

ブラックホールエントロピー と AdS/CFT 対応

平成 12 年 1 月 11 日

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

86111 疋田 泰章

概要

ブラックホールには熱力学の法則が成り立つことが知られている。ブラックホールの horizon の面積が減少しないことからエントロピーは horizon の面積に比例していると思われる。ブラックホールは弦理論の非摂動的な物体として知られる D-brane を用いることで記述でき、熱力学に対応する統計力学はその D-brane 上にある場の理論を用いることで記述できる。最近、反ド・ジッター空間上の弦理論とその境界に存在する D-brane 上の共形場理論との対応を表す AdS/CFT 対応が提唱され、その対応を用いることで、ブラックホールを作っている重力理論とブラックホールの内部の情報を担っている場の理論との対応に対する理解を深めることができる。この論文では、D1-brane と D5-brane の束縛状態からつくられるブラックホールの horizon 近傍の極限をとることから得られる AdS_3 空間と、その境界に存在する共形場理論との対応について詳しく調べる。3次元のブラックホールは BTZ ブラックホールとして知られ、その境界にある共形場理論からエントロピーを求めることができる。Chern-Simons 理論を用いての解析と、摂動的な弦理論を用いての解析から境界の共形場理論を調べる。

目次

第 1 章	Introduction	4
第 2 章	2 次元共形場理論	7
2.1	2 次元共形場理論	7
2.1.1	複素座標への変換	7
2.1.2	共形対称性	10
2.1.3	演算子積展開と Virasoro 代数	12
2.2	分配関数	17
2.3	Current 代数 と WZW 模型	20
2.3.1	Current 代数	20
2.3.2	WZW 模型	23
2.4	共形場理論と弦理論	25
2.4.1	ボゾンの弦理論と D-Brane	25
2.4.2	超弦理論と双対性	31
第 3 章	反ド・ジッター空間とその性質	36
3.1	3 次元反ド・ジッター空間	36
3.2	3 次元重力理論と Chern-Simons 理論	39
3.2.1	多脚場とスピン接続	40
3.2.2	Chern-Simons 理論	42
3.2.3	Brown-Henneaux 共形対称性	45
3.3	BTZ ブラックホール	48
3.4	AdS/CFT 対応	51
3.4.1	AdS_5/CFT_4 対応	51
3.4.2	AdS_3/CFT_2 対応	54
第 4 章	AdS_3/CFT_2 対応による時空の共形場理論	57
4.1	境界近傍の近似による時空の共形場理論	57
4.1.1	3 次元反ド・ジッター空間上の弦理論	57
4.1.2	Heat Kernel と Functional Determinant	59
4.1.3	$sl(2, R)$ Current 代数	62

4.1.4	$SL(2, R)$ の Unitary 表現と $SL(2, R)/U(1)$ coset 模型	67
4.1.5	境界近傍の近似における時空の共形場理論	71
4.2	Bulk の寄与の入った時空の共形場理論	73
4.2.1	$SL(2, C)/SU(2)$ coset 模型	74
4.2.2	Bulk の寄与の入った時空の共形場理論	78
4.2.3	Long String と Short String	82
第 5 章 結論		87

第1章 Introduction

物理学における今世紀最大の発見は量子力学と一般相対論である。量子力学は特殊相対論と合わせて場の理論となり、標準模型を構成するなど大きな発展を遂げていった。一方一般相対論もビッグバン宇宙論やブラックホールなどさまざまな予測を生み出した。ところが、重力理論を量子化しようとする、繰り込み可能性などの問題が生じうまく構成することができなかった。この問題を解決する理論として弦理論 [1][2] がある。弦理論は低エネルギーで重力理論を再現していて、しかも、紫外発散を含んでいない。一般相対論は量子重力理論の古典的極限であるが、ブラックホールの内部など、重力の非常に強いところでは、弦理論を使ってうまく記述することができると思われる。

ブラックホールは一般相対論、あるいは場の理論の範囲以内でもさまざまなことが分かっている。ブラックホールの中心には計量の曲率が発散している場所があるが、horizon によって保護されていて外部からは見えないようになっている。また、ブラックホールは熱力学に対応するような性質をもつことが知られている [3]。特に、エントロピーは次の式のように horizon に比例することが知られている。

$$S = \frac{Area}{4G} \quad (1.1)$$

この公式は Bekenstein-Hawking の公式と呼ばれる。 G はニュートン定数とした。ブラックホールが熱力学に対応しているのなら、ブラックホールの内部を統計系で記述することができるはずである。ところが、一般相対論の範囲以内ではこれらを説明することができない。

そこで、弦理論を用いてブラックホールの内部を記述することを考えたい。しかし、弦理論の摂動論では、そのような強結合領域を表すことはできない。ところが、最近 solitonic な物体として、 Dp -brane とよばれる charge を帯びた $p+1$ 次元の物体が弦理論の中に存在していることが分かった [4][5]。この Dp -brane を用いることで、ブラックホールを作ることができる。 Dp -brane には開弦がくっつくことができ、開弦は低エネルギーで場の理論に帰着させることができるため、 Dp -brane 上の理論は場の理論で記述することができる。

最初に考えられたのは $D1$ -brane と $D5$ -brane の束縛状態からなる系 [6][7] で、 $D5$ -brane の延びている次元のうち、 $D1$ -brane と垂直な方向は小さく compact 化されて見えなくなっているとす。この系は $D1$ -brane の空間方向を S^1 に compact 化することで、5 次元のブラックホールとなる。4 次元のブラックホールも同様にして作ることができる。したがって、 $D1$ -brane と $D5$ -brane の束縛状態からなる系は実際のブラックホールを考える上でも重要である。このとき、 D -brane 上の理論は低エネルギーで、共形対称性と呼ばれるスケール変換に対する対称性のある $(1+1)$ 次元の共形場理論に帰着することができる。2 次元の共形場理論のエントロピーは共形場

理論のなかに存在する重要な量である central charge を使って漸近的に求めることができる。この値は Bekenstein-Hawking の公式を用いて計算した値と一致している。

ブラックホールの内部の情報が次元の低い場の理論で記述されるということは、重力理論あるいは弦理論が次元の低い場の理論で記述できるかもしれないということを示唆している。重力理論が 1 次元低い場の理論に帰着できることは 't Hooft と Susskind によって提唱され、holographic 原理 [8][9] と呼ばれている。弦理論が低い次元の場の理論に帰着できることは、群が $SU(N)$ の Yang-Mills 理論を $1/N$ を展開係数と思うと弦理論の摂動展開に対応しているように思える [10] ことや、10 次元の弦理論が 1 次元の行列を要素としてもつ場の理論によって記述することができるという行列模型 [11] などから強く示唆されている。

先程のように Dp -brane を用いてブラックホールを構成したとき、その horizon の近くではその空間が負の宇宙定数をもった $(p+2)$ 次元の反ド・ジッター空間 (AdS_{p+2}) になっている。 $(p+2)$ 次元の反ド・ジッター空間には境界が存在していて、その境界上には共形対称性が存在している。したがって、先程のブラックホールを構成していた Dp -brane は AdS_{p+2} 空間の境界に存在していると思うことができる。つまり、 AdS_{p+2} 空間を記述している重力理論あるいは弦理論と境界に存在している $(p+1)$ 次元の共形場理論 (CFT_{p+1}) との対応の存在が示唆される。この対応は AdS/CFT 対応と呼ばれ、Maldacena によって提唱され [12]、その後多くの人によって発展していった [13][14][15]。

先程の $D1$ -brane と $D5$ -brane の束縛状態からなる系においては、その horizon 近傍は $AdS_3 \times S^3 \times T_4$ となっている。この場合は AdS_3 空間の境界に存在する 2 次元の共形場理論と対応している。 AdS_3/CFT_2 対応の場合には他の次元における AdS/CFT 対応に比べて特殊なことが起こっている。3 次元重力理論には内部空間 (これから bulk と呼ぶことにする) には自由度が存在しておらず、境界にしか自由度がない。このことは、3 次元重力理論が Chern-Simons 理論 [16] を用いて記述することのできることもわかる。また、この境界における理論は 2 次元の共形場理論となっていることも半古典的に示されている [17]。この論文では Chern-Simons 理論を用いて境界に存在する共形場理論を導出する [18][19]。2 次元の共形場理論は他の次元の共形場理論と異なり、無限次元の対称性となっているため、理論をきつく決めることができる。また、 AdS_3 空間を背景とする弦理論は Wess-Zumino-Witten (WZW) 模型を用いて表すことができるため、他の次元では古典的な重力理論を用いての解析しかできないのに対し、 AdS_3 空間の場合には弦理論を用いての解析を行うことができる [20][21][22]。

第 2 章では 2 次元における共形場理論について詳しく述べる [23][24][25][26]。弦理論は空間方向に 1 次元伸びた物体を考えているため、時空中で $(1+1)$ 次元をはく。この worldsheet 上の理論は 2 次元の共形場理論になっている。 AdS_3 空間を背景とする弦理論は WZW 模型 [27] を用いて表すことができるため、詳しく調べることにする。さらに、超弦理論の最近の大きな発見である、D-brane [4][5] と弦理論の双対性について簡単に説明する。

第 3 章では反ド・ジッター空間について調べる。3 次元の重力理論は Chern-Simons 理論 [16] と等価になり、負の宇宙定数を持つ Einstein 多様体は境界を持つため、物理的な自由度が境界のみにある。これは AdS/CFT 対応の一つの例になっている。この論文では Chern-Simons 理論を用

いて Brown と Henneaux [17] によって発見された、境界における共形場理論を構成する [18][19]。3次元のブラックホールは発見者の名前をとって BTZ ブラックホール [28][29] と呼ばれるが、このブラックホールのエントロピーを共形場理論の central charge を用いて計算する [30]。また、AdS/CFT 対応 [12][13][14][15] についても簡単に説明する。

第 4 章では worldsheet 上の演算子を用いて境界上での場を構成する [20][21][22]。境界近傍の近似をすると、worldsheet 上の current 代数を自由場を用いて構成することができる。自由場表現を用いることで境界の共形場理論における current と Virasoro 代数の生成子を構成することができる。境界近傍の近似をしなくて bulk の情報を含んだ議論をすると自由場表現を用いることができない。しかし、補助場 x を導入することで bulk から境界への演算子を構成することができる。bulk の情報も含むため、実際に相関関数を計算することができる。境界近傍の極限をとると、第 4.1 節の結果と一致する。

第 5 章で結論をまとめる。

第2章 2次元共形場理論

2.1 2次元共形場理論

弦理論は2次元の worldsheet 上の場の理論を用いる。この worldsheet 上にはスケール変換に対する対称性である共形対称性が存在する。したがって、弦理論を用いて考察を行うためには、2次元共形場理論に対する理解が必要である。また、この論文では3次元ド・ジッター空間と2次元共形場理論との対応を調べたいため、その意味でも2次元共形場理論を詳しく調べておくことは重要である。2次元の共形場理論は [23] によって現在の形にまとめられた。よい Review として [24][25][26] などがある。まず第 2.1.1 節で2次元共形場理論を調べる上で便利な複素座標への変換の公式を与える。第 2.1.2 節では理論に共形対称性を課したときにどのようなことが起こるかを調べる。第 2.1.3 節では、共形場理論を用いる上で便利な方法である演算子積展開 (OPE) を導入し、2次元共形場理論の重要な代数である Virasoro 代数について説明する。

2.1.1 複素座標への変換

2次元の共形場理論で Euclidean で flat な計量 $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ を持つものを考える。このとき、それぞれの座標を組み直して複素座標にすると便利ことが多い。

$$z = x^1 + ix^2 \quad \bar{z} = x^1 - ix^2 \quad (2.1)$$

微分演算子は

$$\partial_z z = 1, \quad \partial_{\bar{z}} z = 0, \quad \partial_z \bar{z} = 0, \quad \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1 \quad (2.2)$$

となるように定義したい。そのためには

$$\partial \equiv \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \quad \bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2) \quad (2.3)$$

のようにとれば良いことが分かる。

一般的なベクトルも同様にして定義したい。反変ベクトルが座標と同じ変換をし、共変ベクトルが微分演算子と同様の変換をするように定義する。

$$v^z = v^1 + iv^2, \quad v^{\bar{z}} = v^1 - iv^2, \quad v_z = \frac{1}{2}(v^1 - iv^2), \quad v_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(v^1 + iv^2) \quad (2.4)$$

ここで、

$$v^z = 2v_{\bar{z}}, \quad v^{\bar{z}} = 2v_z, \quad v_{\bar{z}} = \frac{1}{2}v^z, \quad v_z = \frac{1}{2}v_{\bar{z}} \quad (2.5)$$

の変換をすることから添字の上げ下げを次のような計量で行えばよいことが分かる。

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2, \quad g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (2.6)$$

次にベクトルの場合からテンソルの場合に拡張することにする。式 (2.1) の座標変換は行列形式で書き直すと、

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

となり変換行列 Λ によって生成されていることが分かる。したがって、もとのテンソルが反変テンソルのときには

$$T^{ab\dots} = \Lambda^a{}_{\mu} \Lambda^b{}_{\nu} \dots T^{\mu\nu\dots} \quad (2.8)$$

の変換をする。ただし、 $(\mu, \nu, \dots) = (z, \bar{z})$ 、 $(a, b, \dots) = (x^1, x^2)$ とする。もとのテンソルが共変ベクトルのときには逆行列の転置

$$((\Lambda^{-1})^T)_a{}^{\mu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

を用いて

$$T_{ab\dots} = ((\Lambda^{-1})^T)_a{}^{\mu} ((\Lambda^{-1})^T)_b{}^{\nu} \dots T_{\mu\nu\dots} \quad (2.10)$$

という変換をする。たとえば epsilon tensor は $\epsilon_{z\bar{z}} = -\epsilon_{\bar{z}z} = i/2$ 、 $\epsilon_{zz} = \epsilon_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ となる。

積分の測度は Jacobian を考慮すると、 $dz^2 |\det g|^{1/2} = dx^1 dx^2$ から

$$dz^2 = 2dx^1 dx^2 \quad (2.11)$$

となり係数が 2 だけずれることが分かる。Dirac の delta 関数は

$$\int dx^1 dx^2 \delta^{(2)}(z) = 1 \quad (2.12)$$

となるように規格化を決める。

次に計量を

$$ds^2 = e^{\phi} (d(x^1)^2 + d(x^2)^2) \quad (2.13)$$

のようにとったときを考える。理論に共変不変性があるときは座標変換を用いることで、いつも計量をこの形にもっていくことができる。この計量を選ぶことを conformal gauge をとるといふ。式 (2.1) の座標変換をして複素座標に取り直したとき計量は、

$$ds^2 = e^{\phi} dz d\bar{z} \quad (2.14)$$

となる。したがって計量は

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2} e^{\phi}, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2e^{-\phi}, \quad g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (2.15)$$

となっている。

この計量をとったときのリーマン曲率を求める。Christoffel 記号は計量テンソルを用いて、

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}) \quad (2.16)$$

と書ける。リーマン曲率テンソルは Christoffel 記号を用いて、

$$R^c_{abd} = \partial_d \Gamma^c_{ab} - \partial_b \Gamma^c_{ad} + \Gamma^e_{ab} \Gamma^c_{de} - \Gamma^e_{ad} \Gamma^c_{be} \quad (2.17)$$

と書ける。リーマン曲率テンソルには式 (2.17) の形から分かるように

$$R_{abcd} = R_{cdab} = -R_{bacd} = -R_{abdc} \quad (2.18)$$

の対称性があるが、今 2 次元で考えているため対称テンソルは計量テンソルしかなく、反対称テンソルは epsilon tensor しかないため実際に求めることができる。

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})R \quad (2.19)$$

ただし、 R はスカラー曲率とする。係数は両辺の添字を計量テンソルを用いてつぶすことから求められる。またこのときリッチテンソルは、

$$R_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (2.20)$$

となっている。

式 (2.15) の計量テンソルを実際に代入することで、Christoffel 記号を計算することができ、non-zero の値をもつものは

$$\begin{aligned} \Gamma^z_{zz} &= \partial_z \phi \\ \Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} &= \partial_{\bar{z}} \phi \end{aligned} \quad (2.21)$$

の二つのみであることが分かる。したがって、 n 階共変テンソルの共変微分は、

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{z}} t_{zz\dots z} &= \partial_{\bar{z}} t_{zz\dots z} \\ \nabla_z t_{zz\dots z} &= (\partial_z - n\partial_z \phi) t_{zz\dots z} \end{aligned} \quad (2.22)$$

となり、これを用いると、

$$\begin{aligned} [\nabla_{\bar{z}}, \nabla_z] t_{zz\dots z} &= [\partial_{\bar{z}}, \partial_z - n\partial_z \phi] t_{zz\dots z} \\ &= -n(\partial_z \partial_{\bar{z}} \phi) t_{zz\dots z} \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。また一方

$$[\nabla_a, \nabla_b] t_{d_1 d_2 \dots d_n} = \sum_{j=1}^n R_{abd_j}{}^e t_{d_1 d_2 \dots e \dots d_n} \quad (2.24)$$

と書き直すことができるので、

$$\begin{aligned} [\nabla_{\bar{z}}, \nabla_z] t_{zz\dots z} &= \sum R_{\bar{z}zz}{}^a t_{zz\dots a\dots z} \\ &= nR_{\bar{z}zz}{}^z t_{zz\dots z} \end{aligned} \quad (2.25)$$

とすることができる。この式を式 (2.23) と比較することで、

$$\begin{aligned}
\partial_z \partial_{\bar{z}} \phi &= -R_{\bar{z}z z}{}^{\bar{z}} \\
&= \frac{1}{2} g^{z\bar{z}} (g_{\bar{z}z} g_{z\bar{z}}) R \\
&= R_{z\bar{z}}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

となり、リーマン曲率あるいはリッチテンソル、スカラー曲率を簡単な形に書き直すことができた。以上の公式や定義を用いて次の節から実際に理論に共形対称性を課したときにどのようなことが起きるかを調べる。

2.1.2 共形対称性

一般的な場の理論では、Lorentz 対称性と並進対称性の二つを仮定している。さらに対称性を増やすことによって、理論に制限をつけることができより詳しい情報が得られるようになる。ここではさらにスケール変換に対する対称性を仮定して理論を構築してみる。一般次元で考えることもできるが、ここでは 2 次元についてのみ考えることにする。2 次元のときには無限個の制限が得られるため、一般的な議論をするだけで細かなところまで理論が決まってしまうという特性がある。

時空は Euclidian であるとして、計量を $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ とする。このときスケール変換は

$$\eta'_{\mu\nu} = \Omega \eta_{\mu\nu} \tag{2.27}$$

と書ける。座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ をしたときに計量は

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu \tag{2.28}$$

のように変換する。この変換がスケール変換であるためには

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = (\partial \cdot \varepsilon) \delta_{\mu\nu} \tag{2.29}$$

となっていなくてはならない。右辺の係数は両辺のトレースをとることで決まる。ここで $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ とした。実際に計算してみることで、Cauchy-Riemann の式

$$\partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2, \quad \partial_1 \varepsilon_2 = -\partial_2 \varepsilon_1 \tag{2.30}$$

が成り立っていることが分かる。前節で調べたように、 $z = x^1 + ix^2$ 、 $\bar{z} = x^1 - ix^2$ と変数変換して複素座標に変えてみる。 $\varepsilon(z) = \varepsilon^1 + i\varepsilon^2$ 、 $\bar{\varepsilon}(\bar{z}) = \varepsilon^1 - i\varepsilon^2$ と置き換えることで、共形対称性を保つような座標変換は正則座標変換

$$z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \tag{2.31}$$

に対応していることが分かる。この変換のもとで計量は

$$ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) dzd\bar{z} \quad (2.32)$$

の変換をする。このことから、正則座標変換が計量のスケール変換に対応していることが分かる。この変換則を一般化して、

$$\Phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (2.33)$$

の変換をする場を考える。このような変換をする場を primary field と呼ぶ。\$h\$、\$\bar{h}\$ は conformal weight といい、テンソルの足の数を表すようなものである。ただし、conformal weight は、整数以外の数も取り得る。\$\Delta = h + \bar{h}\$ は conformal 次元といい、\$J = h - \bar{h}\$ をスピンという。無限小変換 \$z \to z + \varepsilon(z)\$、\$\bar{z} \to \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z})\$ をしてみると primary field は式 (2.33) より

$$\delta_{\varepsilon\bar{\varepsilon}}\Phi(z, \bar{z}) = (\varepsilon\partial_z + h\partial_z\varepsilon + \bar{\varepsilon}\partial_{\bar{z}} + \bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\varepsilon})\Phi(z, \bar{z}) \quad (2.34)$$

の変換をすることが分かる。

共形対称性のある理論では、普通の場合の理論のように \$S\$ 行列が計算できないので、相関関数を計算することが理論を調べていることに対応する。まず、2点の相関関数を計算してみる。式 (2.34) の変換を用いると、

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon\bar{\varepsilon}} \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle &= \langle \delta_{\varepsilon\bar{\varepsilon}}\Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle + \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\delta_{\varepsilon\bar{\varepsilon}}\Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle \\ &= [(\varepsilon(z_1)\partial_{z_1} + h_1\partial_{z_1}\varepsilon) + (\varepsilon(z_2)\partial_{z_2} + h_2\partial_{z_2}\varepsilon) \\ &\quad + (\bar{\varepsilon}(\bar{z}_1)\partial_{\bar{z}_1} + \bar{h}_1\partial_{\bar{z}_1}\bar{\varepsilon}) + (\bar{\varepsilon}(\bar{z}_2)\partial_{\bar{z}_2} + \bar{h}_2\partial_{\bar{z}_2}\bar{\varepsilon})] \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

となる。まず、\$\varepsilon(z) = \bar{\varepsilon}(\bar{z}) = 1\$ を代入することで、\$z_{12} = z_1 - z_2\$ のみの関数であることが分かる。次に \$\varepsilon(z) = z\$、\$\bar{\varepsilon}(\bar{z}) = \bar{z}\$ を代入すると、\$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = C_{12}/(z_{12}^{h_1+h_2}\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2})\$ の形に制限することができる。最後に \$\varepsilon(z) = z^2\$、\$\bar{\varepsilon}(\bar{z}) = \bar{z}^2\$ を代入することによって、

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \begin{cases} C_{12}/z_{12}^{2h}\bar{z}_{12}^{2\bar{h}} & h_1 = h_2 = h, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{h} \\ 0 & h_1 \neq h_2, \bar{h}_1 \neq \bar{h}_2 \end{cases} \quad (2.36)$$

となっていることが分かり、係数を除いて対称性のみで2点相関関数を決定することができた。3点相関関数も同様にして計算できる。結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1)\Phi_2(z_2, \bar{z}_2)\Phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle \\ &= \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3}z_{23}^{h_2+h_3-h_1}z_{31}^{h_3+h_1-h_2}\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}\bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1}\bar{z}_{31}^{\bar{h}_3+\bar{h}_1-\bar{h}_2}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

4点以上の相関関数の場合は局所的な対称性は無限個あるが、大域的な対称性は $SL(2, C)$ の3個づつしかなく、3つしかパラメーターを固定することができない。そのため、 n 点相関関数をつくるときには、 $n - 3$ 個のパラメーターが残ってしまう。これらのパラメーターは $SL(2, C)$ の変換で不変につくる必要がある。

対称性の生成子は Noether の方法で作ることができる。座標変換の生成子はエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ である。Lorenz 不変性から対称テンソルであることがいえ、並進不変性から $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ がいえる。スケール変換の生成子が $j_\mu = T_{\mu\nu} x^\nu$ であり、この current が保存することから、トレースレス条件 $T^\mu_\mu = 0$ がでる。テンソルの複素座標への変換の公式 (2.10) を用いてエネルギー・運動量テンソルを複素座標に直すと、

$$\begin{aligned} T_{zz} &= T_{11} - T_{22} + 2iT_{12} \\ T_{\bar{z}\bar{z}} &= T_{11} - T_{22} - 2iT_{12} \\ T_{z\bar{z}} &= T_{\bar{z}z} = T_{11} + T_{22} \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる。したがって、トレースレス条件から

$$T_{z\bar{z}} = 0 \quad (2.39)$$

となる。また、 $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ から

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0, \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad (2.40)$$

となる。したがって、エネルギー・運動量テンソルを正則な部分と反正則な部分

$$T(z) = T_{zz}, \quad T(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}} \quad (2.41)$$

に分けて書くことができる。このことから、2次元共形場理論においては、正則な部分と反正則な部分とをそれぞれ独立に取り扱うことのできる事が分かる。

2.1.3 演算子積展開と Virasoro 代数

第 2.1.2 節でエネルギー・運動量テンソルを作った。その current を用いて charge を作り、その charge によって起きる場の変分を考えることにする。まず、平面を $z = e^{t+i\theta}$ と変数変換して t 方向を時間だと思ふことにする。この変数変換は平面から円筒への変換に対応していて、同時刻で切った場合円筒では円になっているが、平面に移すと同心円に対応する。平面における時間方向はこの場合、平面の中心から外側に向かっていて、この時間を用いて量子化する方法は radial 量子化と呼ばれる。保存する charge は同時刻における積分で定義できるが、この変数変換で、 $\int j_0(x) dx \rightarrow \int j_\tau(\theta) d\theta$ が charge になる。したがって、

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint dz T(z) \varepsilon(z) + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \bar{T}(\bar{z}) \bar{\varepsilon}(\bar{z}) \quad (2.42)$$

が座標変換を起こす charge になる。

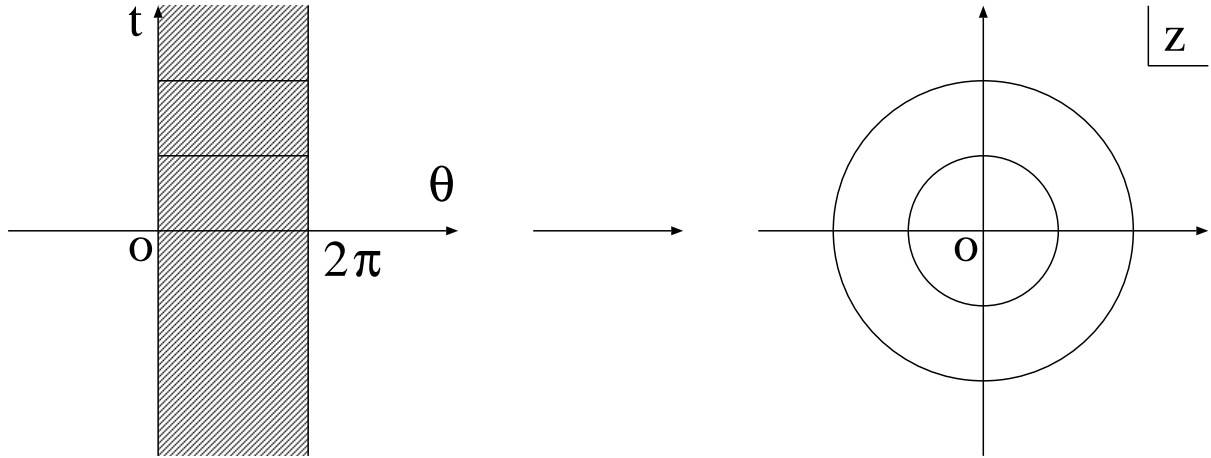


図 2.1: 円筒から平面への写像

実際に primary field の変分をとることを考える。簡単のために、 $\varepsilon(z)$ のみを non-zero にする。

$$\begin{aligned}
 \delta_\varepsilon \Phi(w, \bar{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint [dz T(z) \varepsilon(z), \Phi(w, \bar{w})] \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|z| < |w|} - \oint_{|z| > |w|} \right) dz \varepsilon(z) T(z) \Phi(w, \bar{w}) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_w} dz \varepsilon(z) T(z) \Phi(w, \bar{w}) \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

最後の等式で、図 2.2 のような積分路の変形をした。 $\bar{\varepsilon}(\bar{z})$ が non-zero の場合も同様に考察できる。

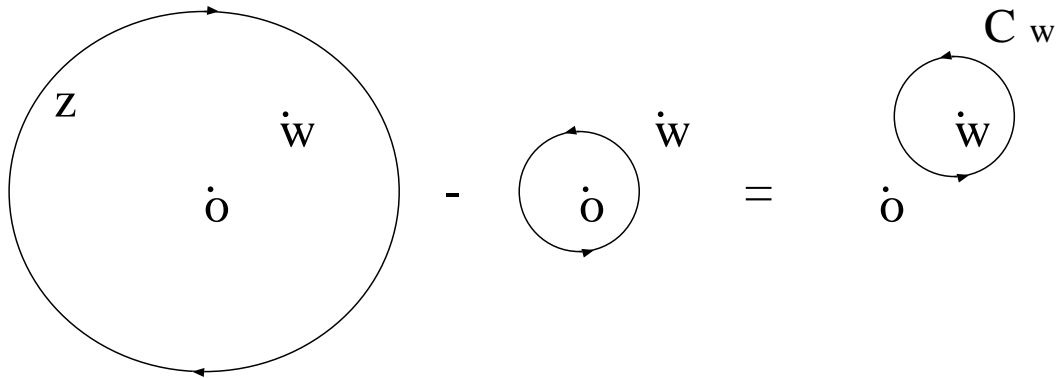


図 2.2: 積分路の変形 1

一方 primary field の座標変換は式 (2.34) により与えられて、

$$\delta_\varepsilon \Phi(w, \bar{w}) = \varepsilon(w) \partial_w \Phi(w, \bar{w}) + h \partial_w \varepsilon(w) \Phi(w, \bar{w}) \tag{2.44}$$

となっているのでこれを用いると、

$$T(z)\Phi(w, \bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\Phi(w, \bar{w}) + \text{regular} \quad (2.45)$$

と書き表すことができる。このようにある 2 点における演算子の積を 1 点における演算子で展開することを演算子積展開 (OPE) という。反正則な部分も同様にできる。これからは regular の部分は省略することにする。

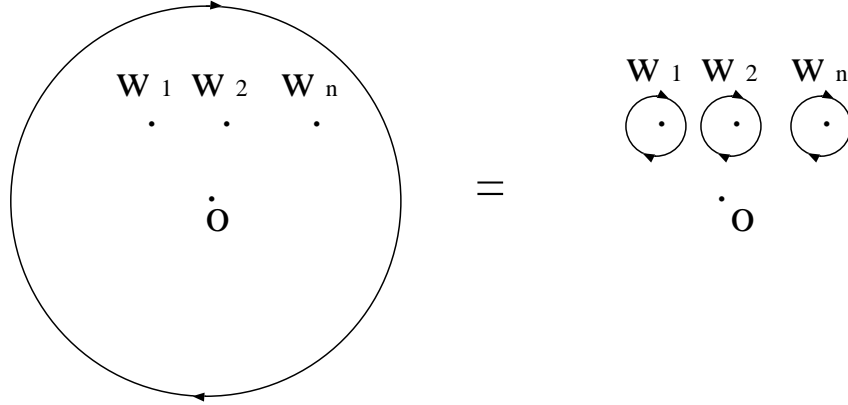


図 2.3: 積分路の変形 2

次に、Ward 恒等式を求めてみる。共形場理論の Ward 恒等式は相関関数を使って表すことができる。まず、次のような値を計算してみる。

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{2\pi i} \oint dz \varepsilon(z) T(z) \Phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \Phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \left\langle \Phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \left(\frac{1}{2\pi i} \oint dz \varepsilon(z) T(z) \Phi_j(w_j, \bar{w}_j) \right) \cdots \Phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \left\langle \Phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \delta_\varepsilon \Phi_j(w_j, \bar{w}_j) \cdots \Phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.46)$$

