}{3} = 2.\dot{3}$)	$\iff$	臨界イジング界面曲線
$\kappa = 4$ ($D = 2$)	$\iff$	Gaussian free surface 模型の等高線
$\kappa = 6$ ($D = \frac{5}{3} = 1.\dot{6}$)	$\iff$	臨界パーコレーション探索過程
$\kappa = 8$ ($D = \frac{3}{2} = 1.5$)	$\iff$	uniform spanning tree (UST)

$$\kappa = \frac{4}{D-1} \iff D = 1 + \frac{4}{\kappa}$$

SLE_κ 曲線のフラクタル次元

$$d_H = 1 + \frac{\kappa}{8} = 1 + \frac{1}{2(D-1)} \quad \left(0 < \kappa \leq 8, \quad D > \frac{3}{2} \right)$$

Beffara (2008)



- SLE 曲線の径数 κ と中心電荷 c との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の κ の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.

SLE = 2次元上の「揺らぎの統一理論」

- 平面上のフラクタル曲線の統計物理 (高分子物理)

LERW, self-avoiding walk (SAW)

$$(\text{SLE}_{\kappa} : 0 < \kappa \leq 4)$$

- 平面上の平衡統計力学模型

浸透模型 (percolation), 磁性体の模型 (Ising model)

$$(\text{SLE}_{\kappa} : 4 < \kappa < 8)$$

- ランダムなペアノ曲線と

非平衡統計模型 (自己組織化臨界現象)

雪崩模型 (Abelian sandpile model), 森林火災模型

$$(\text{SLE}_{\kappa} : \kappa = 8)$$

3. ランダム行列理論と Dyson 模型

3.1 3 次元 Bessel 過程と Dyson 模型

- 3 次元 Bessel 過程 $\frac{D-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$

$$dX(t) = dB_j(t) + \frac{1}{X(t)}dt, \quad t \geq 0$$

↓ 1 次元 N 粒子系に拡張

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{1 \leq k \leq N: k \neq j} \frac{1}{X_j(t) - X_k(t)}dt, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0$$

ここで, $B_j(t), 1 \leq j \leq N$ は互いに独立な 1 次元 BM

- $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$
 すべての粒子間に, 粒子間距離に反比例する
 斥力が働く 1 次元多粒子系

Dyson 模型

(Dyson's BM model with $\beta = 2$, 1962)

3.2 “Bessel/Dyson 対応”の two aspects

39

[aspect 1]

- 独立な 1 次元 BMs

$$\begin{aligned} B_{jk}(t), & \quad 1 \leq j \leq k \leq N \\ \tilde{B}_{jk}(t), & \quad 1 \leq j < k \leq N \\ \frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} &= N^2 \quad \text{個} \end{aligned}$$

- $N \times N$ エルミート行列値 BM

$$M(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{12}(t) + i\tilde{B}_{12}(t)) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{1N}(t) + i\tilde{B}_{1N}(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{12}(t) - i\tilde{B}_{12}(t)) & B_{22}(t) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{2N}(t) + i\tilde{B}_{2N}(t)) \\ & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{1N}(t) - i\tilde{B}_{1N}(t)) & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_{2N}(t) - i\tilde{B}_{2N}(t)) & \cdots & B_{NN}(t) \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{H}_N = \{N \times N \text{ Hermite 行列}\} \simeq \mathbb{R}^{N^2}$

$$M(t) \in \mathcal{H}_N \iff N^2 \text{ 次元 BM} \in \mathbb{R}^{N^2}$$

- 各時刻 $t \geq 0 \implies \exists^1 U(t) : N \times N$ ユニタリ行列

s.t. $U(t)^\dagger M(t) U(t) = \Lambda(t)$

$$\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

$$\in \mathbb{W}_N^A \equiv \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\} \quad A_{N-1} \text{ 型 Weyl chamber}$$

- 伊藤の公式 (行列値確率過程バージョン)

$$\begin{aligned} d\Lambda(t) &= dU(t)^\dagger M(t) U(t) + U(t)^\dagger dM(t) U(t) + U(t)^\dagger M(t) dU(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} dU(t)^\dagger dM(t) U(t) + \frac{1}{2} dU(t)^\dagger M(t) dU(t) + \frac{1}{2} U(t) dM(t) dU(t) \end{aligned}$$

$\Downarrow$

[Bru (1991), K-Tanemura (2004)]

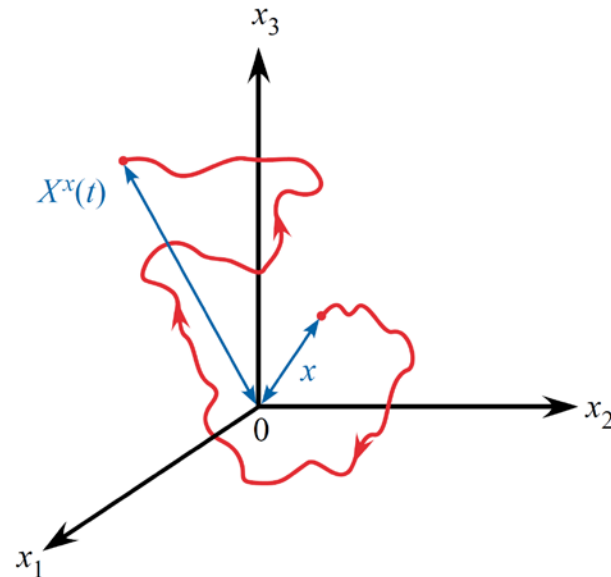
$$d\lambda_j(t) = dB_j(t) + \sum_{1 \leq k \leq N: k \neq j} \frac{dt}{\lambda_j(t) - \lambda_k(t)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0$$

つまり, 「固有値プロセス = Dyson モデル」

[aspect 1]

3 次元 Bessel 過程 $\iff$ 3 次元 BM の動径成分

N 粒子 Dyson 模型 $\iff$ $N \times N$ エルミート行列値 BM の
固有値成分



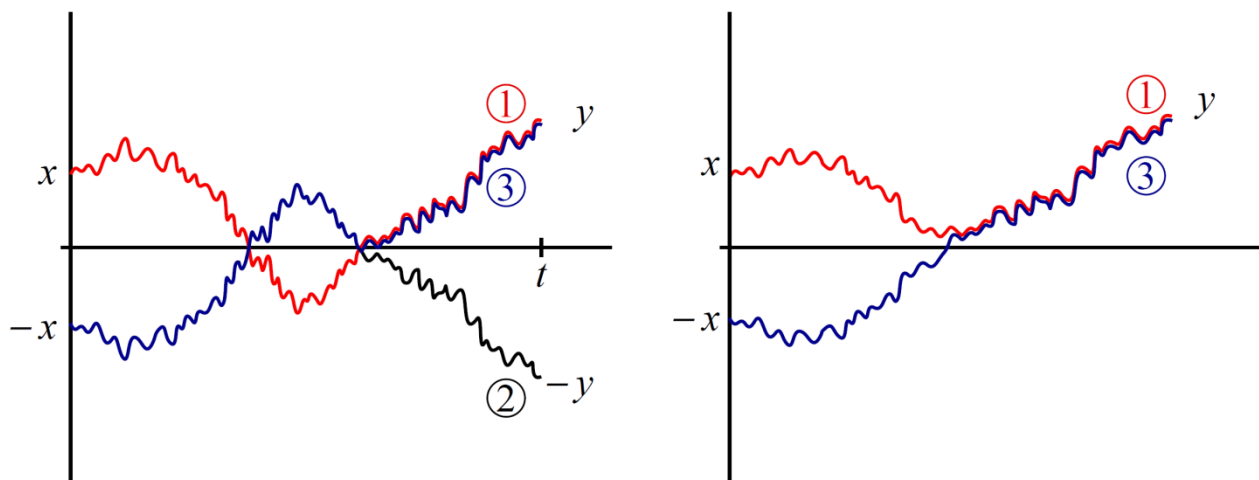
- 3次元 Bessel 過程の推移確率密度 ($D = 3 \iff \nu = 1/2$)

$$\begin{aligned}
 p_t^{(3)}(x, y) &= \frac{y}{x} \left\{ p_t(x, y) - p_t(-x, y) \right\} \\
 &= \frac{\phi(y)}{\phi(x)} \sum_{\sigma \in \{\text{id.}, \text{ref.}\}} \text{sgn}(\sigma) p_t(\sigma(x), y)
 \end{aligned}$$

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t} \quad \text{BM の推移確率密度}$$

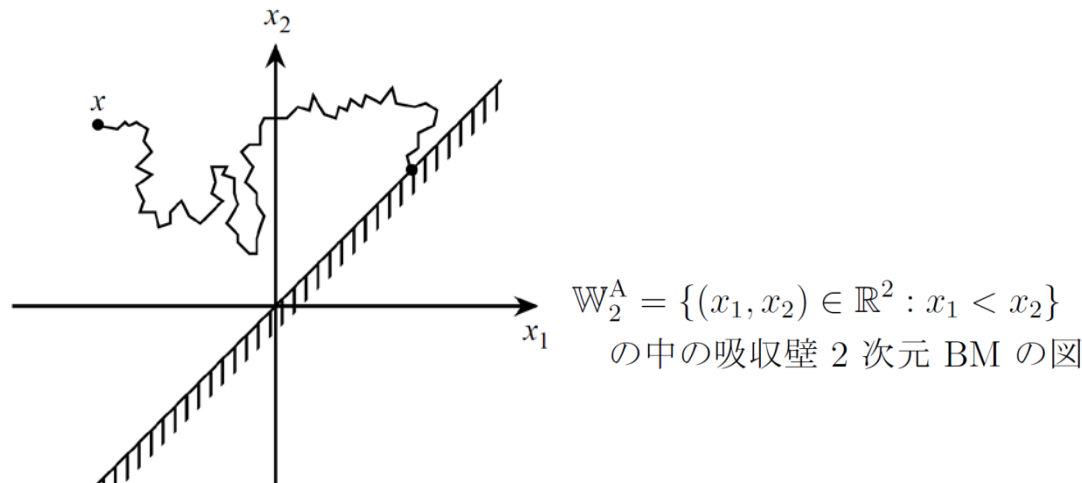
$$\phi(x) = x : \quad \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = 0, \quad \phi(0) = 0$$

調和関数 (harmonic function)



- 非衝突 BM = Weyl chamber $\mathbb{W}_N^A$ 中の吸収壁 BM + 調和変換 (h -transform)

$$\mathbb{W}_N^A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\} \quad A_{N-1} \text{ 型 Weyl chamber}$$



$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in W$$

$$p_t^{\text{non-coll.}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^N p_t(x_{\sigma(j)}, y_j)$$

$$= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} \det_{1 \leq j, k \leq N} [p_t(x_j, y_k)]$$

Karlin-McGregor 行列式 (1959)

$$h_N(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{k-1}]$$

Vandermonde 行列式 $\times (-1)^{N(N-1)/2}$

$$\Delta h_N(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_N(\mathbf{x}) = 0 \quad N \text{ 変数 harmonic function}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t^{\text{non-coll.}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \Delta p_t^{\text{non-coll.}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{j=1}^N \sum_{1 \leq k \leq N: k \neq j} \frac{1}{x_j - x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} p_t^{\text{non-coll.}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Fokker-Planck-Kolmogorov 方程式

$$\Updownarrow$$

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{1 \leq k \leq N: k \neq j} \frac{dt}{X_j(t) - X_k(t)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0.$$

SDE

[aspect 2]

3 次元 Bessel 過程 $\iff$ 原点に吸収壁がある BM + h -変換

$\iff$ 正值に制限された BM

N 粒子 Dyson 模型 $\iff$ $\mathbb{W}_N^A$ 中の吸収壁 BM + h -変換

$\iff$ 非衝突条件下の N 粒子 BM

[aspect 1]

3 次元 Bessel 過程 $\iff$ 3 次元 BM の動径成分
 N 粒子 Dyson 模型 $\iff$ $N \times N$ エルミート行列値 BM の
 固有値成分

[aspect 2]

