'９７ 夏の学校 素粒子パート講義

「量子トンネル理論の最近の発展について」

講師：青山 秀明 (京大総人)

７月２１, ２２日

記：後藤 義典、小池 達也、大河内 郁雄、
田中 雅人、山口 哲

目 次

1 イントロダクション **2**

1.1 標準モデルにおけるバリオン数・レプトン数の破れ [2, 3] 3

2 インスタントン, バウンス **6**

2.1 インスタントン 7

2.2 バウンス 15

2.3 インスタントン, バウンスの問題点 18

3 複素時間法 **23**

4 相互作用するインスタントン **31**

5 バレー法 **35**

6 摂動論の漸近的振舞いとトンネル効果 **46**

6.1 摂動論と Borel 和. 46

6.2 非対称 2 重井戸型ポテンシャル. 50

7 最後に.... **64**

1　イントロダクション

素粒子論でトンネル現象があらわれると現象論ではほとんどあらわれないし, ストリングでも非常に重要であるがあまりあらわれない. この講義の中心はそのどちらでもなく純粋に場の理論としてトンネル現象を扱うかという話です. しかしながら, 素粒子以外の物理・化学では非常に多くあらわれます. 例えば, 宇宙論ではインフレーション・宇宙生成のモデルの一部ではトンネル効果が用いられるし, 原子核理論では核分裂は原子核の変形から分裂へのトンネル現象とみることができます. また, 物性・化学の多くの現象がトンネル効果で表されます. まず, この仕事の出発点から歴史的な流れを見てみましょう.

１９７６年 t'Hooft [2]

標準モデルの SU(2) セクターでトンネル効果が起こるとアノマリーを通じてバリオン数・レプトン数の保存則が破れることを示しました.

$$\Delta B = \Delta L \neq 0 \tag{1}$$

(普通のインスタントンを近似的に使う計算法を用いているが問題点が多い.)

１９８３年 N. S. Manton [3]

Sphaleron(~ 10Tev ~ M_W/α_{weak}) と呼ばれる粒子的配位を発見しました. この配位を生成・消滅することがトンネル効果に対応している. Sphaleron のエネルギーは非常に高いため, 一般的にトンネリングの確率は非常に小さくなります. しかしながら, 最初にもっているエネルギーが Tev のとき確率が大きくなります. Shpaleron の生成・消滅をどのように評価するかがよくわからない.

１９８７年 H. Aoyama & H. Goldberg[4]

Sphaleron を自由粒子のコヒーレント状態だと思って生成する確率を計算する.

１９９０年 A. Ringwald [5]& o. Espinosa[6]

インスタントンを使った計算.→ もっともらしい計算ではあるが多くの問題点が

ある.

１９９０年 H. Aoyama & H. Kikuchi[7]

インスタントンの相互作用を考えることにより Ringwald, Espinosa のいくつかの問題を解決.

１９９１年 V. V. Khose and A. Ringwald[8]

バレー法を提唱.

１９９２年 H. Aoyama & H. Kikuchi[9]

新 (固有) バレー法を提唱.

１９９１, １９９６年 H. Aoyama[10], H. Aoyama & A. Tamra[11], H. Aoyama & I. Okouchi[1]

トンネル効果と摂動計算との関係 $\rightarrow$ Asympton 理論

1.1 標準モデルにおけるバリオン数・レプトン数の破れ [2, 3]

ここでは標準モデルの $SU(2)_W$ セクターに Sphaleron が存在してそれを通してトンネリングが起こることをみてみたいと思います.

まず, この理論にどのようなソリトン, 定常的で有限のエネルギーを持つ配位, があるか考えます. このようなものを考えるにはトポロジーを考えるのが便利で, 自明でないトポロジーがあればソリトンを考えることができます. それを調べてみます. 有限エネルギーの配位を見つけたいのでヒッグス場 Φ は無限遠でポテンシャルの最小値でなければならない.

$$\Phi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} (r \rightarrow \infty) \tag{2}$$

だが, 実際にはこの形のゲージ変換も許されて, 無限遠では

$$\Phi \rightarrow U \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} (r \rightarrow \infty) \tag{3}$$

となります. (ここで U はゲージ変換行列.) 同様にゲージ場は,

$$A_\mu \to -\partial_\mu U \cdot U^{-1} (r \to \infty) \tag{4}$$

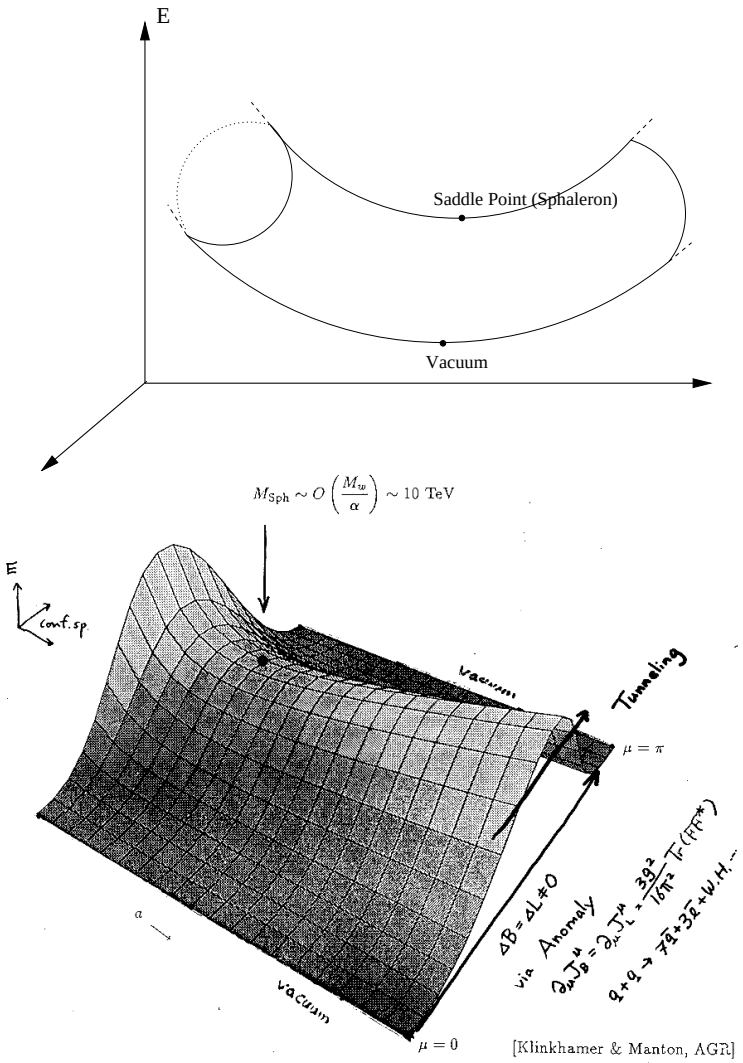
このような配位になっていればポテンシャルからの寄与が有限になるので有限エネルギーの配位になります. つまり, 3 次元遠方で U という行列が定義されれば有限エネルギーの配位がつくることができる. このとき自明でない解があるかどうかは $\pi_2(SU(2))$ というトポロジーがあるかをみればよいことにまります. この場合 $\pi_2(SU(2)) = 1$ なのでソリトンは存在しないことがわかります.

しかし, 今の議論をもうすこし格上げすると自明でない配位が存在することがわかります. それは定常的で有限のエネルギーを持つ一連の配位, そして, それらのつくる空間 (ループ空間) を考えます. (ここで考えるループは出発点と到達点が真空であるものを考えます.) つまり, 配位空間は無限次元空間でトポロジーによって分けられていないのだけれどもこのループ空間ではループはどのように分類されるのかを調べます. そこでこのループ空間のトポロジーをみます. 3 次元無限遠 S_2 はループのパラメータが加わるので $S_2 \times S_1$ となります. つまり,

$$\pi_2(SU(2)) \to \pi_3(SU(2)) \tag{5}$$

となります. このとき,$\pi_3(SU(2)) = Z$ となるのでなにか巻き付き数のようなものが存在することがわかります. この状況は次のような低次元のモデルを考えると分かりやすい. を定常的で有限のエネルギー持つ配位空間をこのドーナツの表面と考えることができます. なぜかというとドーナツの表面に巻き付くループを考えれるからです. (縦軸をエネルギーとします. 真空はドーナツの最下点になります.) このように定常的で有限のエネルギーを持つ配位空間をドーナツの表面とみることができるならば真空以外に特別な点 (鞍点) が存在することがわかります. 鞍点なのでループの方向に行きますとエネルギーが下がりますが他の方向に行けばエネルギーが上がります. この配位は極値なので運動方程式の解ですが不安定な解です. (トポロジカルなソリトンではありません. ループの方向に落ちていってこわれてしまう.) これが Sphaleron と呼ばれる配位です.

実際どうやってSphaleronをつくるかについてですが, まず,SU(2)の一回巻き付くルー



プを作ってやります. もちろんそれにはいろいろな巻き付き方があるので無限の可能性があります. ここで変分法原理を用います. 一回巻き付くループを考えたときにそのループを構成する配位の中で最もエネルギーの高い配位をみるとその配位のエネルギーはSphaleronのエネルギーより必ず高いことがわかります. ですから,Sphaleronをみつけたければループの最大点のエネルギーを極値化すればよいのです. 分かりやすく計算した結果をお見せします. ループをパラメトライズするのがμの方向で, ループ空間のパラメーターがaです. 図をみるとわかるようにループの最大点の最小のところ, すなわち 図の点のところ, がSphaleronになります. さらにこの図をみているとトンネル効果があることがわかります. $\mu = 0, \pi$が真空なので$\mu = 0$から$\mu = \pi$への (真

空から真空への) 遷移を考えることができます. この遷移は真空から真空に移るので何も起こらないかというとそうではなくてその効果を拾う関係式があります. それがアノマリーの式です.

$$\partial_\mu J_B^\mu = \partial_\mu J_L^\mu = \frac{3g^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(FF^*) \tag{6}$$

J_B, J_L がそれぞれバリオン数, レプトン数のカレントで一世代の場合です.(三世代の場合は 3 倍になります.) このようなアノマリーが見えるためには右辺の積分が 0 であってはなりません. 実際に右辺の積分は 1 になります. したがって, こういう現象を $\Delta B = \Delta L \neq 0$, あるいは,$B + L$ violation と言います.($B - L$ は保存されます.) 実際にどのような反応になるかというと

$$q + q \to 7\bar{q} + 3\bar{l} + (W, Z, H) \tag{7}$$

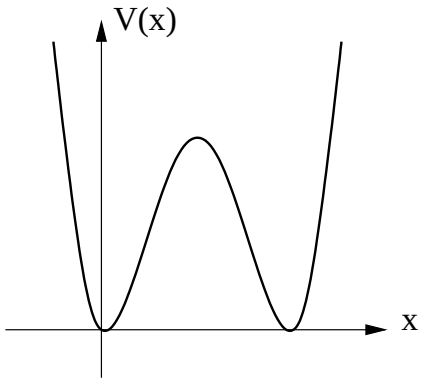
(W, Z ボソンやヒッグスが入ることによって遷移確率が上がります.) しかしながら, このような現象は非常に起こりにくくなります. 真空から真空に移るところにポテンシャル障壁があるわけで, その一番低いところが Sphaleron になるわけです. しかし, その Sphaleron のエネルギーが最初に述べたように $M_{Sph} \sim O(M_W/\alpha \sim 10\mathrm{Tev})$ なのでポテンシャルの山が非常に高いことになり, この現象は起こりにくくなります. 真空から真空の遷移ではなく最初から 10Tev のエネルギーを持つ反応を考えるともはやトンネル効果ではなくなるので観測されるはずです.