一つ目の等式では、図 2.3 の積分路の変形をした。二つ目の等式では、式 (2.43) を用いた。この等式が任意の ε で成り立つためには、積分の中身が次のような形をしていなければならない。

$$\left\langle T(z)\Phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \Phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \quad (2.47)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{h_j}{(z-w_j)^2} + \frac{1}{z-w_j} \frac{\partial}{\partial w_j} \right) \left\langle \Phi_1(w_1, \bar{w}_1) \cdots \Phi_n(w_n, \bar{w}_n) \right\rangle \quad (2.48)$$

この恒等式を共形場理論では、Ward 恒等式と呼ぶ。

エネルギー・運動量テンソルの OPE を調べると、

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w T(w) \quad (2.49)$$

となる。エネルギー・運動量テンソル自体は primary field ではないので、 $(z-w)^{-4}$ の項が出てしまう。この項の係数 c は central charge といい、考えている理論により変わる。この OPE からエネルギー・運動量テンソルの無限小変換を求めることができ、

$$\delta_\varepsilon T(z) = \varepsilon(z)T(z) + 2\partial\varepsilon(z)T(z) + \frac{c}{12}\partial^3\varepsilon(z) \quad (2.50)$$

となる。有限変換は

$$T(z) = (\partial f)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} S(f, z) \quad (2.51)$$

となり、Shwartzian derivative

$$S(f, z) = \frac{\partial f \partial^3 f - \frac{3}{2}(\partial^2 f)^2}{(\partial f)^2} \quad (2.52)$$

を用いて表すことができる。無限小変換を二回続けて行うことによって Shwartzian derivative の形になることが分かる。

エネルギー・運動量テンソルを Laurent 展開すると、

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}, \quad L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad (2.53)$$

となり、これを式 (2.49) に代入することで、

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \quad (2.54)$$

という関係式を得る。もう一つこの反正則なものと合わせて 2 つの無限次元の代数が得られた訳だが、これらの代数は Virasoro 代数 として知られているものである。全ての 2 次元の共形場理論はある central charge c を持ったこの代数を持つ。

真空を $z=0$ で

$$T(z)|0\rangle = \sum_n L_n z^{-n-2}|0\rangle \quad (2.55)$$

が特異点を持たない状態として定義する。したがって、真空は

$$L_n|0\rangle = 0 \quad n \geq -1 \quad (2.56)$$

で定義される。weight が h であるような primary field を持ってきて、

$$|h\rangle = \Phi_h(0)|0\rangle \quad (2.57)$$

となる状態を定義する。

$$\begin{aligned} [L_n, \Phi_h(w)] &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \Phi_h(w) \\ &= h(n+1)w^n \Phi_h(w) + w^{n+1} \partial \Phi_h(w) \end{aligned} \quad (2.58)$$

を用いることで、状態 $|h\rangle$ は

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle, \quad L_n|h\rangle = 0 \quad n > 0 \quad (2.59)$$

を満たすことが分かる。このような状態を highest weight state と呼ぶ。また、Virasoro 代数の生成子をかけることによって新しい状態 $L_{-k_1} \cdots L_{-k_n}|h\rangle$ を作る事ができ、これらは descendant state と呼ばれる。

primary field を mode 展開して次のように書き表すことにする。

$$\Phi_h(z) = \sum_n \phi_n^h z^{-n-h} \quad (2.60)$$

mode 展開の係数は逆に解くことによって求めることができる。

$$\phi_n^h = \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi_h(z) z^{n+h-1} \quad (2.61)$$

したがって、Virasoro 代数の生成子との交換関係は式 (2.58) を用いることで、

$$\begin{aligned} [L_n, \phi_m^h] &= \frac{1}{2\pi i} \oint [L_n, \Phi_h(z)] z^{n+h-1} \\ &= (n(h-1) - m) \phi_m^h \end{aligned} \quad (2.62)$$

となることが分かる。すなわち、conformal weight が h の primary field の mode 展開の係数は式 (2.62) のような変換をするということである。

場を 2 つ以上組み合わせて演算子を作る場合を考える。先程調べたように 2 つの場が近付いたときには特異点が出てしまう。このことは演算子積を別の場で展開した OPE を見ることにより分かる。したがって、2 つ以上の場を組みあわせて演算子を作るときには、特異点の部分を取り除いて定義しなくてはならない。この操作は normal ordering と呼ばれる。実際に OPE を特異点以外の部分も書いてみると、

$$A(z)B(w) = \sum_{-\infty}^N \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \quad (2.63)$$

と Taylor 展開できる。ここで、normal ordering は次のように 2 つの場の積が同じ位置で特異点を持たない部分を取り出すことで定義することができる。

$$(AB)(w) = \{AB\}_0(w) \quad (2.64)$$

OPE の特異点を持つ部分だけをとった場合を

$$\overline{A(z)B(w)} \equiv \sum_{n=1}^N \{AB\}_n \quad (2.65)$$

で定義すると、normal ordering はもともとの定義から

$$(AB)(w) = \lim_{z \rightarrow w} [A(z)B(w) - \overline{A(z)B(w)}] \quad (2.66)$$

と書き直すこともできる。また、式 (2.64) の定義から normal ordering は $(z - w)$ についての展開の 0 次の項を取り出していることに対応しているので、

$$(AB)(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - w} A(z)B(w) \quad (2.67)$$

と定義することもできる。これらの normal ordering の定義はすべて同じである。以上の normal ordering の定義を用いると、2 つ以上の場を組み合わせさせてつくった演算子と場との OPE を

$$\overline{A(z)B}C(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dx}{x - w} [\overline{A(z)B}(x)C(w) + B(x)\overline{A(z)C}(w)] \quad (2.68)$$

と定義することができる。

2.2 分配関数

今までは平面上の共形場理論のみを考察してきたが、ここでは torus 上にのせた場合の共形場理論を考察することにする。torus 上で定義するために、まず、平面上に定義していた関数を円筒上に定義し直すことにする。これは第 2.1.3 節で考えた radial 量子化をしたときの座標変換に対応していて、 $z = e^{t+i\theta}$ という座標変換になっている。

$w = t + i\theta$ とおいて、 $z = e^w$ と座標変換したときに平面上で定義した場や演算子がどのような変換を受けるかを調べることにする。primary field は式 (2.33) のような変換をする場であるため、

$$\phi_{cyl}(w, \bar{w}) = \left(\frac{dz}{dw}\right)^h \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right)^{\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) = z^h \bar{z}^{\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \quad (2.69)$$

となる。スピンは $J = h - \bar{h}$ で定義されているため、スピンが整数のときには平面上の場と円筒上の場の周期境界条件は一致して、スピンが半整数のときには平面上の場と円筒上の場の周期境界条件は -1 倍ずれる。

次にエネルギー・運動量テンソルの変換を見る。エネルギー・運動量テンソルは primary field ではなく、式 (2.51) の変換をする。Shwartzian derivative は今の場合 $S(e^w, z) = -1/2$ となっているため、

$$T_{cyl}(w) = \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 T(z) + \frac{c}{12} S(z, w) = z^2 T(z) - \frac{c}{24} \quad (2.70)$$

となり、おつりの項がついてきてしまう。エネルギー・運動量テンソルを mode 展開した状態でこのおつりの項がどのような効果を示すか調べることにする。式 (2.53) の mode 展開を代入することによって、

$$T_{cyl}(w) = \sum_n L_n z^{-n} - \frac{c}{24} = \sum_n (L_n - \frac{c}{24} \delta_{n,0}) e^{-nw} \quad (2.71)$$

となる。したがって、おつりの項は Virasoro 代数の生成子のうち zero mode の部分にのみ影響を与え、

$$(L_0)_{cyl} = L_0 - \frac{c}{24} \quad (2.72)$$

だけずれる。

分配関数を求めるためには、時間を特定しなくてはならない。 $z = e^{-iw}$ 、 $w = it + \theta$ と取り直したとき、 $\text{Im } w$ を時間、 $\text{Re } w$ を空間と思うことにする。平面上では $L_0 + \bar{L}_0$ は dilatation の生成子で、 $L_0 - \bar{L}_0$ は回転の生成子となっている。torus 上にのせるために円筒上に定義し直した場を用いると、radial 量子化のときの議論から時間方向が radial 方向、空間方向が回転方向に対応していることが分かるため、エネルギーの演算子は $H = (L_0)_{cyl} + (\bar{L}_0)_{cyl}$ とすることができ、運動量の演算子は $P = (L_0)_{cyl} - (\bar{L}_0)_{cyl}$ とすることができる。

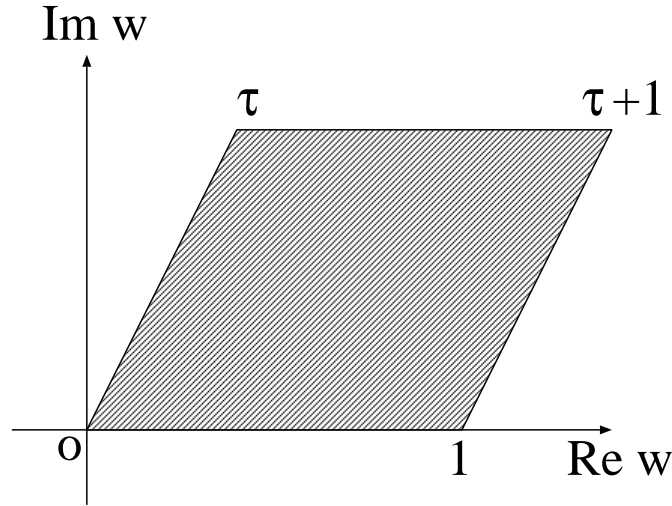


図 2.4: Modular パラメーターが τ の torus

torus 上にのせるためには、次の式のような同一視をする必要がある。

$$w \sim w + 2\pi \quad (2.73)$$

$$w \sim w + 2\pi\tau \quad (2.74)$$

$\tau = \tau_1 + i\tau_2$ は torus の構造を決めるパラメーターで Modular パラメーターと呼ばれている。逆に Modular パラメーター τ を定めることで torus を座標変換と共形変換で移りあう分を除いて決定することができる。ただし、異なる τ でも同じ torus を作ることもある。non-trivial な cycle に沿って切って、 2π ひねってまたくっつけた torus はもとの torus と同じになっている。 t 方向にひねってくっつける変換は T 変換と呼ばれ、 $T : \tau \rightarrow \tau + 1$ の変換をする。 θ の方向にひねってくっつける変換は U 変換と呼ばれ、 $U : \tau \rightarrow \tau/(\tau + 1)$ の変換をする。ただし、よく使われるのは、U 変換のかわりに T 変換と U 変換を組み合わせた S 変換で、 $S = T^{-1}UT^{-1}$ で定義される。具体的に書くと、

$$T : \tau \rightarrow \tau + 1 \quad (2.75)$$

$$S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \quad (2.76)$$

の 2 つが Modular 変換の生成子となっている。torus には 2 つの non-trivial な cycle しかない
 ので、この 2 つの変換を用いてすべての同一な torus をつくることができる。2 つの変換をあわ
 せて $SL(2, Z)$ 変換

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad (2.77)$$

を生成することができる。ただし、 a, b, c, d は整数とし、 $ad - bc = 1$ を満たしているとする。実
 際には a, b, c, d 全ての符号を反転しても変わらないので、 $PSL(2, Z) = SL(2, Z)/Z_2$ が変換の群
 になっている。この変換は Modular 変換と呼ばれ、torus は基本領域

$$-\frac{1}{2} \leq \text{Re}\tau \leq \frac{1}{2}, \quad |\tau| \leq 1 \quad (2.78)$$

のみで全ての torus を表すことができる。

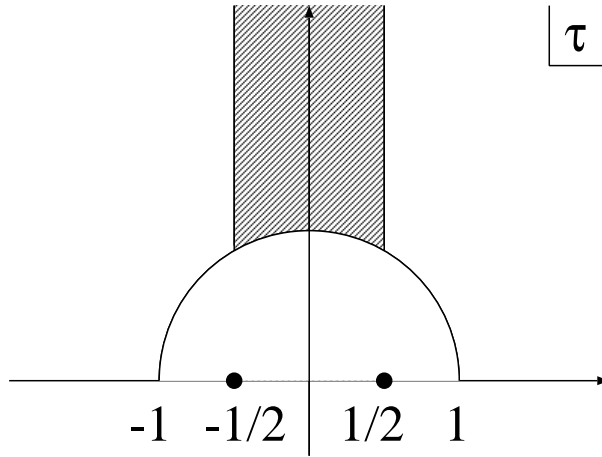


図 2.5: Modular パラメーター τ の基本領域

分配関数を Modular パラメーター τ の torus 上で定義する。時間方向の周期 $2\pi\tau_2$ だけ時間が
 たつと、空間方向にも $2\pi\tau_1$ だけずれることを考慮すると、次のように定義することができる。

$$Z = \text{tr} e^{2\pi i\tau_1 P} e^{-2\pi\tau_2 H} = e^{2\pi i\tau(L_0)_{cyl}} e^{-2\pi i\bar{\tau}(\bar{L}_0)_{cyl}} \quad (2.79)$$

ここで、 $q = e^{2\pi i\tau}$ と書き直して、式 (2.72) を用いると、

$$Z = (q\bar{q})^{-\frac{c}{24}} \text{tr} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \quad (2.80)$$

となることが分かる。

今定義した分配関数が Modular 変換に対して不変であることを用いることによって、 L_0 の固
 有値を n 、 \bar{L}_0 の固有値を \bar{n} で表すと、 $n, \bar{n} \gg 0$ のときには漸近的な状態数を求めることができ
 る。状態数を $\rho(n, \bar{n})$ で表すことにして、次のような量を定義する。

$$Z'(q, \bar{q}) = \text{tr} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} = \sum \rho(n, \bar{n}) q^n \bar{q}^{\bar{n}} \quad (2.81)$$

すると、状態数 $\rho(n, \bar{n})$ を逆に求めることができ、

$$\rho(n, \bar{n}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{dq}{q^{n+1}} \frac{d\bar{q}}{\bar{q}^{\bar{n}+1}} Z'(q, \bar{q}) \quad (2.82)$$

で数えることができる。ここで、 $Z'(\tau) = e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} Z(\tau)$ と書けることと、 $Z(\tau)$ が S 変換で不変であることを用いると、

$$Z'(\tau) = e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} Z\left(-\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} e^{\frac{2\pi ic}{24}\frac{1}{\tau}} Z'\left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad (2.83)$$

とすることができる。式 (2.82) に代入することで、状態数は

$$\rho(n) = \int d\tau e^{-2\pi i n \tau} e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} e^{\frac{2\pi ic}{24}\frac{1}{\tau}} Z'\left(-\frac{1}{\tau}\right) \quad (2.84)$$

とできる。 $n \gg 0$ のときに鞍点法を用いて最も積分に効いて来る τ の値を拾うと、

$$\tau \sim i\sqrt{\frac{c}{24n}} \quad (2.85)$$

となるため、状態数は

$$\rho(n) \sim \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{cn}{6}}\right) Z'(i\infty) \quad (2.86)$$

とできる。この状態数を用いてエントロピーも計算でき、

$$S = \ln \rho(n, \bar{n}) \sim 2\pi\sqrt{\frac{cn}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{c\bar{n}}{6}} \quad (2.87)$$

となる。この L_0 の固有値をが非常に大きいときの共形場理論の状態からくるエントロピーを求める公式は Cardy の公式として知られ、後で共形場理論側の観点からブラックホールのエントロピーを数えるのに用いる。

2.3 Current 代数 と WZW 模型

共形対称性の他にさらに Lie 群 G を対称性として持つような理論を構築することを考えてみる。すると、さらに対称性が高くなり、理論をより詳しく決めることができる。2 次元共形場理論の対称性に Lie 群 G を入れると、その current は affine Kac-Moody 代数という無限次元の代数に持ち上げられる。また、Lie 群 G を対称性に選ぶと Lagrangian を逆に構成することができる。この模型は WZW 模型として知られている。第 2.3.1 節で current 代数について説明し、第 2.3.2 節で WZW 模型について説明する。

2.3.1 Current 代数

conformal weight が $(1,0)$ の primary field $J^a(z)$ を用意する。この場合は Lie 群 G の対称性の生成子となるのが後の議論により分かるため current と呼ばれる。次元解析から OPE は、

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k\eta^{ab}/2}{(z-w)^2} + \frac{i\eta_{cd}f^{abc}}{z-w} J^d(z) \quad (2.88)$$

となり、central extension を持つ。ただし、 a, b, \dots は群 G の添字とする。結合則から f^{abc} は Jacobi identity を満たさなくてはならないことが分かる。そのため、 f^{abc} は Lie 代数の結合定数となっていることが分かる。 η_{ab} は群の計量とした。この代数は level k の affine Kac-Moody 代数あるいは current 代数として知られている。mode 展開

$$J^a(z) = \sum_n J_n^a z^{-n-1} \quad (2.89)$$

をすると、式 (2.88) は

$$[J_n^a, J_m^b] = \frac{k}{2} n \eta^{ab} + i \eta_{cd} f^{abc} J_{n+m}^d \quad (2.90)$$

となり、 $n = m = 0$ のときには普通の Lie 代数に一致することが分かる。普通の Lie 代数から affine Lie 代数 に持ち上げることはもともとの Lie 代数に座標 z 依存性を持たせるようなものである。

current 代数からエネルギー・運動量テンソルを作る処方箋は Sugawara 構成法として知られている。current の次元は 1 で、エネルギー・運動量テンソルの次元は 2 なので、current を 2 つ組み合わせてエネルギー・運動量テンソル を作ることを考える。

$$T(z) = \frac{1}{\beta} \eta_{ab} (J^a J^b)(z) \quad (2.91)$$

() は式 (2.64) で定義した normal ordering を表している。

エネルギー・運動量テンソルの OPE が式 (2.49)

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \partial_w T(w) \quad (2.92)$$

の変換をするように係数 β を決めたい。これから実際に式 (2.92) の OPE を計算する。そのため、まず、式 (2.68) を用いて次のような OPE を計算してみる。

$$\begin{aligned} & J^a(z) \eta_{bc} (J^b J^c)(w) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dx}{x-w} \eta_{bc} [\overline{J^a(z) J^b(x) J^c(w)} + J^b(x) \overline{J^a(z) J^c(w)}] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dx}{x-w} \eta_{bc} \left\{ \left[\frac{k\eta^{ab}/2}{(z-x)^2} + \frac{i\eta_{de} f^{abd} J^e(x)}{(z-x)} \right] J^c(w) \right. \\ &+ \left. J^b(x) \left[\frac{k\eta^{ac}/2}{(z-w)^2} + \frac{i\eta_{de} f^{acd} J^e(w)}{(z-w)} \right] \right\} \quad (2.93) \end{aligned}$$

ここで、さらに OPE をとる必要がある。この計算では特異点を持たない項も残しておく必要がある。また、最後の式の第 2 項はさらに $1/(x-w)$ の特異点をもつ項は積分に効かないので、normal order をとった部分のみを考えればよい。さらに計算を続けることで、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dx}{x-w} \eta_{bc} \left\{ \frac{k J^a(w)/2}{(z-x)^2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i\eta_{bc}\eta_{de}f^{abd}}{z-x} \left[\frac{i\eta_{fg}f^{ecf}J^g(w)}{x-w} + \frac{k\eta^{ec}/2}{(x-w)^2} + (J^e J^c)(w) \right] \\
& + \left. \frac{kJ^a(w)/2}{(z-w)^2} + i\eta_{bc}\eta_{de}f^{acd}(J^b J^e)(w) \right\} \quad (2.94)
\end{aligned}$$

となる。 f^{abc} がそれぞれの添字の入れ換えに対して反対称であることからいくつかの項が消える。また、

$$-\eta_{bc}\eta_{de}f^{abd}\eta_{fg}f^{ecf} = \eta_{bc}\eta_{de}\eta_{fg}f^{abd}f^{fce} = \tilde{h}_G\delta_g^a \quad (2.95)$$

となっている。 \tilde{h}_G は dual Coxeter number で、随伴表現の 2 次の Casimir を $f^{acd}f^{bcd} = C_A\eta^{ab}$ で書き、 ψ で highest root を表したとき、 $\tilde{h}_G \equiv C_A/\psi$ で定義される。この式を用いて x についての積分をすると次の式が得られる。

$$J^a(z)\eta_{bc}(J^b J^c)(w) = (k + \tilde{h}_G)\frac{kJ^a(w)/2}{(z-w)^2} \quad (2.96)$$

z と w を入れ換えることで、エネルギー・運動量テンソルと current との OPE が求まって、

$$\begin{aligned}
T(z)J^a(w) &= \frac{k + \tilde{h}_G}{\beta} \frac{kJ^a(z)/2}{(z-w)^2} \\
&= \frac{k + \tilde{h}_G}{\beta} \left\{ \frac{kJ^a(w)/2}{(z-w)^2} + \frac{\partial J^a(w)}{z-w} \right\} \quad (2.97)
\end{aligned}$$

となる。ここで、current は conformal weight が 1 の primary field なので、

$$\beta = k + \tilde{h}_G \quad (2.98)$$

となる必要がある。つまり、エネルギー・運動量テンソルは次のように書き表すことができる。

$$T(z) = \frac{1}{k + \tilde{h}_G} \eta_{ab}(J^a(z)J^b(z)) \quad (2.99)$$

エネルギー・運動量テンソル同時の OPE も同様に計算でき、

$$\begin{aligned}
T(z)T(w) &= \frac{1}{k + \tilde{h}_G} \frac{1}{2\pi i} \oint_w \frac{dx}{x-w} \eta_{bc} [\overline{T(z)J^b(x)J^c(w)} + J^b(x)\overline{T(z)J^c(w)}] \\
&= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \partial_w T(w) \quad (2.100)
\end{aligned}$$

となり、確かに式 (2.49) を満たしていることが分かる。また、同時に central charge も計算することができ、

$$c = \frac{k|G|}{k + \tilde{h}_G} \quad (2.101)$$

となっている。

primary field $\Phi_R(w)$ は 群 G の表現 R の生成子を $t^a(R)$ とすると、

$$J^a(z)\Phi_R(w) = \frac{t^a(R)}{z-w}\Phi_R(w) \quad (2.102)$$

$$T(z)\Phi_R(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi_R(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w\Phi_R(w) \quad (2.103)$$

の OPE を持つ。実際にエネルギー・運動量テンソルに式 (2.99) の表式を用いて primary field の conformal weight を求めることができる。表現 R の 2 次の Casimir を $\text{tr}(t^a(R)t^b(R)) = C_R\eta^{ab}$ とすると、式 (2.102) を使って計算することで、conformal weight が

$$h = \frac{C_R}{k + \tilde{h}_G} \quad (2.104)$$

となることが分かる。

Ward 恒等式は current 代数の場合には

$$\langle J^a(z)\Phi_{R_1}(w_1, \bar{w}_1) \cdots \Phi_{R_n}(w_n, \bar{w}_n) \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{t^a(R_j)}{z-w_j} \langle \Phi_{R_1}(w_1, \bar{w}_1) \cdots \Phi_{R_n}(w_n, \bar{w}_n) \rangle \quad (2.105)$$

となる。

current 代数でも Virasoro 代数のときと同じように状態を定義することができる。真空は $J^a(z)|0\rangle$ が $z=0$ で特異点を持たないように定義する。mode で書き表すと真空の条件は、

$$J_n^a|0\rangle = 0 \quad n \geq 0 \quad (2.106)$$

となる。highest state は primary field $\Phi_R(w)$ を用いて

$$|R\rangle = \Phi_R(0)|0\rangle \quad (2.107)$$

と定義する。この状態は次のような関係式を満たす。

$$J_0^a|R\rangle = t^a(R)|R\rangle, \quad J_n^a|0\rangle = 0 \quad n > 0 \quad (2.108)$$

descendant state も Virasoro 代数のときと同様に $J_{-k_1}^{a_1} \cdots J_{-k_n}^{a_n}|R\rangle$ で作ることができる。

2.3.2 WZW 模型

いままでの議論では、Lagrangian を構成しないで理論を調べてきた。実際には current 代数を理論の対称性としてもつような場合には、その理論に対応するような Lagrangian を構成することができる。この模型は Wess-Zumino-Witten (WZW) 模型 [27] として知られている。まず、次のような nonlinear sigma 模型を調べてみることにする。

$$S_0 = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \text{tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) \quad (2.109)$$

ただし、 g はある群多様体 G 上に値をもつ場とし、群の生成子を T^a で表したとき $\text{tr}(T^a T^b) = 2\delta_{a,b}$ のように規格化を決める。 $g \rightarrow g + \delta g$ としたときの作用の変化分を調べると、

$$\delta S_0 = \frac{1}{2\lambda^2} \int d^2x \text{tr}(g^{-1} \delta g \partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g)) \quad (2.110)$$

となっている。したがって、 $J_\mu = g^{-1}\partial_\mu g$ とすると、 $\partial^\mu J_\mu = 0$ がなりたち、 J_μ が保存 current となっていることが分かる。ただし、今は共形場理論を考えたいので、正則部分と反正則部分が独立である必要がある。つまり、 $J_z = g^{-1}\partial_z g$ 、 $J_{\bar{z}} = g^{-1}\partial_{\bar{z}} g$ とかきなおすと、それぞれの current が、 $\partial_z J_z = 0$ 、 $\partial_{\bar{z}} J_{\bar{z}} = 0$ を満たしている必要がある。しかし、current の定義から

$$\partial^\mu J_\nu - \partial^\nu J_\mu = [J_\nu, J_\mu] \neq 0 \quad (2.111)$$

となり、それぞれ独立には保存していないことが分かる。

そこで、作用に次のような項を付け加えてみる。この項は Wess-Zumino 項と呼ばれている。

$$\Gamma = \frac{-i}{24\pi} \int_B d^3 y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{tr}(\tilde{g}^{-1} \partial^\alpha \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\beta \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\gamma \tilde{g}) \quad (2.112)$$

B は boundary がもともとの 2 次元の空間にもつような 3 次元の多様体で、 \tilde{g} は g を 3 次元の多様体上に値をもつように拡張した場である。 $g \rightarrow g + \delta g$ としたときの变化分を調べると、

$$\delta\Gamma = \frac{i}{8\pi} \int d^2 x \epsilon_{\mu\nu} \text{tr}(g^{-1} \delta g \partial^\mu (g^{-1} \partial^\nu g)) \quad (2.113)$$

となっていることが分かる。ここで、作用を $S = S_0 + k\Gamma$ と書き換えて両方の变化分を足しあげると、

$$\partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g) + \frac{\lambda^2 i k}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu (g^{-1} \partial^\nu g) = 0 \quad (2.114)$$

となる。変数を z 、 \bar{z} で書き直すと運動方程式は次のようになる。

$$\left(1 + \frac{\lambda^2 k}{4\pi}\right) \partial_z (g^{-1} \partial_z g) + \left(1 - \frac{\lambda^2 k}{4\pi}\right) \partial_{\bar{z}} (g^{-1} \partial_z g) = 0 \quad (2.115)$$

したがって、 $\lambda^2 = 4\pi/k$ のときに欲しかった $\partial_z J_z = 0$ の式を得ることができる。ここで、正則な current を $J_z = \partial_z g g^{-1}$ で定義し直すと、

$$\partial_z (g^{-1} \partial_z g) = g^{-1} \partial_z (\partial_z g g^{-1}) g \quad (2.116)$$

から正則な current も保存していることが分かる。

これらの current は

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z) g(z, \bar{z}) \bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \quad (2.117)$$

の変換に対する生成子になっている。このことを次にしめす。まず、 Ω と $\bar{\Omega}$ は群 G 上に値をもつとする。無限小変換 $\Omega(z) = 1 + \omega(z)$ 、 $\bar{\Omega}(z) = 1 + \bar{\omega}$ をしたとき g は $\delta_\omega g = \omega g$ 、 $\delta_{\bar{\omega}} = -g \bar{\omega}$ の変換をする。このとき作用は、

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{k}{2\pi} \int d^2 x \text{tr}(g^{-1} \delta g \partial_z (g^{-1} \partial_z g)) \\ &= \frac{k}{2\pi} \int d^2 x \text{tr}[\omega(z) \partial_{\bar{z}} (\partial_z g g^{-1}) - \bar{\omega}(\bar{z}) \partial_z (g^{-1} \partial_z g)] \end{aligned} \quad (2.118)$$

の変換をする。current がそれぞれ保存していることから変分は zero になることが分かる。また、保存 current に z 依存性が入ったおかげで、もともとの $G \times G$ の対称性が局所的な $G(z) \times G(\bar{z})$ の対称性に持ち上がっていることが分かる。すなわち、対称性が current 代数に持ち上がったということである。

最後に分かりやすいように今までの式をまとめて書いておくことにする。WZW 模型の作用は

$$S = \frac{k}{16\pi} \int d^2x \text{tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) - \frac{ik}{24\pi} \int_B d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{tr}(\tilde{g}^{-1} \partial^\alpha \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\beta \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\gamma \tilde{g}) \quad (2.119)$$

と書けた。また、保存 current は、

$$J(z) = -\frac{k}{2} \partial_z g g^{-1} \quad (2.120)$$

$$\bar{J}(\bar{z}) = \frac{k}{2} g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (2.121)$$

と書けた。規格化は式 (2.88) が成り立つように決めた。

2.4 共形場理論と弦理論

弦理論はここ数年で大きく進歩した。大きな進展の一つに、D-brane の発見がある [4][5]。D-brane は弦理論における非摂動的な物体で、弦理論の非摂動的な側面をしらべるのに欠かせない道具となっている。さらに D-brane を用いることで、場の理論の理解を深めることができた。また、D-brane を用いてブラックホール解を作ることで、ブラックホールの熱力学の問題に対する理解が深まり [6]、また、AdS/CFT 対応という新しい双対性を考えることができるようになった [12]。第 2.4.1 節でボゾンの弦理論の範囲以内で、D-brane の説明をする。

次に大きな発展として弦理論の双対性がある。弦理論には Type I、Type IIA、Type IIB、 $SO(32)$ Heterotic、 $E_8 \times E_8$ Heterotic の 5 種類の自己矛盾のない超弦理論が存在しているが、弦理論の双対性の発見により、全てが等価な理論であることが分かった。そのため、双対性を用いることによって、今まで調べることができなかったところの理解を深めることができるようになった。第 2.4.2 で超弦理論の説明をして、双対性について軽くふれることにする。

2.4.1 ボゾンの弦理論と D-Brane

まず、ボゾンの弦理論について調べる。ボゾンの弦理論の worldsheet 上の作用は、conformal gauge では次のように与えられる。

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \partial_a X^\mu \partial_a X_\mu \quad (2.122)$$