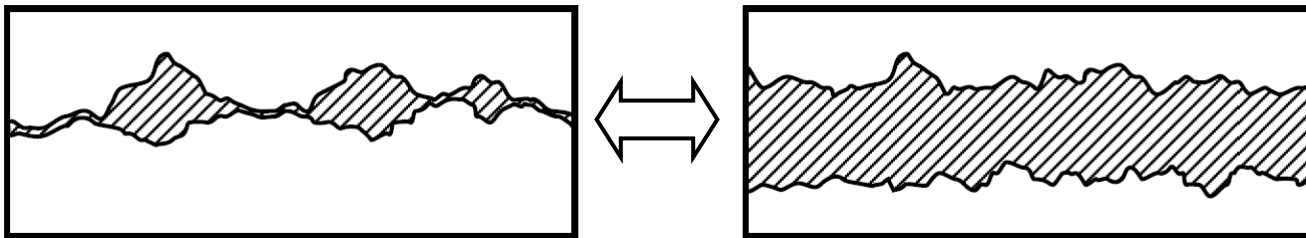
3 次元 Bessel 過程 $\iff$ 原点に吸収壁がある BM + h -変換
 $\iff$ 正值に制限された BM
 N 粒子 Dyson 模型 $\iff$ $\mathbb{W}_N^A$ 中の吸収壁 BM + h -変換
 $\iff$ 非衝突条件下の N 粒子 BM

射影 $\iff$ 制限付きプロセス $\iff$ 長距離相互作用
 “エントロピー力”(配置空間の制限) $\iff$ ゲージ場 (対称性)

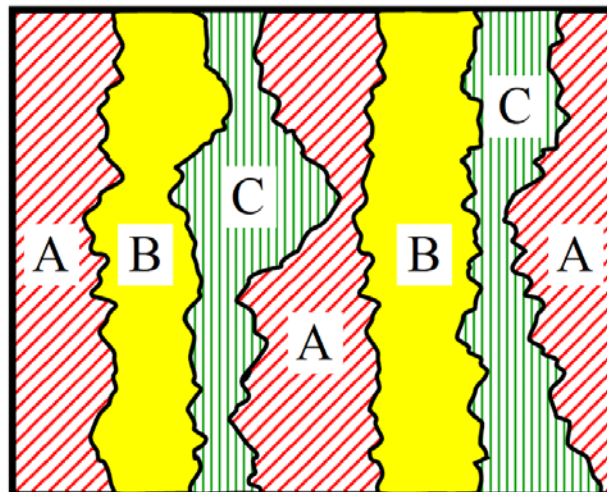
Dyson model = noncolliding Brownian motion

⇒ Vicious Walker Models

- As a model of **Wetting or Melting Transitions**
(Fisher (J. Statistical Physics 1984))

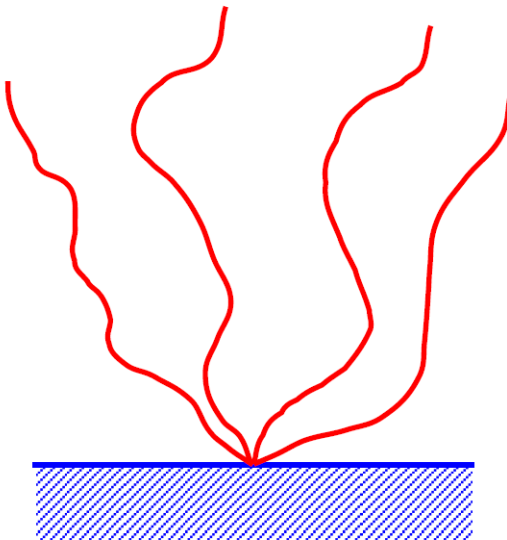


- As a model of **Commensurate-Incommensurate Transitions**
(Huse and Fisher (Physical Review B 1984))

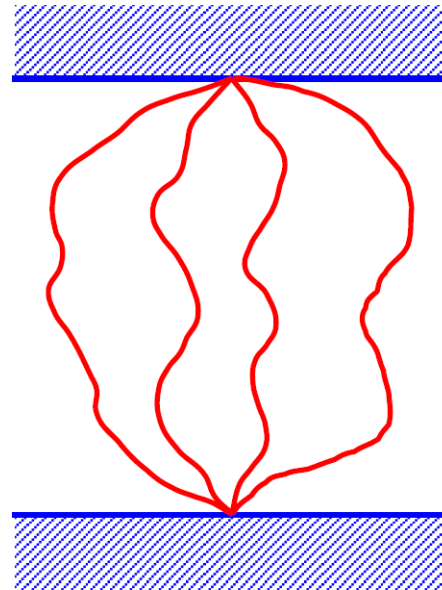


- As a model of **Directed Polymer Networks**
(de Gennes (J. Chemical Phys. 1968),
Essam and Guttman (Phys. Review E 1995))

(a) polymer with **star topology**



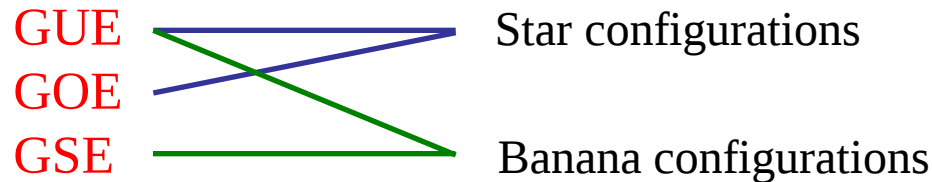
(b) polymer with **watermelon topology**



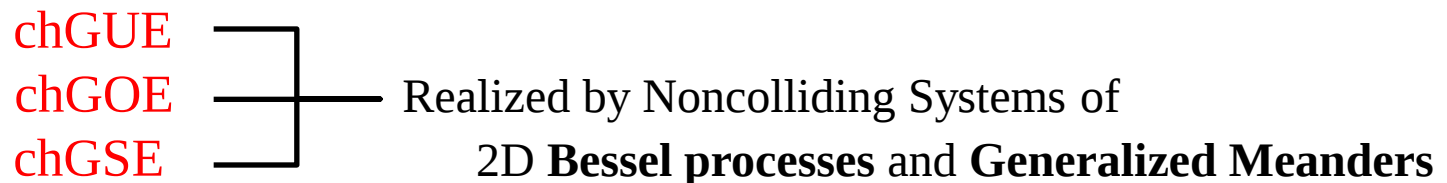
Vicious Walks/Random Matrix 対応

- There are **10 CLASSES** of Gaussian Random Matrix Theories.

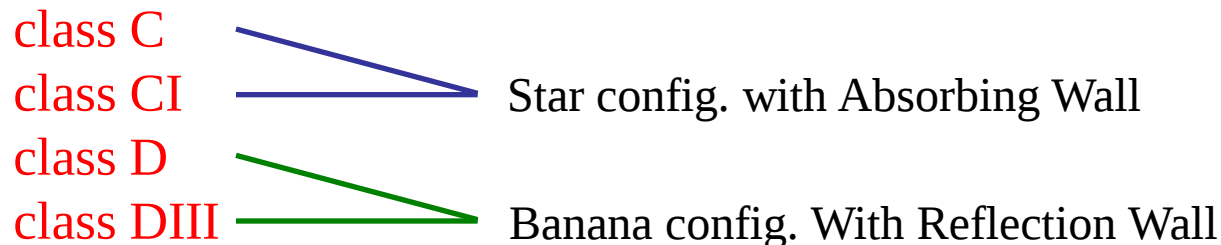
Standard (Wigner-Dyson)



Nonstandard (chiral random matrices) Particle Physics of QCD



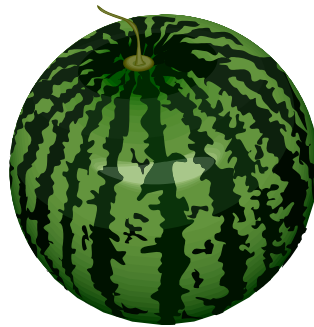
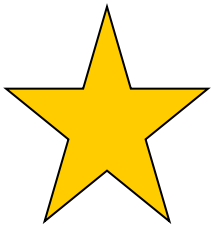
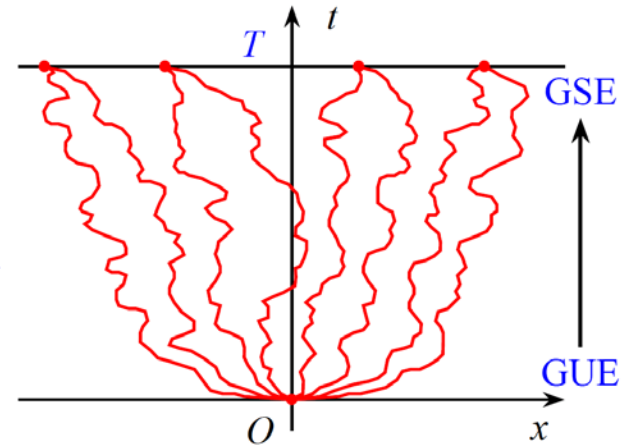
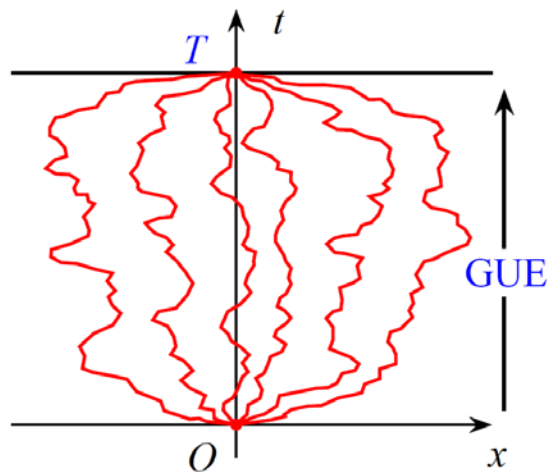
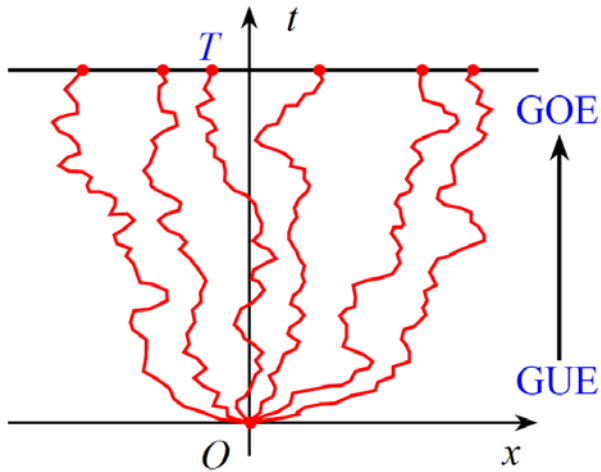
Nonstandard (Altland-Zirnbauer) Mesoscopic Physics with Superconductivity



All of the 10 eigenvalue-distributions can be realized by the
Noncolliding Diffusion Particle Systems (Vicious Walks).