2 インスタントン, バウンス

ここで, インスタントンとバウンスに関する基本的な概念と計算方法を復習します. ここでは, 量子力学でやります. たいていの場合は, 量子力学で何が起こっているか分かれば場の理論でも同じです.

2.1　インスタントン

トンネル現象が起こる系としてよく考えるのは, 下のような対称二重井戸型ポテンシャルです.



トンネル現象が起こるのは山が非常に高い場合です. 山が非常に高い場合, 左側だけで基底状態の波動関数を作ったものを Ψ_L , 右側だけで作ったものを Ψ_R とします. すると山が無限に高い場合には両方とも基底状態で縮退していますが, 山の高さが有限の場合には 2 つの波動関数には重なりがあって, 相互作用があります. 近似的に 2 つの波動関数の空間でハミルトニアンを書くと,

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \epsilon \\ \epsilon & E_0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

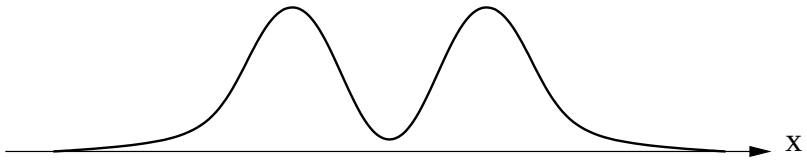
これを対角化すると実際のエネルギーは

$$E_\pm = E_0 \pm \epsilon \tag{9}$$

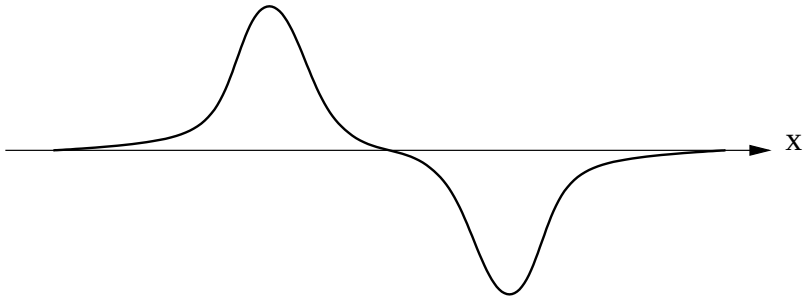
波動関数は

$$\Psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_L + \Psi_R)$ の波動関数の形は,



$\Psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_L - \Psi_R)$ は,



このような場合 1 次元量子力学でよく知られているように, 節 (0 を切る点) がないものが基底状態, 節が 1 つあるものが第一励起状態です. もともと縮退していた 2 つのモードが分裂したわけです.

これから, この分裂がどのぐらいの大きさで起こるかということを見ていきます. そのためには, ϵ の大きさを評価すればいいわけです. ϵ の大きさは波動関数の重なりであって, これは左にあった粒子が右に行く確率に依存しています. これは WKB で計算することができます.

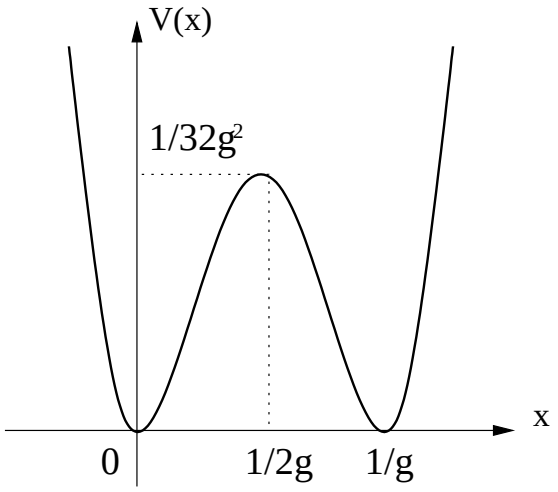
$$\epsilon \simeq \exp\left[\int P dx\right] \tag{11}$$

ただし, P は運動量に相当する量で

$$P = \sqrt{2V(x)} \tag{12}$$

これを計算するためにポテンシャルを簡単なものに決めます.

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2(1 - gx)^2 \tag{13}$$



これは非常に便利な形なので今後何回も使います. 先ほどポテンシャル障壁が大きいといったのはこれを見るとわかりやすくて, g が 0 に近づけば 2 つの井戸の間隔が離れて間の山も高くなります. また $g \to 0$ で $V \to 1/2x^2$ で調和振動子になります. また $V(x)$ を展開すると

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + gx^3 + \frac{1}{2}g^2x^4 \tag{14}$$

となって, 3 次の係数に g , 4 次の係数に g^2 がついていて g はちょうど結合定数のようになります.

先ほどの ϵ を実際に計算すると

$$\begin{aligned} P &= x(1-gx) && (15)\\ \epsilon &\simeq \exp\left[-\int x(1-gx)dx\right] && (16)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{6g^2}\right) && (17) \end{aligned}$$

この ϵ が先ほどのエネルギーの分裂の大きさを決めています. ところで, この ϵ は $g \to 0$ で非常に速く 0 に近づきます. 実際 g^2 について 0 のまわりで展開してみると全ての次数の係数は 0 になります. n 次の係数は,

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{d(g^2)}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{6g^2}\right)\Big|_{g=0} = (\text{有理式}) \times \exp\left(-\frac{1}{6g^2}\right)\Big|_{g=0} \tag{18}$$

これは $\exp(-1/6g^2)$ が利いて 0 になります. このような量は g^2 で展開して各次数を調べる摂動論では出てきません. この ϵ のような量は非摂動論的効果と呼ばれています. 摂動論ではできないので別の計算方法が必要ですが, それがインスタントン計算です. もちろんこれは量子力学ですから数値計算でも WKB でも計算できるわけですが, 場の理論で計算できるような形式を作るためにその準備として量子力学の中でちゃんと計算できるようにします.

このためには経路積分を使います. 経路積分でできれば場の量子論にも使えます. 経路積分で $x=0$ から $x=1/g$ に行く遷移振幅を計算します.

$$\langle x=1/g|\, e^{-iHt}\, |x=0\rangle = \int Dx\, e^{iS[x]} \tag{19}$$

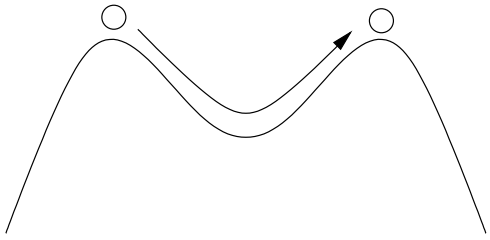
ふつうの摂動論と違って $x=0$ から $x=1/g$ へ行くような経路が効くように計算したいわけですがその手順はよく知られています. それは, 時間を虚数にして時間推進します.

$$\langle x=1/g|\, e^{-H\tau}\, |x=0\rangle = \int Dx\, e^{-S_E[x]} \tag{20}$$

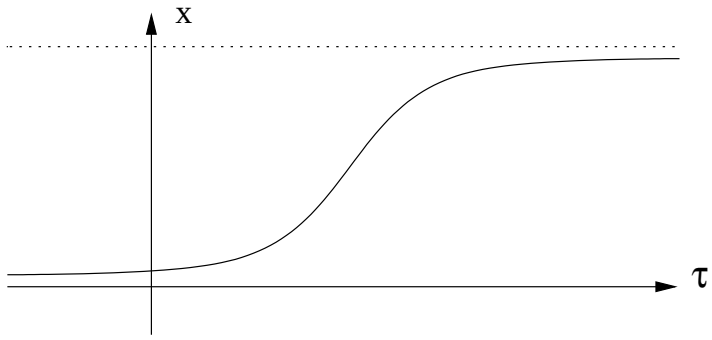
時間を虚数にすると作用はどうなるかというと

$$S_E[x] = \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)\right) \tag{21}$$

結局, ポテンシャルの前の符号が $-$ から $+$ に変化します. 従ってポテンシャルが逆転した中で粒子がどう動くかという問題になります. このとき, 下のように $x=0$ から $x=1/g$ まで行くことができます.



横軸を τ にしてかくと,



この解は, エネルギー保存を使って簡単に求まって,

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x) = 0 \tag{22}$$

$$x(\tau) = \frac{1}{g}\frac{1}{1-e^{-\tau}} \tag{23}$$

これを x_I と書いて, インスタントンと呼びます. 経路積分をこの解を中心に評価します.

(質問) 時間を虚数にしたものとしないものとの関係は？

(答え) エネルギーの値を求めるという観点からは, $\langle 1/g|e^{-H\tau}|0\rangle$ がわかっていれば, 求まります. それは, 間に完全系をはさんで,

$$\begin{aligned}\langle 1/g|\, e^{-H\tau}\,|0\rangle &= \sum_n \langle 1/g|E_n\rangle\langle E_n|\, e^{-H\tau}\,|0\rangle \\ &= \sum_n e^{-E_n\tau}\,\langle 1/g|E_n\rangle\,\langle E_n|0\rangle\end{aligned}$$

これの長時間の振る舞いを見ると E_n の小さなところだけが残ってそのエネルギーがわかります. 実際にここではそのようにします.

時間を虚数にしたものと, 元のものとの関係は実際には難しい問題です. だから虚時間を使うときには注意して使わなければなりません. 後で複素時間形式を使うときもこの問題はでてきます.

このコンフィギュレーションを使った計算の仕方を大ざっぱにいうと, まず, $x(\tau)$ を $x_I(\tau)$ とゆらぎの部分に分けます.

$$x(\tau) = x_I(\tau) + \sum c_n x^{(n)}(\tau) \tag{24}$$

$x^{(n)}(\tau)$ は完全系です. 経路積分はゆらぎの部分の係数についての積分になって,

$$\int Dx\, e^{-S_E[x]} = \int \prod dc_n\, e^{-S_E[x]} \tag{25}$$

作用は x_I のまわりで展開します. $\sum c_n x^{(n)} = \delta x$ と書いておくと, 2 次まで展開して,

$$\begin{aligned} S_E[x] &= S_E[x_I] + \int d\tau \left.\frac{\delta S_E}{\delta x(\tau)}\right|_{x=x_I} \delta x \\ &+ \frac{1}{2}\int d\tau\, d\tau' \left.\frac{\delta S_E}{\delta x(\tau)\,\delta x(\tau')}\right|_{x=x_I} \delta x(\tau)\,\delta x(\tau') \end{aligned} \tag{26}$$

1 次の項の $\delta S_E/\delta x(\tau)|_{x=x_I}$ は x_I が運動方程式の解なので 0 になります. 2 次の項 $\delta S_E/\delta x(\tau)\,\delta x(\tau')|_{x=x_I}$ は一般に微分演算子になります. この部分を処理するために, $x^{(n)}$ をこの微分演算子の固有関数にとって, その固有値を λ_n とすると 2 次の項は $\sum_n (1/2)\lambda_n c_n^2$ になります. これらのことから, 計算している経路積分を I と書いておくと,

$$I = e^{-S_E[x_I]} \int \prod dc_n\, e^{-\frac{1}{2}\sum \lambda_n c_n^2} \tag{27}$$

になります.