ただし、 $\mu = 0, 1, \dots, 25$ とし、弦の tension は $T = 1/(2\pi\alpha')$ とした。このとき、弦の単位長さは $\alpha' = l_s^2$ で与えられる。背景の計量は Minkovski とする。 X^μ についての作用の変分を調べると、

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi \delta X^\mu \partial^2 X_\mu + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau [\delta X^\mu \partial_\sigma X_\mu]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \quad (2.123)$$

となる。第一項は運動方程式を与え、 X^μ が Laplace 方程式に従うことを示している。第 2 項は作用の変分が well-defined になるためには消えなくてはならない項である。弦には開弦と閉弦の 2 種類あり、次の 3 種類の境界条件が存在する。

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi) \quad (2.124)$$

$$\partial_\sigma(\sigma = 0) = \partial_\sigma = 0 \quad (2.125)$$

$$X^\mu(\sigma = 0) = \text{const}, \quad X^\mu(\sigma) = \text{const} \quad (2.126)$$

式 (2.124) は worldsheet の空間方向に一周まわると元に戻ることを表しており、閉弦の周期境界条件を表している。式 (2.125) は開弦の境界条件を表しており、弦の端から運動量の流出のない場合となっていて、Neumann 境界条件と呼ばれる。最近までは開弦にはこの境界条件しか考えられていなかった。式 (2.126) は最近になって考えられるようになった開弦の境界条件で、Dirichlet 境界条件と呼ばれる。この境界条件を満たす弦はある平面内に束縛されていて、運動量はその平面に対して流出している。したがって、この平面を力学的な物体とすることができる。この物体は D-brane [4][5] として知られている。 $x_{p+1} = \dots = x_9 = 0$ おける p -brane は Dp -brane と呼ばれ、次のような境界条件を満たしている。

$$\partial_\sigma X^\mu = 0 \quad \mu = 0, \dots, p \quad (2.127)$$

$$X^\mu = 0 \quad \mu = p+1, \dots, 25 \quad (2.128)$$

すなわち、brane と並行な方向は Neumann 境界条件をとり、brane と垂直な方向は Dirichlet 境界条件をとった。

次に弦理論を量子化する。まず、閉弦について考察する。Laplace 方程式を満たすように X^μ を mode 展開すると、

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} z^{-n} + \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} \bar{z}^{-n} \right) \quad (2.129)$$

とでき、正則な部分と反正則な部分の 2 つに分けることができる。一般的な正準量子化を用いて、次のような交換関係を導入する。

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (2.130)$$

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = [\bar{\alpha}_n^\mu, \bar{\alpha}_m^\nu] = n\delta_{n+m,0}\eta^{\mu\nu} \quad (2.131)$$

すると、mass shell 条件から mass spectrum が求められ、

$$m^2 = -p^\mu p_\mu = \frac{2}{\alpha'}(N - \bar{N} - 2) \quad (2.132)$$

となる。ただし、 N は正則部分の mode の和、 \bar{N} は反正則部分の mode の和を表している。 -2 は零点エネルギーのずれを表している。閉弦には正則部分と反正則部分の mode の和が等しくならなくてはならないという level matching 条件がある。以上から閉弦には massless spectrum に

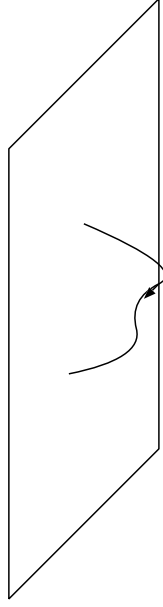


図 2.6: D-brane と D-brane にくっついている開弦

重力子 $G_{\mu\nu}$ 、2 階反対称テンソル $B_{\mu\nu}$ 、dilaton ϕ が含まれていることが導出できる。有効作用として、26 次元の重力理論の作用

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^{26}x \sqrt{-G} e^{-\phi} \left[R + 4\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right] \quad (2.133)$$

を用いることができる。開弦も同様にして mode 展開することで mass spectrum を調べることができ、Neumann 境界条件を選んだ場合には、

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - 1) \quad (2.134)$$

となる。開弦の端に N 種類の charge をおくことで、開弦にラベルをつけることができる。この charge を用いて状態の前に $N \times N$ 行列の Chan-Paton 因子をつけることで状態を定義できる。

$$|k; a \rangle = \sum_{i,j=1}^N \lambda_{ij}^a |k; ij \rangle \quad (2.135)$$

開弦の散乱振幅を計算するときには図 2.7 のようなものを計算するため、Chan-Paton 因子は

$$\text{Tr}(\lambda^1 \lambda^2 \dots \lambda^n) \quad (2.136)$$

のようなトレースの形で全体にかかる。そのため、Chan-Paton 因子には $U(N)$ だけまわす自由度が存在する。このことから、開弦の massless spectrum には worldsheet が向きづけ可能の場合には $U(N)$ ゲージ理論が含まれる。Dirichlet 境界条件を選んだときには、spectrum は

$$m^2 = \frac{y^2}{(2\pi\alpha')^2} + \frac{1}{\alpha'}(N - 1) \quad (2.137)$$

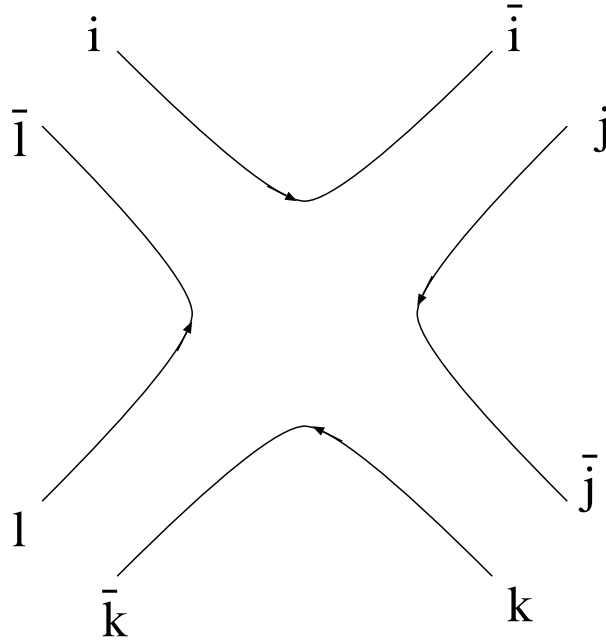


図 2.7: 開弦による散乱振幅と Chan-Paton 因子

となる。ただし、 y は D-brane 間の距離とする。D-brane が離れているときには massive spectrum しか存在しないが、D-brane が重なっているときには massless spectrum が出てくる。開弦の端についている charge はこの場合異なる D-brane を表しているため、 N 枚の D-brane が重なっている場合には D-brane 上に $U(N)$ のゲージ場がでてくる。有効作用は Dirac-Born-Infeld (DBI) 作用として知られ、 Dp -brane 上の作用は、

$$S_p = -\tau_p \int d^{p+1}\xi \det \sqrt{G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}} \quad (2.138)$$

となっている。 G_{ab} 、 B_{ab} は時空の場から brane 上への引き戻しとして定義する。

次に時空を compact 化することを考える。25 次元方向の座標を $X^{25} \sim X^{25} + 2\pi R$ で同一視する。このとき運動量は量子化され、 $P^{25} = n/R$ となり離散化した値を取るようになる。閉弦は compact 化した方向に巻き付くことができる。巻き付き数は $\sigma \rightarrow \sigma + \pi$ のときに $X^{25} \sim X^{25} + 2\pi mR$ となることで定義できる。このとき、運動量を $p^{25} = (1/2)j(p^{25} + \bar{p}^{25})$ と分離すると、

$$p^{25} = \left(\frac{n}{R} + \frac{mR}{\alpha'} \right) \quad (2.139)$$

$$\bar{p}^{25} = \left(\frac{n}{R} - \frac{mR}{\alpha'} \right) \quad (2.140)$$

となり、mass spectrum は

$$m^2 = (\vec{p})^2 + (p^{25})^2 + \frac{4}{\alpha'}(N-1) \quad (2.141)$$

$$= (\vec{p})^2 + (p^{25})^2 + \frac{4}{\alpha'}(\bar{N} - 1) \quad (2.142)$$

$$(2.143)$$

となる。 \vec{p} は 25 方向以外の運動量とする。この spectrum には運動量と巻き付き数を入れ換える対称性があり、 n と m を入れ換えると同時に

$$R \rightarrow \frac{\alpha'}{R} \quad (2.144)$$

と半径を入れ換えても理論は変わらない。この対称性は T duality として知られている。この変換で、 $p^{25} \rightarrow p^{25}$ 、 $\vec{p}^{25} \rightarrow -\vec{p}^{25}$ となるため、T dual したときに同時にその他の振動子も $\alpha^{25} \rightarrow \alpha^{25}$ 、 $\bar{\alpha}^{25} \rightarrow -\bar{\alpha}^{25}$ の変換をすることによって、

$$X^{25}(z, \bar{z}) \rightarrow X'^{25}(z, \bar{z}) = X^{25}(z) - \bar{X}^{25}(\bar{z}) \quad (2.145)$$

のように新しい座標系に移ると思うことにする。

いままでは閉弦での話であったが、開弦で T dual することを考える。すると、式 (2.145) の表式から分かるように式 (2.125) の Neumann 境界条件と式 (2.126) の Dirichlet 境界条件とを入れ換えている。すなわち、 Dp -brane に並行な方向に T-dual することで $D(p-1)$ -brane に移り、 Dp -brane に垂直な方向に T-dual することで $D(p+1)$ -brane に移ることが分かる。

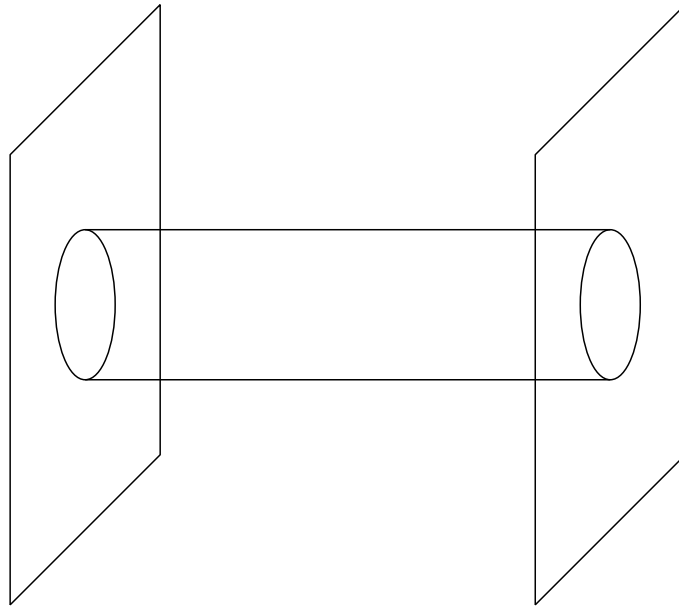


図 2.8: 閉弦の交換あるいは開弦の 1 loop のダイアグラム

次に D-brane の tension を求める。そのためには図 2.8 のような振幅を計算すればよい。このダイアグラムは閉弦が D-brane 間を飛んでいると思うこともできるし、端が D-brane 上にくっつ

いている開弦の 1 loop の真空振幅と思うこともできる。円筒の円周の長さを $2\pi t$ とし、円筒の長さを π とする。このとき、 $t \rightarrow 0$ の極限をとると円筒の長さが非常に長い極限に対応している。閉弦の観点では massless mode のみが生き残るので、重力子の交換に対応している。開弦の観点では loop がつぶれている場合に対応しているので紫外極限になっている。

1 loop の真空振幅は Coleman-Weinberg の公式から求められ、

$$\mathcal{A} = V_{p+1} \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} \int_0^\infty \sum_i e^{-2\pi\alpha't} (k^2 + m_i^2) \quad (2.146)$$

となる。ここで、 k は D-brane の延びている方向への運動量で、 i は開弦の mass spectrum (2.137)

$$m_i^2 = \frac{y^2}{(2\pi\alpha')^2} + \frac{1}{\alpha'}(N-1) \quad (2.147)$$

のラベルとする。実際に計算すると、

$$\mathcal{A} = 2V_{p+1} \int_0^\infty \frac{dt}{2t} (8\pi^2\alpha't)^{-(p+1)/2} e^{-y^2t/2\pi\alpha'} q^{-2} \prod_{n=1}^\infty (1-q^{2n})^{-24} \quad (2.148)$$

となる。ここで、 $q = e^{-\pi t}$ とした。 $s = 1/t$ として書き直し、 $s \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\mathcal{A} = 2V_{p+1} \int_0^\infty \frac{dt}{2t} (8\pi^2\alpha't)^{-(p+1)/2} e^{-y^2t/2\pi\alpha'} s^{12} (e^{2\pi/s} + 24 + \dots) \quad (2.149)$$

となる。 t から s への変換は開弦の観点から閉弦の観点に移行したことを表している。最初の項は tachyon の交換を表している。このことは、質量 m の粒子の propagator に $e^{-m^2 r}$ に比例する項が出てくることから分かる。自己矛盾のない理論である超弦理論で考えるときには出てこないため、massless 粒子の交換に対応する 2 番目の項の寄与を考えることにする。このとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\sim V_{p+1} \frac{24}{2^{12}} (4\pi\alpha')^{11-p} \pi^{(p-23)/2} \Gamma((23-p)/2) |y|^{p-23} \\ &= V_{p+1} \frac{24\pi}{2^{10}} (4\pi^2\alpha')^{11-p} G_{25-p}(y^2) \end{aligned} \quad (2.150)$$

とできる。ここで、 $G_{25-p}(y^2)$ は $(25-p)$ 次元での Green 関数を表している。

閉弦の観点での振幅は式 (2.138) の DBI 作用によって決まる coupling の元で、式 (2.133) の重力理論の作用から求まる重力子と dilaton の propagator を用いて計算でき、

$$\mathcal{A} \sim 6V_{p+1} \tau_p^2 e^{2\phi} \kappa^2 G_{25-p}(y^2) \quad (2.151)$$

となる。式 (2.150) と式 (2.151) を比較することで D-brane の tension が求められ、

$$\tau_p = \frac{\sqrt{\pi}}{16\kappa} e^{-\phi} (4\pi^2\alpha')^{(11-p)/2} \quad (2.152)$$

となる。

2.4.2 超弦理論と双対性

次に今までの議論を超弦理論の場合に拡張する。超弦理論の worldsheet 上の作用はボゾンの弦理論の場合にフェルミオンを導入することで得られる。

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left(\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \varphi^\mu \bar{\partial} \varphi_\mu + \bar{\varphi}^\mu \partial \varphi_\mu \right) \quad (2.153)$$

ただし、 $\mu = 0, 1, \dots, 9$ とした。まず、開弦の場合を考察する。作用の変分をとると、

$$[\varphi^\mu \delta \varphi_\mu - \bar{\varphi}^\mu \delta \bar{\varphi}_\mu]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \quad (2.154)$$

の項が出て、変分が well-defined であるためにはこの項が消えている必要がある。そのため、境界で $\varphi^\mu = \pm \bar{\varphi}^\mu$ である必要があるが、例えば、

$$\varphi^\mu(\pi, \tau) = \bar{\varphi}^\mu(\pi, \tau) \quad (2.155)$$

ととっても一般性を失わない。ここで、 $\bar{\varphi}^\mu(\sigma, \tau) = \varphi^\mu(2\pi - \sigma, \tau)$ と定義しなおすことで、開弦の場合のフェルミオンは φ^μ のみで表すことができる。 $\varphi^\mu(0, \tau) = \pm \bar{\varphi}^\mu(0, \tau)$ の 2 種類の可能性があることから、境界条件は 2 種類出る。

負の符号を選んだ場合、

$$\varphi^\mu(0, \tau) = -\varphi^\mu(2\pi, \tau) \quad (2.156)$$

となる。この場合は Neveu-Schwartz (NS) sector と呼ばれ、mode 展開は

$$\varphi^\mu(\sigma, \tau) = \sum_{r \in Z + \frac{1}{2}} \varphi_r^\mu e^{ir(\sigma + i\tau)} \quad (2.157)$$

となり、半奇数の mode で展開される。mass spectrum は

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(N - \frac{1}{2} \right) \quad (2.158)$$

となっているため、 $\varphi_{-\frac{1}{2}}^\mu |k\rangle$ の状態が massless 状態にあたり、ゲージ場に対応している。lightcone gauge をとると、 $SO(\hat{8})$ のベクトル表現 8_v になっている。超弦理論では時空に超対称性を持たせるために GSO projection を行う必要がある。このときに tachyon の寄与は取り除かれ、超弦理論は tachyon のない理論になっている。また、NS sector は時空でボゾンに対応している。

境界条件はもう一つ

$$\varphi^\mu(0, \tau) = \varphi^\mu(2\pi, \tau) \quad (2.159)$$

の場合があり、Ramond (R) sector と呼ばれている。mode 展開は

$$\varphi^\mu(\sigma, \tau) = \sum_{n \in Z + \frac{1}{2}} \varphi_n^\mu e^{in(\sigma + i\tau)} \quad (2.160)$$

となり、整数の mode で展開される。R sector の零点エネルギーは zero になっている。 ϕ^μ の zero mode は

$$\{\varphi_0^\mu, \varphi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \quad (2.161)$$

の反交換関係を満たすため、真空は縮退していて $SO(8)$ のスピン表現をなす。32 表現は chirality の異なる 2 つの表現 $16 + 16'$ に分けることができるが、GSO projection により片方のみが生き残る。さらに lightcone gauge をとったとき、 $\varphi^{0,1}$ による寄与は消えるので、 8_s あるいは 8_c が残る。R sector は時空でフェルミオンになっていて、massless 部分では超対称性が成り立っていることが分かる。

閉弦は開弦を 2 つ組み合わせることで作ることができる。ただし、2 つの弦の level は一致している必要がある。開弦の R sector の chirality は 2 種類あったので、2 つの chirality が同じ場合と違う場合に分けられる。chirality が同じ場合 Type IIA と呼ばれ、違う場合 Type IIB と呼ばれる。時空でボゾンになるのは NS-NS sector と R-R sector であり、フェルミオンになるのは、NS-R sector と R-NS sector である。ここではボゾンの場合のみ考察する。spectrum はベクトル表現とスピン表現を組み合わせることによって見付けることができ、

$$\begin{array}{ll} \text{Type IIA} & G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi \quad C_1, C_3 \\ \text{Type IIB} & G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi \quad C_0, C_2, C_4^+ \end{array} \quad (2.162)$$

となる。NS-NS sector の寄与は $8_v \otimes 8_v$ から得られ、 $G_{\mu\nu}$ は重力子、 $B_{\mu\nu}$ は 2 階反対称テンソル、 ϕ は dilaton を表している。R-R sector の寄与は p 階反対称テンソル場 C_p となっている。Type IIA の場合は $8_s \otimes 8_s$ から得られ、スピン表現の合成則から奇数次の form のみ存在する。Type IIB の場合は $8_s \otimes 8_c$ から得られ、偶数次の form のみ存在する。高次の form は低次の form の dual によって得られるが、3-form は自分自身と dual なため、self-dual な部分のみになっている。

NS-NS sector の場は基本的弦と結合するが、R-R sector の場は 摂動論の範囲以内では結合するものがない。1-form のゲージ場 A_μ は点粒子と $\int A_\mu dx^\mu$ の結合をする。同様に NS-NS sector の場 $B_{\mu\nu}$ は基本的弦と

$$\int_{\Sigma} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.163)$$

の結合をする。 Σ は worldsheet を表しているとする。これらの話から、 $(p+1)$ -form の RR sector の場 C_{p+1} は $(p+1)$ 次元に延びた物体である Dp-brane と

$$\int_{\mathcal{M}_{p+1}} C_{p+1} dx \wedge \cdots \wedge dx \quad (2.164)$$

の結合をすると思うことができる。 \mathcal{M}_{p+1} は Dp-brane の world volume とする。このことから、D-brane は RR-charge を帯びた物体と思うことができる。10 次元の Hodge dual を $*$ で表すことにすると $*dC_{p+1} = dC_{7-p}$ となるので、electric な Dp-brane に対して magnetic dual である D(6-p)-brane が存在する。同様に基本的弦 (F1) にも magnetic dual な物体が存在し、NS5-brane と呼ばれている。Type IIA 理論には奇数次の RR sector の場しか存在していないことから、D0、D2、D4、D6、D8 の brane が存在し、Type IIB 理論には偶数次の RR sector の場しか存在していないことから、D1、D3、D5、D7 の brane が存在している。

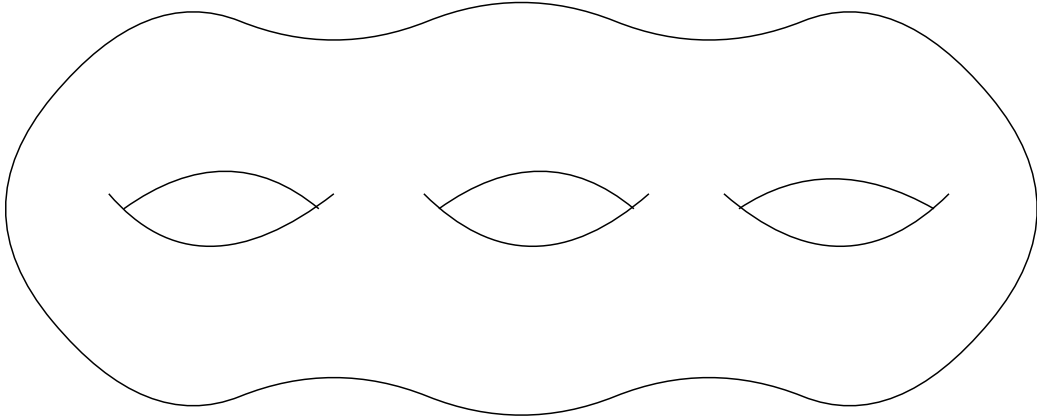


図 2.9: 閉弦の g loop ダイアグラムあるいは genus g のリーマン球面

D-brane の tension はボゾンの弦理論の場合と同様にして計算でき、

$$\tau_p^2 = \frac{\pi}{\kappa^2} e^{-2\phi} (4\pi^2 \alpha')^{3-p} \quad (2.165)$$

となる。弦理論の摂動論をする上での展開パラメーターである弦の結合定数は $g_s = \langle e^\phi \rangle$ として dilaton の真空期待値で計算できる。閉弦の worldsheet は genus g のリーマン面となっていて、genus の数が loop の数に対応している。このとき、弦理論における振幅は Euler 数 $\chi = 2 - 2g$ を用いると g_s^χ に比例していて、 g についての展開は loop 展開に対応している。開弦が入った場合も同様の議論ができる。しかし、dilaton の真空期待値は摂動論の範囲では計算することができない。基本的弦の tension を τ_{F1} で定義すると、

$$\frac{\tau_{F1}}{\tau_{D1}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\kappa e^\phi}{4\pi^{5/2}\alpha'} \quad (2.166)$$

は弦の結合定数 e^ϕ に比例しているので、次のように規格化を決める。

$$g_s = \frac{\tau_{F1}}{\tau_{D1}} \quad (2.167)$$

この式から重力結合定数を決めることができ、

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} (2\pi)^7 \alpha' \quad (2.168)$$

となる。この式から Dp -brane の tension を弦の結合定数を用いて書き直すことができ、

$$\tau_p = \frac{1}{g_s (2\pi)^p \alpha'^{(p+1)/2}} \quad (2.169)$$

となる。

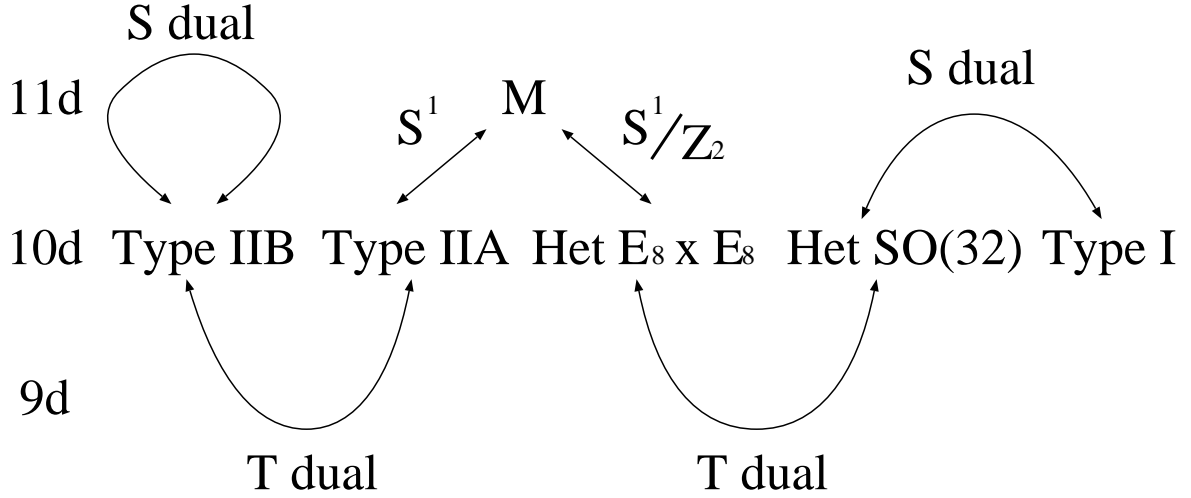


図 2.10: 超弦理論の双対性

超弦理論には今まで説明した Type II の理論の他に、開弦を加えて向きづけ不可能にした Type I 理論と、left mover をボゾンの弦にし、right mover を超弦にした混合型の Heterotic 理論がある。ゲージ群は anomaly matching などで決められ、Type I 理論の場合には $SO(32)$ 、Heterotic の場合には $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ のときのみ自己矛盾のない理論になっていることが知られている。これらの超弦理論は別々な理論ではなく、双対性によって全て結び付いていると考えられている。

まず最初に T duality による効果を考える。T-duality では式 (2.145) のように座標を変換する。このとき、スピノールの chirality が入れ換わるため、T-dual することによって、Type IIA 理論と Type IIB 理論が入れ換わる。また、Heterotic 理論も Wilson line を入れて T-dual することで、群が $SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ の理論を入れ換えることができる。

その他の双対性として S-duality がある。S-duality は非摂動論的な効果によるもので、弦の結合定数を

$$g_s \rightarrow g'_s = \frac{1}{g_s} \quad (2.170)$$

に入れ換える作用をする。すなわち、弦の結合定数が小さいところでの理論が弦の結合定数が大きいところの理論と等価であることを表している。Type IIB の超弦理論には $SL(2, Z)$ 変換があると信じられていて、そのなかで、弦の結合定数に対して $g_s \rightarrow 1/g_s$ のような変換性を示す変換は、

$$\tau = C_0 + ie^{-\phi} \quad (2.171)$$

と定義したとき、 $\tau \rightarrow -1/\tau$ に入れ換え、 $B_{\mu\nu}$ と C_2 を入れ換える変換である。このことから、Type IIB の S-dual によって、F1 と D1、NS5 と D5 が入れ換わることが分かる。

Type IIA 理論を S-dual すると、11 次元方向 $R_{11} = g_s l_s$ が見えてきて低エネルギーでは 11 次元超重力理論となる M 理論に行く [31]。 $E_8 \times E_8$ の Heterotic 理論でも同様に M 理論に行く [32]。 $SO(32)$ の Heterotic 理論は $SO(32)$ の Type I 理論と S-dual で移りあう [33]。これらの双

対性によって全ての超弦理論が移りあうことができる。全ての理論を含むものを M 理論と呼ぶことがあり、moduli 空間のある特定の場合が 5 種類の自己矛盾のない超弦理論や 11 次元の重力理論になると思うことができる。これらの双対性を図で表すと、図 2.10 のようになる。

第3章 反ド・ジッター空間とその性質

3.1 3次元反ド・ジッター空間

この節では3次元における反ド・ジッター空間 (AdS_3 空間) について詳しく調べる。ここでは、Lorentzian の場合を考えることにする。Euclidean の場合についても同様の考察をすることができる。 AdS_3 空間も普通の Minkovski 空間と同様に non-compact であるが、共形変換して有限な大きさに変換することで、その性質を調べることができる。まず、3次元の Minkovski 空間を調べることにする。

3次元の Minkovski 空間は時間 t と2次元平面の極座標表示 $0 < r$ 、 $0 \leq \phi \leq 2\pi$ を用いて表すことができる。計量は次のようにかける。

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.1)$$

ここで、 $u_{\pm} = t \pm r$ の変数変換をしてやることで、

$$ds^2 = -du_+ du_- + \frac{1}{4}(u_+ - u_-)^2 d\phi^2 \quad (3.2)$$

と書き直すことができる。ここでさらに、 $u_{\pm} = \tan \tilde{u}_{\pm}$ 、 $\tilde{u}_{\pm} = \theta \pm i\tau$ と変数変換をすると、

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos \tilde{u}_+ \cos \tilde{u}_-} (-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3)$$

となる。tangent の性質から座標を有限に制限することができた。図で描くと、図 3.1 のようになる。

ここで、計量を共形変換して、

$$ds'^2 = -d\tau + d\theta + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.4)$$

ととり、図 3.1 の三角形の外側にも解析接続できるとする。このとき、 $0 \leq \theta \leq \pi$ 、 $0 \leq \phi \leq 2\pi$ 、 $-\infty \leq \tau \leq \infty$ となっている。したがって、多様体としては $\mathbf{R} \times S^2$ に対応している。 $\theta = 0$ は北極 $\theta = \pi$ は南極に対応している。

次に3次元反ド・ジッター空間の場合について考える。3次元反ド・ジッター空間は4次元の $\mathbf{R}^{2,2}$ 空間すなわち、計量が $(-, -, +, +)$ となっている平らな4次元空間上の超曲面として定義することができる。超曲面の方程式は、次のような式で与えられる。

$$-X_0^2 - X_3^2 + X_1^2 + X_2^2 = -l^2 \quad (3.5)$$

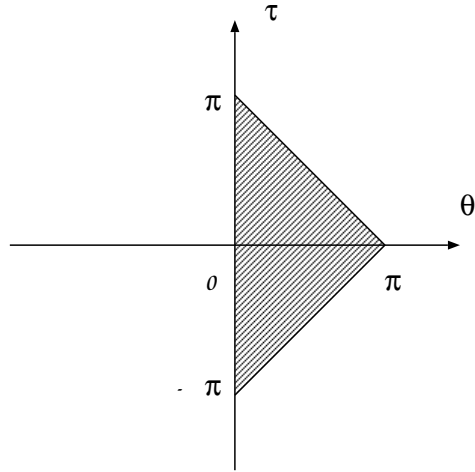


図 3.1: (τ, θ) 平面

4次元の空間における計量は

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_3^2 + dX_1^2 + dX_2^2 \quad (3.6)$$