非衝突ランダム曲線 (directed polymers) のトポロジー

⇔ ランダム行列の対称性の転移 (two-matrix models)

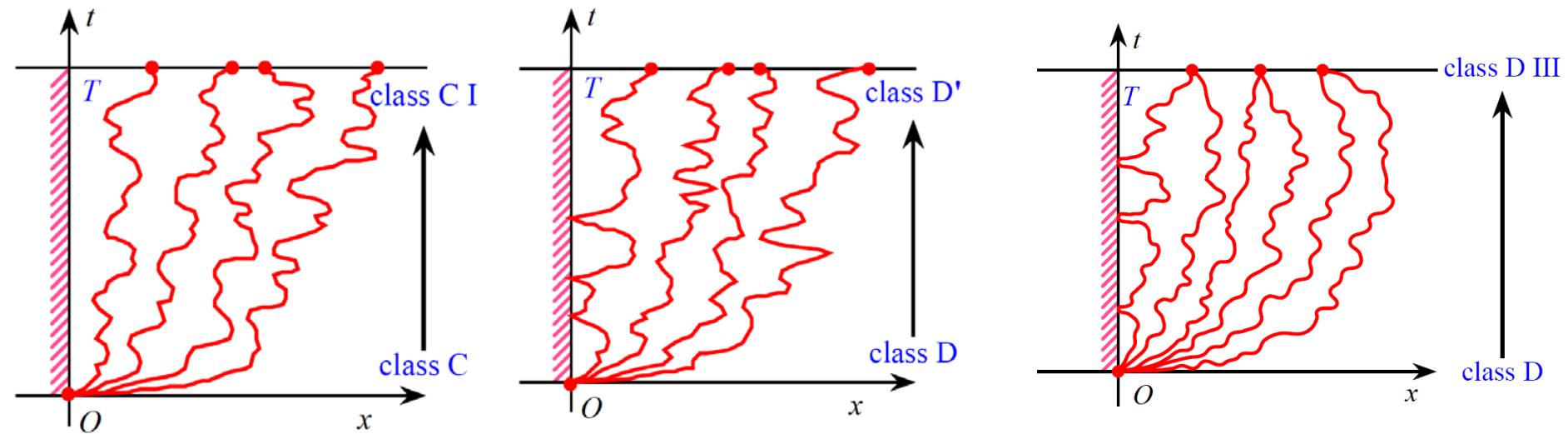


非衝突ランダム曲線 (directed polymers) のトポロジー

⇔ ランダム行列の対称性の転移 (two-matrix models)

壁付き (吸収壁、反射壁)

... Bogoliubov-de Gennes class (Altland-Zirnbauer)



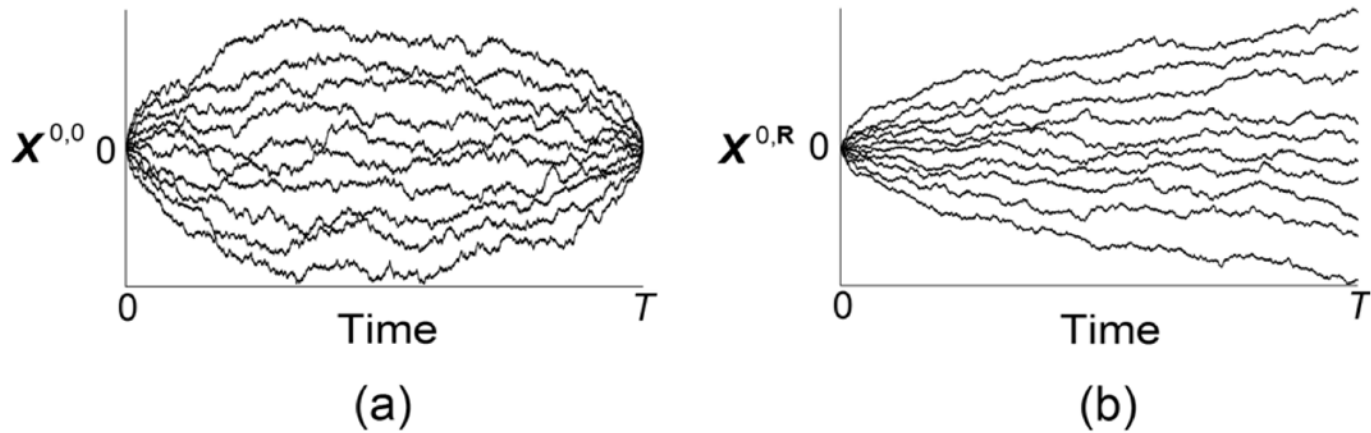


Figure 1. Samples of paths for (a) $X^{0,0}(t)$ and (b) $X^{0,\mathbb{R}}(t)$, $t \in [0, T]$, generated by simulating the corresponding eigenvalue processes of random-matrix models.

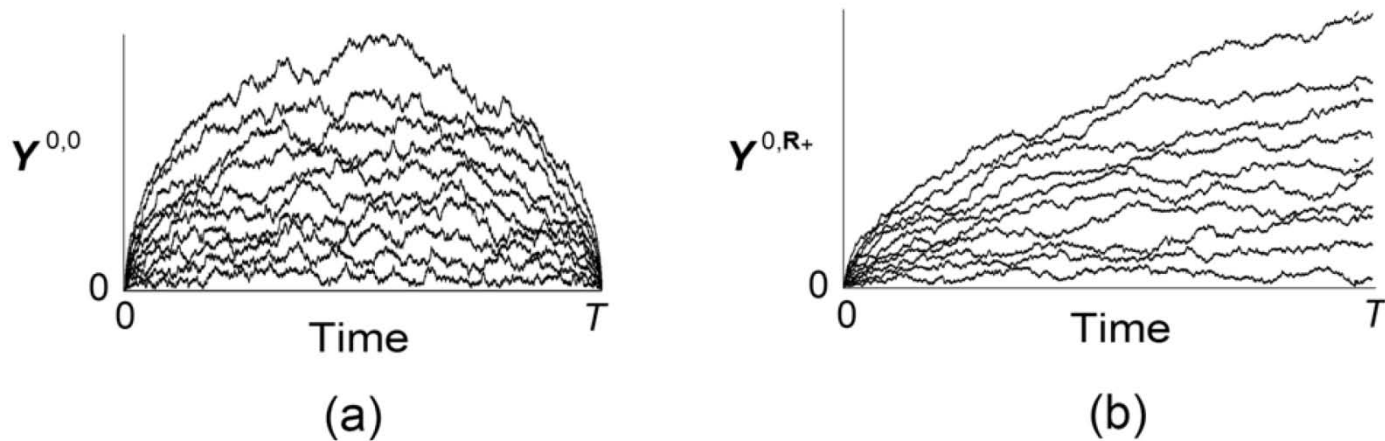
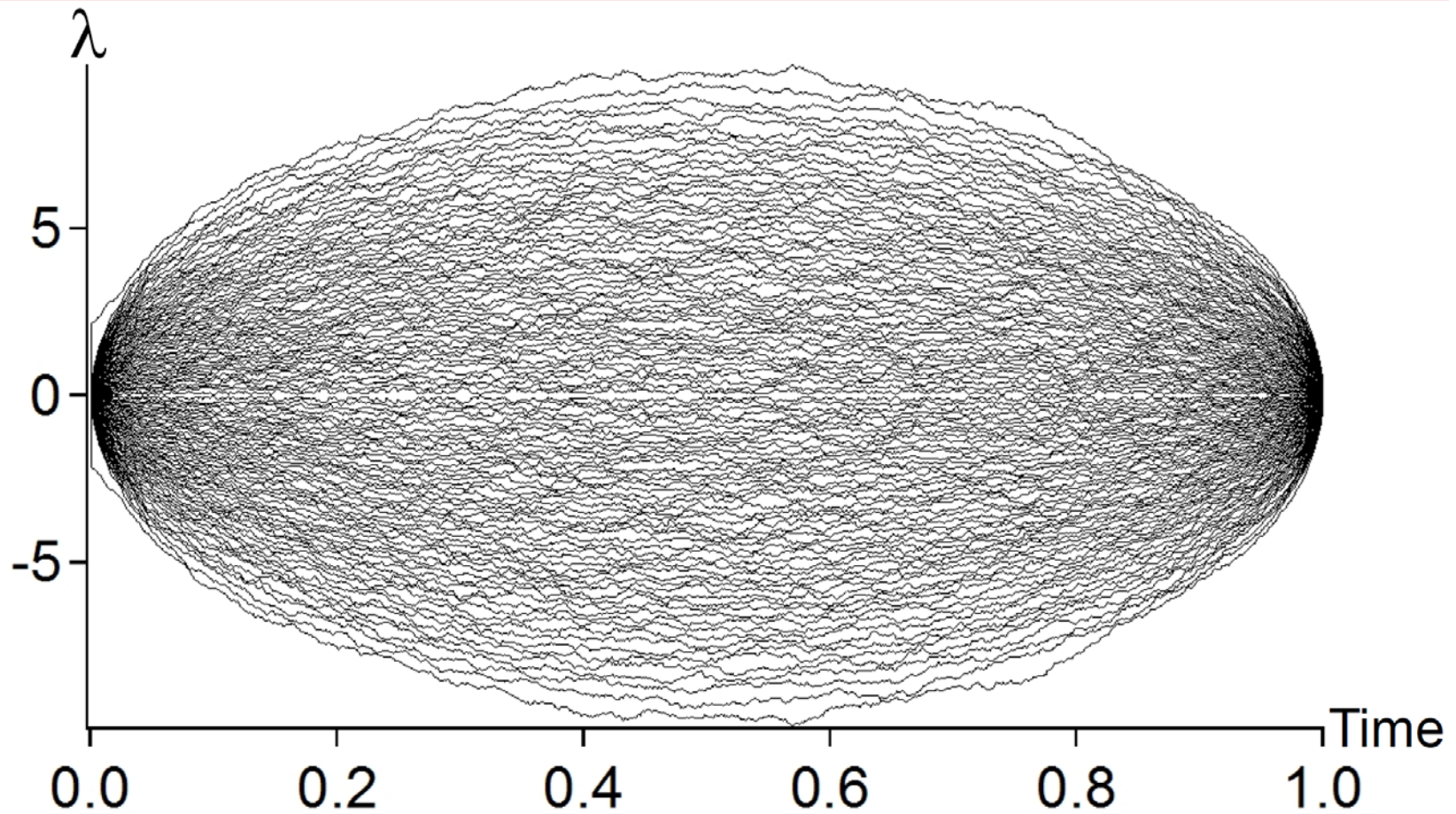


Figure 2. Samples of paths for (a) $Y^{0,0}(t)$ and (b) $Y^{0,\mathbb{R}+}(t)$, $t \in [0, T]$.



We use $50 \times (2 \times 50 + 1) = 5050$ independent Brownian bridges.

- The particle distribution μ_{Ai} with the *Airy kernel* is highly asymmetric: As a matter of fact, the particle density $\rho_{\text{Ai}}(x) = K_{\text{Ai}}(x|x)$ decays rapidly to zero as $x \rightarrow \infty$, but it diverges

$$\rho_{\text{Ai}}(x) \simeq \frac{1}{\pi}(-x)^{1/2} \rightarrow \infty \quad \text{as } x \rightarrow -\infty.$$

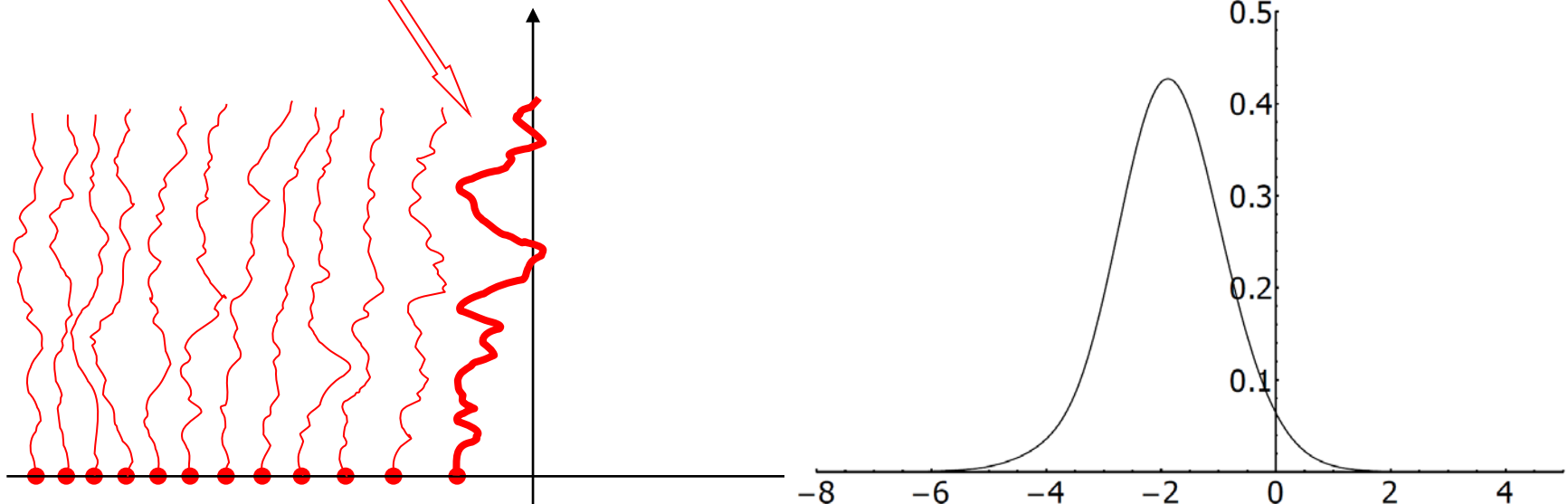
- Let R be the position of the rightmost particle on $\mathbb{R}$ in μ_{Ai} . Then its distribution is given by the celebrated *Tracy-Widom distribution* (Tracy-Widom (1994))