実際に $S_E(x_I)$ を計算すると, WKB と同じで

$$S_E[x_I] = \frac{1}{6g^2} \tag{28}$$

残りの部分 $\int dc_n \cdots$ は WKB における自由因子と思えますが, 1 つだけ重要な違いがあります. それは, 一番小さい固有値が 0 になっていることです. それを簡単に見るには, もともと x_I が運動方程式を満たしていることから,

$$\left.\frac{\delta S_E}{\delta x(\tau)}\right|_{x=x_I} = 0 \tag{29}$$

これを τ で微分すると

$$\int d\tau' \left.\frac{\delta S_E}{\delta x(\tau)\,\delta x(\tau')}\right|_{x=x_I} \frac{dx_I}{d\tau}(\tau') = 0 \tag{30}$$

となって $dx/d\tau$ が, 固有値 0 の固有関数であることがわかります. また, インスタントン解が 1 つあれば, それを平行移動したものもまたインスタントン解になっています.

したがって, インスタントン解は無限個あるので, 0 から $1/g$ に行く時刻 τ_0 をパラメータにして $x_I(\tau;\tau_0)$ のように表すことにします. 前に δx というゆらぎを考えましたが, この δx の中には τ_0 を動かすものも入っていて, その下では, インスタントンはまたインスタントンになりますから, 作用は変わらず, したがってこういう変形のものでの固有値は 0 になります. つまり ゼロモード があるというのは, インスタントンが τ_0 という自由なパラメータを持っていることからの帰結です. があるとガウス積分の $1/\sqrt{\lambda_0}$ のところが無限大になりますが, ここを τ_0 に関する積分に書き換えます.

$$I = e^{-S_E[x_I]} \int \prod_{n\geq 1} dc_n \, e^{-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\lambda_n c_n^2} \int d\tau_0 \, J \tag{31}$$

c_0 に関する積分だけ分けて, それを τ_0 に関する積分にしました. J はそのときにでてくるヤコビアンです. こんどはガウス積分のところはちゃんと計算できます. τ_0 に関する積分は全時間にわたって積分するわけですが, 今の場合は, ある有限の時間で 0 から $1/g$ まで行く確率を考えているので, 時間間隔を決めているわけです. その時間間隔を T とすると,

$$\int d\tau_0 \, J = TJ \tag{32}$$

したがって

$$I = e^{S_E[x_I]} \left(\prod_{n\geq 1} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} \right) TJ \tag{33}$$

いま T に比例する量がでてきましたが, これはこのままでは解釈できません.

もともと I は

$$I = \left\langle 1/g \right| e^{-HT} \left| 0 \right\rangle \tag{34}$$

間に完全系をはさんで,

$$I = \sum_n e^{-E_n T} \left\langle 1/g | E_n \right\rangle \left\langle E_n | 0 \right\rangle \tag{35}$$

T を非常に大きくとると E_n の小さい項だけが残って $e^{-E_0 T}$ のふるまいをするはずです. これは今の計算と合っていません.

今考えたのは 0 から $1/g$ まで 1 回だけ行くものでした.

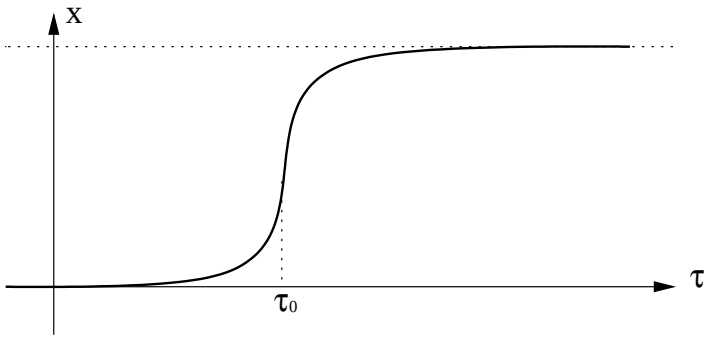


図 1:

しかし, 1 回 0 から $1/g$ までいって, また 0 にもどってもう 1 回 $1/g$ に行くようなものも考えられます.

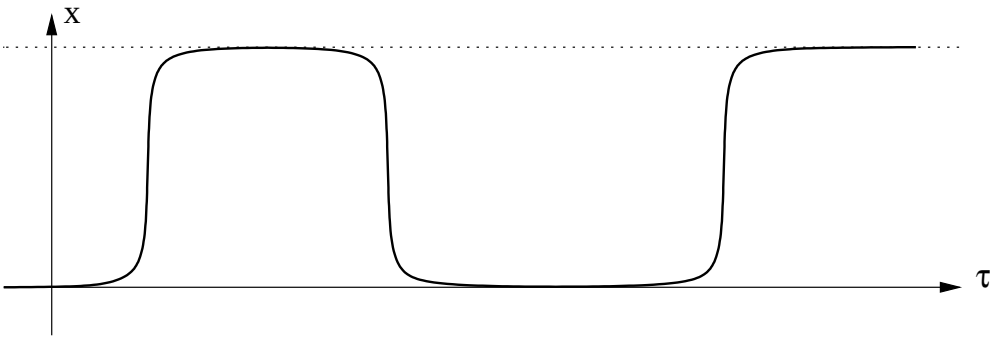


図 2:

$1/g$ から 0 にいくような解は反インスタントンと呼ばれます.

このようなコンフィギュレーションにおいてはインスタントンと反インスタントンが十分離れているために全体の作用は 3 つを足したものになります. 図 1 の振幅を $AT = e^{S_E[x_I]}(\prod_{n\geq 1}\sqrt{\pi/\lambda_n})JT$ とすると図 2 の振幅は

$$\frac{1}{3!}A^3T^3 \tag{36}$$

になります. $1/3!$ がついているのは, インスタントンと反インスタントンの順番が決まっているからです.

このようにインスタントン, 反インスタントン, $\cdots$ となっているものをすべて足し挙

げると

$$AT + \frac{1}{3!}A^3T^3 + \frac{1}{5!}A^5T^5 + \cdots = \sinh AT = \frac{1}{2}\left(e^{AT} - e^{-AT}\right) \tag{37}$$

ここに e^{AT} と e^{-AT} がでてきていて, エネルギーが最初考えていた E_0 よりも A 上がったものと A 下がったものになっているので, この A が最初考えていた ϵ であるという結論に達します.

1-インスタントンで計算したものは, T の 1 次にしかならないけれども, 今のように, インスタントン, 反インスタントンを交互に入れたものを全て足せば, エネルギーの $+\epsilon$ と $-\epsilon$ に応じて $e^{-\epsilon T}$ と $e^{+\epsilon T}$ がでてくるということです. このことを希インスタントンガス近似といいます. これは非常に多くの問題を含んでいるわけですが, それはあとでお話しします.

(質問) 最初計算したものが 1-インスタントンしか含んでいなかったというのは, 背景にいれたのが 1-インスタントンだけだったからですか ?

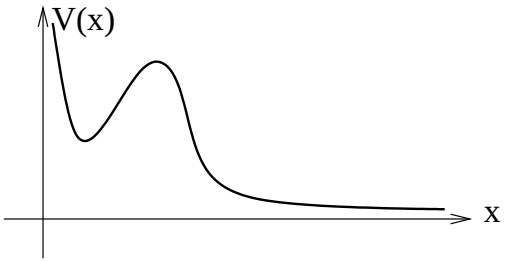
(答え) そうです. もともとの経路積分はいろいろな背景があるわけです. 今の場合 0 から $1/g$ に行くような背景を考えますが, そのような全ての背景のまわりで計算してそれらを全て足しあげなければなりません. 別の場合では 0 から 0 に行くようなものも考えられますがこのような場合, 一番単純にはずっと 0 にいてなにも起こらないもの, 次はインスタントンがあって, 反インスタントンがあるものというふうになって, 全てを足しあげると今度は cosh になります. cosh と sinh の違いは係数の違い ($\langle 1/g|E_n\rangle$ と $\langle 0|E_n\rangle$) です.

2.2 バウンス

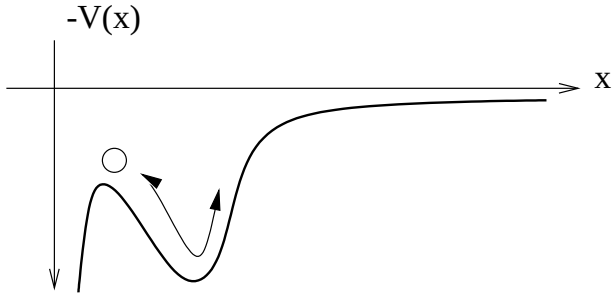
先ほどはかなり基本的な話をしたわけですが, 「Physics Today」にデビッド　マーミンという人が随筆を書いていて, その中に「講義や研究会の発表で難しすぎて文句を言われたことはあっても, 簡単すぎて文句を言われたことはない. 」と書いてあったの

でたぶんいいんでしょう. これからだんだん, あまり標準的でない話をします.

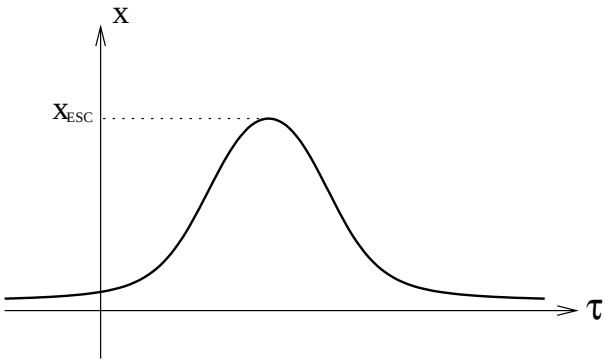
インスタントンの説明は, さっきやったのでバウンスの話をこれからやります. バウンスは不安定性の問題を扱うときに登場します. 伝統的に知られている不安定なポテンシャルは次のようなものです.