となる。この表式では AdS_3 空間に $SO(2, 2)$ の対称性が manifest に見てとることができる。

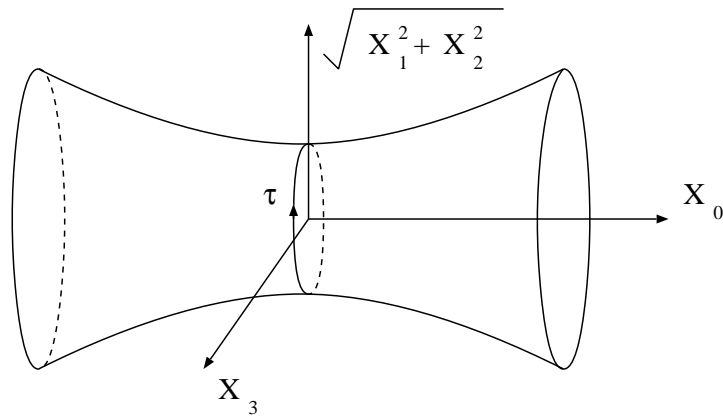


図 3.2: 4次元の Minkowski 空間での AdS_3 空間

ここで、次のような座標変換を考える。

$$\begin{aligned} X_0 &= l \cosh \rho \cos \tau \\ X_3 &= l \cosh \rho \sin \tau \\ X_1 &= l \sinh \rho \cos \phi \\ X_2 &= l \sinh \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (3.7)$$

ただし、 $0 < \rho$ 、 $0 \leq \tau \leq 2\pi$ 、 $0 \leq \phi \leq 2\pi$ とする。すると、計量は

$$ds^2 = l^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2) \quad (3.8)$$

と書き直すことができる。この座標は global coordinate と呼ばれ、よく使われる座標の中のひとつである。時間軸 τ は図 3.2 のような向きになっている。時間軸 τ は今周期的にとってあるが、 $\infty \leq \tau \leq \infty$ を取って時間軸に対して周期的でないとする。

3次元 Minkovski 空間の場合と同様に座標を取り直すことで、有限な領域で表すことを考える。今回は、 $\tan \theta = \sinh \rho$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) の座標変換をする。すると、

$$ds^2 = \frac{l^2}{\cos^2 \theta}(-d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.9)$$

となり、計量を共形変換をすると、

$$ds'^2 = -d\tau^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.10)$$

となって、3次元 Minkovski 空間の場合と同じになることが分かる。ただし、今回は θ の範囲が $0 \leq \theta \leq \pi/2$ となっているため、 $\mathbf{R} \times S^2$ のなかの S^2 に対して、 $\theta = \pi/2$ のところで、境界を持つことが分かる。したがって、 AdS_3 空間には境界が存在していて、その幾何は cylinder になっていることが分かる。

もう一つよく用いられる座標系として Poincaré coordinate がある。式 (3.5) において、次のような変数変換をする。

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2u}(1 + u^2(l^2 + x^2 - t^2)) \\ X_3 &= lut \\ X_1 &= \frac{1}{2u}(1 - u^2(l^2 - x^2 + t^2)) \\ X_2 &= lux \end{aligned} \quad (3.11)$$

ただし、 $u > 0$ とする。すると、計量は

$$ds^2 = l^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2(-dt^2 + dx^2) \right) \quad (3.12)$$

となる。

global coordinate では Wick 回転 $\tau \rightarrow -i\tau$ してやることで、Euclid 化をすることができる。計量は

$$ds^2 = l^2(\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2) \quad (3.13)$$

となる。このとき、 $X_3 \rightarrow -iX_3$ という変換をしてやることによって、式 (3.5) は

$$-X_0^2 + X_3^2 + X_1^2 + X_2^2 = -l^2 \quad (3.14)$$

と書き直せる。計量は

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_3^2 + dX_1^2 + dX_2^2 \quad (3.15)$$

となる。Euclid 版の AdS_3 空間には $SO(3,1) \simeq SL(2,C)$ の対称性が存在していることが分かる。また、global coordinate で $\sinh \rho = r$ とすると、計量は

$$ds^2 = l^2 \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) d\tau^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.16)$$

となる。この座標は Euclidean のときの BTZ ブラックホールとの比較をするときに便利な表式である。

Poincaré coordinate での Euclid 化も同じように $t \rightarrow -it$ で行うことができる。

$$ds^2 = l^2 \left(\frac{du^2}{u^2} + u^2(dt^2 + dx^2) \right) \quad (3.17)$$

ここで次のような座標変換を行う。

$$\begin{aligned} u &= e^\phi \\ \gamma &= it + x \\ \bar{\gamma} &= -it + x \end{aligned} \quad (3.18)$$

すると、計量は

$$ds^2 = l^2(d\phi^2 + e^{2\phi}d\gamma d\bar{\gamma}) \quad (3.19)$$

となる。この式は後で、 AdS_3 空間を背景としてもつような弦理論を構成するときに用いる。

式 (3.16) と式 (3.19) との間の座標変換は、

$$\begin{aligned} \phi &= \tau + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) \\ \gamma &= \frac{r}{\sqrt{l^2+r^2}} e^{-\tau+i\theta} \\ \bar{\gamma} &= \frac{r}{\sqrt{l^2+r^2}} e^{-\tau-i\theta} \end{aligned} \quad (3.20)$$

となっている。 AdS_3 空間の境界は式 (3.16) で $r \rightarrow \infty$ の位置にあたっている。この座標では、境界は (τ, θ) で張られる円筒になっている。式 (3.20) の座標変換で $r \rightarrow \infty$ を取ることで、式 (3.19) での境界が $e^\phi \approx re^\tau/l$ 、 $\gamma \approx e^{-\tau+i\theta}$ 、 $\bar{\gamma} \approx e^{-\tau-i\theta}$ になっていることが分かる。この境界は $(\gamma, \bar{\gamma})$ によって張られる球面になっている。

3.2 3次元重力理論と Chern-Simons 理論

この節では 3次元反ド・ジッター空間の重力理論を Chern-Simons 理論 [16] に帰着させることで、境界に存在する共形場理論 [17] を調べたいのだが、重力理論が Chern-Simons 理論と等価であることを示すためには、重力理論を多脚場とスピン接続を用いて書き直す必要がある。第 3.2.1 節で多脚場とスピン接続の説明をし、第 3.2.2 節で重力理論が Chern-Simons 理論に帰着できることを示す。第 3.2.3 節で漸近的に 3次元反ド・ジッター空間である場合には、境界に共形場理論が存在することを示す [18][19]。

3.2.1 多脚場とスピン接続

次の節からは、 AdS_3 空間を Chern-Simons 理論に帰着させることで、 AdS_3 空間について調べていく。そのためには計量と Christoffel 記号 $(g_{\mu\nu}, \Gamma^\mu_{\nu\rho})$ でかかれた表式から、多脚場とスピン接続 (e^a_μ, ω^a_{bc}) でかかれた表式に変換する必要がある。ここで、 μ, ν, \dots を一般座標の添字とし、 a, b, \dots をある点 x_0 のまわりの接平面上でとった直交座標の添字とする。計量から多脚場への変換は次のように定義される。

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e^a_\mu(x) e^b_\nu(x) \quad (3.21)$$

この節の内容は一般の次元について成立するが、この章では 3 次元の場合のみ用いる。その場合には多脚場を triad と呼ぶことがある。また、次のような 1-form を考えると便利である。

$$e^a(x) = e^a_\mu(x) dx^\mu \quad (3.22)$$

多脚場は一般の座標変換に対して共変ベクトルとして変換する。

$$e^a_\mu(x) \rightarrow e'^a_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a_\nu(x) \quad (3.23)$$

局所 Lorentz 変換の生成子を $L^a_b(x)$ として、

$$\eta_{ab} L^a_c(x) L^b_d(x) = \eta_{cd} \quad (3.24)$$

を満たしているとする、局所座標変換に対して、

$$e^a_\mu(x) \rightarrow e'^a_\mu(x) = (L^{-1}(x))^a_b e^b_\mu(x) \quad (3.25)$$

の変換をする。

多脚場の逆は

$$e_a^\mu(x) = \eta_{ab} g^{\mu\nu}(x) e^b_\nu(x) \quad (3.26)$$

で定義される。また、次の式を満たしている。

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu}(x) e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) \quad (3.27)$$

determinant は

$$e = |\det e^a_\nu| \quad (3.28)$$

で定義され、 $e = \sqrt{|g|}$ となっている。

局所座標系に対して接続を定義することができ、それをスピン接続と呼ぶ。スピン接続は

$$\omega^a_b = \omega^a_{bc} e^c = \omega^a_{b\mu} dx^\mu \quad (3.29)$$

で表すことにする。スピン接続を用いて共変微分を定義することができる。

$$D = d + [\omega,] \quad (3.30)$$

ただし、 $D = D_c e^c = D_\mu dx^\mu$ とした。曲率も同様に定義でき、 $R^a_b = R^a_{bcd} e^c e^d = R^a_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ としたとき、

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b \quad (3.31)$$

とできる。torsion も多脚場のねじれから定義でき、 $T^a = T^a_{cd} e^c e^d = T^a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ としたとき、

$$T^a = (De)^a = de^a + \omega^a_b e^b \quad (3.32)$$

とできる。 η_{ab} が共変微分に対して定数であるという条件と torsion が zero という条件から ω^a_b を e^a を用いて書き表すことができる。これは一般座標のときに Christoffel 記号が計量を用いて書き表すことのできることに対応している。

一般座標系と局所直交座標系とは式 (3.21) で移りあうため、スピン接続と Christoffel 記号との関係を求めることができる。Christoffel 記号を用いて書いた一般座標変換に対する共変微分 ∇_α をもちいると、 η_{ab} が定数であることから、

$$\nabla_\alpha (g^{\mu\nu} e^a_\mu e^b_\nu) = 0 \quad (3.33)$$

とできる。計量が共変微分に対して定数であることを用いると、

$$e^{b\mu} \nabla_\alpha e^a_\mu + e^{a\mu} \nabla_\alpha e^b_\mu = 0 \quad (3.34)$$

となる。また、torsion free の式から、

$$\begin{aligned} T^a &= de^a + \omega^a_c e^c \\ &= \frac{1}{2} [e_c^\mu \nabla_b e^a_\mu - e_b^\mu \nabla_c e^a_\mu + \omega^a_{cb} - \omega^a_{bc}] e^b e^c \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。この2つの式を用いることで、

$$\omega^a_{bc} = e^{a\mu} \nabla_c e_{b\mu} = e^a_\mu \nabla_c e_b^\mu \quad (3.36)$$

となり、スピン接続と Christoffel 記号との関係

$$\omega^a_b = e^a_\mu de_b^\mu + e^a_\mu \Gamma^\mu_{\nu\rho} e_b^\nu \quad (3.37)$$

を求めることができた。ただし、 $\Gamma^\mu_\nu = \Gamma^\mu_{\nu a} e^a = \Gamma^\mu_{\nu\rho} dx^\rho$ とした。これを逆に解くと

$$\Gamma^\mu_\nu = e_a^\mu \omega^a_b e^b_\nu + e_a^\mu de^a_\nu \quad (3.38)$$

となる。

3.2.2 Chern-Simons 理論

この節では、前節で導入した多脚場とスピン接続を用いて 3 次元重力理論が Chern-Simons 理論に帰着できることを示す [18][19]。3 次元の負の宇宙定数 ($\Lambda = -2/l^2$) を持った物質のないときの作用は次のようになる。

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{g} \left(R + \frac{2}{l^2} \right) \quad (3.39)$$

計量は Euclidean であるとして、 G を 3 次元におけるニュートン定数とした。運動方程式は計量で変分をとることで求められ、

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{1}{l^2} g_{\mu\nu} \quad (3.40)$$

となる。リーマン曲率テンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ は添字を前 2 つ ($\mu\nu$) 後ろ 2 つ ($\rho\sigma$) ずつ組にすると、それぞれの組の中の添字の入れ換えに対して反対称なので、独立な成分は 3 つずつとなる。組と組の入れ換えに対しては反対称なので、運動方程式と同じ数の成分をもっていることが分かる。したがって、運動方程式からリーマン曲率テンソル $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ を決めることができ、

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{l^2} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad (3.41)$$

となる。実際に運動方程式に代入することで成り立っていることが分かる。

次に式 (3.39) の作用を前節で定義した多脚場とスピン接続を用いて書き直す。第一項は epsilon tensor の公式

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\beta}^{\mu}) \\ e \epsilon_{\alpha\beta\lambda} &= \epsilon_{abc} e^a_{\alpha} e^b_{\beta} e^c_{\lambda} \end{aligned} \quad (3.42)$$

を利用すると、

$$\begin{aligned} \int \sqrt{g} R &= \int e \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \int e \epsilon^{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\lambda} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \int \epsilon^{\mu\nu\lambda} \epsilon_{abc} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} e^a_{\alpha} e^b_{\beta} e^c_{\lambda} \\ &= \int \epsilon_{abc} R^{\alpha\beta} e^c \end{aligned} \quad (3.43)$$

と書き換えることができる。第二項も同様に計算することができて、両方を合わせると、

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{abc} \left(R^{ab} + \frac{1}{3l^2} e^a e^b \right) e^c \quad (3.44)$$

となる。

今 3 次元なので、epsilon tensor を用いることで次のような量を定義することができる。

$$\omega^a = -\frac{1}{2} \epsilon^a_{bc} \omega^{bc}, \quad R^a = -\frac{1}{2} \epsilon^a_{bc} R^{bc} \quad (3.45)$$

2つの量から $R^a = d\omega^a + \frac{1}{2}\epsilon^a{}_{bc}\omega^b\omega^c$ と書き直せることが分かる。今定義した量を用いて A^a 、 \bar{A}^a という量を次のように定義する。

$$A^a = \omega^a + \frac{i}{l}e^a, \quad \bar{A}^a = \omega^a - \frac{i}{l}e^a \quad (3.46)$$

逆に解き直すと、

$$\omega^a = \frac{1}{2}(A^a + \bar{A}^a), \quad e^a = -\frac{il}{2}(A^a - \bar{A}^a) \quad (3.47)$$

となることを利用して、式 (3.44) を A^a 、 \bar{A}^a で書き表すと、

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \left[\frac{il}{2}(A^a dA_a + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}A^a A^b A^c) - \frac{il}{2}(\bar{A}^a d\bar{A}_a + \frac{1}{3}\epsilon_{abc}\bar{A}^a \bar{A}^b \bar{A}^c) \right] \quad (3.48)$$

となる。

anti-hermitian の $SU(2)$ の生成子を導入して作用を更にかき換える。

$$T_1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

交換関係は $[T_a, T_b] = \epsilon_{abc}T_c$ となっている。また、 $\text{Tr}(T_a T_b) = -(1/2)\delta_{ab}$ となっている。ここで、次のような場を導入する。

$$A = A^a T_a, \quad \bar{A} = \bar{A}^a T_a \quad (3.50)$$

この場を利用して式 (3.48) を書き換えると、次のように A のみによる作用と \bar{A} のみによる作用とを分離することができる。

$$S = iI[A] - iI[\bar{A}] \quad (3.51)$$

ただし、 $I[A]$ は次のような作用である。

$$I[A] = \frac{k}{4\pi} \int \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3}AAA) \quad (3.52)$$

この作用は Chern-Simons 作用と呼ばれるもので、今 level

$$k = -\frac{l}{4G} \quad (3.53)$$

を持っている。 A^a 、 \bar{A}^a が複素数となっていたので、場 A 、 \bar{A} の群は $SL(2, C)$ となり、non-compact になっている。Chern-Simons 作用の運動方程式は Einstein 方程式に対応しているが、

$$F^a = 0, \quad \bar{F}^a = 0 \quad (3.54)$$

となっていて、考えている多様体の内部にあたる bulk には自由度が存在していないことが分かる。

次に一般の Chern-Simons 理論において、境界に affine Kac-Moody の対称性の存在することを示す。作用 (3.52) を Hamilton 形式にするために、時間方向と空間方向を分離して、 $A^a = A_0^a dt + A_i^a dx^i$

とする。ここで、 $a, b, \dots = 1, 2, \dots, N$ とする。ただし、 N は群 G の次元とした。このとき作用 (3.52) は、

$$I = \frac{k}{8\pi} \int dt \int_{\Sigma} \epsilon^{ij} \delta_{ab} (A_i^a \dot{A}_j^b - A_0^a F_{ij}^b) \quad (3.55)$$

と書き直すことができる。ただし、 Σ は x_i ではられる 2 次元空間とする。

A_0^a は時間微分を含んでいないため補助場となっていて、 A_0^a に対する運動方程式を解くことによって、

$$F_{ij}^a = 0 \quad (3.56)$$

という式が得られる。したがって、 $\delta A_i^a = D_i \lambda^a$ というゲージ変換に対して理論が不変であることが分かる。 A_i^a は物理的な自由度となり、次の poisson 括弧を満たす。

$$\{A_i^a(x), A_j^b(y)\} = \frac{4\pi}{k} \epsilon_{ij} \delta^{ab} \delta(x-y) \quad (3.57)$$

物理的な場は A_i^a だけなので、自由度は $2N$ 個ある。ただし、 $F_{ij}^a = 0$ という制約がかかるので、自由度は $2N - N = N$ 個になる。ゲージ変換による同一視を考えると、自由度は $N - N = 0$ 個になり、物理的な自由度が存在しないことになってしまう。ただし、今多様体に境界のある場合を考えているため、ゲージ対称性が境界の寄与によって破れてしまっている。 $F_{ij}^a = 0$ を満たしていても、境界で異なる A_i^a 同士は移りあうことができない。

次に実際に境界にある自由度を調べることにする。群の生成子を T_a で表し、先に定義した $SU(2)$ の生成子の規格化とあわせるために、 $\text{Tr}(T_a T_b) = -(1/2) \delta_{ab}$ と決める。 $\int_{\Sigma} = -2 \int_{\Sigma} \text{Tr}$ と定義し直して式 (3.55) を書き換えると、

$$I = \frac{k}{4\pi} \int dt \int_{\Sigma} (A \dot{A} - A_0 F) \quad (3.58)$$

となる。ただし、 $A = A_i^a T_a dx^i$ 、 $F = F_{ij}^a T_a dx^i dx^j$ とした。今、 $F = 0$ が成り立っているので、ゲージ場 A は pure gauge でかけ、

$$A = g^{-1} dg \quad (3.59)$$

となる。 $D = d + [A, \]$ を用いると、 $\delta A = D(g^{-1} \delta g)$ 、 $\dot{A} = D(g^{-1} \dot{g})$ と書き直せることを利用すると、 δA だけずらした時の作用の変分は、

$$\begin{aligned} \delta I &= -\frac{k}{2\pi} \int dt \int_{\Sigma} \dot{A} \delta A \\ &= -\frac{k}{2\pi} \int dt \int_{\Sigma} D(g^{-1} \dot{g}) D(g^{-1} \delta g) \\ &= \frac{k}{\pi} \int dt \int_{\partial \Sigma} D_{\gamma}(g^{-1} \delta g) g^{-1} \delta g \\ &= \frac{k}{\pi} \int dt \int_{\partial \Sigma} \dot{A}_{\gamma} \frac{1}{D_{\gamma}} \delta A_{\gamma} \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる。ただし、ここで $\partial \Sigma$ は 2 次元空間 Σ の境界とし、 δA_{γ} 、 D_{γ} はそれぞれ作用を境界上に制限したものとする。 γ は $\partial \Sigma$ のパラメーターとする。

この理論の poisson 括弧は作用の変分から読み取ることができ、

$$\{A_\gamma, A_\gamma\} = \frac{2\pi}{k} D_\gamma \quad (3.61)$$

となる。

$$A_\gamma = \frac{2}{k} \sum_n J_n e^{in\gamma} \quad (3.62)$$

と mode 展開して、この逆

$$J_n^a = -2\text{Tr}(J_n T^a) = -\frac{k}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} (A_\gamma e^{-in\gamma} T^a) \quad (3.63)$$

に対する poisson 括弧を計算すると、式 (3.61) を利用することで、

$$\{J_n^a, J_m^b\} = -\epsilon^{ab} J_{n+m}^c + \frac{ink}{2} \delta^{ab} \delta_{n+m,0} \quad (3.64)$$

となる。poisson 括弧を交換子にかえて、 $-i$ 倍すると、

$$[J_n^a, J_m^b] = i\epsilon^{ab} J_{n+m}^c + \frac{nk}{2} \delta^{ab} \delta_{n+m,0} \quad (3.65)$$

となり、level k の $su(2)$ affine Kac-Moody 代数の生成子となっていることが読み取れる。

3.2.3 Brown-Henneaux 共形対称性

3次元の負の宇宙定数 ($\Lambda = -2/l^2$) をもった作用は物質場の寄与のあるときは、式 (3.39) に物質場による寄与が加わり、

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{g} \left(R + \frac{2}{l^2} \right) + S_{\text{matter}} \quad (3.66)$$

となる。空間の境界近くでは物質場による寄与がないとすると、境界近くでは空間は AdS_3 空間になっている。このとき境界にはもともとの $SO(3,1)$ の対称性から共形対称性に対称性が拡大する。この共形対称性は Brown と Henneaux [17] によって発見された。この節では Chern-Simons 理論を利用して境界に共形対称性が存在することを示す。

この節では AdS_3 空間の計量として Poincaré coordinate を変形したもの

$$ds^2 = e^{2\rho}(dx^2 + dy^2) + l^2 d\rho^2 \quad (3.67)$$

を用いる。この計量から多脚場は次のように選ぶことができる。

$$\begin{aligned} e^1 &= e^\rho dx \\ e^2 &= e^\rho dy \\ e^3 &= l d\rho \end{aligned} \quad (3.68)$$

また、torsion free の条件から、 $T^a = de^a + \epsilon^a_{bc}\omega^b\omega^c = 0$ となり、スピン接続 ω^a を多脚場 e^a を用いて求めることができる。

$$\begin{aligned}\omega^1 &= -\frac{1}{l}e^\rho dy \\ \omega^2 &= \frac{1}{l}e^\rho dx \\ \omega^3 &= 0\end{aligned}\tag{3.69}$$

Chern-Simons 理論を用いて考察したいので、多脚場とスピン接続をゲージ場書き直す。 $w = x + iy$ 、 $\bar{w} = x - iy$ と書き直し、式 (3.47) $A^a = \omega^a + \frac{i}{l}e^a$ 、 $\bar{A}^a = \omega^a - \frac{i}{l}e^a$ を用いる。そして、

$$\begin{aligned}A^a &= A^a_w dw + A^a_{\bar{w}} d\bar{w} + A^a_\rho d\rho \\ \bar{A}^a &= \bar{A}^a_w dw + \bar{A}^a_{\bar{w}} d\bar{w} + \bar{A}^a_\rho d\rho\end{aligned}\tag{3.70}$$

と定義しなおすと、空間が AdS_3 空間のときのゲージ場の値を求めることができる。

$$(A^1_w, A^2_w, A^3_w) = \left(\frac{i}{l}e^\rho, \frac{1}{l}e^\rho, 0\right)\tag{3.71}$$

$$(A^1_{\bar{w}}, A^2_{\bar{w}}, A^3_{\bar{w}}) = (0, 0, 0)\tag{3.72}$$

$$(A^1_\rho, A^2_\rho, A^3_\rho) = (0, 0, i)\tag{3.73}$$

$$(\bar{A}^1_w, \bar{A}^2_w, \bar{A}^3_w) = (0, 0, 0)\tag{3.74}$$

$$(\bar{A}^1_{\bar{w}}, \bar{A}^2_{\bar{w}}, \bar{A}^3_{\bar{w}}) = \left(-\frac{i}{l}e^\rho, \frac{1}{l}e^\rho, 0\right)\tag{3.75}$$

$$(\bar{A}^1_\rho, \bar{A}^2_\rho, \bar{A}^3_\rho) = (0, 0, -i)\tag{3.76}$$

次に境界でこれらの値をとるようなゲージ場を探す。今、ゲージ場は $F = 0$ を満たしている。式 (3.73) は radial 方向の座標の定義にあたっているため、この条件はいつも成り立っているとす。式 (3.72) が境界で成り立っているととして $F = 0$ を解くと、境界以外でも $A_{\bar{w}} = 0$ が成り立っていて、自由度は、

$$A_w = b^{-1}\hat{A}(w)b, \quad b = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\rho}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\rho}{2}} \end{pmatrix}\tag{3.77}$$

のみとなる。 $\hat{A}(w)$ は w の関数になっていて、無限次元の自由度がまだ残っていることが分かる。このゲージ固定を変えないようなゲージ変換は次のようなものである。

$$\delta A_\mu = D_\mu \eta, \quad \eta = b^{-1}\hat{\eta}(w)b\tag{3.78}$$

このとき、 $\hat{A}(w)$ は次のような変換をする。

$$\delta \hat{A}(w) = \hat{D}_w \hat{\eta}(w)\tag{3.79}$$

式 (3.60) に今求めた A を代入することで、 $A_\gamma = \hat{A}(w)$ となっていることが分かる。したがって、 $\hat{A}(w)$ は level k の $su(2)$ affine Kac-Moody 代数の生成子となっている。この解は affine 解と呼ばれる。

さらに、境界で AdS_3 空間になっているためには、式 (3.71) も満たしている必要がある。 $\hat{A}^\pm = \hat{A}^1 \pm i\hat{A}^2$ を導入することで、

$$\begin{aligned} A_w &= \frac{i}{2} b^{-1} \begin{pmatrix} \hat{A}^3 & \hat{A}^+ \\ \hat{A}^- & -\hat{A}^3 \end{pmatrix} b \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \hat{A}^3 & e^\rho \hat{A}^+ \\ e^{-\rho} \hat{A}^- & -\hat{A}^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.80)$$

と書き直すことができる。境界は $\rho \rightarrow \infty$ に対応しているので、 $\rho \rightarrow \infty$ の極限をとることで、 \hat{A}^- が自由度として残り、

$$\hat{A}^3 = 0, \quad \hat{A}^+ = -2 \quad (3.81)$$

とすればよいことが分かる。ここで、Virasoro 代数と規格化を合わせるために、 $L(w) = (k/2)\hat{A}^-$ とおく。このとき、条件 (3.81) を用いて、式 (3.80) を書き直すことで、

$$A_w = ib \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{k}L(w) & 0 \end{pmatrix} b \quad (3.82)$$

となる。式 (3.81) の条件のもとでも、まだ無限次元の自由度が残っていることが分かる。このゲージ固定を変えないようなゲージ変換は次のようなものである。

$$\eta = -b^{-1} \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\partial\varepsilon & \varepsilon \\ \frac{1}{k}\varepsilon L(w) + \frac{1}{2}\partial^2\varepsilon & -\frac{i}{2}\partial\varepsilon \end{pmatrix} b \quad (3.83)$$

このとき、ゲージ変換は式 (3.78) で表され、 $L(w)$ は次のような変換性を示す。

$$\delta L = i\varepsilon\partial L + 2\partial\varepsilon L + \frac{k}{2}\partial^3\varepsilon \quad (3.84)$$

次に $L(w)$ の mode 展開

$$L(w) = \sum_n L_n e^{inw} \quad (3.85)$$

が実際に Virasoro 代数をなしていることを示す。式 (3.62) から $J_n^- = L_n$ となり、式 (3.81) は

$$J_n^+ = -k\delta_{n,0}, \quad T_n^3 = 0 \quad (3.86)$$

となる。制限が加わった場合の量子化は poisson 括弧を Dirac 括弧に置き換えることで行うことができる。式 (3.86) はそれぞれの交換関係が non-zero の値をもつので、second constraint となっている。ここで $J_n^\pm = J_n^1 \pm iJ_n^2$ として行列

$$C = \begin{pmatrix} [J_n^+, J_m^+] & [J_n^+, J_m^3] \\ [J_n^3, J_m^+] & [J_n^3, J_m^3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k\delta_{n+m,0} \\ -k\delta_{n+m,0} & \frac{kn}{2}\delta_{n+m,0} \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

を定義する。この行列には逆が存在するので、Dirac 括弧を定義することができる。ここで、式 (3.65) を J_n^\pm を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} [J_m^+, J_n^-] &= km\delta_{m+n,0} + 2J_{m+n}^3 \\ [J_m^3, J_n^\pm] &= \pm J_{m+n}^\pm \\ [J_m^3, J_n^3] &= \frac{k}{2}m\delta_{m,-n} \end{aligned} \quad (3.88)$$

となることを用いた。行列 C^{-1} を用いることで普通の交換子と Dirac 括弧に対応する交換子は次のような関係をもつ。

$$[a, b]^* = [a, b] + \frac{n}{2k}[a, J_n^+][J_{-n}^+, b] + \frac{1}{k}[a, J_n^+][J_{-n}^3, b] - \frac{1}{k}[a, J_n^3][J_{-n}^+, b] \quad (3.89)$$

この Dirac 括弧に対応する交換子を用いることで、Virasoro 代数の交換関係

$$[L_n, L_m]^* = (n-m)L_{n+m} - \frac{k}{2}n^3\delta_{n+m} \quad (3.90)$$

を再現することができる。central charge は

$$c = -6k \quad (3.91)$$

となっている。式 (3.53) から $k = -l/(4G)$ という関係がついているため、ニュートン定数を用いて central charge を書き表すと、

$$c = \frac{3l}{2G} \quad (3.92)$$

となる。この解は Virasoro 解と呼ばれる。Brown と Henneaux [17] は計量の形式を用いて境界で AdS_3 空間となるような条件の元で、境界に存在する共形場理論の Virasoro 代数の生成子を求めた。計量を用いる方法と Chern-Simons 理論を用いる方法とは互いに入れ換えることができるため、本質的にこの節で行ったことと同じことをしている。

3.3 BTZ ブラックホール

3次元ブラックホールは発見者の頭文字をとって、BTZ ブラックホールと呼ばれている [28][29]。計量はブラックホールの質量を M 、角運動量を J としたとき、

$$ds^2 = l^2 N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (d\phi + iN^\phi dt)^2 \quad (3.93)$$

となる。ただし、計量は Euclidean であるとする。 N は時間のずれを表しているため lapse 関数と呼ばれていて、 N^ϕ は時間ごとに多様体を切ったときに時間がたつにつれどれだけずれるかを表すため shift 関数と呼ばれている。具体的に質量 M と角運動量 J を用いて表すと、

$$N^2 = -8GM + \frac{r^2}{l^2} + \frac{16G^2 J^2}{r^2} \quad (3.94)$$

$$N^\phi = -\frac{4GJ}{r^2} \quad (3.95)$$

となる。horizon は $N(r) = 0$ の点に対応していて、実際に計算することで、

$$r_{\pm}^2 = 4GMl^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right) \quad (3.96)$$

と求まる。horizon が存在するためには、質量が正 $M > 0$ であることと、BPS 条件 $|J| \geq Ml$ を満たしている必要がある。 $|J| = Ml$ のときには $r_+ = r_-$ が成り立っていて extremal な状態に対応している。Bekenstein-Hawking の公式からエントロピーを求めると、

$$S = \frac{Area}{4G} = \frac{2\pi r_+}{4G} \quad (3.97)$$

となる。 $J = 0$ 、 $M = -1/(8G)$ としてみると、

$$ds^2 = l^2 \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) d\tau^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.98)$$

となり、式 (3.16) の式と一致している。すなわち、角運動量がなく、質量が負のある決まった値の時の BTZ ブラックホールは AdS_3 空間そのものになっていて、特異点が存在していないことが分かる。