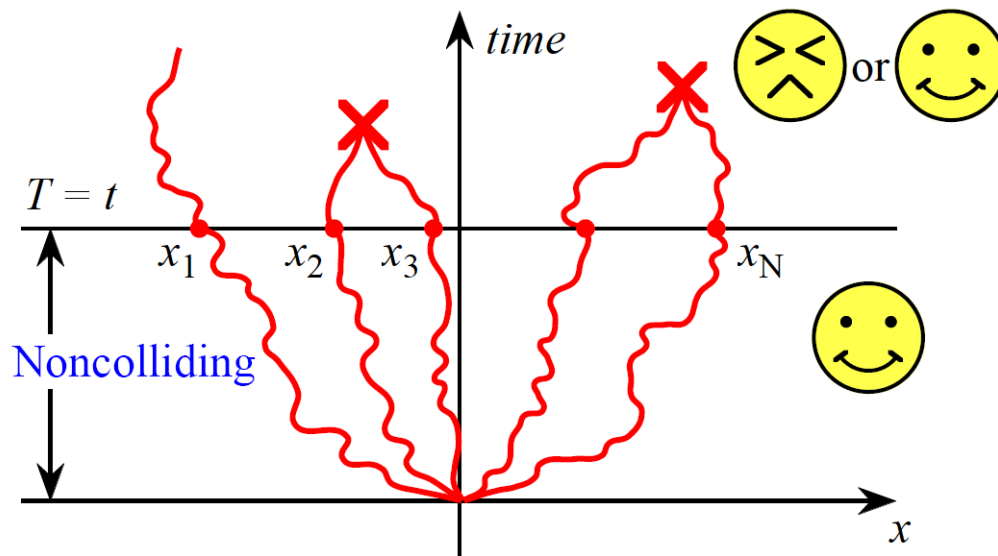
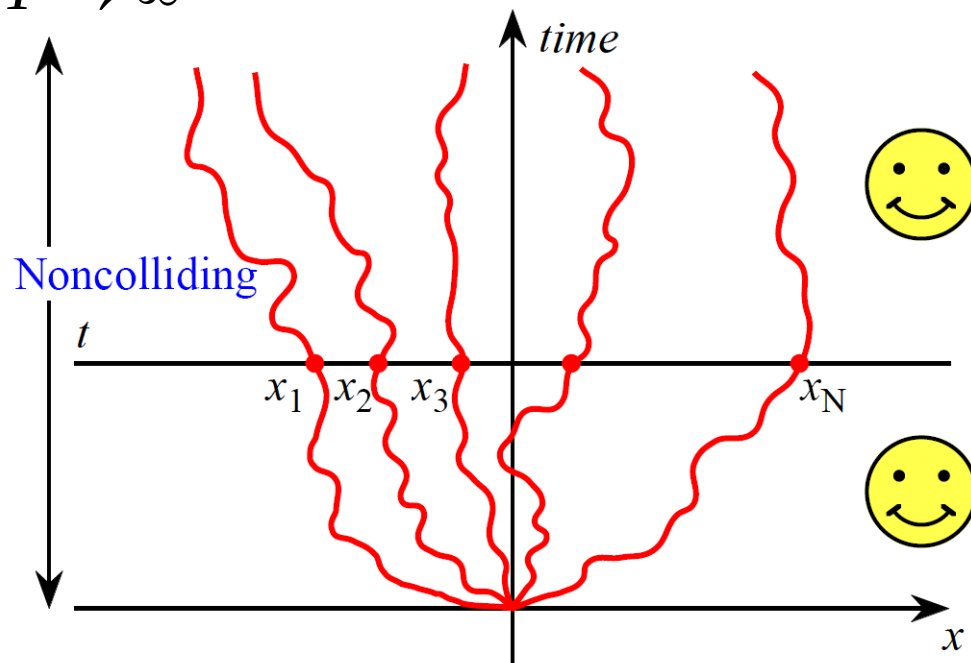
$$\mu_{\text{Ai}}(R < x) = \exp \left[- \int_x^\infty (y - x)(q(y))^2 dy \right],$$

where $q(x)$ is the unique solution of the Painlevé II equation $q'' = xq + 2q^3$ satisfying the boundary condition $q(x) \simeq \text{Ai}(x)$ in $x \rightarrow \infty$.

rightmost path

probability density function of the Tracy-Widom distribution



Case $t = T$ Case $T \rightarrow \infty$ 

Vicious Walker Models

55

PhysiCS

Focus: How Animals Avoid Each Other

Published November 12, 2010 | *Phys. Rev. Focus* **26**, 20 (2010) | DOI: 10.1103/PhysRevFocus.26.20

Foraging animals or other randomly moving entities can more easily avoid each other by taking more long-distance jumps,





Vicious walkers and random matrices

May 16th – 27th, Catherine Donati-Martin, Sandrine Péché,
Grégory Schehr

Orateurs

Cours introductif: J.B. Zuber (Paris)

Partie mathématique: K. Johansson (Stockholm) et C. Krattenthaler (Vienne)

Partie physique: S.N. Majumdar (Orsay) et M. Katori (Tokyo)

Objectifs

Cette école s'articule autour des développements récents en théorie des matrices aléatoires et leur connexion avec les marches aléatoires répulsives. Depuis les travaux pionniers de P.G. de Gennes et M.E. Fisher, les marches aléatoires répulsives ont été abondamment étudiées en physique statistique, dans différents contextes comme la physique des polymères, la transition de mouillage ou les problèmes de temps de premier passage. Par ailleurs, il est maintenant bien connu, depuis le "mouvement Brownien de Dyson" que ces modèles de marches aléatoires répulsives sont intimement reliés aux valeurs propres de matrices aléatoires. Durant ces dernières années, ces modèles de marches aléatoires répulsives, en connexion avec les matrices aléatoires ont également été beaucoup étudiés par les mathématiciens dans divers contextes comme les statistiques d'extrema ou les problèmes de pavages aléatoires. Il apparaît donc clairement qu'il s'agit d'un domaine où les interactions entre physiciens théoriciens et mathématiciens peuvent être bénéfiques. Le but de cette école est donc d'apporter aux étudiants la connaissance d'outils théoriques pour aborder ces thématiques en rapide évolution et favoriser les échanges entre ces deux communautés.

E
JRIER
GIE.SANTÉ

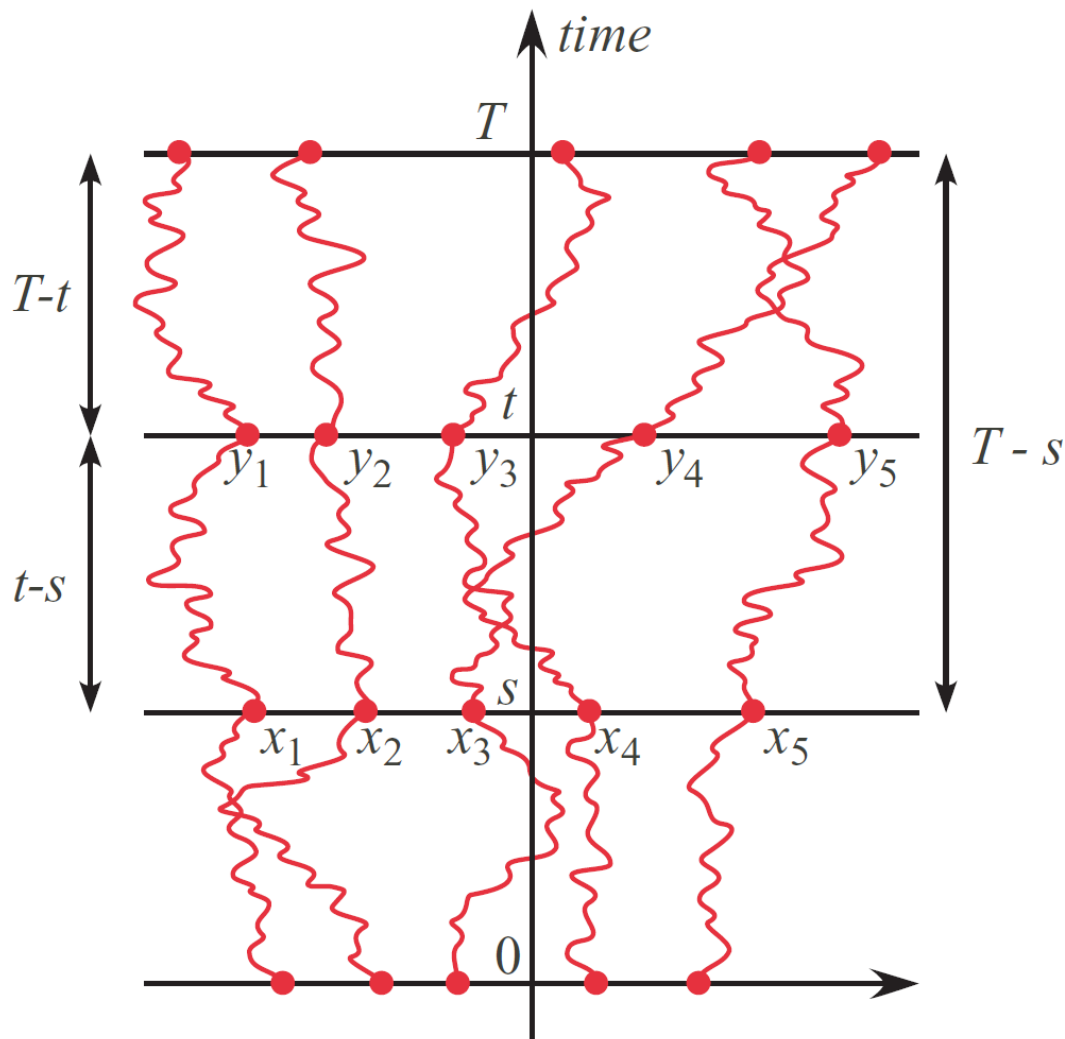
PROGRAMME 2011

<http://houches.ujf-grenoble.fr>

ics School is affiliated with Université Joseph Fourier - Grenoble (UJF) and Grenoble-INP, and is supported by the Université Grenoble, the Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) and the Direction des Sciences de la Matière du Énergie Atomique (CEA/DSM). Address: Ecole de Physique des Houches, Côte des Chavants, F-74310 Les Houches, France.