これは原子核の α 崩壊のモデルにも使われました. ポテンシャル障壁の中に閉じこめられている α 粒子がトンネル現象を起こして外にでてくるわけです. こういうトンネルする割合を計算するには, もちろん WKB でも計算できるわけですが, 場の理論でも使えるように経路積分で評価します. 先ほどと同じようにユークリッド化した経路積分を考えるとポテンシャルがひっくり返って,



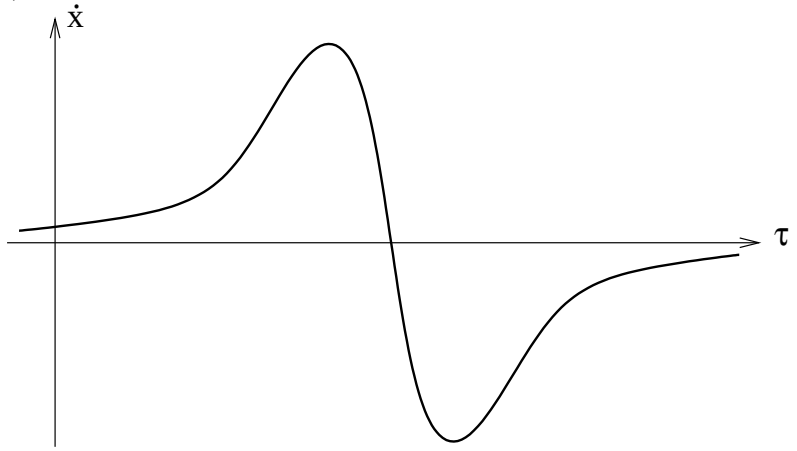
最初極値にあった粒子が落ちてきて, 反対側に行ってまた帰ってきます. τ を横軸にとって書くと,



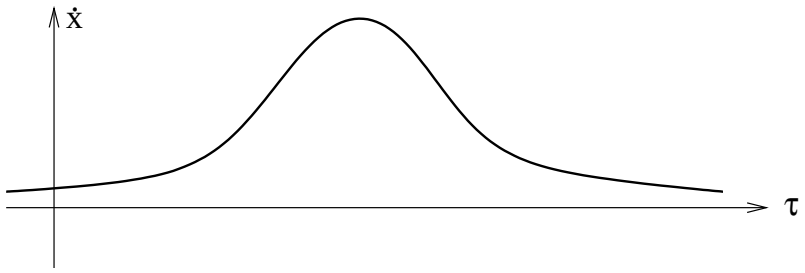
極小値のエネルギーとちょうど同じところ x_{ESC} でユークリッド化した解は折り返してきます. x_{ESC} はエスケープ点と呼ばれています.

ユークリッド化された方程式のこのような解はバウンドして帰ってくるのでバウンスとよばれています. 最近, インスタントンという言葉は乱用されていて, ユークリッド化した運動方程式の解で, 作用が有限のものはすべてインスタントンと呼ぶというのが流行りつつありますが, インスタントンとバウンスは全く違うものです. 何がインスタントンで, なにがバウンスで, 何がそれ以外のものなのかをはっきりと区別しないと物理的描像がごちゃごちゃになってしまいます.

これをインスタントンではなくバウンスと呼ぶのは形が違うというだけでなく, もう１つ重要な違いがあります. 前と同じようにこれを背景としてゆらぎを考えたいわけですが, このとき固有値が問題になるわけです. インスタントンのときと同じように平行移動したものもバウンスになっているので, 0 固有値はあります. その固有関数 $dx_B/d\tau$ の図を書いてみると



ちなみにインスタントンのほうは,



$dx_B/d\tau$ のほうは $dx_I/d\tau$ と違って 0 点を切っています. また, この固有関数を定義

する微分方程式は

$$\left\{-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''(x_B(\tau))\right\}x^{(n)}(\tau)=\lambda_n x^{(n)}(\tau) \tag{38}$$

で Schrödinger 方程式と全く同じ形をしています．1 次元 Schrödinger 方程式の解は節の数が 0 のものが基底状態であって, 今の $dx_B/d\tau$ は節の数が 1 なので第一励起状態です. したがってこれより低い固有値のモードが存在するはずです. この固有値は $\lambda_0=0$ よりも小さいですから負の固有値です．負の固有値が 1 つ存在するので, 経路積分で $\prod\lambda_n$ のところが虚数になってしまいます. もちろん単に虚数の値を書いたからといって必ずしも正しくないわけです. Colemann の説明などを見ますといろいろ解析接続のしかたが書いてありますが, それは後でお話しします.

解析接続で正当化するとやはり虚数値がでてきます．虚数値がでてくるということは不安定性を意味しています. 実時間で見てみますと,

$$\left|e^{-iE_0t}\right|^2=e^{-\Gamma_0 t} \tag{39}$$

ここで E_0 の虚部を $-\Gamma_0/2$ としました. したがって $1/\Gamma_0$ が寿命を意味します．つまり, 極小値のところに, ある意味で局所化した状態を作っても, それはどんどん減ってしまいます. その減る度合いが, いまの Γ_0 になります. 実際 WKB で計算した寿命は, 結果としてバウンス使った計算と一致します. その意味で, これは正しい結果を与えるということがわかります. 非常に簡単でしたが, これが, バウンスを使った計算のストーリーです.

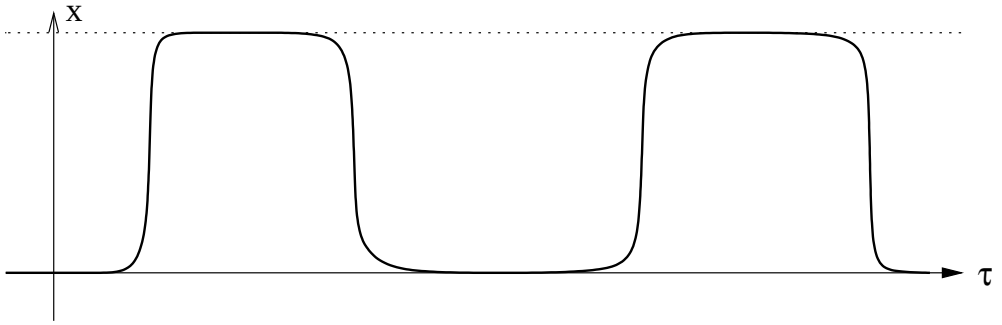
2.3　インスタントン, バウンスの問題点

このような普通のインスタントンやバウンスにはいくつかの不備な点があります. これからそれを見ていきます.

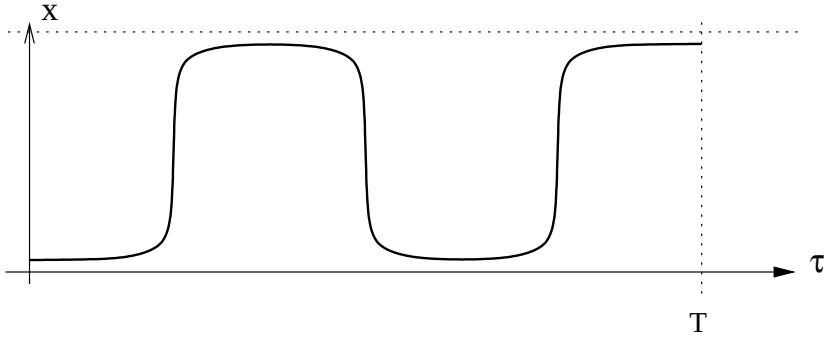
まず, インスタントンは非常にうまく行くと説明しましたが, うまく行かないこともあります. まず, 励起状態はうまくいきません. 先ほどは, 基底状態のエネルギーの分裂をうまく出しましたが, 同じことを励起状態でやろうとしてもうまく行きません. こ

れは, 量子力学だけの問題ではなくて, Sphaleron の問題にも当てはまります. 先ほど話したような電弱理論における $q\bar{q}$ の TeV 領域での衝突は, 一番エネルギーが低いところではなくて, 初期のエネルギーがある状態に相当します. だから, こういう問題はちゃんと解決しなければなりません.

次に, 希ガス近似の問題があります. 先ほど非常に簡単に希ガス近似の説明をしました. それは, 下のようなインスタントン, 反インスタントンを幾つか用意したものも考えますす.



その間は一般に非常に離れていて, その作用は単にそれらの作用を足したものとして近似しました. これらの間隔はだいたい $e^{1/6g^2}$ ぐらいになることが知られていて結合が非常に小さいときは正当化されますが, ある場合には怪しくなります. たとえば, 励起状態では, 間隔がだんだん縮まってくるので正当化されません. これは実際的な問題ですが, 原理的にはもっと深刻です. 先ほどは何気なくインスタントン, 反インスタントンの図をかきましたが, これは運動方程式の解ではないのです. もし, 行ったりきたりする解を作りたければ, 初期値をちょうど極大値にとらないで, 少しずらしたところにとれば, 周期的な解は作れます.

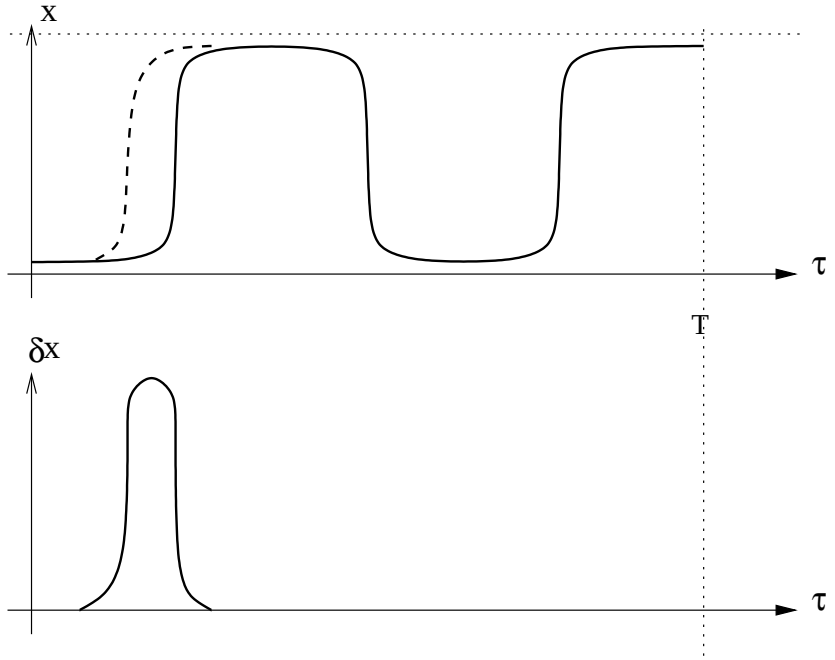


これの問題点はまず初期状態と終状態は正確に 0 , $1/g$ ではないので, $\langle 1/g|e^{-HT}|0\rangle$

という行列要素を計算していることにはなりません. 一歩譲って, $\langle 1/g-\epsilon|e^{-HT}|0+\epsilon\rangle$ のような行列要素に変えます. しかし, たとえ変えても運動方程式の解にあるコンフィギュレーションは, 周期的なものしかありません. ところが, 前やった計算は, インスタントン, 反インスタントンがいる時刻について積分を行います.

$$\frac{1}{3!}\int d\tau_1 \int d\tau_2 \int d\tau_3 = \frac{T^3}{3!} \tag{40}$$

しかし, 運動方程式の解なら, τ_1, τ_2, τ_3 は動かしようがないわけです. では, さっきの計算は何をやっていたのでしょうか. たいていは, 次のようにして納得するわけです. 運動方程式の解は確かに動かせませんが, ゆらぎに関する積分はするわけです. たとえば次のようなゆらぎを足せばインスタントンの位置を動かせます.