今調べた BTZ ブラックホールを第 2.2 節で調べた Chern-Simons 理論との関係性を求めることにする。そのためには、Chern-Simons 理論から計量を使った方法に変換する必要がある。式 (3.47) から多脚場とゲージ場との関係性は $e^a{}_{\mu} = -(il/2)(A^a{}_{\mu} - \bar{A}^a{}_{\mu})$ となっており、式 (3.21) から多脚場と計量との関係性は $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e^a{}_{\mu}e^b{}_{\nu}$ となっている。 $SU(2)$ の生成子 T_a を用いて $e_{\mu} = e^a{}_{\mu}T_a$ と定義したとき、

$$e_{\mu} = -\frac{i1}{2}(A_{\mu} - \bar{A}_{\mu}) \quad (3.99)$$

と多脚場を行列形式で表すことができる。計量は $SU(2)$ の生成子のトレースが $\text{Tr}(T_a T_b) = -(1/2)\delta_{ab}$ となっていることから、

$$g_{\mu\nu} = -2\text{Tr}(e_{\mu}e_{\nu}) \quad (3.100)$$

を用いて計算することができる。

実際に Virasoro 解を用いて Brown-Henneaux の共形場理論の Virasoro 代数の生成子と計量との関係性を求める。Virasoro 解のゲージ場を式 (3.99) に代入すると、

$$e_w = \frac{l}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{\rho} \\ e^{-\rho} \frac{L}{k} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

$$e_{\bar{w}} = -\frac{l}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-\rho} \frac{\bar{L}}{k} \\ e^{\rho} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

$$e_{\rho} = l \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

となる。式 (3.100) を用いて多脚場から計量に変換すると、

$$ds^2 = 4Gl(Ldw^2 + \bar{L}d\bar{w}^2) + (l^2 e^{2\rho} + 16G^2 L\bar{L}e^{-2\rho})dwd\bar{w} + l^2 d\rho^2 \quad (3.104)$$

となり、Virasoro 代数の生成子を用いて計量を書き表すことができた。ただし、ここで式 (3.53) の current 代数の level と 3 次元の重力理論における変数との変換式 $k = -l/(4G)$ を用いた。

Virasoro 代数の生成子が定数のときがブラックホールに対応している。もし Virasoro 代数の生成子が torus 上に定義されているならば、global に torus 上に定義することのできる関数は定数のみである。ここで、次のように規格化を決めたとき、式 (3.93) に一致することを示すことができる。

$$L_0 + \bar{L}_0 = Ml = \frac{r_+^2 + r_-^2}{8Gl} \quad (3.105)$$

$$L_0 - \bar{L}_0 = J = \frac{2r_+r_-}{8Gl} \quad (3.106)$$

式 (3.93) と比較するためには変数変換をする必要がある。そこで、

$$w = \phi + it \quad (3.107)$$

として、radial 方向を

$$r^2 = r_+^2 \cosh^2(\rho - \rho_0) - r_-^2 \sinh^2(\rho - \rho_0) \quad (3.108)$$

とする。 ρ_0 は

$$e^{2\rho} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{4l^2} \quad (3.109)$$

を満たすとする。このような座標を選ぶことによって、 $l^2 d\rho^2 = N^{-2} dr^2$ の性質を持たせることができる。実際にこれらの座標変換を行うことによって、式 (3.104) の計量が式 (3.105) と式 (3.106) の元で、式 (3.93) の計量と一致することが示される。

式 (3.105) と式 (3.106) によって、Brown-Henneaux の共形場理論の Virasoro 代数の生成子と、ブラックホールの質量と角運動量との関係をつけることができたので、式 (2.87) の Cardy の公式を用いて Brown-Henneaux の共形場理論の立場からブラックホールのエントロピーを求めてみる。Cardy の公式は

$$S(L_0, \bar{L}_0) \sim 2\pi\sqrt{\frac{cL_0}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{c\bar{L}_0}{6}} \quad (3.110)$$

で、共形場理論の central charge は式 (3.92)

$$c = \frac{3l}{2G} \quad (3.111)$$

なので、これらの式を元にしてエントロピーを計算すると、

$$\begin{aligned} S &\sim 2\pi\sqrt{\frac{l(Ml + J)}{8G}} + 2\pi\sqrt{\frac{l(Ml - J)}{8G}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^2}{2G}l(2Ml + 2\sqrt{Ml^2 - J^2})} \\ &= \frac{2\pi r_+}{4G} = \frac{Area}{4G} \end{aligned} \quad (3.112)$$

となり、Bekenstein-Hawking の公式を用いて計算した値と一致している。このことは bulk の情報が境界にある共形場理論から得られることを示唆しており、反ド・ジッター空間の bulk の情報とその境界にある共形場理論の情報が対応しているという AdS/CFT 対応 [12][30][34] になっている。

境界にある共形場理論は effective には Liouville 理論 [35] で表すことができ、そのときには $c_{eff} = 1$ を用いるべきという議論もある [36] が、Liouville 理論で表すときには A^a と \bar{A}^a を組み合わせて新しく場を定義し直しているため、自由度が落ちてしまっておりエントロピーの議論をする際には Liouville 理論に帰着させる方法は向いていないと思われる [19][37]。

3.4 AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応は Maldacena [12] によって提唱され、その後さまざまな方向に発展してきた [14][13]。包括的な Review として [15] がある。この論文では、 AdS_3/CFT_2 対応について詳しく説明するつもりなのだが、AdS/CFT 対応は基本的に AdS_5/CFT_4 対応を中心に研究されてきた。したがって、 AdS_5/CFT_4 対応について始めに述べて、そのあとに AdS_3/CFT_2 対応について簡単に述べる。 AdS_3/CFT_2 対応についての詳しい話は第 4 章で述べることにする。

3.4.1 AdS_5/CFT_4 対応

D-brane 上の理論は第 2.4.1 節で説明したように、D-brane の数が N 枚のとき、ゲージ群が $U(N)$ のゲージ理論になる。ただし、全体の並進に対応する $U(1)$ 部分は分離することができるので、 $SU(N)$ のゲージ理論にすることができる。 AdS_5/CFT_4 対応は D3-brane を用いて説明されるが、このとき、D3-brane 上の理論は 4 次元のゲージ理論となっていて、赤外極限では共形場理論になり、 CFT_4 側の理論となる。超対称性が入った場合の DBI 作用 (2.138) を展開することで、ゲージ理論の結合定数を弦の結合定数を用いて表すことができ、

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s \quad (3.113)$$

となる。D-brane は超対称性を半分に落すので、もともと 10 次元の超弦理論に存在していた 32 個の超対称性の生成子のうち 16 個が残る。そのため、4 次元の理論では $\mathcal{N} = 4$ の超対称性が入った理論に対応している。

D-brane は tension と RR charge を持っているため、D-brane がたくさんあるような配位を考えると、時空が曲がってブラックホール解になる。Type IIB 弦理論の低エネルギー極限である Type IIB 超重力理論を用いて D3-brane が N 枚あるような配位のもとでの計量を求めると、

$$ds^2 = f^{-\frac{1}{2}} dx_{\parallel}^2 + f^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (3.114)$$

$$f = 1 + \frac{4\pi g_s N \alpha'^2}{r^4} \quad (3.115)$$

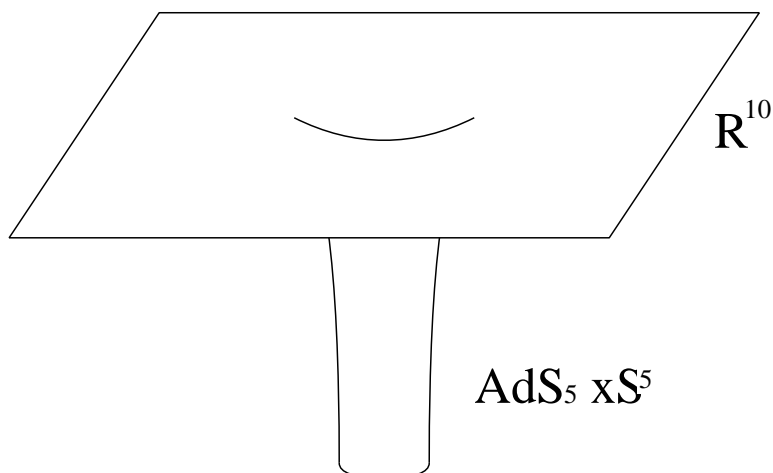


図 3.3: D3-brane によるブラックホール解。D3-brane のそばでは時空は $AdS_5 \times S^5$ になっている

となる。ここで、 $x_{//}$ は D3-brane に並行な 4 次元空間を表しており、 $d\Omega_5$ は S^5 の計量を表す。ここで新しい座標 $U \equiv \frac{r}{\alpha'}$ を導入する。 U を固定したままで $\alpha' \rightarrow 0$ の極限を考えてみることにする。このとき、 α' と同時に r も 0 に近づいているため、near horizon 極限を取っていることに対応する。結果としては、

$$ds^2 = \alpha' \left[\frac{U^2}{\sqrt{4\pi g_s N}} dx_{//}^2 + \sqrt{4\pi g_s N} \frac{dU^2}{U^2} + \sqrt{4\pi g_s N} d\Omega_5^2 \right] \quad (3.116)$$

となる。すなわち、near horizon 極限をとると、5 次元の反ド・ジッター空間と 5 次元の球面との直積になっている。 AdS_5 空間の曲率は $-L^{-2}$ となって、曲率の半径は

$$L = (4\pi g_s N)^{\frac{1}{4}} l_s \quad (3.117)$$

となっている。 $\lambda = 4\pi g_s N = g_{YM}^2 N$ が大きい場合、曲率の半径は $L \gg l_s$ となるので、弦理論による補正は小さいものとなる。この AdS_5 空間を表す超重力理論が AdS_5/CFT_4 対応の AdS_5 側の理論になっていて、D3-brane 上の $\mathcal{N} = 4$ の $SU(N)$ 超ゲージ理論に対応しているというのが AdS_5/CFT_4 対応の提案である。

超重力理論は、Planck 定数 \hbar が小さいとき loop による補正が小さくなる。 AdS_5 空間のほうの超重力理論を 10 次元の超重力理論から次元を落とすことによって求める。係数には compact 化する体積分だけかかるので、式 (3.117) を用いて作用の係数を求めると $L^4/g_s \alpha' = 1/N$ となる。すなわち、 $1/N$ と Planck 定数 \hbar とが対応していることが分かる。つまり、 N が大きいときに超重力理論で loop による補正を無視できるということである。 N が大きいときのゲージ理論は 't Hooft によって始められた $SU(N)$ ゲージ理論の $1/N$ 展開 [10] によって記述でき、その理論の基本的な量は 't Hooft 結合定数 $\lambda = g_{YM}^2 N$ である。ゲージ群が $SU(N)$ で基本表現のフェルミオンがある場合、1 loop 補正を考えるとフェルミオンが N 個存在するため、 $\lambda = g_{YM}^2 N$ が有効的

な結合定数として効いてくる。つまり、 λ が小さい場合に ゲージ理論の摂動的な描像がよいことが分かる。 λ が大きいとき超重力理論の記述がよく、 λ が小さいときにゲージ理論記述がよくなっている。そのため比較が難しいが、超対称性などでしぼりがきつくなり、理論が結合定数の繰り込み群による flow に影響を受けないときには、両者を比較することで AdS_5/CFT_4 対応の検証をすることができる。

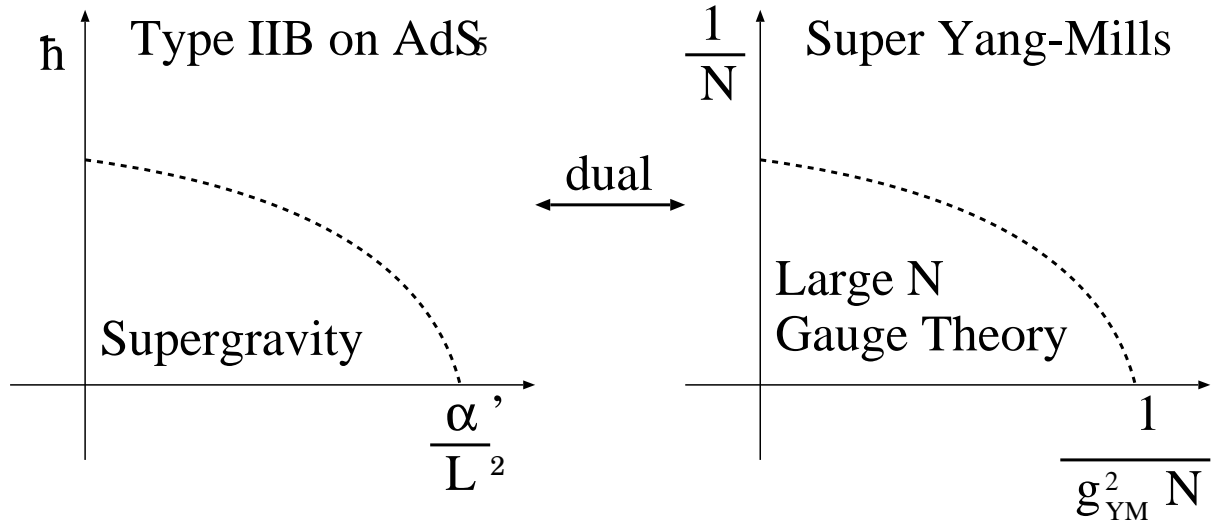


図 3.4: AdS/CFT 対応

AdS_5 空間の座標を式 (3.5) の 5 次元版で表すことによって、 AdS_5 空間が $SO(2, 4)$ の isometry を持つことが分かる。4 次元の共形場理論も 同じ $SO(2, 4)$ の対称性をもっているため、 AdS_5/CFT_4 対応の一つの証拠とできる。また、 $\mathcal{N} \geq 2$ の超対称性のある場の理論にはフェルミオンを入れ換える対称性である R 対称性があり、 $\mathcal{N} = 4$ の超対称性のある場の理論の場合には R 対称性は $SU(4) \simeq SO(5)$ となり、 S^5 の isometry に対応している。

AdS_5 空間上での超重力理論と 4 次元のゲージ理論の比較が難しい場合にも両者が等価であることを仮定すると、片方の理論からもう片方の理論の予言をすることができる。現実的には超重力理論の古典近似を用いて、4 次元のゲージ理論の結合定数の大きな場合の理論を導くことが主になされている。ゲージ理論が今、 AdS_5 空間の境界上の 1 次元少ない球面上にあるとする。超重力理論の場 ϕ がゲージ理論の演算子 \mathcal{O} のソースとなっている場合に ϕ_0 を ϕ の境界での値とすると

$$\langle e^{\int dx^4 \phi_0 \mathcal{O}(x)} \rangle_{SYM} = e^{-S_{SUGRA}[\phi]} \quad (3.118)$$

が成り立っていると考えることができる。例えば、 \mathcal{O} が current の場合には ϕ はゲージ場となっていて、 \mathcal{O} がエネルギー・運動量テンソルのときには ϕ は重力子となっている。ゲージ理論の相関関数は図 3.5 を超重力理論理論の Green 関数を用いて計算することによって求めることができる [14][13]。

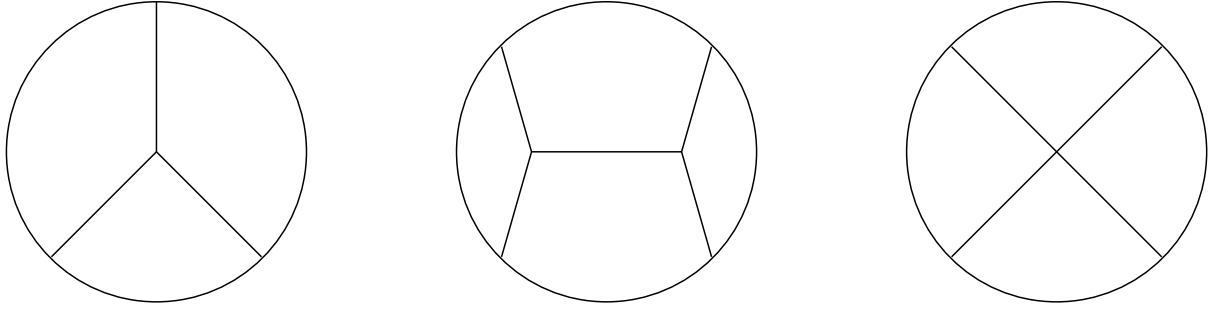


図 3.5: AdS/CFT 対応による相関関数の例

3.4.2 AdS_3/CFT_2 対応

次に AdS_3/CFT_2 対応について調べることにする。超弦理論には基本的弦とその magnetic dual な NS5-brane が存在している。まず、 k 本の基本弦と p 枚の NS5-brane を持ってきてその超重力理論における解を調べることにする。NS5-brane を 4 次元の torus に巻き付けて、その座標を x^i $i = 1, 2, 3, 4$ とする。torus の体積は vl_s^4 とする。残った 2 次元の方向に基本的弦をおき、その worldsheet の座標を $\gamma, \bar{\gamma}$ で表すことにする。残りの 4 次元は球対称であるとする。計量は [38] で与えられていて、

$$ds^2 = f_1^{-1} d\gamma d\bar{\gamma} + dx_i dx^i + f_5 (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \quad (3.119)$$

となっている。ただし、

$$f_1 = 1 + \frac{g^2 l_s^2 p}{vr^2} \quad (3.120)$$

$$f_5 = 1 + \frac{l_s^2 k}{r^2} \quad (3.121)$$

とした。弦の結合定数も

$$g_s^2(r) = e^{-2\phi} = \frac{1}{g^2} f_5^{-1} f_1 \quad (3.122)$$

で与えられる。 g は無限遠での弦の結合定数とする。

ここで、 AdS_5/CFT_4 対応の場合と同様に near horizon 近似をしてみる。 $r \rightarrow 0$ の近傍では式 (3.120) と式 (3.121) の第一項を無視することができ、計量は次のようになる。

$$ds_0^2 = k \frac{r^2}{l_s^2} d\gamma d\bar{\gamma} + kl_s^2 \left(\frac{1}{r^2} + d\Omega_3^2 \right) + dx_i dx^i \quad (3.123)$$

ただし、 $\gamma, \bar{\gamma}$ は大きさを変えた。この表式から near horizon では $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ になっていることが分かる。 AdS_3 空間と S^3 の半径は等しく $l = \sqrt{kl_s}$ になっている。弦の結合定数は

$$e^{-2\phi_0} = \frac{p}{vk} \quad (3.124)$$

となり、 r によらない定数となっている。第4章で AdS_3/CFT_2 対応について詳しく調べるが、それは今の F1/NS5 の系を調べていることに対応している [20][21][22]。そこで用いる WZW 模型の level k が NS5-brane の数に対応している。 AdS_3 空間を作っている計量には基本的弦の本数は入っていない。

次に near horizon 近似によって得られた AdS_3 空間とこの章で扱ってきた 3 次元重力理論との対応をつけることにする。10 次元の理論のうち 7 次元を compact 化することで 3 次元の理論を得ることができるが、次元を落すときに compact 化した体積が作用の頭につく。

$$\int d^d x \sqrt{-G_d}(R^d + \dots) = \text{vol}^{(d-p)} \int d^p x \sqrt{-G_p}(R^p + \dots) \quad (3.125)$$

そのため、3 次元のニュートン定数と 10 次元のニュートン定数との関係は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_3} &= \frac{1}{G_{10}} \times (\text{volume of } T^4) \times (\text{volume of } S^3) \\ &= \frac{1}{G_{10}} \times vl_s^4 \times l^3 \omega_3 \end{aligned} \quad (3.126)$$

となる。ただし、 ω_3 は 3 次元球面の単位体積 $2\pi^2$ とする。10 次元のニュートン定数は式 (2.168) を用いることによって弦の結合定数で表すことができ、

$$\frac{1}{16\pi G_{10}} = \frac{1}{2\kappa g^2} = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8 g^2} \quad (3.127)$$

となる。式 (3.126) と式 (3.126) を用いることで、

$$\frac{l}{G_3} = 4kp \quad (3.128)$$

となることが示せる。この 10 次元の超重力理論あるいは超弦理論の near horizon を調べることで出てくる AdS_3 空間の境界にある Brown-Henneaux の共形場理論の central charge [17] は

$$c = \frac{3l}{2G_3} = 6kp \quad (3.129)$$

となる。

第 2.4.2 で説明したように Type IIB 超弦理論には S-duality が存在し、F1 と D1、NS5 と D5 を入れ換える対称性となっている。S-dual をすることによって、今調べた系を k 本の D1-brane と p 枚の D5-brane の系にすることを考える。計量が S-dual 変換において、

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\phi} g_{\mu\nu} \quad (3.130)$$

の変換をすることを考慮すると、

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{g} f_1^{-\frac{1}{2}} f_5^{-\frac{1}{2}} d\gamma d\bar{\gamma} + \frac{1}{g} f_1^{\frac{1}{2}} f_5^{-\frac{1}{2}} dx_i dx^i + \frac{1}{g} f_1^{\frac{1}{2}} f_5^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \quad (3.131)$$

となる [7]。また、S-dual で弦の結合定数は

$$g_s \rightarrow \frac{1}{g_s} \quad (3.132)$$

の変換することから、

$$\frac{1}{\hat{g}_s^2(r)} = e^{-2\hat{\phi}} = g^2 f_1^{-1} f_5 \quad (3.133)$$

となる。D1/D5 の系の場合に near horizon を調べると、計量は

$$ds_0^2 = \frac{r^2}{l_s^2} \sqrt{\frac{v}{kp}} d\gamma d\bar{\gamma} + \sqrt{\frac{p}{kv}} dx_i dx^i + \sqrt{\frac{kp}{v}} l_s^2 \left(\frac{1}{r^2} dr^2 + d\Omega_3^2 \right) \quad (3.134)$$

となり、今回もまた、 $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ になっている。

AdS_3/CFT_2 対応により、この背景のもとでの超重力理論あるいは超弦理論は p 枚の D5-brane を T^4 に巻き付けてつくった弦と k 本の D1-brane とを組み合わせで作った 2 次元上にある共形場理論に対応している [12][34]。この 2 次元の共形場理論には Coulomb branch と Higgs branch の 2 種類の sector が存在している。Coulomb branch は D1-brane と D5-brane が離れている状況を表している。Higgs branch は D1-brane が D5-brane 上に埋め込まれている状態を表していて、 $U(k)$ ゲージ理論の中の p instanton 解で記述される。D1/D5 の系は 5 次元のブラックホールを表すのに用いられる [6][7]。5 次元のブラックホールあるいは 4 次元のブラックホールと D-brane との関係についての詳しい Review として [39] がある。ブラックホールの near horizon を調べることで AdS_3 空間を出すことができたが、5 次元のブラックホールあるいは 4 次元のブラックホールと BTZ ブラックホールとの関係についての Review として [40] がある。

第4章 AdS_3/CFT_2 対応による時空の共形場理論

4.1 境界近傍の近似による時空の共形場理論

AdS/CFT 対応は反ド・ジッター空間を作っている重力理論、あるいは弦理論と反ド・ジッター空間の境界にある共形場理論との対応を提唱するものである [12][13][14][15]。3次元の反ド・ジッター空間を背景とする弦理論は WZW 模型を用いて表すことができる。この章では弦理論を用いて境界にある時空の共形場理論を構成することを目的とする [20][21][22]。第 4.1.1 節では、3次元反ド・ジッター空間を計量として持つような弦理論では、non-zero の NS-charge を持つような場 $B_{\mu\nu}$ を入れなくてはならないことを考慮して [41]、worldsheet 上の Lagrangian を構成する。第 4.1.2 節では、そのときに用いた functional determinant の公式の導出をする。公式の導出の際に用いる heat kernel method [42] についても説明する。第 4.1.3 節で $sl(2, R)$ の current 代数を自由場で表現できることを示す。そして、その自由場表現を用いて $SL(2, R) \times SL(2, R)$ WZW 模型の Lagrangian を構成したとき、第 4.1.1 節で構成した Lagrangian の境界近傍の近似と一致していることを示す [26]。第 4.1.4 節で $SL(2, R)$ の表現の中で unitary な表現を探し、 $SL(2, R)/U(1)$ coset 模型を用いることで、unitary な current 代数の表現があることを示す [43]。第 4.1.5 節で実際に world sheet 上の演算子を用いて時空の共形場理論における current と Virasoro 代数の生成子を作り、さらに時空の共形場理論における primary field を作る。

4.1.1 3次元反ド・ジッター空間上の弦理論

AdS_3 空間を target space に持つような弦理論を作ること考える。式 (3.19)

$$ds^2 = l^2(d\phi^2 + e^{2\phi}d\gamma d\bar{\gamma}) \quad (4.1)$$

を計量としてとる。ここで、

$$k = \frac{l^2}{\alpha'} \quad (4.2)$$

とすると、第 3.4.2 節での議論から、 p 本の基本的弦と k 枚の NS5-brane の系の near horizon 極限を取ったときに出てくる計量に一致する。この章ではボゾンの弦理論の範囲以内しか扱わないが、基本的には超対称性を入れても同じ議論が成り立つ。したがって、今 F1/NS5 の系を考えていると思ってもよい。

弦理論を考えるとときに背景が曲がっている場合を考えると、non-zero の NS-charge を持つ場 $B_{\mu\nu}$ が入ってしまうことがある。まず、このことを見る。

弦理論の3次元における低エネルギー有効作用は target space を Euclidian であるとする

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{g} e^{-2\varphi} \left[\frac{4}{l} + R - 4(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right] \quad (4.3)$$

となっていて、運動方程式は

$$R_{\mu\nu} - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi + \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_\nu^{\lambda\rho} = 0 \quad (4.4)$$

$$\nabla^\mu (e^{-2\varphi} H_{\mu\nu\rho}) = 0 \quad (4.5)$$

$$-4\nabla^2 \varphi + 4(\nabla\varphi)^2 + \frac{4}{l} + R + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (4.6)$$

となっている。

今3次元で考えているため、 $H_{\mu\nu\rho} \propto \epsilon_{\mu\nu\rho}$ となっている。式(4.6)から φ を定数としたとき、定数 p を用いて

$$H_{\mu\nu\rho} = \frac{2}{p} \epsilon_{\mu\nu\rho} \quad (4.7)$$

とできる。この式を式(4.5)に代入することによって

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2}{p^2} g_{\mu\nu} \quad (4.8)$$

となる。また、式(4.6)から、

$$p = l \quad (4.9)$$

となる。式(4.7)から、 $H = dB$ とすると B-field は

$$B = l^2 e^{2\phi} d\gamma \wedge d\bar{\gamma} \quad (4.10)$$

となり non-zero の値をもつことが分かる。

non-zero の B-field が入ることを考慮して worldsheet 上の作用をつくる。worldsheet も Euclidean であるとする。すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X) + i\epsilon_{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X)) \\ &= \frac{l^2}{2\pi\alpha'} \int d^2z (\partial\phi\bar{\partial}\phi + e^{2\phi} \bar{\partial}\gamma\partial\bar{\gamma}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

となる。補助場 β 、 $\bar{\beta}$ を導入して、作用を書き直すと

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z 2k (\partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} \exp(-2\phi)) \quad (4.12)$$

となる。ただし、式(4.2)の $k = l^2/\alpha'$ を用いた。

運動方程式を解くことによって、場は $\beta = \partial\bar{\gamma}e^{2\phi}$ $\bar{\beta} = \bar{\partial}\gamma e^{2\phi}$ のように変換していることが分かる。この値を代入することで元の作用(4.11)に戻ることが確かめられる。ただし、この変形で経路積分の中の測度の変化から量子補正を受けるので、その効果を考慮しなくてはならない。測度

の変化は $\det^{-1}(e^{2\phi}\partial)$ と $\det^{-1}(e^{2\phi}\bar{\partial})$ からくる。 $\det(e^{2\phi}\partial)$ はそのままでは計算できないので、自乗をとって、

$$\det(\gamma^{-1}e^{2\phi}\partial e^{-2\phi}\bar{\partial}) \quad (4.13)$$

を計算することにする。 γ は worldsheet の計量とする。ここで、公式 [26]

$$\ln \det(F\partial G\bar{\partial}) = \frac{1}{48\pi} \int d^2z (|\partial \ln F|^2 + |\partial \ln G|^2 - 4\partial \ln F \bar{\partial} \ln G) \quad (4.14)$$

を用いることにする。導出は次の節です。 $F = \gamma^{-1}e^{2\phi}$ 、 $G = e^{-2\phi}$ を代入することで、

$$\ln \det(\gamma^{-1}e^{2\phi}\partial e^{-2\phi}\bar{\partial}) = \frac{1}{48\pi} \int d^2z (24|\partial\phi|^2 + 12\phi\partial\bar{\partial}\ln\gamma) \quad (4.15)$$

となることが分かる。2次元のリッチテンソルは式 (2.26) $\hat{R}^{(2)} = \partial\bar{\partial}\ln\gamma$ のように書けることから $\bar{\beta}$ からの寄与も考慮すると、全体として量子補正は

$$-\frac{1}{\pi} \int d^2z |\partial\phi|^2 - \frac{1}{2\pi} \int d^2z \phi \hat{R}^{(2)} \quad (4.16)$$

となる。したがって量子補正も含めた作用は

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi - \frac{2}{\alpha_+} \phi \hat{R}^{(2)} + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} \exp\left(-\frac{2}{\alpha_+}\phi\right) \right) \quad (4.17)$$

となる。ただし、 $\alpha_+ = \sqrt{2k-4}$ として、 $\phi \rightarrow \alpha_+\phi$ の変換をし、 γ 、 β も大きさを変えた。

境界近傍の極限を考察する場合は $\phi \rightarrow \infty$ の極限をとる場合に対応している。このとき、 $\beta\bar{\beta} \exp\left(-\frac{2}{\alpha_+}\phi\right)$ の項は無視することができる。今求めた作用には $sl(2, R) \times sl(2, R)$ の current 代数の対称性がある。第 4.1.3 節で $sl(2, R)$ の current 代数の自由場表現を求めて WZW 模型の Lagrangian を調べ、level k の $SL(2, R) \times SL(2, R)$ の WZW 模型の Lagrangian が今求めた Lagrangian と一致することを示す。

4.1.2 Heat Kernel と Functional Determinant

この節では、公式 (4.14) を導出することを目的とする。そのためには、anomaly の計算をする方法の一つとして知られている heat kernel method [42][45] を用いて、経路積分の測度の変化から出てくる functional determinant を計算する必要がある。まず、heat kernel method についての説明から始める。

Δ を Laplacian として、その固有関数を $\phi_n(x)$ 、固有値を λ_n とする。

$$\Delta\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x) \quad (4.18)$$

ただし、固有関数は完備直交空間をなすとする。

$$\int dx \phi_n^*(x)\phi_m(x) = \delta_{nm} \quad (4.19)$$

$$\sum_n \phi_n(x)\phi_n^*(y) = \delta(x-y) \quad (4.20)$$

このとき、次のような演算子による関数を考える。

$$\begin{aligned}
 e^{-\tau\Delta}\phi(x) &= \int dy e^{-\tau\Delta} \sum_n \phi_n(x)\phi_n^*(y)\phi(y) \\
 &= \int dy \sum_n e^{-\lambda_n\tau} \phi_n(x)\phi_n^*(y)\phi(y) \\
 &= \int G(x, y; \tau)\phi(y)
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