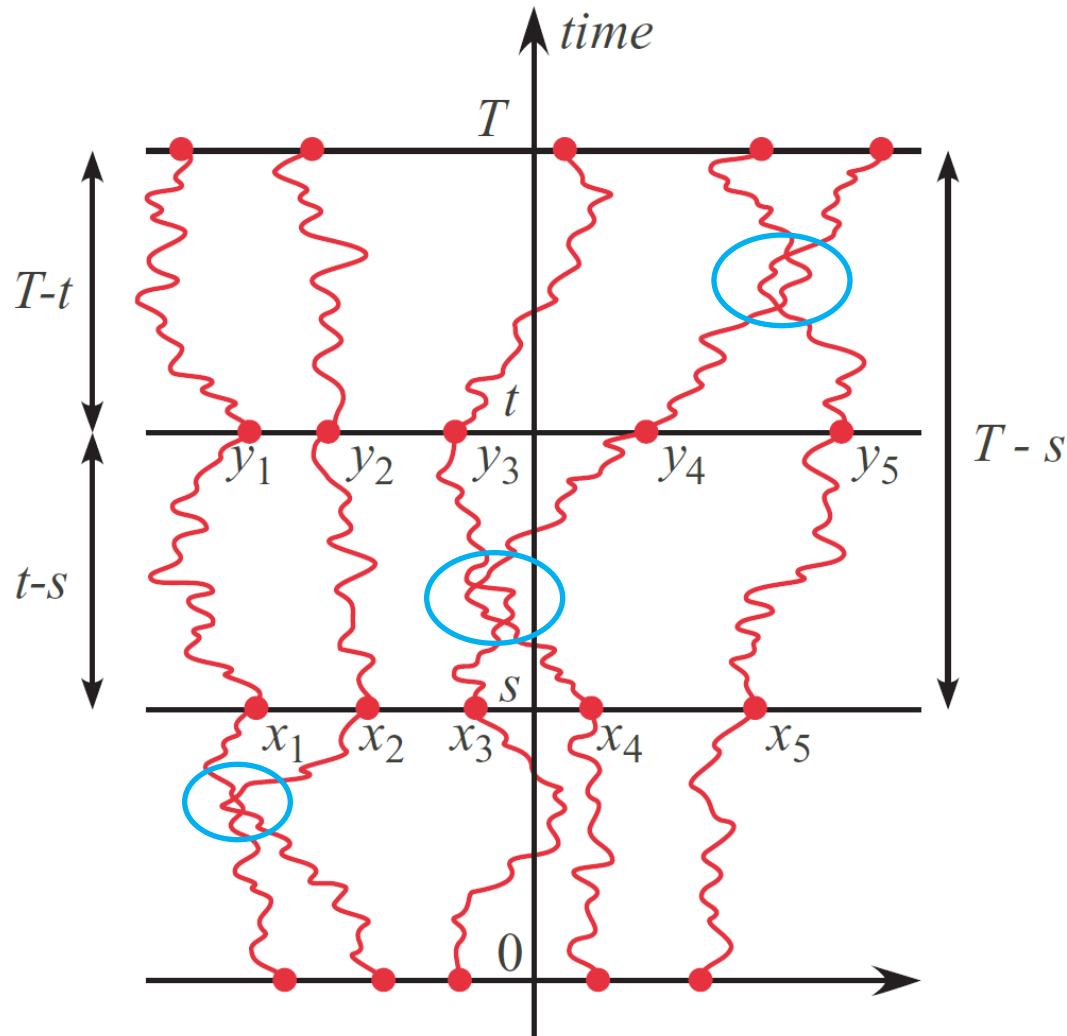
4. 量子戸田格子と O'Connell 過程

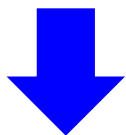
“少しは friendly な vicious walkers” model



4. 量子戸田格子と O'Connell 過程

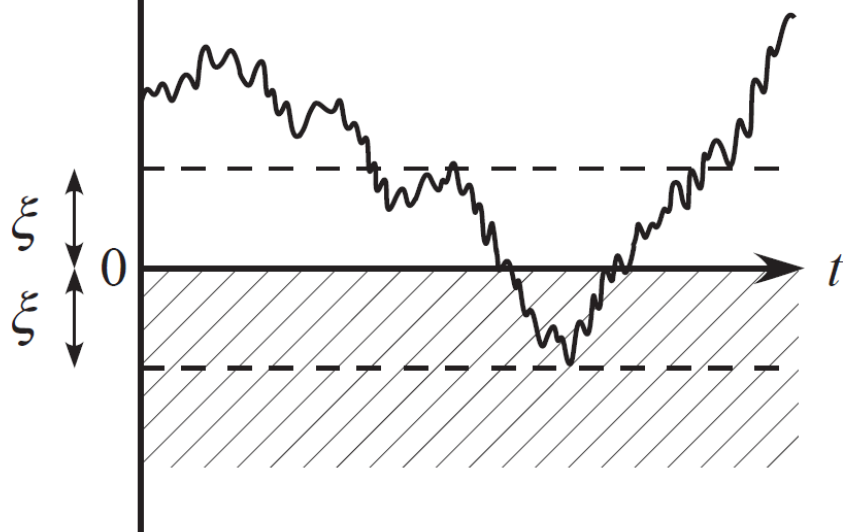
“少しは friendly な vicious walkers” model



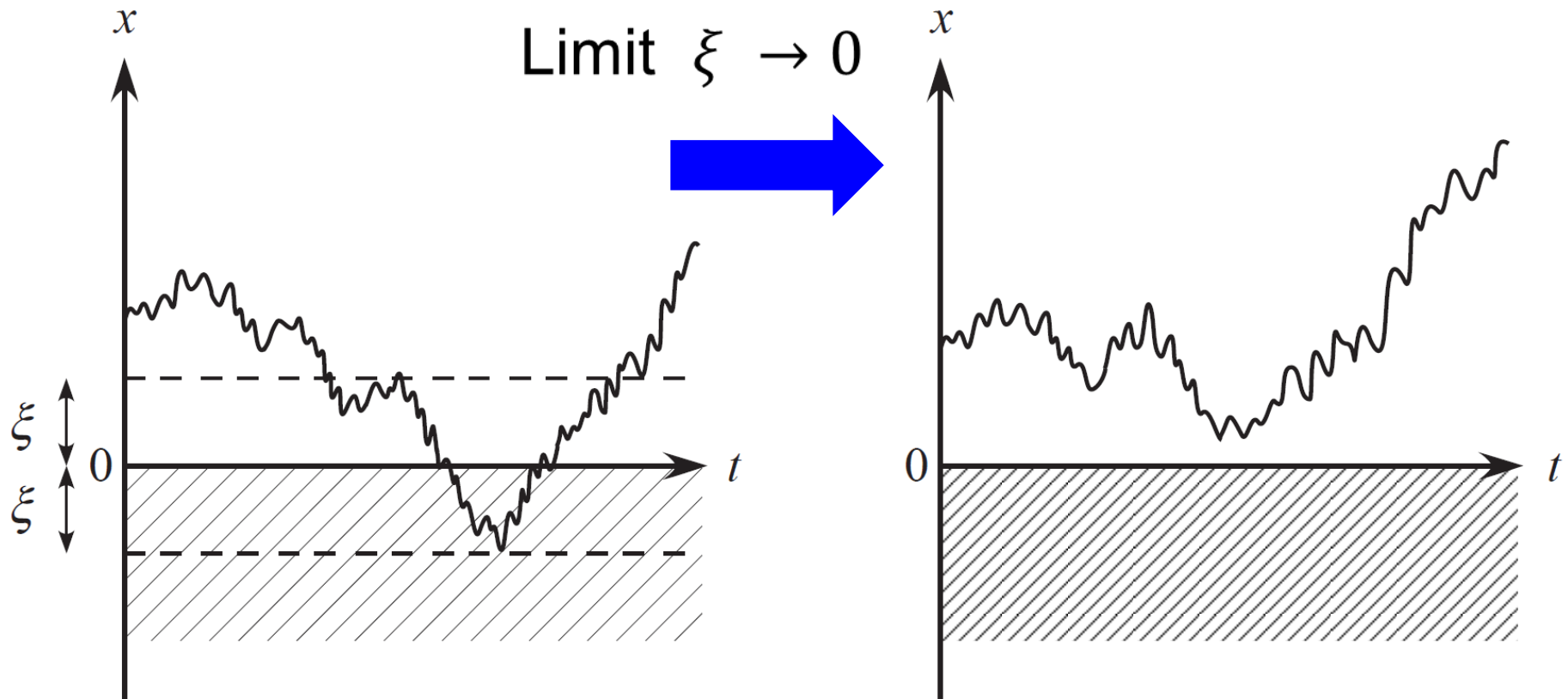


$\xi > 0$ の距離だけ「あそび」を付ける

$$\begin{aligned} P(t) &= \text{survival probability at time } t \\ \frac{dP(t)}{dt} &= -V(B(t))P(t), \quad t \geq 0 \\ \text{decay rate} \quad V(x) &= \frac{1}{2\xi^2}e^{-2x/\xi}, \quad x \in \mathbb{R} \\ &\quad \text{(湯川ポテンシャル)} \end{aligned}$$



$\xi \rightarrow 0$ 極限で「原点吸収壁 Brown 運動」に収束
 (+ h -変換) $\implies$ 正值条件付 BM = BES(3)



- 時間 $[0, t]$ での Brown 経路が与えられたときの survival probability

$$\begin{aligned} P\left(t \mid \{B(s) : 0 \leq s \leq t\}\right) &= \exp \left\{ - \int_0^t V(B(s)) ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \frac{1}{2\xi^2} \int_0^t e^{-2B(s)/\xi} ds \right\}. \end{aligned}$$

- これを, すべての Brown 経路について足し合わせる.

(ただし, 初期点と終点は固定)

経路積分 = Brown 運動に対する期待値

[Feynman-Kac 公式]

$$Q(t, y|x) = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ - \int_0^t V(B(s)) ds \right\} \mathbf{1}(B(0) = y, B(t) = x) \right].$$

- これは, 次の拡散方程式の Green 関数 (推移確率密度)

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t, y|x) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x) \right) Q(t, y|x),$$

$$\text{初期条件} \quad Q(0, y|x) = \delta(x - y).$$

Schrödinger 方程式



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \psi(t, x)$$

拡散方程式 (backward Kolmogorov equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t, y|x) = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x) \right\} Q(t, y|x)$$

ポテンシャル $\Longleftrightarrow$ killing term

- Mutually killing Brownian motion with N particles

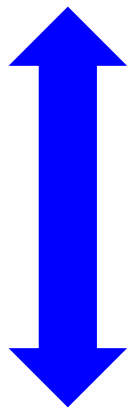
$$\begin{aligned}
 P_N(t) &= \text{survival probability of all } N \text{ particles at time } t \\
 \frac{dP_N(t)}{dt} &= -V_N(\mathbf{B}(t))P_N(t), \quad t \geq 0,
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_N(t))$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{\xi^2} \sum_{j=1}^{N-1} e^{-(x_{j+1}-x_j)/\xi}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

(戸田格子のポテンシャル)

- N 粒子拡散方程式 (killing 項付き)



$$\frac{\partial}{\partial t} Q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - V_N(\mathbf{x}) \right\} Q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x})$$

N 粒子 Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_N(t, \mathbf{x}) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + V_N(\mathbf{x}) \right\} \Psi_N(t, \mathbf{x}),$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{\xi^2} \sum_{j=1}^{N-1} e^{-(x_{j+1} - x_j)/\xi}$$

[量子戸田格子]

固有関数 = Whittaker 関数 $\psi_{\boldsymbol{\nu}}^{(N)}(\mathbf{x})$
 (class-one $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$ -Whittaker function)

Givental's integral representation

Let $\mathbf{T}$ denote a triangular array with size N , $\mathbf{T} = (T_{k,j}, 1 \leq j \leq k \leq N)$. For a given $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, let $\Gamma_N(\mathbf{x})$ be the space of all real triangular arrays $\mathbf{T}$ with size N conditioned

$$T_{N,j} = x_j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

We write the integral of a function f of $\mathbf{T}$ over $\Gamma_N(\mathbf{x})$ as

$$\int_{\Gamma_N(\mathbf{x})} f(\mathbf{T}) d\mathbf{T} \equiv \prod_{k=1}^N \prod_{j=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} dT_{k,j} f(\mathbf{T}) \prod_{\ell=1}^N \delta(T_{N,\ell} - x_\ell).$$

Then

$$\begin{aligned} \psi_{\boldsymbol{\nu}}^{(N)}(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_N(\mathbf{x})} \exp \left[\sum_{k=1}^N \nu_k \left(\sum_{j=1}^k T_{k,j} - \sum_{j=1}^{k-1} T_{k-1,j} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^k \left\{ e^{-(T_{k,j} - T_{k+1,j})} + e^{-(T_{k+1,j+1} - T_{k,j})} \right\} \right] d\mathbf{T}. \end{aligned}$$

Givental, A.: Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture. In: Topics in Singular Theory, AMS Trans. Ser. 2, vol. 180, pp.103-115, AMS, Rhode Island (1997)

- mutually-killing BM において「 N 粒子全員生存」のときの Green 関数（推移確率密度）

$$Q_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|\mathbf{k}|^2/2} \psi_{i\xi\mathbf{k}}^{(N)}(\mathbf{x}/\xi) \psi_{-i\xi\mathbf{k}}^{(N)}(\mathbf{y}/\xi) s_N(\xi\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

ただしここで,

$$s_N(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^N N!} \prod_{1 \leq j < \ell \leq N} |\Gamma(i(k_\ell - k_j))|^{-2} \quad \text{Sklyanin 測度}$$

for $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^N$.