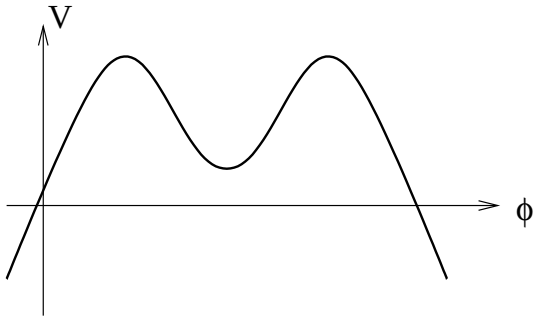
このようにして, インスタントンの中心を動かせるわけですから, 結局積分したものになりそうです. これを保証するためには, 今足したゆらぎの固有値が非常に 0 に近いことが必要です. 固有値が非常に 0 に近ければ, これを足しても実質上作用は変わらないので, インスタントンの位置を自由だと思って積分すればよいというふうに理解できます.

これが伝統的な説明ですが, これにもやはり疑問が残ります. たとえばゆらぎを最初

に足すときはいいのですが, これが最初のものからかなりずれたものに足すときには問題になります. 最初の運動方程式の解からかなりずれたものにゆらぎを足すときに作用の 1 次の項が消えることが保証されません. 分かっていることは, おそらくこの項は, 何らかの意味で小さくて, したがって作用はゆらぎを足しても変わらないであろうということです. 作用が変わらない限りさっきの $T^3/3!$ がでてきます. T^3 がでてくるということは非常に大きいことが分かるのでこれは取り込まなければならないことは分かります. しかし, 全体を通じてどういう形式で何をやってて, たとえばこれからのずれはどのように計算したらよいのかということは分からないという困難がありました.

第 3 の困難は, ゲージヒッグス系やスカラーの系で, ポテンシャルが次のようなものの場合です.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{41}$$

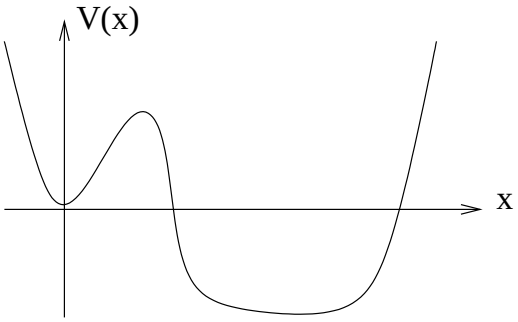


これはユークリッド化してひっくり返したわけではなくて, もともとこういうポテンシャルを考えるわけです. これは, やはり不安定だと考えられます. こういう系ではたしかにトンネリングはありますが, 問題があって, この系にはインスタントンが存在しない, 正確には半径が 0 のインスタントンしか存在しません.

バウンスの理論にもいくつかの問題があって, その 1 つは, インスタントンと共通で, 励起状態をどうするのかということです. バウンスで計算できるのは極小値のところの一番下の状態からの崩壊確率だけで, 励起状態からの崩壊確率は計算できません. これは, もともとの Colemann の論文にも課題として書いてあります.

さらに, バウンスには偽の不安定性という問題が存在します. 偽の不安定性の問題と

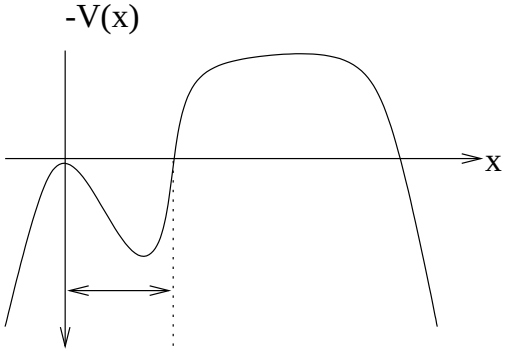
いうのは次のようなポテンシャルの場合に起こります.



右側がしばらくして上がっているような場合です. やはり, トンネリングはあるわけですが, どういうことが起こっているかは, 量子力学を知っていれば分かって, トンネリングで右側にでていった粒子はしばらくすると帰ってきて, 行ったりきたりします. たとえば, 2 準位系の近似では,

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \epsilon \\ \epsilon & E_1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

で, 振動の周期は ϵ が決めています. ここには何の不安定性も存在しません. しかし, ユークリッド化して計算しようとすると, やはりバウンスが現れます. バウンスが現れるということは別の言い方をすると, ユークリッド化した形式では, ポテンシャルがずっと下がったままなのか, いずれ上がっているのかということは見えないわけです. 見えている領域は,



このあたりだけが見えていて, x の大きい方は見えないのです. さらに, 先ほどの計算では, ゆらぎは δx の微小量しか見ていなかったわけですからやはり x の大きい方で上がっているか, 下がっているかは見えません. したがって, 前と全く同じ計算で, λ_{-1} という負の固有値が存在して, 虚部が出てきてしまうので, 不安定という結果になって

しまいます. このことを偽の不安定性 (**Fake instability**) といいます.

これからこれらの問題を追求したいのですが, これにアプローチしたやり方は 2 つあります. 1 つは, 複素時間形式 (Complex time formalism), もう 1 つは, バレー法 (Valley method) です. バレー法の前身としては, 相互作用インスタントン法(interacting instanton) があります. 結果は, 複素時間形式の方は部分的に解決されます. たとえば, 偽の不安定性の問題は複素時間形式で解決されます. ですが, 他のものはほとんど解決できません. バレー法の方は, 今はなした問題点のほとんど全てを解決できます. これから複素時間形式, その後に, バレー法を説明します.

3 複素時間法

時間を複素数にするためには、解析接続とかどうなっているのかが非常に重大な問題です. 文献は山のようにありいろいろ調べましたが、納得できる形式というのがたった 1 つしかなく、それを紹介しておきます.

複素時間法を考える理由は何かということで, fake instability の問題を考えてみます. fake になっているものは図 3 のようなものです. うまくいくのはその次の図 4 のような, つきぬけて無限遠までいくものでした. どこが違うのかというと, いずれまた戻ってくるのかそれとも抜けたら向こうに飛んでいってしまうのか, です. このことが物理的に虚部があるかないかの差を作ります. しかし Euclidean ではそこが見えないため, どうしたらよいかということになります. そこで, Euclidean で見えない部分は実際に実時間で動くところだから実時間のところも何か変化できるようにしよう, というのが複素時間が出てくる理由です. 虚時間だけであれば図の線の間しか見えないわけですが, そこから先は実時間で見てやります. 実際に積分する $x(t)$ が虚時間方向にも実時間方向にも時間変化ができるようにしてやって, スタートした粒子が虚時間方向の時間変化で持ってトンネル効果を起こし, 出てきたら実時間的時間変化を起こして, 振動するなりトンネルして戻るなり無限遠に行くなりできるようにするわけです. つまり, 壁があるかといった外の空間での境界条件を実時間での時間変化も取り入れることによって

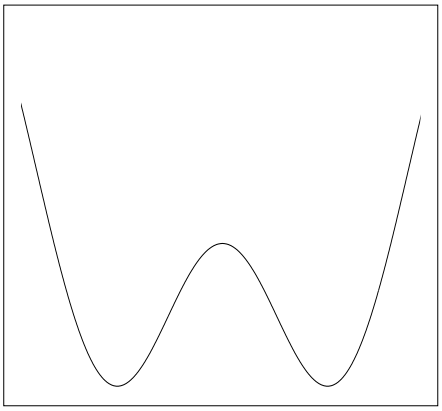


図 3:

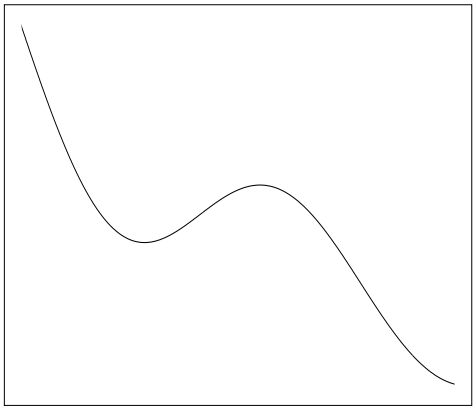


図 4:

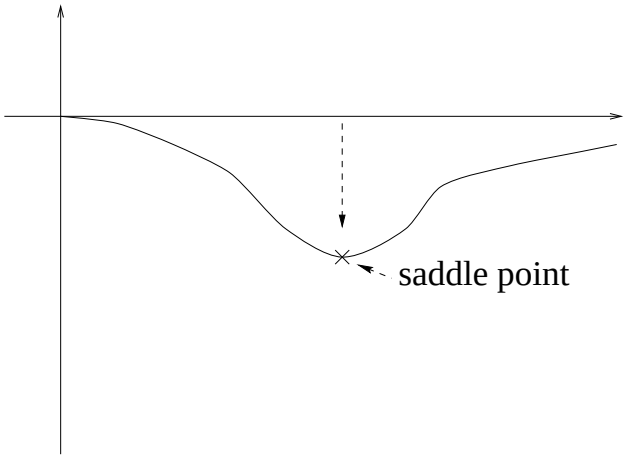


図 5:

考慮できるだろうというのが基本的アイディアです.