ここで、次のような関数を定義した。

$$G(x, y; \tau) = \sum_n e^{-\lambda_n\tau} \phi_n(x)\phi_n^*(y) \tag{4.22}$$

この関数は heat kernel と呼ばれる。この値は状態が時間 τ たったときに y から x にどれだけ propagate したかを表す関数である。式 (4.20) より、 $\tau = 0$ で

$$G(x, y; \tau) = \delta(x - y) \tag{4.23}$$

を満たす。また、定義から次のような式が成り立つことが分かる。

$$\Delta G(x, y; \tau) = -\partial_\tau G(x, y; \tau) \tag{4.24}$$

この式は heat equation と呼ばれる。

heat kernel method は一般次元の場合に応用できるが、ここでは 2 次元の場合に限定して話を進める。相互作用のない自由な粒子の場合、Laplacian は

$$\Delta_0 = -\partial_\mu\partial^\mu \tag{4.25}$$

となっている。ただし、 $\mu = 0, 1$ とした。このとき、heat kernel は式 (4.24) を解くことによって、

$$G_0(x, y; \tau) = \frac{1}{4\pi\tau} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right] \tag{4.26}$$

となる。今、Laplacian を

$$\Delta = -\partial_\mu\partial^\mu - V(x) \tag{4.27}$$

として自由な部分と相互作用の部分に分け、相互作用の部分による寄与が小さいと仮定して、 V についての摂動を考える。すると、 G は G_0 を用いて形式的に

$$G = G_0 + G_0VG_0 + \dots \tag{4.28}$$

と書ける。

次に前節で用いた公式を求める。この場合は Laplacian が

$$\Delta = -F\partial_zG\partial_z \tag{4.29}$$

のときについての functional determinant を求めることに対応している。ここで、公式

$$\ln \det \Delta = \text{tr} \ln \Delta \quad (4.30)$$

を用いると、

$$\ln \det \Delta = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dt}{t} \text{tr}(\exp(-t\Delta) - \exp(-t)) \quad (4.31)$$

と書くことができる。両辺を Δ で微分すると一致すること、 $\Delta = 1$ を代入したときに両辺が zero になることから、等式が成り立っていることが分かる。

式 (4.31) の両辺の変分をとってみる。すると、

$$\begin{aligned} \delta \ln \det \Delta &= \int_{\epsilon}^{\infty} dt \delta \Delta \text{tr} \exp(-t\Delta) \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} dt \sum_n \delta \lambda_n \exp(-t\lambda_n) \end{aligned} \quad (4.32)$$

と書き直すことができる。ただし、 λ_n は Δ の固有値とする。式が煩雑になるのを避けるため、固有値の変分のうち F からの寄与のみを考えることにして $\delta_F \lambda_n$ を詳しく書くと、

$$\begin{aligned} \delta_F \lambda_n &= \int dx \phi_n(x) \delta_F \Delta \phi_n^*(x) \\ &= \int dx \phi_n(x) (-\delta(\ln F) F \partial_{\bar{z}} G \partial_z) \phi_n^*(x) \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる。したがって、式 (4.32) は

$$\begin{aligned} \delta_F \ln \det \Delta &= - \int_{\epsilon}^{\infty} dt \frac{d}{dt} \sum_n \int dx \phi_n(x) \delta(\ln F) \phi_n^*(x) \exp(-t\Delta) \\ &= \sum_n \int dx \phi_n(x) \delta(\ln F) \phi_n^*(x) \exp(-\epsilon\Delta) \\ &= \int dx \delta(\ln F) G(x, x; \epsilon) \end{aligned} \quad (4.34)$$

を計算することに帰着する。

Laplacian は式 (4.29) の形をしているため、相互作用項は

$$V = a \partial^{\mu} \partial_{\mu} + b^{\mu} \partial_{\mu} \quad (4.35)$$

の形をしている。このとき heat kernel は 第一近似で

$$G(x, x; \epsilon) = G_0(x, x; \epsilon) + \int_0^{\epsilon} d\tau \int d^2 y G_0(x, y; \epsilon - \tau) (a \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} + b^{\mu} \partial_{\mu}) G_0(y, x; \tau) \quad (4.36)$$

となる。 τ が非常に小さい所を調べているため、 x に近いところしか積分に寄与しない。そこで、相互作用項の a や b^{μ} を δx について Taylor 展開して式 (4.36) を計算すると、2次元平面上の積分によりほとんどの項が zero になり次のような項のみが残る。

$$G(x, x; \epsilon) = \frac{1}{4\pi\epsilon} + \frac{1}{24\pi} \partial^{\mu} \partial_{\mu} a(x) - \frac{1}{8\pi} \partial_{\mu} b^{\mu}(x) \quad (4.37)$$

積分で消えない項だけを残すと、式 (4.29) の Laplacian の内の相互作用項は、

$$V \sim (\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln F + \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln G) \delta z \delta \bar{z} \partial_z \partial_{\bar{z}} + (\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln G) \delta z \partial_z \quad (4.38)$$

となり変数変換を考慮すると、式 (4.34) は

$$\delta_F \ln \det \Delta = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int d^2 z \delta(\ln F) + \frac{1}{48\pi} \int d^2 z \delta(\ln F) (\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln F - 2\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln G) \quad (4.39)$$

と書き直せる。第一項は局所相殺項を加えることで消すことができる。\$G\$ についての変分も同様にできるので、両方の変分を足し合わせると、

$$\delta \ln \det \Delta = \frac{1}{48\pi} \int d^2 z [\delta(\ln F) (\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln F - 2\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln G) + \delta(\ln G) (\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln G - 2\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln F)] \quad (4.40)$$

となる。したがって、両辺積分してから部分積分することによって functional determinant の値を求めることができ、

$$\ln \det \Delta = \frac{1}{48\pi} \int d^2 z (|\partial_z \ln F|^2 + |\partial_z \ln G|^2 - 4\partial_z \ln F \partial_{\bar{z}} \ln G) \quad (4.41)$$

となり、公式 (4.14) が導出できた。

4.1.3 \$sl(2, R)\$ Current 代数

\$sl(2, R)\$ current 代数を考える前に \$sl(2, R)\$ Lie 代数の場合を考えることにする。\$sl(2, R)\$ Lie 代数の生成子は \$J^\pm = J^1 \pm J^2\$ としたときに次のような交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} [J^+, J^-] &= -2J^3 \\ [J^3, J^\pm] &= \pm J^\pm \\ [J^3, J^3] &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

また、2 次の Casimir 演算子は

$$Q = \frac{1}{2}(J^- J^+ + J^+ J^-) - J^3 J^3 \quad (4.43)$$

となっている。式 (4.42) のような交換関係をみたすような生成子は変数 \$x\$ を用いて表すことができる [25]。

$$\begin{aligned} J^- &= \frac{\partial}{\partial x} \\ J^3 &= -j + x \frac{\partial}{\partial x} \\ J^+ &= -2jx + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Q の固有値が $-j(j+1)$ となり J^3 の固有値が m となるような状態 $|j, m\rangle$ は x^{j+m} で表すことができ、

$$\begin{aligned} J^- x^{j+x} &= (j+m)x^{j+m-1} \\ J^3 x^{j+x} &= mx^{j+m} \\ J^+ x^{j+x} &= (-j+m)x^{j+m+1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

となる。Fock 空間を作ろうとした時、 x を生成演算子、 $\partial/\partial x$ を消滅演算子とすることができる。したがって、

$$x = \gamma_0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \beta_0 \quad (4.46)$$

と置き換えることができる。ただし、 γ_0 と β_0 は交換関係 $[\beta_0, \gamma_0] = 1$ を満たしているとする。さらに変数 \hat{p} 、 \hat{q} を導入して、交換関係 $[\hat{p}, \hat{q}] = -i$ を満たすようにする。Fock 空間の真空を $|p\rangle$ として \hat{p} に対して固有値 p を持つような状態とする。ここで、 $p = 2j$ となるように大きさを決めると式 (4.44) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} J^- &= \beta_0 \\ J^3 &= -\frac{\hat{p}}{2} + \gamma_0 \beta_0 \\ J^+ &= -\hat{p} \gamma_0 + \gamma_0^2 \beta_0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

次に以上の議論を current 代数の場合に拡張する。 $sl(2, R)$ の current 代数の生成子は次の様な OPE を持つ。

$$\begin{aligned} J^+(z)J^-(w) &= \frac{k}{(z-w)^2} - 2\frac{J^3}{z-w} \\ J^3(z)J^\pm(w) &= \pm\frac{J^\pm(w)}{z-w} \\ J^3(z)J^3(w) &= \frac{-k/2}{(z-w)^2} \end{aligned} \quad (4.48)$$

mode 展開した生成子で書き表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} [J_m^+, J_n^-] &= km\delta_{m,-n} - 2J_{m+n}^3 \\ [J_m^3, J_n^\pm] &= \pm J_{m+n}^\pm \\ [J_m^3, J_n^3] &= -\frac{k}{2}m\delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (4.49)$$

zero mode が Lie 代数と一致している。したがって、先程導入した変数 $\{\gamma_0, \beta_0, \hat{p}, \hat{q}\}$ を zero mode として持つように拡張することを考える。まず、 $\beta(z)$ 、 $\gamma(z)$ を導入し、それぞれ conformal weight 1、0 をもつ場とする。これらの場の mode 展開は

$$\beta(z) = \sum_n \beta_n z^{-n-1}, \quad \gamma(z) = \sum_n \gamma_n z^{-n} \quad (4.50)$$

と書ける。ただし、 $\beta(z)$ 、 $\gamma(z)$ は次の OPE を持つとする。

$$\beta(z)\gamma(w) = \frac{1}{z-w} \quad (4.51)$$

次に \hat{p} 、 \hat{q} を zero mode として持つような場 $\phi(z)$ を導入する。mode 展開は、

$$\phi(z) = \hat{q} - i\hat{p}\ln(z) + i \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n} \quad (4.52)$$

とする。ただし、

$$\phi(z)\phi(w) \sim -\ln(z-w) \quad (4.53)$$

を満たすとする。 \hat{p} を $-\alpha_+\partial\phi$ として α_+ を後で求めることにする。以上の置き換えを式 (4.47) に対して行くと、

$$\begin{aligned} J^-(z) &= \beta(z) \\ J^3(z) &= \beta\gamma(z) + \frac{\alpha_+}{2}\partial\phi(z) \\ J^+(z) &= \beta\gamma^2(z) + \alpha_+\gamma\partial\phi(z) \end{aligned} \quad (4.54)$$

となる。

この生成子が本当に current 代数の生成子に対応しているかを調べることにする。まず、 $J^3(z)$ 同士の OPE を調べる。

$$J^3(z)J^3(w) = \frac{-\alpha_+^2/4 - 1}{(z-w)^2} \quad (4.55)$$

この OPE が式 (4.48) と一致するためには $\alpha_+ = \sqrt{2k-4}$ となっていればよい。先程の k が current 代数の level k と一致していれば、先程定義した α_+ と一致している。次に $J^+(z)$ と $J^-(z)$ との OPE を調べる。

$$J^+(z)J^-(w) = -\frac{2J^3(w)}{z-w} \quad (4.56)$$

すると、central term が存在していないことが分かる。 $J^+(z)$ に $\partial\gamma$ に比例する項を加えて次のような形にすると、実際に OPE をとることで、式 (4.48) が再現できていることが分かる。

$$\begin{aligned} J^-(z) &= \beta(z) \\ J^3(z) &= \beta\gamma(z) + \frac{\alpha_+}{2}\partial\phi(z) \\ J^+(z) &= \beta\gamma^2(z) + \alpha_+\gamma\partial\phi(z) + k\partial\gamma(z) \end{aligned} \quad (4.57)$$

今作った $sl(2, R)$ current 代数の表現を Wakimoto 自由場表現という。

式 (2.91) の Sugawara 構成法を用いてエネルギー・運動量テンソルを作る。 $sl(2, R)$ Lie 代数のときの dual coxeter 数が $\tilde{h}_{sl(2,R)} = -2$ であることに注意すると、

$$T(z) = \frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) - J^3J^3 \right) \quad (4.58)$$

となる。今求めた Wakimoto 自由場表現を用いて書き直すと、

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\phi\partial\phi) + \beta\partial\gamma - \frac{1}{\alpha_+}\partial^2\phi \quad (4.59)$$

となる。ここでエネルギー・運動量テンソルを二つに分けて、

$$T_\phi = -\frac{1}{2}(\partial\phi\partial\phi) - \frac{1}{\alpha_+}\partial^2\phi \quad (4.60)$$

$$T_{\beta\gamma} = \beta\partial\gamma \quad (4.61)$$

と定義する。式 (4.60) の系は Coulomb gas 模型として知られる自由場表現で、式 (4.61) の系は ghost 系として知られる自由場表現となっている。ただし、今回は bosonic な ghost 系を用いている。

エネルギー・運動量テンソルの具体形を用いて central charge を計算することができ、

$$c = c_\phi + c_{\beta\gamma} = 1 + 12\left(-\frac{1}{\alpha_+}\right)^2 + 2 = \frac{3k}{k-2} \quad (4.62)$$

となり、式 (2.101) で求めた値と一致している。

primary field は Lie 代数のときとの類推から $|j, m\rangle \sim (\gamma)^{j+m}$ としたい。ただし、 γ は次元が 0 の場なので、次元を合わせるものを掛け合わせなくてはならない。(4.60) の系において、vertex 演算子 $e^{a\phi}$ を導入すると、実際に計算してやることで、次元が

$$h = -\frac{a^2}{2} - \frac{a}{\alpha_+} \quad (4.63)$$

となっていることが分かる。primary field の次元はスピン j 表現を考えたときに、式 (2.104) の値 $-j(j+1)/(k-2)$ と一致していればよいので、

$$a = \frac{2j}{\alpha_+} \quad (4.64)$$

とすればよい。したがって、次元が

$$h = \frac{-j(j+1)}{k-2} \quad (4.65)$$

となるような primary field は $\{\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \phi\}$ からなる系も加えると、

$$V_{jm\bar{m}} = \gamma^{j+m}\bar{\gamma}^{j+\bar{m}} \exp\left(\frac{2j}{\alpha_+}\phi\right) \quad (4.66)$$

となることが分かる。

次に今求めた current の自由場表現から作られる WZW 模型の作用が第 4.1.1 節に求めた作用 (4.17) と一致していることを示す [26]。普通の意味でのトレースを Tr と書くことにすると、式 (2.119) で用いたトレースと 2 倍だけずれている ($\text{Tr} = 2 \text{tr}$) ことに注意すると、WZW 模型の作用は

$$S = \frac{k}{4\pi} \left[\int d^2x \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) - \frac{i}{3} \int_B d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}(\tilde{g}^{-1} \partial^\alpha \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\beta \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\gamma \tilde{g}) \right] \quad (4.67)$$

となる。ここで、 $SL(2, R)$ の表現として 2×2 行列を用いることにした。この行列を Gauss decomposition すると、

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

となる。

$$g^{-1}\delta g = \begin{pmatrix} \delta\varphi + e^{-2\varphi}\gamma\delta\psi & e^{-2\varphi}\delta\psi \\ \delta\gamma - 2\gamma\delta\varphi - e^{-2\varphi}\gamma^2\delta\psi & -\delta\varphi - e^{-2\varphi}\gamma\delta\psi \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

より Invariant form は次のように書ける。

$$|\delta g|^2 = \frac{1}{2} \int \lambda \text{Tr}(g^{-1}\delta g)^2 = \int \lambda [(\delta\varphi)^2 + e^{-2\varphi}\delta\psi\delta\gamma] \quad (4.70)$$

λ は 2 次元の計量とした。ここで、

$$\beta_\mu = k e^{-2\varphi} \partial_\mu \psi \quad (4.71)$$

の置き換えをして、

$$\frac{k}{2} \text{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) = k(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) + \beta_\mu \partial^\mu \gamma \quad (4.72)$$

$$\frac{k}{3} \int dt \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \text{Tr}(\tilde{g}^{-1} \partial^\alpha \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\beta \tilde{g} \tilde{g}^{-1} \partial^\gamma \tilde{g}) = \epsilon_{\mu\nu} (k(\partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi) + \beta^\mu \partial^\nu \gamma) \quad (4.73)$$

を式 (4.67) に代入することで作用を求めることができる。

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z (\beta \bar{\partial} \gamma + k(\partial \varphi \bar{\partial} \varphi)) \quad (4.74)$$

ただし、 $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ 、 $\bar{\beta} = \beta_1 - i\beta_2$ とした。節 4.1.1 の時と同様に場の変換からくる量子補正が加わり、

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z (\beta \bar{\partial} \gamma + (k-2)(\partial \varphi \bar{\partial} \varphi) - \varphi \hat{R}^{(2)}) \quad (4.75)$$

となる。 $\varphi = \frac{1}{\alpha_+} \phi$ の場の変換をして、 $\{\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \phi\}$ からなる系も加えると、

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \left(\partial \phi \bar{\partial} \phi - \frac{2}{\alpha_+} \phi \hat{R}^{(2)} + \beta \bar{\partial} \gamma + \bar{\beta} \partial \bar{\gamma} \right) \quad (4.76)$$

となり、式 (4.17) の $\phi \rightarrow \infty$ での作用を再現することができた。Noether の方法でエネルギー・運動量テンソルを構成すると、

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\phi\partial\phi) + \beta\partial\gamma - \frac{1}{\alpha_+}\partial^2\phi \quad (4.77)$$

となり、式 (4.59) と一致していることが分かる。

4.1.4 $SL(2, R)$ の Unitary 表現と $SL(2, R)/U(1)$ coset 模型

$SL(2, R) \times SL(2, R)$ の WZW 模型は群 $SL(2, R)$ が non-compact であることと関連して non-unitary な模型となっている。実際の弦理論における状態は positive norm を持つものだけを選び出さなくてはならない [43][44]。これは、10 次元の超弦理論において、時間方向が positive norm の状態に対応してしまうので、物理的な状態には含めないことと対応している。

まず、 $sl(2, R)$ の current 代数に対する highset state $|\psi\rangle$ のうち unitary な状態を探すことにする。highset state は $n > 0$ に対して $J_n^a |\psi\rangle = 0$ となる状態である。ここで、Virasoro 代数の生成子の zero mode を具体的に書き表してみると、

$$L_0 = \frac{1}{k-2} \left(\frac{1}{2}(J_0^+ J_0^- + J_0^- J_0^+) - J_0^3 J_0^3 + \sum_{m=1}^{\infty} (J_{-m}^+ J_m^- + J_m^- J_{-m}^+ - 2J_{-m}^3 J_m^3) \right) \quad (4.78)$$

となるため、

$$L_0 |\psi\rangle = \frac{Q}{k-2} |\psi\rangle \quad (4.79)$$

$$Q = \frac{1}{2}(J_0^+ J_0^- + J_0^- J_0^+) - J_0^3 J_0^3 \quad (4.80)$$

となり、 $sl(2, R)$ Lie 代数の unitary な表現を調べることに対応していることが分かる。

$sl(2, R)$ Lie 代数の表現は Q と J_0^3 の2つの固有値 j, m によってラベルすることができる。そこで、状態 $|j, m\rangle$ を作って、

$$Q |j, m\rangle = -j(j+1) |j, m\rangle \quad (4.81)$$

$$J_0^3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \quad (4.82)$$

となるようにする。ただし、この表式から分かるように $-j \rightarrow j+1$ の入れ換えに対する対称性があるため、 $\text{Re } j \geq -1/2$ 、 $\text{Im } j \geq 0$ をとることにする。

状態 $|j, m\rangle$ は positive norm $\langle j, m | j, m \rangle > 0$ であるとする。まず、 $m > 0$ の場合を考える。状態 $|j, m\rangle$ に J_0^+ を作用させて、 J_0^3 の固有値が m より大きい状態をつくる。すると、

$$\begin{aligned} \|J_0^+ |j, m\rangle\|^2 &= \langle j, m | J_0^- J_0^+ |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | J_0^+ J_0^- + 2J_0^3 |j, m\rangle \\ &= 2m \langle j, m | j, m \rangle > 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

となるので、 $m > 0$ のときは J_0^3 の固有値が m より大きい状態はいつも positive norm になっていることが分かる。 $m < 0$ のときも同様にして J_0^3 の固有値が m より小さい状態はいつも positive norm になっていることが分かる。

$m > 0$ としたとき、状態 $|j, m\rangle$ に J_0^- をかけていったときに、zero になる状態がある場合とない場合の二種類がある。 $m = l$ のときに $J_0^- |j, l\rangle = 0$ となる状態がとれた場合についてまず考

察することにする。このとき、

$$\begin{aligned} Q|j, l\rangle &= [J_0^+ J_0^- - J^3(J_0^3 - 1)]|j, l\rangle \\ &= -l(l-1)|j, l\rangle \end{aligned} \quad (4.84)$$

となるため、 $l = j + 1$ となっている。また、 $m < 0$ のときは $J_0^+ |j, l\rangle = 0$ となるとすると

$$\begin{aligned} Q|j, l\rangle &= [J_0^+ J_0^- - J^3(J_0^3 + 1)]|j, l\rangle \\ &= -l(l+1)|j, l\rangle \end{aligned} \quad (4.85)$$

となるため、 $l = -j - 1$ となっている。

次に $m > 0$ としたとき、状態 $|j, m\rangle$ に J_0^- をかけていったときに、zero になる状態がない場合を考えてみる。このとき、 $0 \leq m_0 < 1$ としたとき、 $J_0^- |j, m_0\rangle$ が positive norm になることが言えれば、先程の議論より、正負すべての m に対して positive norm になることが言える。したがって、次のような量を計算することにする。

$$\begin{aligned} \|J_0^- |j, m_0\rangle\|^2 &= \langle j, m_0 | J_0^+ J_0^- |j, m_0\rangle \\ &= \langle j, m_0 | Q + J_0^3(J_0^3 - 1) |j, m_0\rangle \\ &= [-j(j+1) + m_0(m_0 - 1)] \langle j, m_0 | j, m_0\rangle \end{aligned} \quad (4.86)$$

この量が正であるためには、

$$-j(j+1) > m_0(1 - m_0) \quad (4.87)$$

を満たしている必要がある。

以上の条件をもとにして、 $SL(2, R)$ の unitary 表現を分類することができる。

1. identity 表現 $\mathcal{I} : |0, 0\rangle$

Q 、 J_0^3 両方についての固有値が 0 となるような状態。

2. discrete series (lowest weight) $\mathcal{D}^+ : |j, m\rangle$

$j \geq -\frac{1}{2}$ で、 $m = j + k$ $k = 1, 2, \dots$ の状態。 $J_0^- |j, j+1\rangle = 0$ となっている。

3. discrete series (highest weight) $\mathcal{D}^- : |j, m\rangle$

$j \geq -\frac{1}{2}$ で、 $m = -j - k$ $k = 1, 2, \dots$ の状態。 $J_0^+ |j, -j-1\rangle = 0$ となっている。

4. principal continuous series $\mathcal{C} : |j, m\rangle$

$j = -\frac{1}{2} + i\nu$ $\nu > 0$ で、 $m = k + m_0$ $k \in \mathbf{Z}$ の状態。

5. complementary series : $|j, m\rangle$

$\max\{-m_0, m_0 - 1\} > j \geq -\frac{1}{2}$ で、 $m = k + m_0$ $k \in \mathbf{Z}$ の状態。

次に descendant も含めた場合について考慮することにする。すぐに分かるように $J_{-n}^3|\psi\rangle$ のような状態は $SL(2, R)$ の計量に負計量が含まれていることから、negative norm の状態になる。したがって、 J_{-n}^3 に対応する $U(1)$ の current で割った $SL(2, R)/U(1)$ coset 模型を考えることにする。具体的には状態を $U(1)$ current の highest state だけに制限することに対応している。式で表すと、

$$J_n^3|\psi\rangle = 0, \quad n \geq 0 \quad (4.88)$$

となる。ここでは primary state のとる表現を discrete series D^+ にする。後で分かるように discrete series D^+ を選んだときに、時空の共形場理論の状態に対応する worldsheet 上の演算子を作ることができる。このとき、current 代数の level を k としたときに、 j に制限をつけ、

$$0 < j + 1 < \frac{k}{2}, \quad k > 2 \quad (4.89)$$

とした時に状態 $|\psi\rangle$ が positive norm のみとなることを示すことができる。 $su(2)$ の current 代数の場合には level k が量子数 j によって制限されることが知られていて、 $sl(2, R)$ の current 代数の場合にはその逆の状況が起こっている。

以下で証明を与える。状態 $|\psi\rangle$ を持ってきて、 J_0^3 の固有値を m とし、 L_0 の primary state 以外からの寄与を grade と呼んだとき、grade が N であるとする。このとき、

$$\langle \psi | L_0 | \psi \rangle = \left(-\frac{j(j+1)}{k-2} + N \right) \langle \psi | \psi \rangle \quad (4.90)$$

となることから、式 (4.78) の具体的な表式をもちいることによって、

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{\langle \psi | [J_0^+ J_0^- + \sum_{p \geq 1} (J_{-p}^+ J_p^- + J_{-p}^- J_p^+ - 2J_{-p}^3 J_p^3)] | \psi \rangle}{[(k-2)N + m(m-1) - j(j+1)]} \quad (4.91)$$

と書き直せる。

まず、式 (4.91) の分母が正であることを示す。 $N = 0$ 、 $m > j + 1$ のときには仮定からもともとの norm は正となっている。 $k > 2$ 、 $m > j + 1$ のときは正になっていることがすぐに分かる。いま、descendant も含めているので、 $m < j + 1$ の状態も含まれている。primary state は $m > j + 1$ の状態になっているが、その状態から J_{-n}^- を作用することによって、 m の固有値を一つ下げることができる。ただし、このとき同時に grade を n だけ上げる。したがって、いつも $j + 1 - m \leq N$ が成り立っていることが分かる。このとき、 $\rho = j + 1 - m$ とするとこの量はいつも正なので、式 (4.91) の分母を書き直した式

$$[(k-2)(N-\rho) + \rho(\rho-1) + (k-2j-2)\rho] \quad (4.92)$$

から $k > 2$ より分母は正になっていることが分かる。

次に式 (4.91) の分子が正であることを示す。 $|\psi\rangle$ が $U(1)$ current に対して highest state としたことに注意すると、式 (4.91) の分子を次のように書き換えることができる。

$$\langle \psi | \left(\sum_{p \geq 0} J_{-p}^+ J_p^- + \sum_{p \geq 1} J_{-p}^- J_p^+ \right) | \psi \rangle \quad (4.93)$$

$U(1)$ current の highest state への射影演算子を \mathbf{P} で定義した時、identity を

$$\mathbf{1} = \mathbf{P} + \sum_{n>0} \left(-\frac{2}{kn}\right) J_{-n}^3 \mathbf{P} J_n^3 + \frac{1}{2!} \sum_{n_1 n_2 > 0} \left(-\frac{2}{kn_1}\right) \left(-\frac{2}{kn_2}\right) J_{-n_1}^3 J_{-n_2}^3 \mathbf{P} J_{n_2}^3 J_{n_1}^3 + \dots \quad (4.94)$$

とすることができる。式 (4.93) に identity を挿入することで、次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \sum_{m \geq 0} \langle \psi | \sum_{p \geq 0} J_{-p}^+ \frac{1}{m!} \left(-\frac{2}{k}\right)^m \frac{1}{n_1 \dots n_m} J_{-n_1}^3 \dots J_{-n_m}^3 \mathbf{P} J_{n_m}^3 \dots J_{n_1}^3 J_p^- \\ & + \sum_{p \geq 1} J_{-p}^- \frac{1}{m!} \left(-\frac{2}{k}\right)^m \frac{1}{n_1 \dots n_m} J_{-n_1}^3 \dots J_{-n_m}^3 \mathbf{P} J_{n_m}^3 \dots J_{n_1}^3 J_p^+ | \psi \rangle \end{aligned} \quad (4.95)$$

J_{-n}^3 を移動させて $|\psi\rangle$ で消すことによって式を簡単にできる。さらに

$$F_p \left(\frac{2}{k}\right) = \sum_{q=0}^p f_q \left(\frac{2}{k}\right) \quad (4.96)$$

$$f_q \left(\frac{2}{k}\right) = \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^m}{m!} \sum_{n_i > 0} \frac{1}{n_1 \dots n_m} \delta(n_1 + \dots + n_m - q) \quad (4.97)$$

という関数を定義することによって、

$$\langle \psi | \sum_{p \geq 0} F_p \left(\frac{2}{k}\right) J_{-p}^+ \mathbf{P} J_p^- + \sum_{p \geq 1} F_{p-1} \left(\frac{2}{k}\right) J_{-p}^- | \psi \rangle \quad (4.98)$$

とまとめることができる。

以下 $F_p(2/k)$ が正であることを示すことによって、 $\langle \psi | \psi \rangle$ が正になることをいう。 $f_q\left(\frac{2}{k}\right)$ は母関数が

$$\begin{aligned} f_q \left(\frac{2}{k}, z\right) &= \sum_{q=0}^{\infty} f_q \left(\frac{2}{k}\right) z^q = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{k}\right)^q}{q!} (-\ln(1-z))^q \\ &= (1-z)^{\frac{2}{k}} \end{aligned} \quad (4.99)$$

となることから逆に求め直すことができ次ようになる。

$$f_q \left(\frac{2}{k}\right) = -\frac{1}{q} \left(\frac{2}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{2k}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{(q-1)k}\right) \quad (4.100)$$

これを用いて $F_p\left(\frac{2}{k}\right)$ を求めることができ、

$$F_p \left(\frac{2}{k}\right) = \left(1 - \frac{2}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{2k}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{pk}\right) \quad (4.101)$$

となる。いま $k > 2$ なので $F_p(2/k) > 0$ が言えた。このことから、 $\langle \psi | \psi \rangle$ が正になることが言える。したがって、式 (4.89) の条件の元では、今定義した coset 模型は positive norm の状態しかないことが言えた。

4.1.5 境界近傍の近似における時空の共形場理論

次に実際に worldsheet 上の共形場理論を用いて、時空の共形場理論を作ることにする。まず、時空の共形場理論における一般の current 代数を作る。worldsheet 上に compact な群 G の current 代数があり、その生成子である current $k^a(z)$ が次の OPE を満たすとする。

$$k^a(z)k^b(w) = \frac{k_{ws}\delta^{ab}/2}{(z-w)^2} + \frac{if^{abc}k^c(w)}{z-w} \quad (4.102)$$

a, b, c は群の添字を走り、 $a, b, c = 1, \dots, \dim G$ とする。 k_{ws} は群 G の current 代数の level とする。worldsheet 上の群 G からなる多様体を考えると、それは弦理論の target space としての多様体になっている。例えば、target space が $AdS_3 \times S^3 \times T^{20}$ のときには、群 G は S^3 に対応して $SU(2)$ となり、 T^{20} に対応して $U(1)^{20}$ となっている。

worldsheet 上の current を積分することで、時空で current 代数を作るような演算子を構成したい。時空での演算子が worldsheet 上の座標変換に依らないようにするためには、conformal weight が 0 つまり、積分のなかの conformal weight が 1 となるようにしなくてはならない。worldsheet 上の current $k^a(z)$ の conformal weight は 1 なので、さらに conformal weight が 0 の場 γ を組み合わせるとつぎのような演算子を作ることにする。

$$K_n^a = \frac{1}{2\pi i} \oint dz k^a(z) \gamma^n(z) \quad (4.103)$$

この演算子は次のような交換関係をしめすことが、実際に計算することで確かめられる。

$$[K_n^a, K_m^b] = if^{abc} K_{n+m}^c + \frac{k_{st}}{2} n \delta^{ab} \delta_{n+m,0} \quad (4.104)$$