- Euler の反転 公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ より, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\prod_{1 \leq j < \ell \leq N} |\Gamma(i(k_\ell - k_j))|^{-2} = \prod_{1 \leq j < \ell \leq N} \left\{ \underline{(k_\ell - k_j)} \frac{\sinh \pi(\underline{k_\ell - k_j})}{\pi} \right\}.$$

- mutually-killing Brownian motion **conditioned to survive forever**

推移確率密度

$$P_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{\psi_0^{(N)}(\mathbf{y}/\xi)}{\psi_0^{(N)}(\mathbf{x}/\xi)} Q_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^N, t \geq 0.$$

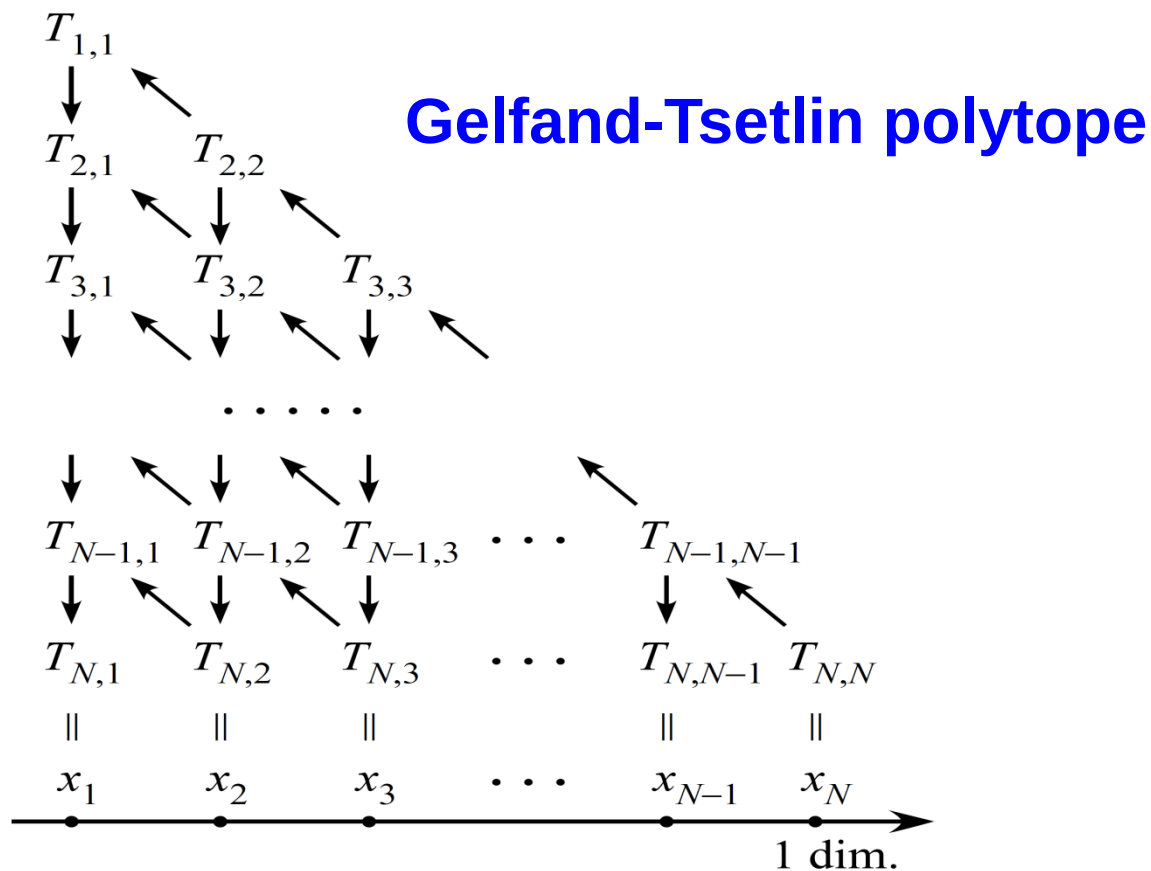
SDE

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \left. \frac{\partial \log \psi_0^{(N)}(\mathbf{x}/\xi)}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)} dt, \quad 1 \leq j \leq N, t \geq 0$$

[1] O'Connell, N.: Directed polymers and the quantum Toda lattice. Ann. Probab.(in press); arXiv:math.PR/0910.0069

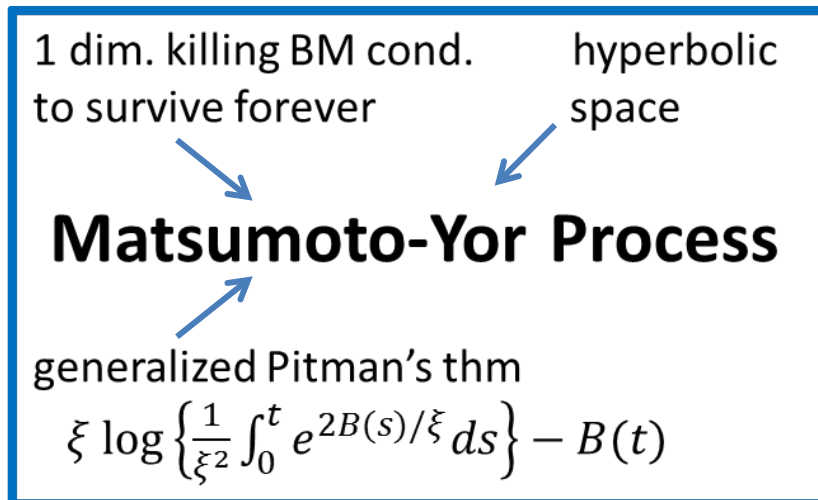
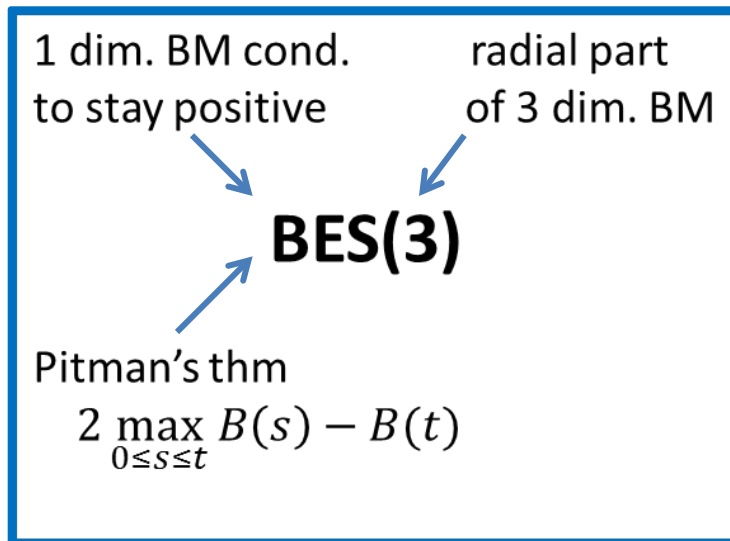
[2] Katori, M.: O'Connell's process as a vicious Brownian motion. Phys. Rev. E **84**, 061144/1-11 (2011)

$$\psi_{\boldsymbol{\nu}}^{(N)}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_N(\mathbf{x})} \exp \left[\sum_{k=1}^N \nu_k \left(\sum_{j=1}^k T_{k,j} - \sum_{j=1}^{k-1} T_{k-1,j} \right) - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^k \left\{ e^{-(T_{k,j} - T_{k+1,j})} + e^{-(T_{k+1,j+1} - T_{k,j})} \right\} \right] d\mathbf{T}.$$



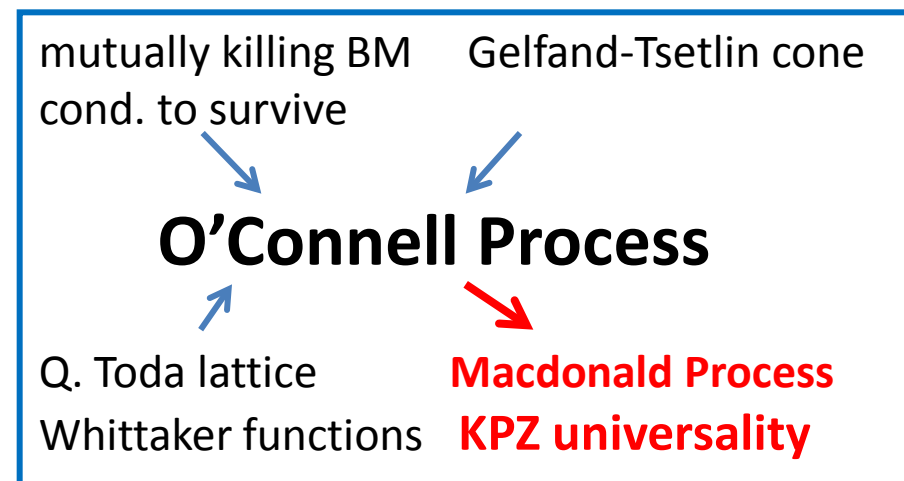
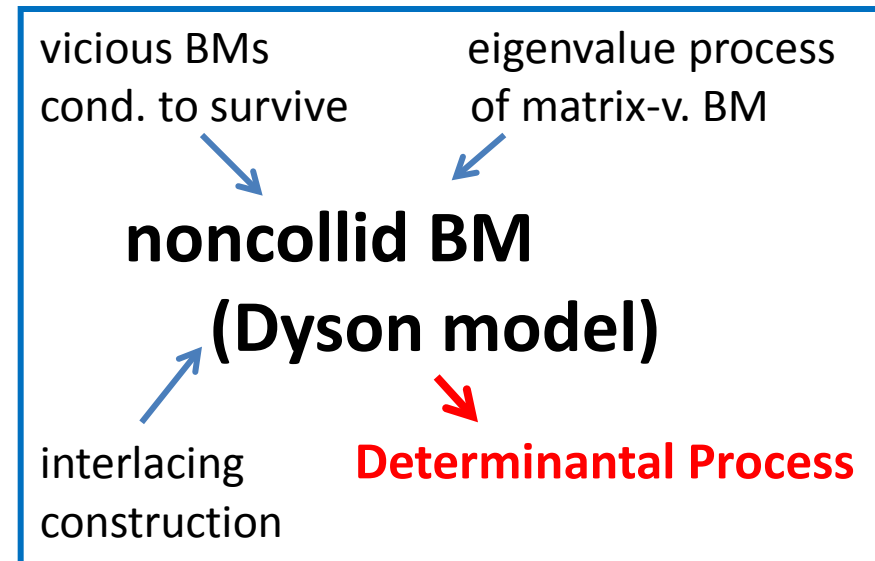
5. まとめ