以上のようなことを実行するために, resolvant というものを考えてやります. resolvant とはある種のグリーン関数のようなもので,

$$G^R(x_i, x_f; E) = \left\langle x_f \left| \frac{1}{E + i\delta - H} \right| x_i \right\rangle = -i \int_0^\infty dT\, e^{i(E+i\delta)T} \langle x_f | e^{-iHT} | x_i \rangle \qquad (43)$$

第 2 式のように書くと, 行列要素の部分は普通のファインマン核で x_i から x_f へ時間 T うつるものになります. これを, 間に完全系をはさんで評価すると,

$$G^R(x_i, x_f; E) \;=\; \sum_n \frac{1}{E + i\delta - H} \langle x_f | E_n \rangle \langle E_n | x_i \rangle \qquad (44)$$

この resolvant には, E がパラメータとして入っています. E の複素平面で, 極は離散的な状態になるしカットは連続的な散乱状態になります. 今, この T 積分を使って評価することを考えてみます. T の複素平面で積分は 0 から ∞ までですが, もし被積分関数が鞍点 (saddle point) を持っていればそこを通って積分を評価することが可能になります (図 5). そこで, 鞍点があってうまくそこを通るように経路を変形できるかが問題です. 変形できるためには, 変形する間に極とかの特異点があるかどうかとかどんな鞍点なのかを知る必要があります. まず, 鞍点がどういう方程式に従うかというのをみてやります. 第一に,T について微分した時に 0 になることです :

$$\frac{d}{dT} \left[e^{i(E+i\delta)T} \langle x_f | e^{-iHT} | x_i \rangle \right] = 0 \qquad (45)$$

これがわかればいいのですが非常に難しいです. わかるためには行列要素を知らなくてはならず, 知っているということは答がわかっているということになるからです. そこで余分な条件を付け加えます. 行列要素の部分は経路積分として書けるので, 鞍点の条件としてその経路積分の変分も 0 になっていることを課します：

$$\frac{\delta}{\delta x}\left[e^{i(E+i\delta)T} \langle x_f | e^{-iHT} | x_i \rangle \right] = 0 \tag{46}$$

これは resolvant を見ている時に T の積分でもあるし x に対する経路積分でもあるから, 2 重積分の両方に関して被積分関数が 鞍点 になっているという条件です. 問題はなぜ 2 番目の要請があるかということです. もともと評価したいのは T 積分ですから 2 番目はいらないはずですが, これだけでは評価できないので付け加えておきます. 付け加えると何が起こるのかというのが問題です. それぞれどういう条件を出すのか見てみると,2 番目は運動方程式が出てきます：

$$\frac{\delta S}{\delta x} = 0 \tag{47}$$

もう 1 つは T 微分で $e^{i(E+i\delta)T}$ と $\langle x_f | e^{-iHT} | x_i \rangle$ にかかります. 後者では x_i から x_f へ行くときには運動方程式を使っていきたいわけで, そのときに運動方程式の解を入れた作用は T に依存します. $x(t)$ は $x(0) = x_i$,$x(T) = x_f$ を満たす運動方程式の解で T によっているので $\dfrac{dS}{dT}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dT} &= \frac{d}{dT} \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \right\} \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \right]_{x=x_f} + \int_0^T dt \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dTdt} - \frac{dV(x)}{dx}\frac{dx}{dT} \right) \end{aligned} \tag{48}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV(x)}{dx} = 0 \tag{49}$$

そこで, $\dfrac{dx}{dT}$ を調べてみます.

$$\frac{dx}{dT} = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ -\frac{dx}{dt} & t = T \end{cases} \tag{50}$$

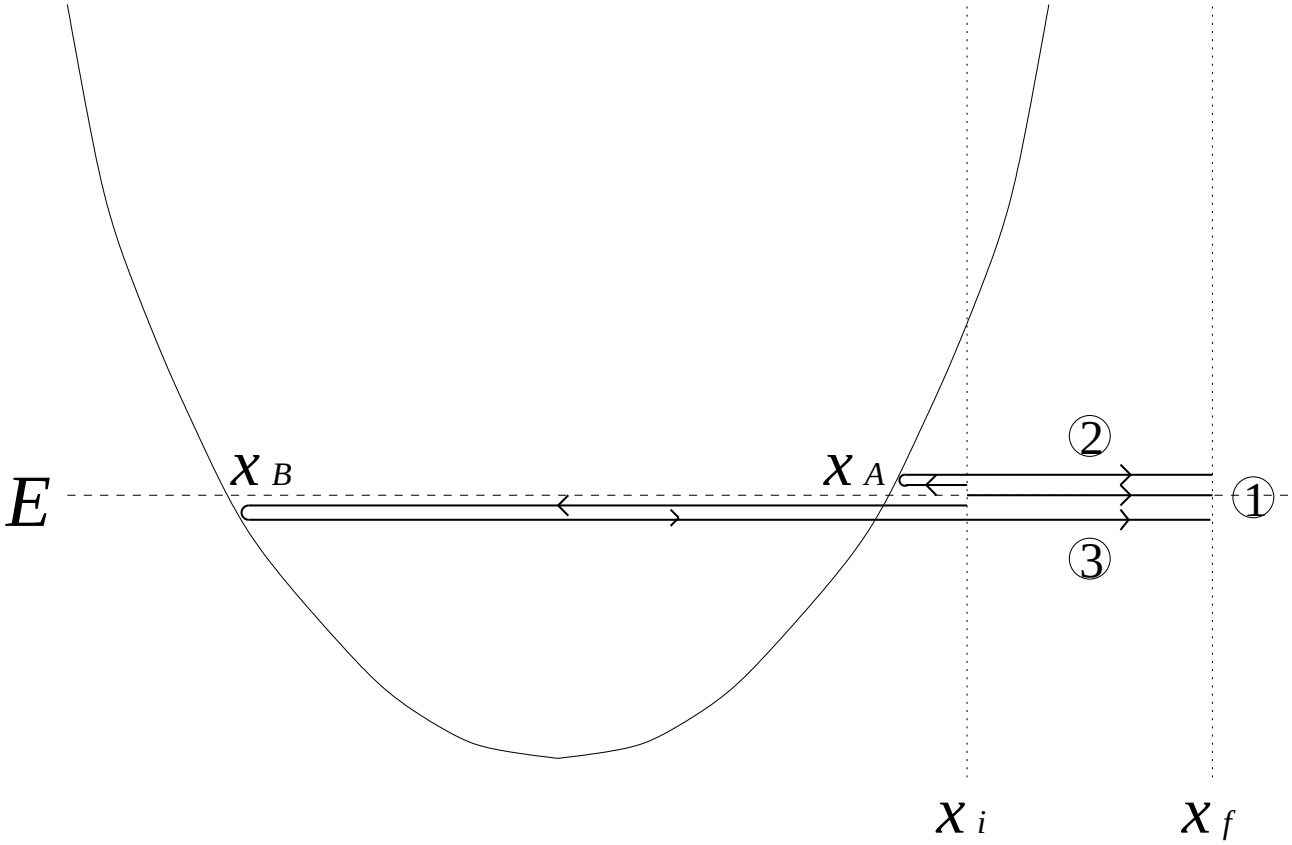


図 6:

そうすると,

$$\frac{dS}{dT} = -\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x)\right]_{t=T} = -E(T) \tag{51}$$

よって全ての T 微分による結果は $E = E(T)$ となります. resolvant を計算してやると鞍点 が満たす条件は運動方程式を満たすこととそのエネルギーは resolvant にはいっている E と等しくなることとなります.

この条件で鞍点を探すことは簡単で, resolvant をある E のところで計算し極があるかどうか見つけたい時に E をもつ運動方程式の解を調べてやればよいわけです. 実際にこれを簡単なモデルの場合に適用してみましょう.

調和振動子を例にとります. これは誰でも解けて今からやる方法でどれだけ正しく答が出るかチェックできます. x_i から x_f を禁止領域にとります (図 6). x_i, x_f,E は

フリーパラメータでそれに対する resolvant を計算します. この時に T の複素平面でのいろいろな値の属するところがわかります. まず, 禁止領域ですから実時間に解は存在しません. Euclidean にすれば解は 1 つ作れます. 本来は T について実時間のところで積分していたけれども, いずれ経路を曲げることを考えるので T は複素数でいいのです. resolvant という量を計算しているのですが, そこには自然に複素時間が許されるわけです. 実際 x_i から x_f へ直接進むということを考えます (図 6 の 1) . それは,Euclidean である時間だけかかって進めます. すなわち純虚数の時間かかって進むことができます. また, x_i からスタートして x_0 まで進んで bounce のように引き返して x_f に進むこともできて (図 6 の 2) , これも純虚数時間です. ですから純虚数時間のところに 2 つ解ができます. それ以外にも x_i からスタートし,x_A まで進んでそこから谷の中にはいるという場合 (図 6 の 3) が考えられます. これは勝手に解を接続してくっつけています. 運動方程式があるので実時間なら実時間で何が起きるか解けばわかりますが, 勝手に時間を別の方向に進めることはできません. けれども x_0 では時間微分が 0 ですからその点では何の矛盾もありません. またこの方程式は 2 階微分方程式ですから x を実数に保ったまま t を虚数時間方向に動かしても構いません. ただし途中で矛盾がないようにしなければなりません. そうすると,x_i からスタートし x_A を通って x_B で引き返し, x_A を通って x_f へいくことができます. 周期を T_0 としておくと 2 番目のケースに比べて実方向に T_0 だけ加えたところも解になります. このようにすると無限に鞍点が存在します (図 7) . もともとあった積分は 0 から実軸方向に ∞ まで積分するものなのでこれを曲げてやります. 鞍点は一方向には極大ですが別の方向には極小になっています. 変形した時に経路に沿って鞍点が極大になっていないと近似はうまくいきません. 鞍点での極大, 極小方向は図のようになっていることがわかります. 直角に曲がる点だけは微妙で, 純粋に鞍点を通るのに比べて半分の寄与しかありません. こうして G_R を計算してやると答は正しい答と一致します. しかし問題がこの例により明らかとなります. 調和振動子なので被積分関数を直接計算してやって何が起こっているか見ることができ, 運動方程式を満たせという余分な条件が本当にいいのかどうか調べ

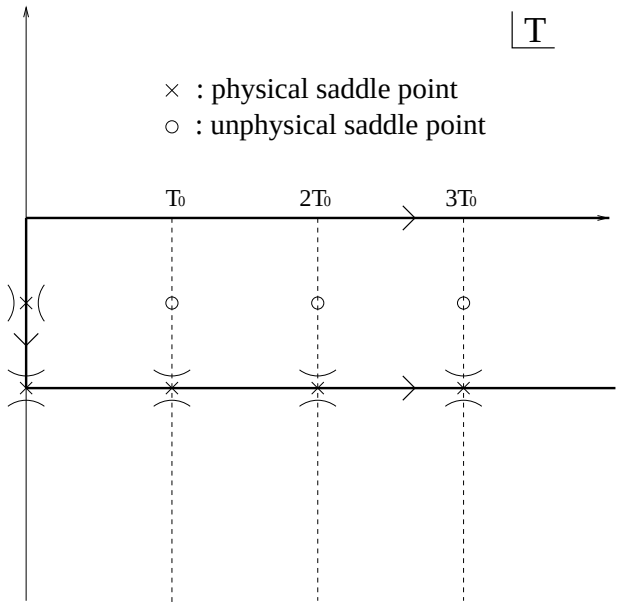


図 7:

ることができます. すると, 問題が出てきます. それは今の方法では別の鞍点が存在するということです. これは今の方法では到底理解できないものです. 複素解を上のように構成してやってできるものを物理的鞍点 (physical saddle point) と呼び複素解で見つからないものを非物理的鞍点 (unphysical saddle point) と呼びます.

まとめ

- 物理的鞍点の寄与についてすべてこれをたしあげると正しい答が出る. (正しい答という意味は励起状態も含まれているということ)
- fake instability はない. 実際に始めの 2 つの例について計算してやると鞍点のあり方が全く違います.