時空での current の level は 演算子

$$q = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{\partial_z \gamma}{\gamma} \quad (4.105)$$

を新しく導入することで、次のようになる。

$$k_{st} = q k_{ws} \quad (4.106)$$

q は例えば、 $\gamma = z^n$ のとき $q = n$ となる量である。今境界近傍の近似をしているため、境界近傍に何本の弦が巻いているかを数え上げる演算子になっている。

次に時空での Virasoro 代数を調べることにする。先程は、 $AdS_3 \times \mathcal{N}$ の \mathcal{N} の部分を調べたことに対応しているのだが、Virasoro 代数は $SL(2)$ の部分群を含んでいることから分かるように、 AdS_3 の部分を調べることに対応している。Virasoro 代数の生成子は、current 代数のときと同様に

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz [a_3 J^3 \gamma^n + a_+ J^+ \gamma^{n-1} J^- a_- \gamma^{n+1}] \quad (4.107)$$

としてみる。このとき、積分される部分が primary でないといけなないので、 J と γ の OPE が特異点を持たないようにしなくてはならない。この条件から、

$$na_3 + (n+1)a_- + (n-1)a_+ = 0 \quad (4.108)$$

を満たしてはならないことが分かる。そこで、次のような係数を選ぶことにする。

$$L_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz [(n+1)J^3\gamma^n - nJ^-\gamma^{n+1}] \quad (4.109)$$

すると、交換関係は式 (2.54)

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c_{st}}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \quad (4.110)$$

となり、時空の共形場理論の Virasoro 代数の生成子となっていることが分かる。central charge は先程定義した q を用いて表すことができ、

$$c_{st} = 6kq \quad (4.111)$$

となる。先程つくった current との交換関係を調べると、

$$[L_n, K_m^a] = -mK_{n+m}^a \quad (4.112)$$

となり、一般の current 代数が満たすべき交換関係が出てくる。

次に時空の共形場理論の primary field を構成する。積分される部分の conformal weight は全部で 1 になっている必要があるので、 AdS_3 以外の多様体を target space としている world sheet の共形場理論の conformal weight が正則、反正則両方とも N であるような演算子 W_N をもってきて、物理的な Vertex 演算子を構成する。

$$V_{phys}(j, m, \bar{m}) = W_N V_{j,m,\bar{m}} \quad (4.113)$$

$V_{j,m,\bar{m}}$ は式 (4.66) で求めたもの

$$V_{j,m,\bar{m}} = \gamma^{j+m} \bar{\gamma}^{j+\bar{m}} \exp\left(\frac{2j}{\alpha_+} \phi\right) \quad (4.114)$$

を用いる。全体で conformal weight が 1 になるという条件から、

$$N - \frac{j(j+1)}{k-2} = 1 \quad (4.115)$$

とする必要がある。unitarity bound $-1 < j < \frac{k}{2} - 1$ から N にも制限が付き、 $N < \frac{k}{4} + 1$ を満たしてはならないことが分かる。

式 (4.109) の Virasoro 生成子を Wakimoto 自由場表示を用いて書き直したもの

$$L_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \left[\beta \gamma^{n+1} + \frac{\alpha_+}{2} (n+1) \partial \phi \right] \quad (4.116)$$

をつかい、物理的な Vertex operator との交換関係を調べると、

$$[L_n, V_{phys}(j, m, \bar{m})] = (nj - m)V_{phys}(j, m + n, \bar{m}) \quad (4.117)$$

となる。式 (2.62) と比較することで式 (4.117) から $V_{phys}(j, m, \bar{m})$ の時空での共形場理論の conformal weight が $h = \bar{h} = j + 1$ であることが分かる。したがって、 j が実数になるような表現をとった時に、時空の共形場理論の状態を作っていることが分かる。このことから、先程述べたように $SL(2, R)$ の表現として discrete series D^+ を選ぶべきであることが分かる。

今作った物理的な Vertex 演算子は正則な部分と反正則な部分の conformal weight が同じなので、スピンのない場合に対応している。スピンのある場合は次のようになる。

$$V_{phys}(j, m, \bar{m}) = Z_{N, \bar{N}}(\partial_z \gamma)^n V_{j, m, \bar{z}} \quad (4.118)$$

スピンのない場合と同様に Virasoro 生成子との交換関係を調べることで時空での共形場理論の conformal weight が分かり、 $h = j + 1 - n$ 、 $\bar{h} = j + 1$ となっている。

AdS_3 空間以外の多様体が群多様体のときその群からなる current 代数に対応する時空の current 代数を構成した。 W_N は worldsheet 上の current 代数に対して式 (2.102)

$$k^a(z)W_N(w, \bar{w}) = \frac{t^a(R)}{z - w} W_N(w, \bar{w}) \quad (4.119)$$

のような OPE を持つとする。このとき時空の current 代数に対して物理的な Vertex 演算子は次のような変換をすることが分かる。

$$[K_n^a, V_{phys}(j, m, \bar{m})] = t^a(R)V_{phys}(j, m + n, \bar{m}) \quad (4.120)$$

すなわち、今構成した時空の共形場理論の状態は、時空の current 代数に対して表現 R の変換をすることが分かる。

4.2 Bulk の寄与の入った時空の共形場理論

前節では境界近傍の近似をとっての考察をした。 $SL(2, R)$ の対称性により、primary field を決めることができた。また、holomorphic な演算子を作ることで、共形場理論の特性から交換関係を定めることができた。ただし、実際に相関関数を計算しようと思うと、bulk の重力を作っている状態からの寄与も考慮に入れる必要がある。したがって、この節では境界近傍の近似を取らない取り扱いをすることにする。境界近傍の近似を取らない場合の AdS_3 空間上の弦理論は $H_3^+ = SL(2, C)/SU(2)$ の群多様体での WZW 模型を用いて記述することができる。 $SL(2, C)$ の対称性の元での性質を補助場 x を導入することで表す。 x を時空の共形場理論の座標と思うと bulk から境界への演算子を構成することができる。第 4.2.1 節でまず古典的な場合に primary field を見付け、その性質を調べる。その後で量子化する。第 4.2.2 節では境界近傍の近似での取り扱いのときと同じような方法で、時空の共形場理論の current とエネルギー・運動量テンソルを構成する。第 4.2.3 節で、境界近傍の極限を取ると、第 4.1 節での議論を再現できることを示す。前節では central charge への寄与は境界に巻き付いている worldsheet からのみきいていたが、実際に bulk からの影響があることを示す。これら 2 種類の central charge への寄与をする sector はそれぞれ long string sector、short string sector と呼ばれる。

4.2.1 $SL(2, C)/SU(2)$ coset 模型

この節では、 H_3^+ 上の WZW 模型 [46][47][48] を考える。 $SL(2, C)/SU(2)$ の coset 模型は群 $SL(2, C)$ の要素を

$$h = \begin{pmatrix} e^{-\phi} + \gamma\bar{\gamma}e^{\phi} & e^{\phi}\gamma \\ e^{\phi}\bar{\gamma} & e^{\phi} \end{pmatrix} \quad (4.121)$$

に制限した $SL(2, C)$ WZW 模型によって表すことができる [21][22]。実際に $SL(2, C)$ WZW 模型の作用に h を代入することで、

$$S = \frac{k}{2\pi} \int d^2z (\partial\phi\bar{\partial}\phi + e^{2\phi}\partial\bar{\gamma}\bar{\partial}\gamma) \quad (4.122)$$

が得られ、式 (4.11) と一致する。したがって、 $SL(2, C)/SU(2)$ の coset 模型の作用は AdS_3 上の弦理論の作用とみなせる。

もともとの $SL(2, C)$ の WZW 模型の作用には $g \in SL(2, C)$ に対して、

$$g \rightarrow U(z)gV^\dagger(\bar{z}), \quad U, V \in SL(2, C) \quad (4.123)$$

の対称性があったのだが、式 (4.121) で h を hermitian に制限したせいで、左右の作用に対して対角成分のみが対称性として残っている。

$$g \rightarrow U(z)gU^\dagger(\bar{z}), \quad U \in SL(2, C) \quad (4.124)$$

群の生成子は Neother の定理でも求められるが、ここでは別の方法をとる。 $sl(2, C)$ Lie 代数の生成子の 2×2 行列形式を次のように定義する。

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

このとき、current の生成子を次のように定義できる。

$$J_0^a f(h) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \tau} f \left(e^{\tau T^a} h e^{\bar{\tau} T^{a\dagger}} \right) \right)_{\tau=0} \quad (4.126)$$

$$\bar{J}_0^a f(h) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} f \left(e^{\tau T^a} h e^{\bar{\tau} T^{a\dagger}} \right) \right)_{\tau=0} \quad (4.127)$$

実際に計算することで、current は次のように書けることが分かる。

$$J_0^- = \partial_\gamma, \quad J_0^3 = \gamma\partial_\gamma - \frac{1}{2}\partial_\phi, \quad J_0^+ = \gamma^2\partial_\gamma - \gamma\partial_\phi - e^{-2\phi}\partial_{\bar{\gamma}} \quad (4.128)$$

$$\bar{J}_0^- = \partial_{\bar{\gamma}}, \quad \bar{J}_0^3 = \bar{\gamma}\partial_{\bar{\gamma}} - \frac{1}{2}\partial_\phi, \quad \bar{J}_0^+ = \bar{\gamma}^2\partial_{\bar{\gamma}} - \bar{\gamma}\partial_\phi - e^{-2\phi}\partial_\gamma \quad (4.129)$$

ここで補助場 (x, \bar{x}) を導入して、 H_3^+ 上の関数を分類することで理論を調べることにする。この (x, \bar{x}) は AdS_3 空間の境界に存在する共形場理論の座標と解釈することのできる量である。 (x, \bar{x}) を用いて、式 (4.44) と同じように current を定義できる。

$$J^- = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad J^3 = -(h + x\frac{\partial}{\partial x}), \quad J^+ = -(2hx + x^2\frac{\partial}{\partial x}) \quad (4.130)$$

$$\bar{J}^- = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{J}^3 = -(h + \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}), \quad \bar{J}^+ = -(2h\bar{x} + \bar{x}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}}) \quad (4.131)$$

ここで $h = j + 1$ とした。 $-j$ と $j + 1$ が入れ換わっているが、これは後の議論に便利なようにするためである。

次に $sl(2, C) \times \overline{sl(2, C)}$ の Lie 代数の元で、スピン $(j, \bar{j}) = (h - 1, \bar{h} - 1)$ のような変換性を示す関数 $f_{h, \bar{h}}(\phi, \gamma, \bar{\gamma}; x, \bar{x})$ を探すことにする。このとき、関数 $f_{h, \bar{h}}(\phi, \gamma, \bar{\gamma}; x, \bar{x})$ は次の式を満たしている。

$$\begin{aligned} [J_0^-, f_{h, \bar{h}}] &= -\partial_x f_{h, \bar{h}} = \partial_\gamma f_{h, \bar{h}} \\ [\bar{J}_0^-, f_{h, \bar{h}}] &= -\partial_{\bar{x}} f_{h, \bar{h}} = \partial_{\bar{\gamma}} f_{h, \bar{h}} \\ [J_0^3, f_{h, \bar{h}}] &= -(x\partial_x + h)f_{h, \bar{h}} = (\gamma\partial_\gamma - \frac{1}{2}\partial_\phi)f_{h, \bar{h}} \\ [\bar{J}_0^3, f_{h, \bar{h}}] &= -(\bar{x}\partial_{\bar{x}} + h)f_{h, \bar{h}} = (\bar{\gamma}\partial_{\bar{\gamma}} - \frac{1}{2}\partial_\phi)f_{h, \bar{h}} \\ [J_0^+, f_{h, \bar{h}}] &= -(x^2\partial_x + 2hx)f_{h, \bar{h}} = (\gamma^2\partial_\gamma - \gamma\partial_\phi - e^{-2\phi}\partial_{\bar{\gamma}})f_{h, \bar{h}} \\ [\bar{J}_0^+, f_{h, \bar{h}}] &= -(\bar{x}^2\partial_{\bar{x}} + 2h\bar{x})f_{h, \bar{h}} = (\bar{\gamma}^2\partial_{\bar{\gamma}} - \bar{\gamma}\partial_\phi - e^{-2\phi}\partial_\gamma)f_{h, \bar{h}} \end{aligned} \quad (4.132)$$

$h = \bar{h}$ のときのみ解を見付けることができ、

$$f_{h, \bar{h}} \equiv \Phi_h = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(\gamma - x)(\bar{\gamma} - \bar{x})e^\phi + e^{-\phi}} \right)^{2h} \quad (4.133)$$

となっている。実際に式 (4.132) に代入することで確かめることができる。この関数は全ての x において特異点を持たない関数となっている。

式 (4.133) で求めた関数の性質を少し調べてみる。 $\phi \rightarrow \infty$ での振舞は、

$$\begin{aligned} \Phi_h &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(\gamma - x)(\bar{\gamma} - \bar{x})e^\phi + e^{-\phi}} \right)^{2h} \\ &\sim \frac{1}{2h - 1} e^{2(h-1)\phi} \delta^{(2)}(\gamma - x) + \mathcal{O}(e^{2(h-2)\phi}) + \frac{e^{-2h\phi}}{\pi(\gamma - x)^{4h}} + \mathcal{O}(e^{-2(h+1)\phi}) \end{aligned} \quad (4.134)$$

となり、2つの系列に分けることができる。ここで、式 (2.12) のように Dirac の delta 関数を定義したときに、

$$\delta^{(2)}(z) = \frac{n-1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^{2n-2}}{(\epsilon^2 - |z|^2)^n} \quad (4.135)$$

と書き表せることを用いた。両辺を積分することで証明できる。式 (4.134) の2つの系列のうち、 $\gamma \sim x$ のときには第一項が効いてくる。 $SL(2, C)$ の2次の Casimir は bulk の Laplacian とみなすことができ [34]、この関数は x を AdS_3 空間の境界の座標と思うと境界上に delta 関数の support が存在しているため、bulk から境界への propagator [13][14] と思うことができる。また、 x を AdS_3 空間の境界の座標と思い、そこに共形場理論があるとすると式 (4.132) の構成法から分かるように、 Φ_h は時空の共形場理論において conformal weight (h, h) の変換をする。

Φ_{h_i} を用いて時空の共形場理論の場を表す演算子 V_{h_i} を構成する。このとき、AdS/CFT 対応からの提案として次のような相関関数が成り立つとできる。

$$\langle \prod_i \int d^2 z_i V_{h_i}(\phi, \gamma, \bar{\gamma}; x_i, \bar{x}_i) \rangle_{\text{worldsheet}} = \langle \prod_i V_{h_i}(x_i, \bar{x}_i) \rangle_{\text{boundary}} \quad (4.136)$$

一般の次元では重力理論の近似でしか扱えないが、 AdS_3/CFT_2 対応の場合は弦理論を用いて比較ができる。worldsheet 上に演算子 $V_{h_i}(\phi, \gamma, \bar{\gamma}; x_i, \bar{x}_i)$ が挿入した場合には、その演算子は境界近くでは delta 関数的な support を持つため、worldsheet は挿入された場のところで境界にくっついてきているような状態になる。したがって、式 (4.136) の弦理論側の計算は図 4.1 の worldsheet の計算していることに対応している。

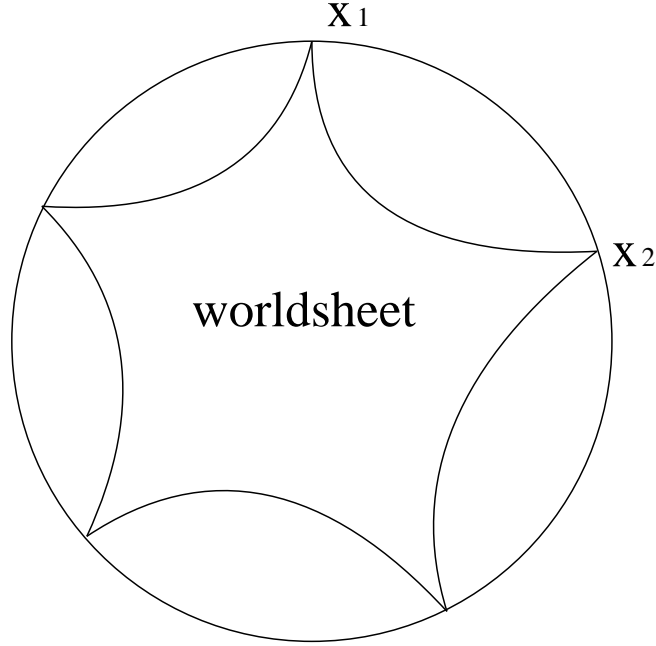


図 4.1: 演算子の挿入されたときの worldsheet

$J_0^- = -\frac{\partial}{\partial x}$ 、 $\bar{J}_0^- = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$ であることを利用して一般の演算子 $\Theta(x, \bar{x})$ を $\Theta(0)$ を用いて定義する。

$$\Theta(x, \bar{x}) \equiv e^{-xJ_0^-} e^{-\bar{x}\bar{J}_0^-} \Theta(0) e^{xJ_0^-} e^{\bar{x}\bar{J}_0^-} \quad (4.137)$$

この定義のもとで、次のような値を定義する。

$$\begin{aligned} J^+(x; z) &= e^{-xJ_0^-} J^+(z) e^{xJ_0^-} = J^+(z) - 2xJ^3(z) + x^2J^-(z) \\ J^3(x; z) &= e^{-xJ_0^-} J^3(z) e^{xJ_0^-} = J^3(z) - xJ^-(z) = -\frac{1}{2}\partial_x J^+(x; z) \\ J^-(x; z) &= e^{-xJ_0^-} J^-(z) e^{xJ_0^-} = J^-(z) = \frac{1}{2}\partial_x^2 J^+(x; z) \end{aligned} \quad (4.138)$$

この 3 つの演算子は x についての微分をしてやることで移りあうので、次の演算子で代表させることができる。

$$J(x; z) \equiv -J^+(x; z) = -J^+(z) + 2xJ^3(z) - x^2J^-(z) \quad (4.139)$$

$J(x; z)$ の境界における共形場理論における conformal weight は x についてのべきを数えることで求められ、 $(-1, 0)$ となっている。反正則な部分も同様に作ることができる。 $J_0(x)$ による $\Phi_h(y, \bar{y})$

に対する作用は、式 (4.132) を利用することで求められ、

$$[J_0(x), \Phi_h(y, \bar{y})] = [(y-x)^2 \partial_y + 2h(y-x)] \Phi_h(y, \bar{y}) \quad (4.140)$$

となる。

current は式 (2.121) から式 (4.125) の $sl(2, C)$ の Lie 代数の生成子を用いると、

$$\begin{aligned} J(z) &= \eta_{ab} J^a T^b = -\frac{k}{2} \partial h h^{-1} \\ &= -\frac{k}{2} \begin{pmatrix} -\partial\phi + \gamma e^{2\phi} \partial\bar{\gamma} & -\gamma^2 e^{2\phi} \partial\bar{\gamma} + 2\gamma\partial\phi + \partial\gamma \\ e^{2\phi} \partial\bar{\gamma} & \partial\phi - e^{2\phi} \gamma \partial\bar{\gamma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.141)$$

とできる。したがって、

$$\begin{aligned} J^-(z) &= k(e^{2\phi} \partial\bar{\gamma}) \\ J^3(z) &= k(-\partial\phi + \gamma e^{2\phi} \partial\bar{\gamma}) \\ J^+(z) &= k(-\gamma^2 e^{2\phi} \partial\bar{\gamma} + 2\gamma\partial\phi + \partial\gamma) \end{aligned} \quad (4.142)$$

となる。この表式を用いることで、式 (4.139) は次のように書き表すことができる。

$$J(x; z) = k[(x-\gamma)^2 e^{2\phi} \partial\bar{\gamma} + 2(x-\gamma)\partial\phi - \partial\gamma] \quad (4.143)$$

最後に後の議論で役に立つ演算子を定義しておく。 $\bar{J}(\bar{x}; \bar{z}) \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z})$ を計算すると、次の様にまとめられる。

$$\frac{\pi}{k} \bar{J} \Phi_1 = \partial_{\bar{z}} \Lambda \quad (4.144)$$

ただし、

$$\Lambda = -\frac{1}{\gamma-x} \frac{(\gamma-x)(\bar{\gamma}-\bar{x})}{(\gamma-x)(\bar{\gamma}-\bar{x})e^{2\phi} + 1} \quad (4.145)$$

とした。 Φ_1 の conformal weight が (1,1) で、 \bar{J} の conformal weight は (0, -1) なので、 Λ の conformal weight は (1,0) となっている。今作った新しい演算子 Λ が $SL(2) \times \overline{SL(2)}$ の対称性のもとでどのような変換を示すかを求めてみる。 $\Phi_h(y, \bar{y})$ に対する作用を求めたときと同様に式 (4.132) を利用することで次のような変換性が得られる。

$$[J_0(x), \Lambda(y, \bar{y})] = [(y-x)^2 \partial_y + 2(x-y)] \Lambda(y, \bar{y}) - 1 \quad (4.146)$$

$$[\bar{J}_0(\bar{x}), \Lambda(y, \bar{y})] = (\bar{y}-\bar{x})^2 \partial_{\bar{y}} \Lambda(y, \bar{y}) \quad (4.147)$$

したがって、定数分のずれが生じて Λ はよい演算子にはなっていないことが分かる。ただし、一回微分してやると定数分を消すことができるので、 $\partial_{\bar{z}} \Lambda$ はよい演算子になっている。このことは弦理論においても X 自体は \log の特異点を持ってしまうことからよい演算子になっていないのだが、 $\partial_z X$ はよい演算子になっていることに対応している。

今までは古典論的な取り扱いをしてきたのだが、ここから量子論に持っていくことを考える。そのとき、current は式 (4.48) の OPE を満たす。primary state Φ_h は次のような OPE を満たすものとして定義する。

$$\begin{aligned} J^-(z)\Phi_h(x, \bar{x}; w, \bar{w}) &= -\frac{\partial_x \Phi_h(x, \bar{x}; w, \bar{w})}{z-x} \\ J^3(z)\Phi_h(x, \bar{x}; w, \bar{w}) &= -\frac{(x\partial_x + h)\Phi_h(x, \bar{x}; w, \bar{w})}{z-x} \\ J^+(z)\Phi_h(x, \bar{x}; w, \bar{w}) &= -\frac{(x^2\partial_x + 2hx)\Phi_h(x, \bar{x}; w, \bar{w})}{z-x} \end{aligned} \quad (4.148)$$

zero mode の寄与のみを考えると古典論の場合と一致する [47]。descendant は primary field に $J(x; z)$ あるいはその x についての微分を作用することで作ることができる。エネルギー・運動量テンソルもいつもと同じように構成できて、primary field は worldsheet 上の共形場理論に対して、conformal weight

$$\Delta_h = \Delta_{\bar{h}} = -\frac{h(h-1)}{k-2} \quad (4.149)$$

を持つ状態となっている。式 (4.139) の表式を用いることで、current 同士の OPE (4.48) は

$$J(x; z)J(y; w) = k\frac{(y-x)^2}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}[(y-x)^2\partial_y - 2(y-x)]J(y; w) \quad (4.150)$$

とまとめ直すことができる。current と primary field の OPE も同様にまとめられて、

$$J(x; z)\Phi_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) = \frac{1}{z-w}[(y-x)^2\partial_y + 2h(y-x)]\Phi_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \quad (4.151)$$

となる。ここで注目したいのは、 $J(x)\Phi_h(x, \bar{x})$ は特異点を持たないということで、そのため、式 (4.144) で定義される $\partial_z\Lambda = (\pi/k)\bar{J}\Phi_1$ は primary state になっていて、量子論でも成立する式となっている。

primary state Φ_h の性質は調べられていて [47][48]、相関関数や OPE も知られている。ただし、非常に複雑になってしまうので、このあとの議論で用いる次の形を引用しておくにとどめる [49]。

$$\lim_{z \rightarrow w} \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z})\Phi_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) = \delta^{(2)}(x-y)\Phi_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \quad (4.152)$$

ただし、表現として discrete series D^+ を用いた。OPE が delta 関数的な係数を持ち得るところは $SL(2, C)$ 不変性からも示すことができ、この delta 関数のおかげでこの後構成する時空の共形場理論の current が、時空の共形場理論の座標に対して特異点を持たせることができる。

4.2.2 Bulk の寄与の入った時空の共形場理論

境界近傍の近似で時空の共形場理論の current を構成したときと同じようにして、時空の共形場理論を構成する。まず、worldsheet 上の current $k^a(z)$ を用意して、次の OPE を満たすとする。

$$k^a(z)k^b(w) = \frac{k_{ws}\delta^{ab}/2}{(z-w)^2} + \frac{if^{abc}k^c(w)}{z-w} \quad (4.153)$$

今回は worldsheet 上で conformal weight (0,1) の場を持ってくる必要がある。前節で構成した $\partial_{\bar{z}}\Lambda = (\pi/k)\bar{J}\Phi_1$ は \bar{J} の conformal weight が (0,1) で、 Φ_1 は worldsheet では式 (4.149) より conformal weight が (0,0) であることからこれを利用することで、次の演算子を構成する。

$$\begin{aligned} K^a(x) &\equiv -\frac{1}{\pi} \int d^2z k^a(z) \partial_{\bar{z}}\Lambda(\gamma, \bar{\gamma}, \phi; x, \bar{x}) \\ &= -\frac{1}{k} \int d^2z k^a(z) \bar{J}(\bar{x}, \bar{z}) \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (4.154)$$

古典的な表式 (4.145) から

$$\partial_{\bar{x}}\Lambda = \pi\Phi_1 \quad (4.155)$$

が成り立っていて、この式には場の積など量子論に持っていったときにずれる効果が入らないので、量子論でも成り立つ。この式を用いることで、式 (4.154) は次のような量を定義すると便利である。

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{x}}K^a(x) &= -\int d^2z k^a(z) \partial_{\bar{z}}\Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \\ &= \sum_i \oint_{C_i} \frac{dz}{2i} k^a(z) \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (4.156)$$

ここで、第 2 式に移るときに積分を実行した。演算子は式 (4.136) のように相関関数として計算されるものである。演算子が挿入されていないところは worldsheet は特異点を持たないので、演算子が挿入されている部分に小さな穴をあけた worldsheet 上で積分した。その結果、演算子の挿入されているまわりの積分の寄与に帰着することができた。

次に今作った演算子が時空の共形場理論の current 代数をなしていることを調べることにする。まず、primary field Φ_h を用いて worldsheet 上で conformal weight が (1,1) の演算子 $V_h(x, \bar{x}; z, \bar{z})$ を作り、その積分

$$V_h(x, \bar{x}) \equiv \int d^2z V_h(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \quad (4.157)$$

で時空の場を表すとする。ただし、 $V_h(x, \bar{x}; z, \bar{z})$ は worldsheet 上で次の OPE を持つとする。

$$k^a(z)V_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) = \frac{t^a(R)}{z-w} V_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \quad (4.158)$$

まず、current と primary field との OPE を求めるために次の相関関数を計算する。

$$\langle \partial_{\bar{x}}K^a(x)V_h(y, \bar{y}) \cdots \rangle = \int d^2w \oint \frac{dz}{2i} \langle k^a(z)\Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z})V_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \cdots \rangle \quad (4.159)$$

ここで、式 (4.156) の表式を用いた。 \cdots はその他の演算子の挿入を表している。今、current と primary field との OPE を調べたいので、積分路は primary field の挿入されている場所のまわりのみをとる。ここで、前節の最後に書いた OPE (4.152) から

$$\lim_{z \rightarrow w} \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z})V_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) = \delta^{(2)}(x-y)V_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \quad (4.160)$$

とできることを用いると、

$$\langle \partial_{\bar{x}} K^a(x) V_h(y, \bar{y}) \cdots \rangle = \pi \delta^{(2)}(x - y) t^a(R) \langle V_h(y, \bar{y}) \rangle \quad (4.161)$$

となる。delta 関数の公式

$$\partial_{\bar{x}} \frac{1}{x - y} = \pi \delta^{(2)}(x - y) \quad (4.162)$$

を用いると current と primary field との OPE は

$$K^a(x) V_h(y, \bar{y}) = \frac{t^a(R)}{x - y} V_h(y, \bar{y}) \quad (4.163)$$

となることが分かる。式 (4.152) のような delta 関数的な係数を持ったために、得意点を持つ項が正しい形で出すことができた。

次に current 同士の OPE を求める。このためには次のような相関関数を調べればよい。

$$\begin{aligned} & \langle \partial_{\bar{x}} K^a(x) K^b(y) \cdots \rangle \\ &= -\frac{1}{k} \int d^2 w \oint \frac{dz}{2i} \langle k^a(z) \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) k^b(w) \bar{J}(\bar{y}; \bar{w}) \Phi_1(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \cdots \rangle \end{aligned} \quad (4.164)$$

\bar{J} との OPE による寄与は $(\bar{x} - \bar{y})$ の正べきの寄与しかしないので、ここでは無視してよい。 $k^a(x) k^b(y)$ の OPE は式 (4.153) のように $1/(z - w)$ について 2 次の項と 1 次の項がある。1 次の項からの寄与は先程と同様に計算でき、

$$\langle \partial_{\bar{x}} K^a(x) K^b(y) \cdots \rangle = \pi \delta^{(2)}(x - y) i f^{abc} \langle K^c(y) \cdots \rangle \quad (4.165)$$

となる。2 次の項からの寄与からは次のような項が出てくる。

$$\lim_{z \rightarrow w} \partial_z \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \bar{J}(\bar{y}; \bar{w}) \Phi_1(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \quad (4.166)$$

ここで式 (4.144) と式 (4.155) を組み合わせた式

$$\partial_z \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) = \frac{1}{k} \partial_x [J(x; z) \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z})] \quad (4.167)$$

を用いることで、

$$k \lim_{z \rightarrow w} \partial_z \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \bar{J}(\bar{y}; \bar{w}) \Phi_1(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \quad (4.168)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow w} \partial_x [J(x; z) \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \bar{J}(\bar{y}; \bar{w}) \Phi_1(y, \bar{y}; w, \bar{w})] \\ &= \partial_x \delta^{(2)}(x - y) J(y; w) \bar{J}(\bar{y}; \bar{w}) \Phi_1(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \end{aligned} \quad (4.169)$$

とできる。したがって、2 次の項からの寄与は、

$$\langle \partial_{\bar{x}} K^a(x) K^b(y) \cdots \rangle = -\pi \frac{k_{ws}}{2} \delta^{ab} \partial_x \delta^{(2)}(x - y) \langle I \cdots \rangle \quad (4.170)$$