multi-variate extensions



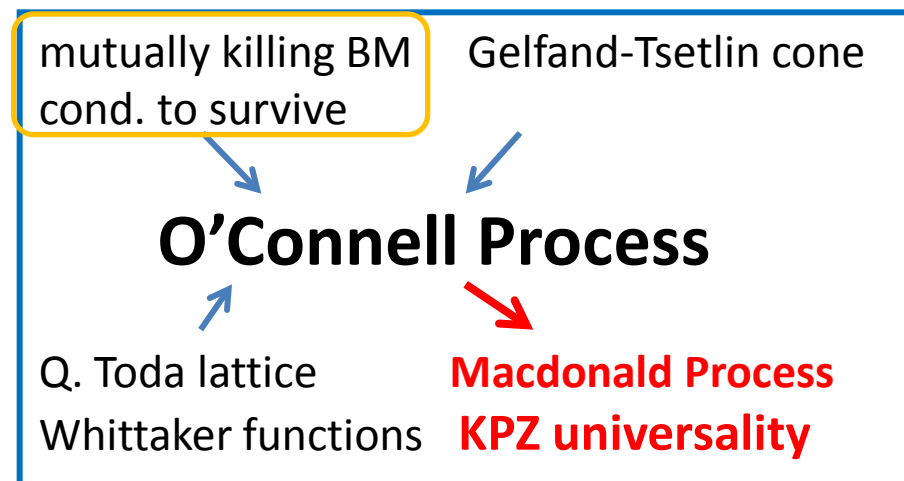
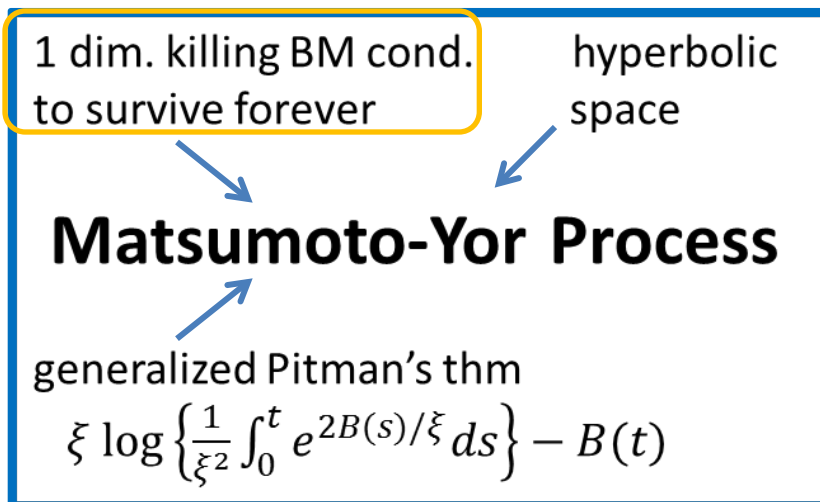
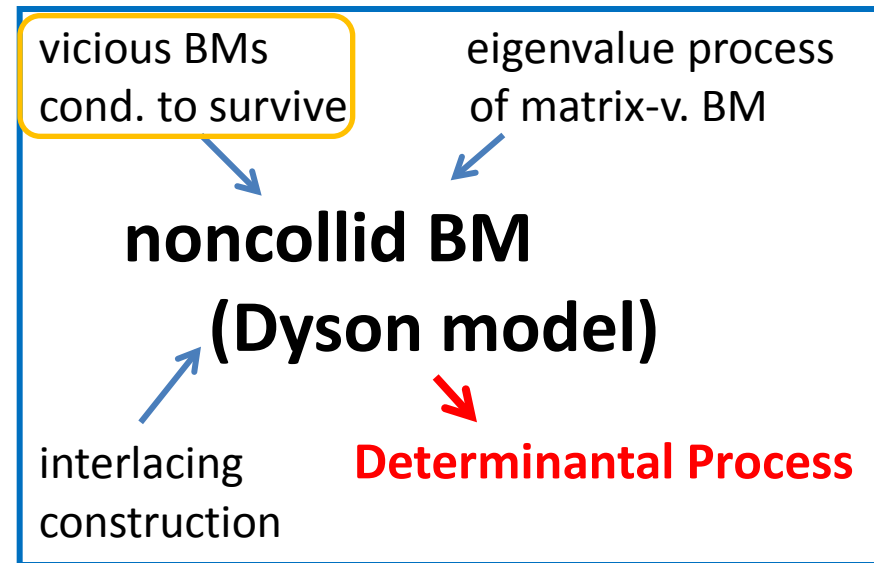
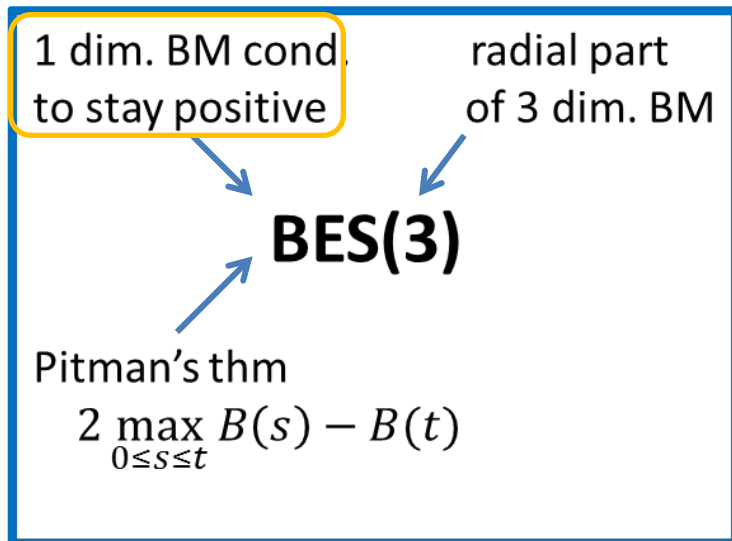
multi-variate extensions

tropical analogue $\xi \rightarrow 0$



5. まとめ : 今回の講演(条件付きBM)

multi-variate extensions

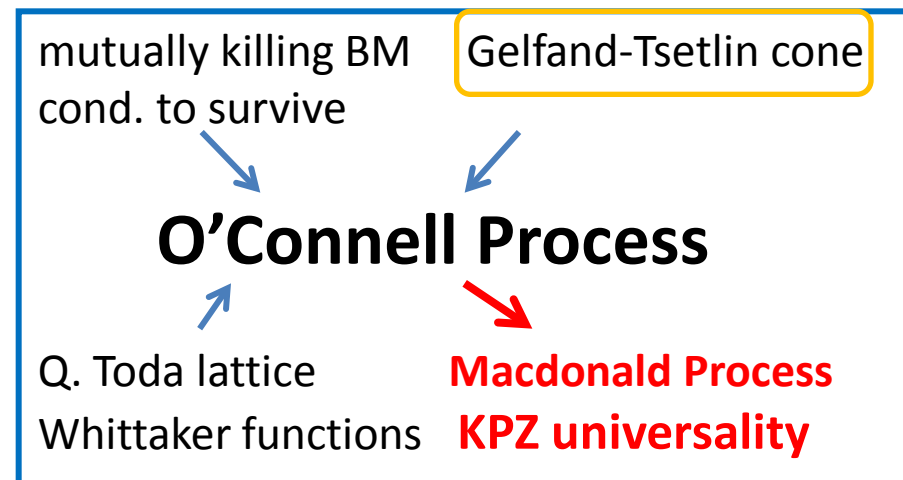
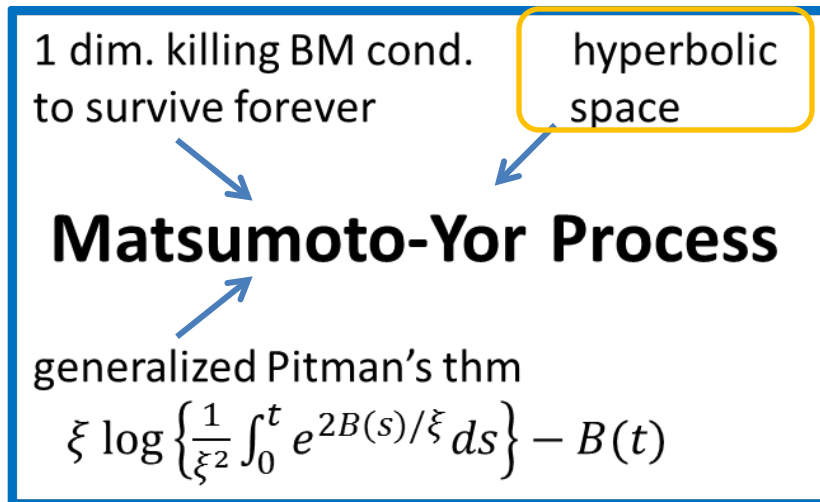
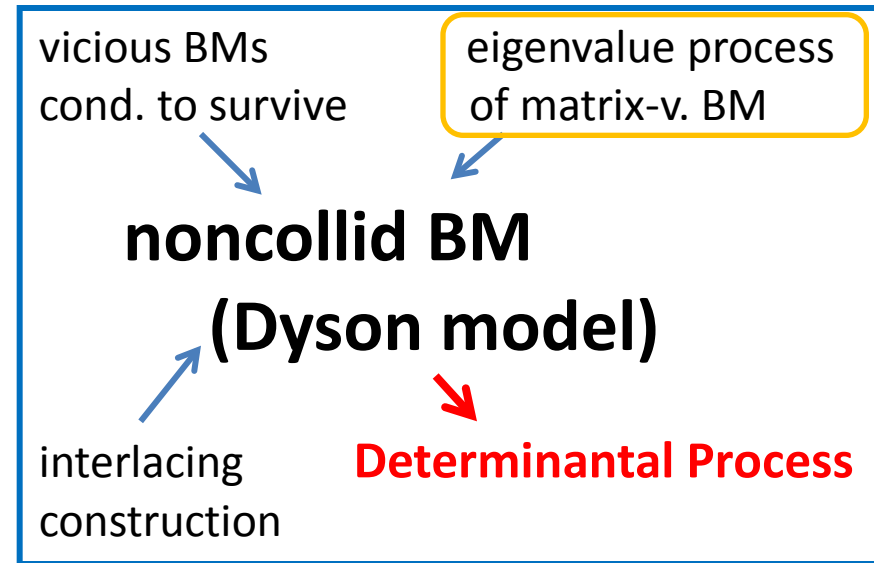
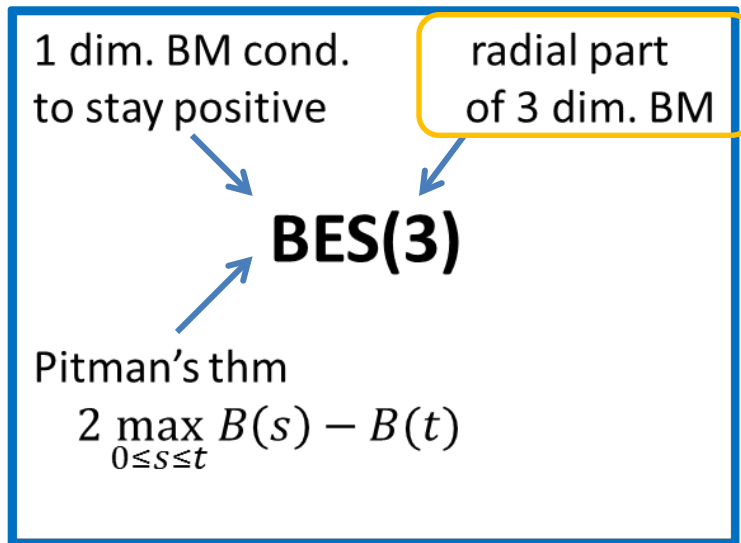