問題点

- 非物理的鞍点はどうなっているのか.
- 物理的鞍点でも実際には格子上に分布してしまうことがあり (例えば 2 重井戸型など), 積分の経路をどう曲げたら良いのかわからない (図 8).

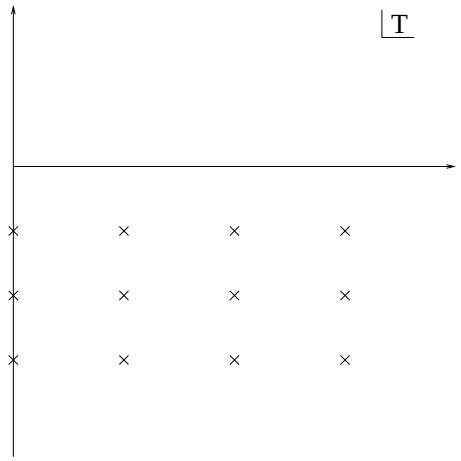


図 8:

上で言ったことは物理的鞍点を全て足し上げるだけで経路をどう曲げるかは言っていません. しかし, 重み, 位相を入れるためにはどう経路が鞍点を通っているかわからなければなりません. それについては適当な仮定をおいて計算しています. 正しい答が出るからいいのですが正当化されていません. これらの大きな問題はありますが, ある程度は解決できます. 経路をどう曲げたらよいかわからないけれど重みや位相を採り入れて非物理的鞍点を無視するという計算をする手法は解明されていて, WKB で波動関数を作ってやってそれから構成し直すんですが, その意味で正しい答が出ることは証明できます. ただし経路をどう曲げていいのかは全くわかりません.

これ以外の複素時間法はどうにも証明のしようがないです. 大抵の人はいい加減をやっています. 例えば, 遷移確率を計算する時に T を勝手に複素時間にしてしまいます. こういう計算がほとんどですが, これはおかしいです. 計算しているのは実時間であるところから, 別のところへ行く遷移確率なのに勝手に別の時間のところにいって実時間により T 進んだものと同一視しています. それに対して今までやってきたことが正当化されるのは遷移確率とかに時間が入っていないためです.resolvant の中には T の積分があったわけですがそれは積分であるから経路を曲げて複素数にとってもよいのです.

4　相互作用するインスタントン

ここでは次の章で話すバレー法が必要になる動機となった相互作用するインスタントンについて簡単に紹介します. 言葉どおりインスタントンの相互作用を取り入れているのですが, なぜその必要があるかを話す必要があります. まず普通のインスタントン計算では問題がおこる例をあげます. その中でも一番顕著なものは標準模型におけるバリオン (B) 数とレプトン (L) 数の破れです. トンネリングが起こるとアノマリーを通して B 数と L 数が非保存します. こういう過程のグリーン関数の計算を考えてみましょう. まずこの過程はクォーク q, 反クォーク $\bar{q}$ と反レプトン $\bar{l}$ によって

$$q + q \to 7\bar{q} + 3\bar{l}, \tag{52}$$

であることがトポロジー数とアノマリーの考察からわかっています. これに相当するグリーン関数は

$$G = \langle 1|\bar{q}^9\bar{l}^3|0\rangle \tag{53}$$

です. ここで $|0\rangle$, $|1\rangle$ は真空をラベルによって区別しています. つまり (53) は始状態 $|0\rangle$ からトンネリングによって終状態 $|1\rangle$ に遷移する状況を考えています. Ringwald と Espinosa はこれをインスタントンを使って計算しました. 外枠だけをいうとまずインスタントンを用意しそのバックグラウンドで (53) を計算します. この時真空が $|0\rangle$ から $|1\rangle$ に遷移し, それに伴ってインスタントンが 1 個あります. 今フェルミオンについて考えてみましょう. フェルミオンはグラスマン数で, その積分は

$$\begin{aligned} \int d\psi_0 \ 1 &= 0 \\ \int d\psi_0 \ \psi_0 &= 1 \end{aligned} \tag{54}$$

で表されます. するとグリーン関数を評価する際, 積分するモード数と同じものを含んでいる被積分関数のみが残ります. 今の場合インスタントン・バックグラウンドでフェルミオンの固有モードを調べなければなりません. そこでディラック演算子 D の固有

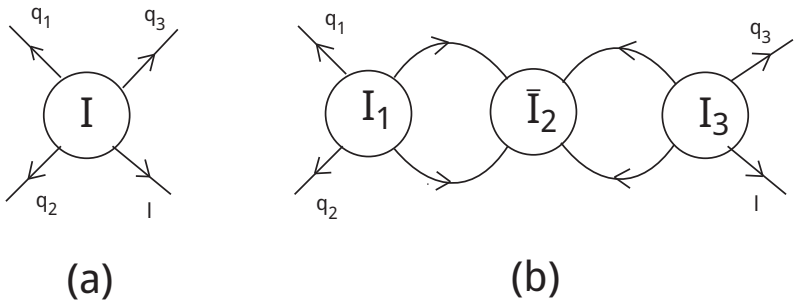


図 9: 過程 $\bar{q_1}\bar{q_2} \to q_3 l$ のインスタントン展開のダイヤグラム

関数 $q_n, \bar{q}_n$ によって経路積分を評価してやります.

$$D\bar{q}_n = \lambda_n \bar{q}_n \tag{55}$$

$n = 0, 1, 2...$ しかし指数定理によれば反クォーク, 反レプトンについては反インスタントンの下でゼロモードがそれぞれ存在します. すると (55) によって $D\bar{q}_0 = 0$ となり, フェルミオンの作用は $S_F = qD\bar{q}$ と表されるので作用の中に q_0 が登場しません. つまり $G = \langle 1|0\rangle$ はゼロモードのせいで 0 になってしまいます. そこで 0 でないグリーン関数は (53) であるといえます. もちろんアノマリーとトポロジー数の変化が関係しています. 実際これを評価するにはインスタントンがあり, そこから遠いところでクォークやレプトンを作ったり消したりすることを考えてやります. ここで効いてくるのは先ほど述べたようにゼロモードだけが効いてきます. ゼロモードはインスタントンの位置 x_I に依存しているので一般に

$$\bar{q}_0 = AS_F(x - x_I) \tag{56}$$

と書けます.A はテンソルやインスタントンの構造を含んでいる数です.

このグラフは普通のファインマングラフとは違い, トンネル効果のある場合の粒子生成のグラフです (図 9 (a)). このグラフが与える散乱断面積を考えてみます. ここでは次元を数えることで非常に簡単に高エネルギーでの振舞いを見ることができます. ファインマングラフではないけれど, 上図を有効頂点と解釈してやります. これが作る行列要素は 相互作用 $g_I \bar{q}^9 \bar{l}^3$ を考え, これからファインマングラフを作って散乱断面積を計算

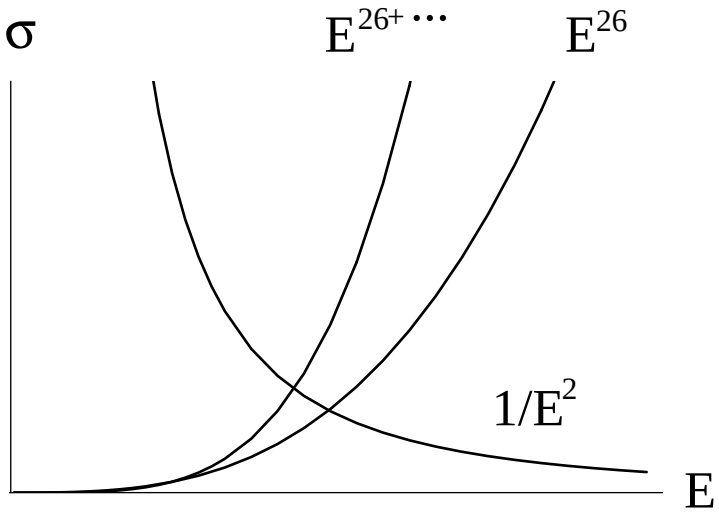


図 10: ユニタリー境界

すれば良い. ここで g_I は有効頂点の結合定数で,A の積, インスタントン作用からの寄与やヤコビアンなどで書けています. つまり散乱断面積は g_I の 2 乗に比例することがわかります. 今ポテンシャルの高さは TeV レベルでそのスケールでトンネル効果が起こるのでそこではクォークやレプトンの質量を無視できます. この時散乱断面積 σ はエネルギー E のマイナス 2 乗だから次元より

$$\sigma \sim g_I^2 E^{26} \tag{57}$$

となります.* つまりエネルギーを上げていくと散乱断面積が増大し, 実験でこの現象を観測できるのではないか, と考えられていました. しかしここには大変な問題があります. このように散乱断面積が増大すると確率の保存則を満たさなくなるのです. 事象の起こる確率の和は 1 であり, それを散乱断面積に適用すると $1/E^2$ のユニタリー境界があります. つまり (57) のような散乱断面積は確率の保存則を破ってしまうのです (図 10). この問題は BL 崩壊特有ではなく, 4-フェルミ理論でも起こります. その原因は 4-フェルミ理論が本当の理論ではなく湯川結合の理論であったからでした. そこで今の場

* ラグランジアンの次元が E^4 であること, つまり $g_I \bar{q}^9 \bar{l}^3$ が E^4 であること, あと $\bar{q}, \bar{l}$ の次元が $E^{3/2}$ であることから (57) が出ます. 又 W ボソン,Z ボソンやヒッグス粒子の寄与を考えると (57) の右辺の巾数は増えます.

合相互作用するインスタントンを考えてみます. 普通のファインマングラフの頂点ならループグラフが存在し, そこからの寄与があります. 又ハミルトニアンはエルミートなので確率の保存則を満たします. つまりインスタントン・バックグラウンドにループグラフを登場させることによってこの問題を解決できると予想できます (図 9 (b)). 我々はループがインスタントンの相互作用から出てくることを発見しました. 一般にはインスタントンは 1 つではなく, 他のインスタントンや反インスタントンがあり, 希ガス近似を行ないます. しかしインスタントンと反インスタントンが近づくとこの近似はよくなくなり, 作用は $S = 2S_I$ に加え相互作用項が加わります. それはインスタントンと反インスタントンの相対位置 $x_I - x_{\bar{I}}$ の関数で表されます. 今相互作用項を評価してみると, インスタントンと反インスタントンが無限に離れるとこの項は 0 になります. 有限だが距離が非常に離れているときは近似によって相互作用は 1 粒子交換型であることがいえます. つまり存在する全ての物理的モード (ヒッグス,W ボソン, フェルミオンなど) がそれぞれ 1 個ずつインスタントンと反インスタントンの間を飛ぶというものです. ただしこれは遠距離近似であり, 近距離では近似がよくありません. これは核力の理論と同じで原子核が 2 つ離れていると 1 中間子だけを交換しますが, 近づいてくると 2 中間子を交換したり様々な項が出てくることからも想像できます. 実際インスタントンと反インスタントンの寄与を含んだグリーン関数を計算すると, この型の相互作用がループグラフに相当する寄与を与え, 確率の保存を保証するのです. しかしこれにも問題があります. 所詮くりこみ不可能な理論ですから紫外発散の問題を含んでいます. これは近距離の問題, つまりインスタントンの内側の問題に関係しています. もともとこの近似は遠距離近似であり, そのままインスタントンの内側にそれを適用しようとすると当然問題がおこるわけです. そこでインスタントンの内側の問題 (近距離の問題) を真剣に考える必要があります.