となる。ただし、

$$I = \frac{1}{k^2} \int d^2z J(y; z) \bar{J}(\bar{y}; \bar{z}) \Phi_1(y, \bar{y}; z, \bar{z}) \quad (4.171)$$

とした。ここで、

$$\langle I \dots \rangle = P \langle \dots \rangle \quad (4.172)$$

と定義する。すると、 K^a 同士の OPE は

$$K^a(z) K^b(w) = \frac{k_{st} \delta^{ab} / 2}{(z-w)^2} + \frac{i f^{abc} K^c(w)}{z-w} \quad (4.173)$$

となり、時空の共形場理論における current と思えることが確かめられた。ただし、

$$k_{st} = k_{ws} P \quad (4.174)$$

となっている。

次に時空の共形場理論のエネルギー・運動量テンソルを作る。current の場合と同様に次のような組み合わせを考えてみる。

$$T(x) = \int d^2z [A_1 J \partial_x^2 \Phi_1 + A_2 \partial_x J \partial_x \Phi_1 + A_3 \partial_x^2 J \Phi_1] \bar{J}(\bar{x}; \bar{z}) \quad (4.175)$$

積分される部分は worldsheet 上で primary となっていないとてはならない。そのためには特異点を持つ項が消えるように係数を選ぶ必要がある。実際に $J(x; z)$ と $\Phi_1(y, \bar{y}; w, \bar{w})$ の OPE を計算することで

$$6A_1 - 4A_2 + 2A_3 = 0 \quad (4.176)$$

が満たされていればよいことが分かる。そこで、次のように係数を選ぶことにする。

$$T(x) = \frac{1}{2k} \int d^2z (\partial_x J \partial_x \Phi_1 + 2\partial_x^2 J \Phi_1) \bar{J}(\bar{x}; \bar{z}) \quad (4.177)$$

規格化はエネルギー・運動量テンソルの OPE を満たすように決めた。current の場合と同じように、

$$\partial_{\bar{x}} T(x) = \sum_i \frac{1}{2} \oint_{C_i} \frac{dz}{2i} [\partial_x J \partial_x \Phi_1 + 2\partial_x^2 J \Phi_1](x; z) \quad (4.178)$$

を用いると後の計算に便利である。

この演算子が実際に時空の共形場理論のエネルギー・運動量テンソルの OPE を満たしているか調べる。今回は演算子が場の積で定義されているため、公式 (2.68) を用いる必要があり計算が複雑になっている。エネルギー・運動量テンソルと primary field との OPE は

$$\begin{aligned} & \langle \partial_{\bar{x}} T(x) V_h(y, \bar{y}) \dots \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int d^2w \oint \frac{dz}{2i} \langle [\partial_x J \partial_x \Phi_1 + 2\partial_x^2 J \Phi_1](x; z) V_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \dots \rangle \end{aligned} \quad (4.179)$$

から求められ、

$$T(x) V_h(y, \bar{y}) = \frac{h V_h(y, \bar{y})}{(x-y)^2} + \frac{\partial_y V_h(y)}{x-y} \quad (4.180)$$

となる。エネルギー・運動量テンソル同士の OPE は

$$\begin{aligned} \langle \partial_{\bar{x}} T(x) T(y) \cdots \rangle &= \frac{1}{2} \frac{1}{2k} \int d^2 w \oint \frac{dz}{2i} \langle [\partial_x J \partial_x \Phi_1 + 2\partial_x^2 J \Phi_1](x; z) \\ &\quad \cdot [\partial_y J \partial_y \Phi_1 + 2\partial_y^2 J \Phi_1] \bar{J}(\bar{y}; \bar{w}) \cdots \rangle \end{aligned} \quad (4.181)$$

から求められ、

$$T(x)T(y) = \frac{c_{st}/2}{(x-y)^4} + \frac{2T(y)}{(x-y)^2} + \frac{\partial_y T(y)}{x-y} \quad (4.182)$$

となり、正しい OPE を示していることが分かる。ただし、central charge は先程定義した P を用いることで、

$$c_{st} = 6kP \quad (4.183)$$

となる。 P がどのような値になるかは次の節で調べることにする。

4.2.3 Long String と Short String

第 4.2.2 節で求めた演算子において境界近傍の極限を取ると、実際に第 4.1.5 節での場合を再現できることを示す。第 4.2.2 節では $SL(2, C)$ の表現を表すのに補助場 x を導入して x を境界の共形場理論の座標とした。第 4.1.5 節では $SL(2, R)$ の表現を表すのに $\{j, m, \bar{m}\}$ を用いた。これらの 2 つの表現方法は Fourier 変換で移りあうことができる。

primary field は Fourier 変換することで、

$$V_{j,m,\bar{m}} = \int d^2 x x^{j+m} \bar{x}^{j+\bar{m}} \Phi_{j+1}(x, \bar{x}) \quad (4.184)$$

と変換することができる。この変換に $-j$ と $j+1$ を入れ換える作用も含まれているため、式 (4.130) で式 (4.44) と違う表現を用いた。逆 Fourier 変換は

$$\Phi_h(x, \bar{x}) = \sum_{m,\bar{m}} V_{h-1,m,\bar{m}} x^{-m-h} \bar{x}^{-\bar{m}-h} \quad (4.185)$$

となる。この表現を式 (4.148) に代入することで、

$$\begin{aligned} J^-(z)V_{j,m,\bar{m}}(w, \bar{w}) &= \frac{(j+m)V_{j,m,\bar{m}}(w, \bar{w})}{z-x} \\ J^3(z)V_{j,m,\bar{m}}(w, \bar{w}) &= \frac{mV_{j,m,\bar{m}}(w, \bar{w})}{z-x} \\ J^+(z)V_{j,m,\bar{m}}(w, \bar{w}) &= \frac{(-j+m)V_{j,m,\bar{m}}(w, \bar{w})}{z-x} \end{aligned} \quad (4.186)$$

となる。境界近傍以外では Fourier 変換の積分が定義できるかどうか分からないが、境界近傍ではこのような OPE を満たす場を作ることができた。そのため、境界近傍では第 4.1.5 節の primary field と第 4.2.2 節の primary field は Fourier 変換で移りあうことが分かる。

次に current について調べる。古典的な表式 (4.144) から $\phi \rightarrow \infty$ で

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \Lambda = \frac{1}{x - \gamma} \quad (4.187)$$

となることを用いると、

$$\begin{aligned} K_f^a(x) &\equiv \lim_{\phi \rightarrow \infty} K^a(x) = -\frac{1}{\pi} \int d^2z k^a(z) \partial_{\bar{z}} \frac{1}{x - \gamma(z)} \\ &= \sum_i \oint_{C_i} \frac{dz}{2\pi i} \frac{k^a(z)}{x - \gamma(z)} \end{aligned} \quad (4.188)$$

となる。したがって、Fourier 変換

$$K_f^a(x) = \sum_n K_n^a x^{-n-1} \quad (4.189)$$

の定義から、current は式 (4.103) の表式

$$K_n^a = \frac{1}{2\pi i} \oint dz k^a(z) \gamma^n(z) \quad (4.190)$$

と一致することが分かる。

次にエネルギー・運動量テンソルについて調べる。式 (4.187) を用いることで、

$$T_f(x) \equiv \lim_{\phi \rightarrow \infty} T(x) = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} \frac{dz}{2\pi i} \left[-\frac{\partial_x J}{(x - \gamma)^2} + \frac{2\partial_x^2 J}{x - \gamma} \right] \quad (4.191)$$

となり、Fourier 変換

$$T_f(x) = \sum_n L_n x^{-n-2} \quad (4.192)$$

から $\partial_x J = 2J^3 - 2xJ^-$ 、 $\partial^2 J = -2J^-$ を用いると、式 (4.109)

$$L_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz [(n+1)J^3 \gamma^n - nJ^- \gamma^{n+1}] \quad (4.193)$$

を再現することができる。

それぞれの OPE も調べることができるが、それは第 4.2.2 節で定義した演算子 I の振る舞いを調べることに帰着できる。したがって、演算子 I について詳しく調べることにする。まず、 I の時空の共形場理論における conformal weight を調べると、 $(0,0)$ になっていることがわかり、identity 演算子に対応していることが分かる。次に I が定数であることを示す。 $\partial_{\bar{x}} I$ を計算すると

$$\partial_{\bar{x}} I \propto \int d^2z J(x; z) \partial_{\bar{z}} \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \propto \sum_i \oint_{C_i} dz \partial_{\bar{z}} \bar{\Lambda} \quad (4.194)$$

とできる。積分路は相関関数のなかにある場のまわりにとってあるが、 Λ は式 (4.152) の両辺を x について積分した式

$$\lim_{z \rightarrow w} \bar{\Lambda}(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \Phi_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) = \frac{1}{\bar{x} - \bar{y}} \Phi_h(y, \bar{y}; w, \bar{w}) \quad (4.195)$$

から worldsheet 上では singularity を持たないことが分かる。したがって、 $\partial_{\bar{x}}I = 0$ を示すことができる。同様に $\partial_x I = 0$ も示せ、 I が定数であることが言えた。

次に実際に相関関数の計算をして P を求めることにする。相関関数を調べる時、worldsheet は連結成分だけでなく、非連結成分からの寄与も取り入れる必要がある [21][22]。ここでは、次のような相関関数を調べることにする。

$$\langle IV_{h_1}(x_1) \cdots V_{h_n}(x_n) \rangle = P \langle V_{h_1}(x_1) \cdots V_{h_n}(x_n) \rangle \quad (4.196)$$

V_{h_i} 同士の相関関数には非連結成分からの寄与はないとする。そのとき、

$$\begin{aligned} & \langle IV_{h_1}(x_1) \cdots V_{h_n}(x_n) \rangle \\ &= \langle I \rangle \langle V_{h_1}(x_1) \cdots V_{h_n}(x_n) \rangle + \langle IV_{h_1}(x_1) \cdots V_{h_n}(x_n) \rangle_{\text{connected}} \end{aligned} \quad (4.197)$$

となり、 I に対する寄与は 2 種類存在することが分かる。

非連結成分からの寄与があることは古典的に

$$\langle T(x)T(y)V_{h_1}(x_1) \cdots V_{h_n}(x_n) \rangle \quad (4.198)$$

の central charge への寄与を計算することができる。この場合、素朴に考えると $T(x)T(y)$ の central charge への寄与は x と y が近付いたところからくるため、他の演算子の挿入とは関係なく計算できる。そのため、

$$\langle T(x)T(y) \rangle \langle V_{h_1}(x_1) \cdots V_{h_n}(x_n) \rangle \quad (4.199)$$

の非連結成分への寄与しかない。 $\langle T(x)T(y) \rangle$ の計算は AdS/CFT 対応を用いると、重力理論の範囲以内では重力子の 2 点関数から計算できる。3 次元重力理論の作用は式 (3.39)

$$S \propto \frac{1}{G} \int d^3x \sqrt{g} \left(R + \frac{2}{l^2} \right) \quad (4.200)$$

となっていて、propagater は $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ としたときに作用が

$$S \propto \frac{1}{G} \int d^3x \sqrt{g} \partial h \partial h \quad (4.201)$$

となることから計算できる。 $\sqrt{g} \sim l^3$ 、 $\partial^2 \sim l^{-2}$ からほぼ l/G の大きさに効いてくることが分かる。今、F1/NS5 の系を扱っていると思うと、central charge への寄与は

$$c \sim l/G \sim kp \quad (4.202)$$

となっていることが分かる。ただし、ここで式 (3.128) を用いた。

今の議論では非連結成分の寄与しか計算できない。連結成分からの寄与は境界近傍の議論から求めることができる。境界近傍では式 (4.134) のように delta 関数に比例する項が効いてくること

と、式 (4.143) が $\delta^{(2)}(x - \gamma)$ がかったときに $-k\partial_z\gamma$ となることから、次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} I_f &\equiv \lim_{\phi \rightarrow \infty} I = \int d^2z \delta^{(2)}(x - \gamma) \partial\gamma \bar{\partial}\bar{\gamma} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int d^2z \partial\gamma \bar{\partial} \frac{1}{x - \gamma(z)} = \sum_i \oint_{C_i} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\partial\gamma}{x - \gamma(z)} \end{aligned} \quad (4.203)$$

ここで Fourier 展開

$$I_f = \sum_n I_n x^{-n} \quad (4.204)$$

から式 (4.105)

$$I_f = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{\partial_z \gamma}{\gamma} \quad (4.205)$$

と一致していることが分かる。この演算子は第 4.1.5 節で説明したように境界近傍に巻き付いている worldsheet の数を数える演算子であるため、連結成分に寄与している。 q 本の弦が境界近傍に巻き付いている場合の central charge は式 (4.111)

$$c = 6kq \quad (4.206)$$

となっている。したがって、連結成分からの寄与と非連結成分からの寄与は同じくらいの大きさになっていて、どちらかを無視することはできない。

境界近傍に巻き付いている worldsheet は long string sector と呼ばれる sector を構成している。worldsheet は境界近傍に張りついているため、worldsheet ができたり消えたりすることがない。したがってこの sector からの寄与は worldsheet の振動によって生じており、第一量子化された弦理論に対応している。一方、重力理論の近似によって得られる寄与は short string sector と呼ばれる sector からきている。重力理論に対応している弦理論は小さな閉弦が bulk をうようよしている状態で、閉弦が簡単にできたり消えたりする。この sector は第二量子化された弦理論に対応している。これら 2 つの sector を図で描いてみると図 4.2 のようになる。

$H_+^3 = SL(2, C)/SU(2)$ の要素 h によって張られる Hilbert 空間を \mathcal{H} としたときに、Hilbert 空間は自乗可積分関数によって張られ、その空間は

$$\mathcal{H} = \int_{\nu > 0} d\nu \nu^2 \mathcal{H}_{-\frac{1}{2} + i\nu} \quad (4.207)$$

と分解することのできる事が知られている [46][47]。したがって、bulk を作っているのは規格化可能表現である continuous series であることが分かる。一方、時空の共形場理論の場を作るのは discrete series であった。規格化できない表現を用いたため、境界にまで影響の残る演算子を構成することができた。規格化可能表現を用いると境界への極限を取る操作で、その影響が効いてこなくなってしまう。ただし、相関関数を考えるときには bulk 中を通るため、その効果を考えないわけにはいかない。

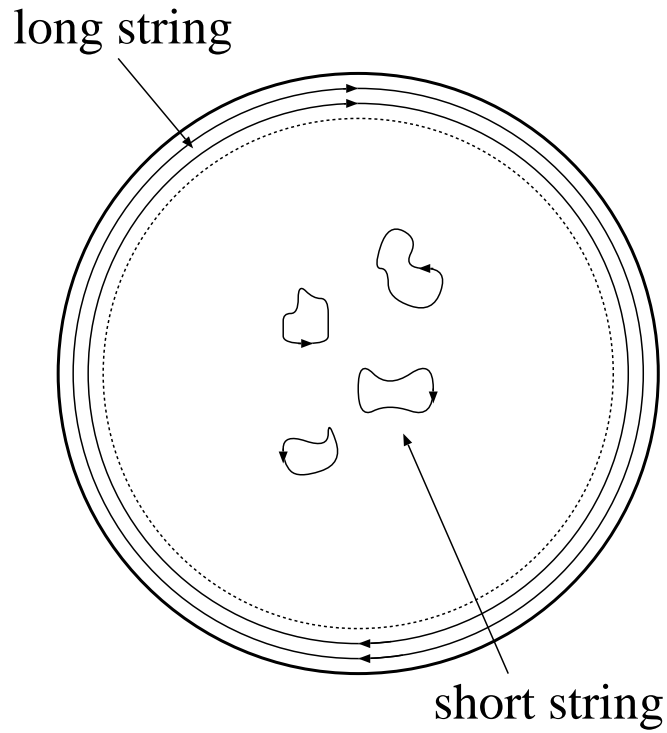


図 4.2: long string sector と short string sector

規格化可能表現は bulk の Hilbert 空間を構成しているが、演算子には対応していない。また、規格化可能でない表現は演算子に対応しているが、Hilbert 空間の状態には対応していない。compact な群の場合には共形場理論の状態と演算子に一对一の対応のあることが知られているが、今回はそのような対応がない。このことは、non-compact な群のときには一般に現れることで、Liouville 理論の例 [35] が有名である。

第5章 結論

この論文では、特に 3 次元反ド・ジッター空間を背景とする重力理論あるいは弦理論と、その境界にある 2 次元の共形場理論との対応について調べてきた。3 次元の重力理論は bulk に自由度が存在していないため、無限遠で平らな時空の場合には trivial になってしまう。ただし、無限遠で反ド・ジッター空間になるような場合には境界が存在し、その境界条件の決め方によって non-trivial な理論となる。この境界には共形対称性 [17] が存在するため、共形場理論が存在している。その central charge は

$$c = \frac{2l}{3G} \quad (5.1)$$

となっている。3 次元のブラックホールは漸近的に AdS_3 空間に近付くような多様体で実現でき、BTZ ブラックホール [28][29] と呼ばれている。そのブラックホールのエントロピーを Bekenstein-Hawking の公式

$$S = \frac{Area}{4G} \quad (5.2)$$

を用いて計算した値と、境界に存在する共形場理論の central charge から Cardy の公式

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{cL_0}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{c\bar{L}_0}{6}} \quad (5.3)$$

を用いて計算した値が一致している [30]。3 次元重力理論は Chern-Simons 理論で表すことができるため、扱い易くなっている [18][19]。また、このことから bulk には自由度が存在していなくて、境界にのみ自由度が存在することが分かる。

背景が AdS_3 空間の弦理論は WZW 模型を用いて記述することができる。境界近傍の近似では、 $SL(2, R) \times SL(2, R)$ の WZW 模型を用いて記述することができる [20]。この場合 Wakimoto 自由場表現を用いることができる。 $sl(2, R)$ current 代数における vertex 演算子

$$V_{jm\bar{m}} = \gamma^{j+m} \bar{\gamma}^{j+\bar{m}} \exp\left(\frac{2j}{\alpha_+} \phi\right) \quad (5.4)$$

を用いることで、時空の共形場理論の primary field を構成することができる。

worldsheet 上の共形場理論の current $k^a(z)$ を持ってきて、その level を k_{ws} とする。このとき、時空の共形場理論の current は

$$K_n^a = \frac{1}{2\pi i} \oint dz k^a(z) \gamma^n(z) \quad (5.5)$$

となっている。AdS₃ 空間の対称性にあたっている $sl(2, R)$ の current $J^a(z)$ を持ってきて、level を k とする。このとき、時空の共形場理論の Virasoro 代数の生成子は

$$L_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz [(n+1)J^3\gamma^n - nJ^-\gamma^{n+1}] \quad (5.6)$$

となっている。これらは交換関係

$$[K_n^a, K_m^b] = if^{abc}K_{n+m}^c + \frac{k_{st}}{2}n\delta^{ab}\delta_{n+m,0} \quad (5.7)$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c_{st}}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \quad (5.8)$$

を満たす。ここで、

$$q = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{\partial_z \gamma}{\gamma} \quad (5.9)$$

としたとき、

$$k_{st} = k_{ws}q, \quad c_{st} = 6kq \quad (5.10)$$

となっている。 q は境界付近に巻き付いている worldsheet の数を数える演算子になっている。

Bulk の寄与も入れたときは $SL(2, C)/SU(2)$ coset 模型を用いる [21][22]。補助場 x を導入して、時空の共形場理論の座標とみなす。そのとき、worldsheet 上の $sl(2, C) \times \overline{sl(2, C)}$ の Lie 代数のもとで、 $(j, \bar{j}) = (h-1, h-1)$ の変換をする primary field を作ることができ、

$$\Phi_h = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(\gamma-x)(\bar{\gamma}-\bar{x})e^\phi + e^{-\phi}} \right)^{2h} \quad (5.11)$$

となっている。この primary field を利用して、時空の共形場理論の primary field を作るができる。

境界近傍の議論をしたときと同様に worldsheet 上の共形場理論の current $k^a(z)$ をもってきて、その level を k_{ws} とする。AdS₃ 空間の対称性にあたっている $sl(2, R)$ の current に補助場 x を用いて少し整理した形

$$J(x; z) = -J^+(z) + 2xJ^3(z) - x^2J^-(z) \quad (5.12)$$

とその反正則な current $\bar{J}(\bar{x}, \bar{z})$ を導入する。このとき、時空の共形場理論の current は

$$K^a(x) = -\frac{1}{k} \int d^2z k^a(z) \bar{J}(\bar{x}, \bar{z}) \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \quad (5.13)$$

となっている。時空の共形場理論のエネルギー・運動量テンソルは

$$T(x) = \frac{1}{2k} \int d^2z (\partial_x J \partial_x \Phi_1 + 2\partial_x^2 J \Phi_1) \bar{J}(\bar{x}; \bar{z}) \quad (5.14)$$

となっている。これらの演算子は OPE

$$K^a(z)K^b(w) = \frac{k_{st}\delta^{ab}/2}{(z-w)^2} + \frac{if^{abc}K^c}{z-w} \quad (5.15)$$

$$T(x)T(y) = \frac{c_{st}/2}{(x-y)^4} + \frac{2T(y)}{(x-y)^2} + \frac{\partial_y T(y)}{x-y} \quad (5.16)$$

を満たす。identity 演算子を

$$I = \frac{1}{k^2} \int d^2z J(x; z) \bar{J}(\bar{x}; \bar{z}) \Phi_1(x, \bar{x}; z, \bar{z}) \quad (5.17)$$

として、相関関数の中に挿入したときの値を

$$\langle I \dots \rangle = P \langle \dots \rangle \quad (5.18)$$

とする。このとき、

$$k_{st} = k_{ws}P, \quad c_{st} = 6kP \quad (5.19)$$

となっている。

境界近傍の極限をとると、先程の演算子を再現することができる。P に対する寄与には相関関数の連結成分と非連結成分の 2 つからの寄与がある。境界近傍の極限の解析から得られた q は P のなかの一部分となり、連結成分からの寄与となっている。この sector は long string sector と呼ばれる。境界近傍の議論ではこの long string の解析と状態の代数のもとでの振る舞いが得られる。非連結成分には bulk を作っている閉弦からの寄与が効いてくる。この sector は short string sector と呼ばれる。

この論文で調べた系は超弦理論の立場では F1/NS5 の系を調べたことに対応しているのだが、F1/NS5 の系を S-dual することで D1/D5 の系に持っていくことができる。long string は D1-brane が AdS_3 空間の中央から境界に向かって離れている状態に対応していて [50]、Higgs branch から coulomb branch に移る共形場理論の moduli 空間の特異点に対応している。

今までの議論は基本的に NS charge しかない状態を扱っていた。超弦理論を NSR formalism で量子化すると、RR charge を持つ場合は spin field を用いて記述する必要があり、非常に複雑になってしまう。ただし、 $AdS_3 \times S^3$ の場合には Green-Schwartz like な formalism を用いることができ [51]、RR flux の入った場合についても取り扱うことができる。

また、NS5-brane 上の理論は little string theory [52] と呼ばれ、弦理論と場の理論の中間のような理論とされているが、よく分かっていない。NS5-brane に基本的弦を加えた系がこの論文で扱った系なので、共形場理論への対応にあたる horographic な性質を用いて NS5-brane 上の力学の理解を深めることができる [53][54][55]。

謝辞

修士論文を書く際にさまざまなアドバイスを下さった藤川先生、どうもありがとうございました。AdS/CFT 対応についてのセミナーを開いて下さり質問に答えて下さった菅原さん、どうもありがとうございました。細かな質問にまで丁寧に答えて下さった細道さん、どうもありがとうございました。その他研究室の皆さん、いろいろ議論の相手をして下さってどうもありがとうございました。

関連図書

- [1] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, “Superstring theory vol. I, II,” Cambridge University Press (1987).
- [2] J. Polchinski, “String Theory vol. I, II,” Cambridge University Press (1998).
- [3] J.D. Bardeen, B. Carter and S.W. Hawking, “The Four Laws Of Black Hole Mechanics,” *Comm. Math. Phys.* **31** (1973) 161.
- [4] J. Polchinski, “D-branes and RR-charges,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724, hep-th/9510017.
- [5] J. Polchinski, “TASI Lectures On D-Branes,” hep-th/9611050.
- [6] A. Strominger and C. Vafa, “Microscopic Origin Of The Bekenstein-Hawking Entropy,” *Phys. Lett.* **B379** (1996) 99, hep-th/9601029.
- [7] C.G. Callan and J.M. Maldacena, “D-Brane Approach To Black Hole Quantum Mechanics,” *Nucl. Phys.* **B472** (1996) 591, hep-th/9602043.
- [8] G. t’Hooft, “Dimensional Reduction In Quantum Gravity,” *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 621, gr-qc/9310026.
- [9] L. Susskind, “The World As A Hologram,” *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377, hep-th/9409089.
- [10] G. t’Hooft, “A Planar Diagram Theory For Strong Interactions,” *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 461.
- [11] T. Banks, W. Fishler, S.H. Shenker and L. Susskind, “M Theory As A Matrix Model: A Conjecture,” *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5112, hep-th/9610043.
- [12] J.M. Maldacena, “The Large N Limit Of Superconformal Field Theories And Supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231, hep-th/9711200.
- [13] S. Gubser, I. Klebanov and A. Polyakov, “Gauge Theory Correlators From Non-Critical String Theory,” *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105, hep-th/9802109.

- [14] E. Witten, “Anti De Sitter Space And Holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253, hep-th/9802150.
- [15] O. Aharony, S.S. Gubser, J.M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, ”Large N Field Theories, String Theory And Gravity,” hep-th/9905111.
- [16] E. Witten, “Quantum Field Theory And The Jones Polynimial,” *Comm. Math. Phys.* **121** (1989) 351.
- [17] J.D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges In The Canonical Realization Of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimentional Gravity,” *Comm. Math. Phys.* **104** (1986) 207.
- [18] M. Banados “Three-Dimensional Quantum Geometry And Black Holes,” hep-th/9901148.
- [19] M. Banados “Notes On Black Holes And Three Dimensional Gravity,” hep-th/9903244.
- [20] A.Giveon, D. Kutasov and N. Seiberg, “Comments On String Thoery On AdS_3 ,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 733, hep-th/9806194.
- [21] J. de Boer, H. Ooguri, H. Robins and J. Tannenhauser, “String Theory On AdS_3 ,” *JHEP* **9812** (1998) 026, hep-th/9812046.
- [22] D. Kutasov and N. Seiberg, “More Comments On String Thoery On AdS_3 ,” *JHEP* **9904** (1999) 008, hep-th/9903219.
- [23] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, “Infinite Conformal Symmetry In Two-Dimmmensional Quantum Field Theory,” *Nucl. phys.* **B241** (1984) 333.
- [24] P. Ginsparg, “Applied Conformal Field Theory,” *Les Houches 1998*, eds. E. Brezin and J. Zinn-Justin, pp. 1-168. Amsterdam: North-Holland.
- [25] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, “Conformal Field Theory,” New York, USA: Springer (1997).
- [26] S. V. Ketov, “Conformal Field Theory,” World Scientific (1995)
- [27] E. Witten, “Non-Abelian Bosonization In Two Dimensions,” *Comm. Math. Phys.* **92** (1984) 455.
- [28] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, “Black Hole In Three-Dimentional Spacetime,” *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 207, hep-th/9204099.
- [29] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, “Geometry Of The (2+1) Black Hole,” *Phys. Rev.* **D48** (1993) 1506.

- [30] A. Strominger, “Black Hole Entropy From Near-Horizon Microstates,” JHEP **9802** (1998) 009, hep-th/9712251.
- [31] E. Witten, “String Theory Dynamics In Various Dimensions,” Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124.
- [32] P. Horava and E. Witten, “Heterotic And Type I String Dynamics From Eleven Dimensions,” Nucl. Phys. **B460** (1996) 506, hep-th/9510209.
- [33] J. Polchinski and E. Witten, “Evidence For Heterotic - Type I String Duality,” Nucl. Phys. **B460** (1996) 525, hep-th/9510169.
- [34] J.M. Maldacena and A. Strominger, “ AdS_3 Black Holes And A Stringy Exclusion Principle,” JHEP **9812** (1998) 005, hep-th/9804065.
- [35] N. Seiberg, “Notes On Quantum Liouville Theory And Quantum Gravity,” Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990) 319.
- [36] S. Carlip, “What We Don’t Know About BTZ Black Hole Entropy,” Class. Quant. Grav. **15** (1998) 3609, hep-th/9806029.
- [37] E.J. Martinec, “Conformal Field Theory, Geometry, And Entoropy,” hep-th/9809021.
- [38] A.A. Tseytlin, “Extreme Dyonic Black Holes In String Theory,” Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 689, hep-th/9601177.
- [39] J.M. Maldacena, “Black Holes In String Theory,” hep-th/9607235.
- [40] K. Skenderis, “Black Holes And Dranes In String Theory,” hep-th/9901050.
- [41] G.T. Horowitz and D.L. Welch, “Exact Three Dimensional Black Holes In String Theory,” Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 328, hep-th/9302126.
- [42] N.D. Birrell and P.C. Davis, “Quantum Fields In Curved Space Time,” Cambridge University Press (1982).
- [43] L.J. Dixon, M.E. Peskin and J. Lykken, “ $N=2$ Superconformal Symmetry And $SO(2,1)$ Current Algebra,” Nucl. Phys. **B325** (1989) 329.
- [44] J.M. Evans, M.R. Gaberdiel and M.J. Perry, “The No-Ghost Theorem For AdS_3 And The Stringy Exclusion Principle,” Nucl. Phys. **B535** (1998) 152, hep-th/9806024.
- [45] R.A. Bertlmann, “Anomalies In Quantum Field Theory,” Clarendon Press · Oxford (1996).
- [46] K. Gawedzki, ”Non-Compact WZW Conformal Field Theories,” hep-th/9110076.

- [47] J. Teschner, “The Mini-Superspace Limit Of The $SL(2, C)/SU(2)$ -WZNW Model,” Nucl. Phys. **B546** (1999) 369, hep-th/9712258.
- [48] J. Teschner, “On Structure Constants And Fusion Rules In The $SL(2, C)/SU(2)$ WZNW Model,” Nucl. Phys. **B546** (1999) 390, hep-th/9712256.
- [49] J. Teschner, “Operator Product Expansion And Factorization In The H_3^+ -WZNW Model,” hep-th/9906215.
- [50] N. Seiberg and E. Witten, “The D1/D5 System And Singular CFT,” JHEP **9904** (1999) 017, hep-th/9903224.
- [51] N. Berkovits, C. Vafa and E. Witten, “Conformal Field Theory Of AdS Background With Ramond-Ramond Flux,” JHEP **9903** (1999) 018, hep-th/9902098.
- [52] N. Seiberg, “Matrix Description Of M-Theory On T^5 And T^5/Z_2 ,” Phys. Lett. **408B** (1997) 98, hep-th/9705221.
- [53] A. Giveon, D. Kutasov and O. Pele, “Holography For Non-Critical Superstrings,” JHEP **9910** (1999) 035, hep-th/9907178.
- [54] A. Giveon and D. Kutasov, “Little String Theory In A Double Scaling Limit,” JHEP **9910** (1999) 034, hep-th/9909110.
- [55] A. Giveon and D. Kutasov, “Comments On Double Scaled Little String Theory,” hep-th/9911039.