tropical analogue $\xi \rightarrow 0$

multi-variate extensions

5. まとめ :代数的・幾何学的

multi-variate extensions

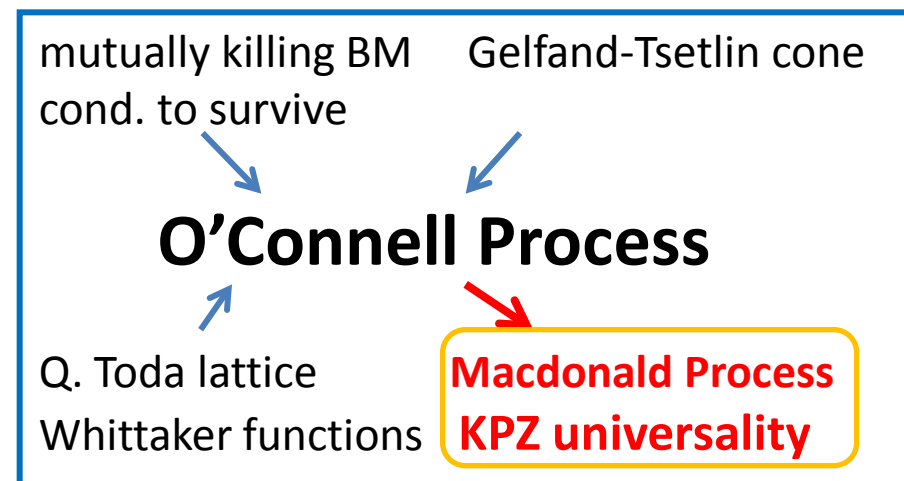
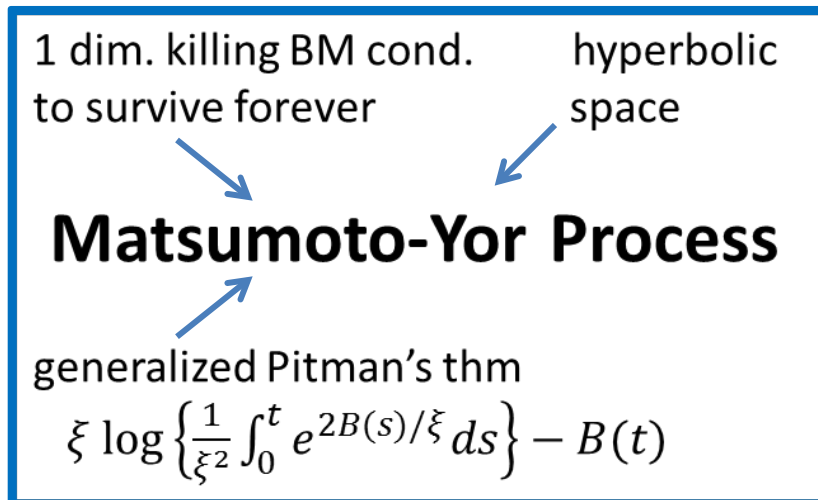
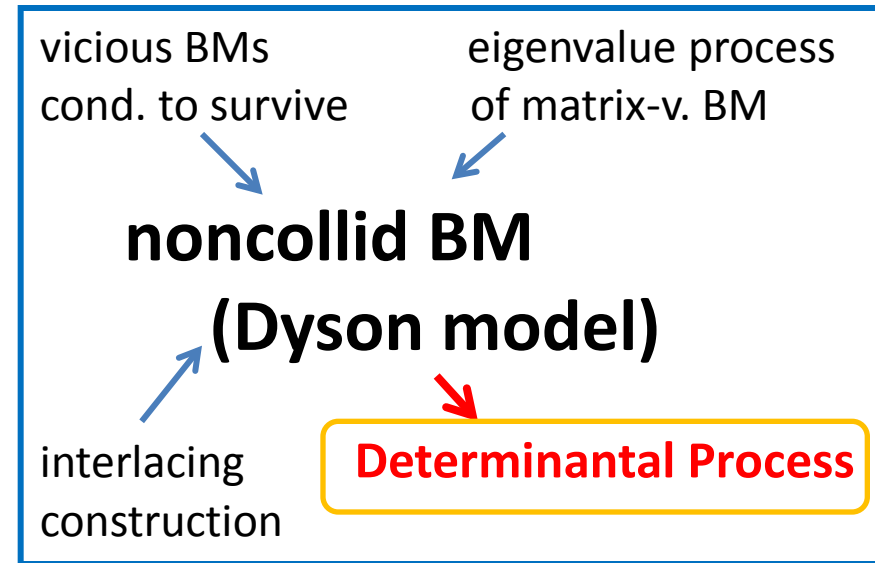
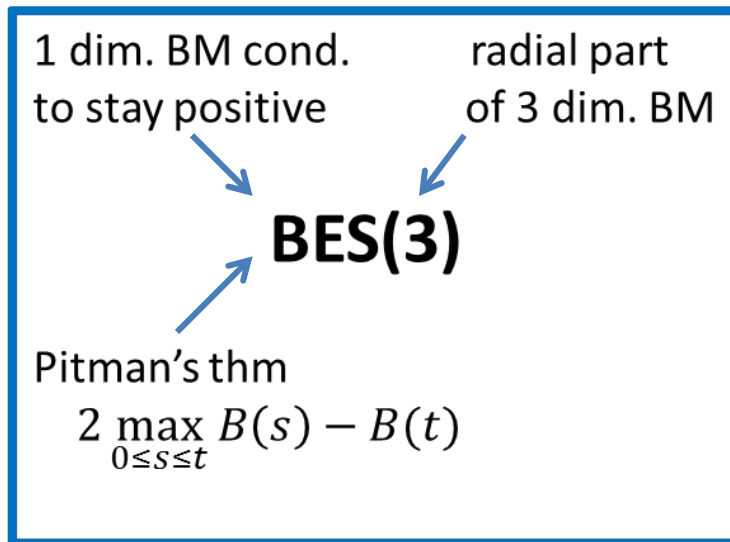


tropical analogue $\xi \rightarrow 0$

multi-variate extensions

5. まとめ : 可積分性 (明日の笹本氏、木村太郎氏の講演)

multi-variate extensions

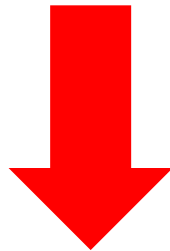
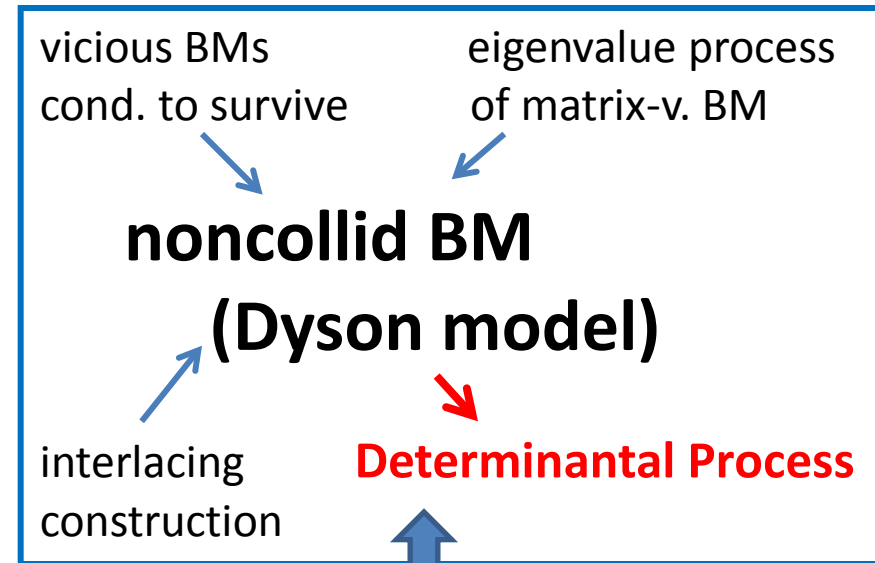
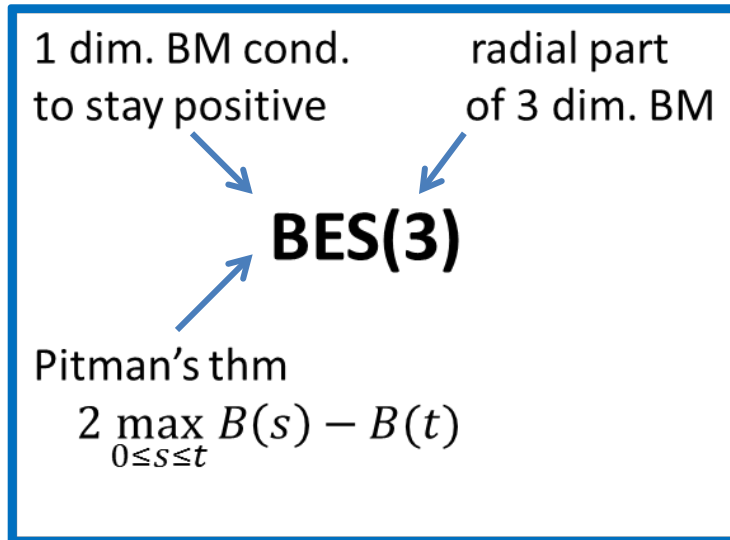


tropical analogue $\xi \rightarrow 0$

multi-variate extensions

5. まとめ：共形不変性(共形マルチンゲール性)

multi-variate extensions



複素化
共形不変性

Schramm-Loewner Evolution (SLE)

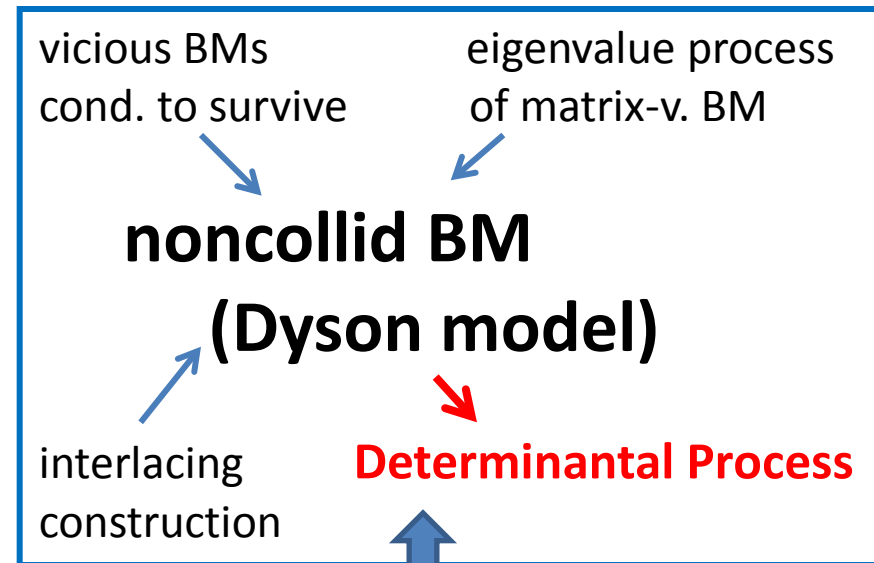
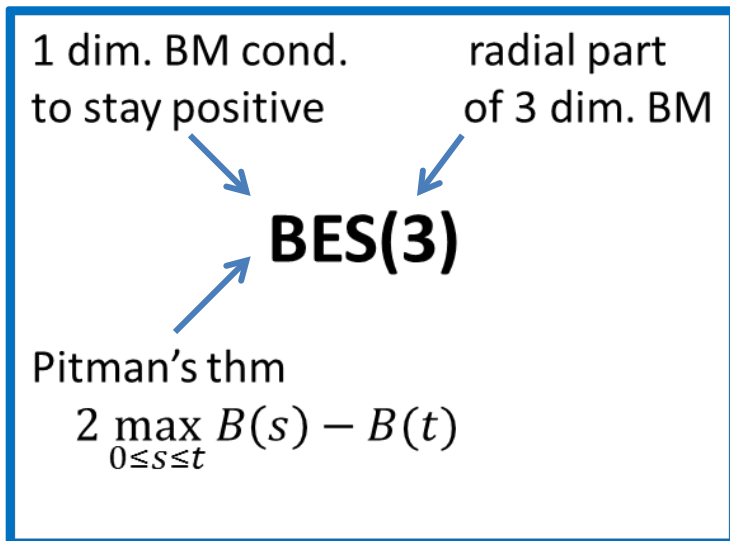
複素BM = 共形不変な確率過程
複素関数・整関数
Whittaker 関数



O'Connell process
Macdonald process

5. 現時点ではうまくまとめられない・・・

multi-variate extensions



複素化
共形不変性

Schramm-Loewner Evolution (SLE)

複素BM = 共形不変な確率過程
複素関数・整関数
Whittaker 関数

O'Connell process
Macdonald process