簡単のためインスタントンと反インスタントンがそれぞれ 1 つある場合を考えます. インスタントンと反インスタントンの距離を R とすると, 作用は R に関して図 11 のような振舞いをします. R 以外の方向で作用はどうかというと作用の 2 階微分の固有

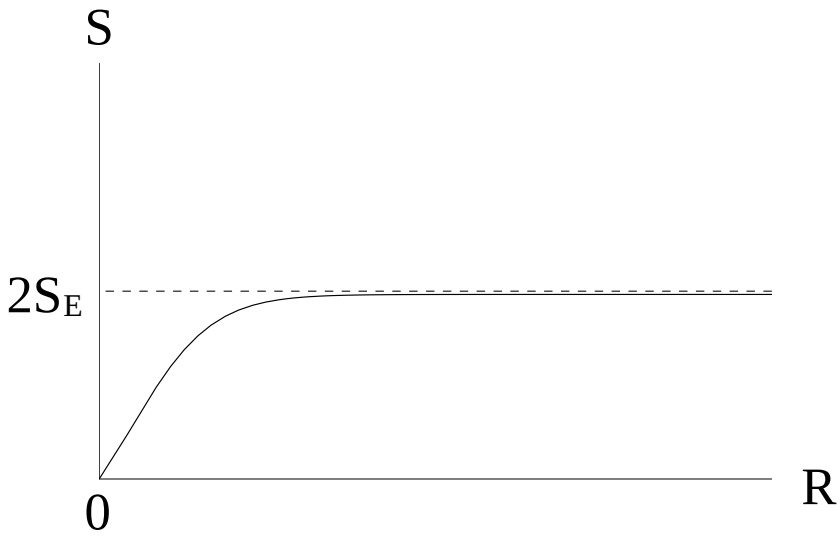


図 11: インスタントン・反インスタントン対の作用

値は正なのでガウス近似を使うことができます. つまり図 12 の状況になっています.

これをバレーと呼びます. 先ほどの遠距離近似では R が大きい場合を扱っていて, その時 R の変化に対し作用はほんの少ししかずれません. 従ってバレーを考える必要はなく, そのほんの少しのずれを 1 粒子交換型の相互作用で評価していました. しかし R が小さい場合は R の変化に対し作用は大きく変わるのでバレーを定義し,R についての積分を評価してやる必要があります. つぎの章ではこのバレーをいかに経路積分に取り込むかを考えます.

5 バレー法

この章では固有バレー法について記します. 最も一般的な枠組で固有バレー法を記述するため, ここではボゾン自由度を全て離散化し ϕ_i で記します. 添字 i は量子力学における座標ラベル, 粒子の種類, ベクトルとテンソルの添字といくつかの内部量子数を表しています. 連続変数への移行は自明であり, 添字の和は積分に, 微分は汎関数微分に

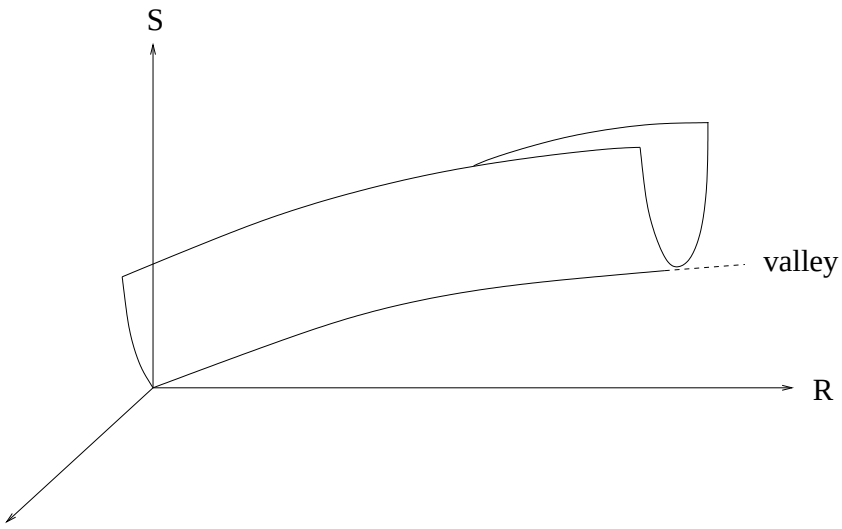


図 12: バレー

すればよい. ボゾンの作用はこれらの変数を使って $S = S(\phi_i)$ と書かれ, 運動方程式は $\partial_i S = 0$ と書かれる. ここで $\partial_i \equiv \partial/\partial\phi_i$ です. 我々は関数空間の計量は自明であると仮定します.

今固有バレー方程式を次のものとして定義します.

$$D_{ij}\partial_j S = \lambda \partial_i S. \tag{58}$$

ここで添字の繰り返しは和を意味し,$D_{ij} \equiv \partial_i \partial_j S$ です. 固有バレー方程式 (58) はパラメーター λ を持っているので, それは $\phi-$ 空間における 1 次元トラジェクトリを定義しています. (ここでは $\lambda \neq 0$ を仮定するけれど,$\lambda = 0$ の場合でも扱うことができる.) 運動方程式の解は明らかに 固有バレー方程式を満たします. よってこの意味で 固有バレー方程式は運動方程式の拡張である, と言えます.

固有バレー方程式によるとパラメーター λ は行列 D_{ij} の固有値の 1 つであります. よって 固有バレー方程式は以下のことを要求することになります.

勾配ベクトルは固有値 λ を持った D_{ij} の固有ベクトルである. (59)

ここで D_{ij} についてどの固有値を選ぶべきかという疑問がおこります. 後で示すように固有バレー法はガウス積分から λ を取り除き, その代わりにバレートラジェクトリパ

ラメーター を導入することによって λ を collective coordinate に変更します. つまり疑問はどの固有値を collective coordinate に置き換えるか, であり, これは実は考えている理論によることが分かっています. ここでは我々は一般的な方針を簡単に述べるにとどめます. 方針はガウス積分近似の悪い最小の固有値 λ を選ぶこと, つまり擬ゼロモード又は負の固有値を選ぶことです.

一方固有バレー方程式は変分法の枠組において解釈されることができます. 今 (58) を次のように書き換え

$$\partial_i(\frac{1}{2}(\partial_j S)^2 - \lambda S) = 0. \tag{60}$$

これは作用が一定であるという条件の下で勾配ベクトルの大きさの極値が選ばれる, と解釈できます. つまり未定乗数として λ を選び, 新たに $(\partial_j \acute{S})^2$ を

$$(\partial_j \acute{S})^2 \equiv \frac{1}{2}(\partial_j S)^2 - \lambda(S - c) \tag{61}$$

と定義して ϕ_i と λ で変分することによって固有バレー方程式を得ることができます. 我々は作用が一定の各関数面上でそういった点を見つけることができ, 固有バレー方程式が関数空間上に 1 つの線, バレーラインを作り出すことを見ます. さらに我々は勾配ベクトルの大きさが極小であるものを選ぶことにします. つまりバレーラインとは

$$\text{勾配ベクトルの勾配が最も緩やかな関数空間上の線} \tag{62}$$

です (図 13).

ここで重要なのはバレーラインの直観的な解釈ではなく, バレーラインを使った汎関数積分の適切な評価であります. それは以下のようにして行なわれます. まずパラメーターとして α を導入し, バレーラインをパラメトライズします. さらに (58) を満たす解を $\phi(\alpha)$ と記し, α 上の積分に関しては正確に行ない, 他の方向に対しては 1 ループ近似を行ないます. そのために我々は積分変数を ϕ_i から α と ϕ_i の部分空間に変更する必要があります. この変更は以下の議論によって唯一であることが分かります. まず始めに作用を揺らぎ $\tilde{\phi} = \phi - \phi(\alpha)$ の項で展開し,

$$S(\phi) = S(\phi(\alpha)) + \partial_i S(\phi(\alpha))\tilde{\phi}_i + \frac{1}{2}D_{ij}(\phi(\alpha))\tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_j + \cdots. \tag{63}$$

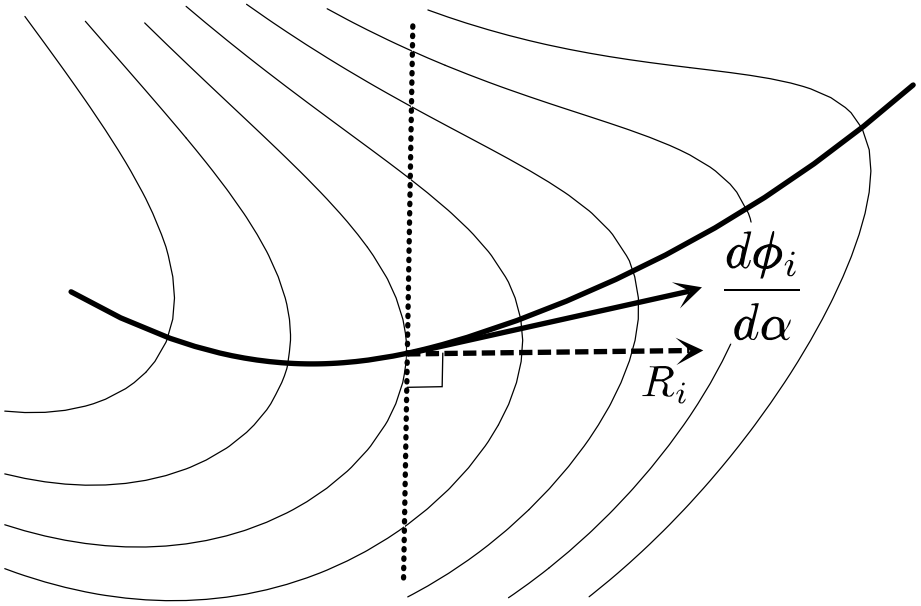


図 13: 2 次元モデルの汎関数空間. 薄線は作用が一定の等高線. 太線はバレーライン. 勾配ベクトル R_i と接ベクトル $d\phi_i/d\alpha$ はそれぞれ破線と太線の矢印. 垂直な点線は 1 ループ積分近似を行なう部分空間.

ここで $\phi(\alpha)$ は運動方程式の解ではないので右辺第 2 項は 0 ではなく, この場合 h 展開をループ展開として使えません. これをさけるためある部分空間を選ぶことによりこの項を消すことができます. これを行なうのに最も便利なのが Fadeev-Popov の方法を使うことです. 我々は FP 行列式 $\Delta(\phi(\alpha))$ を単位勾配ベクトル $R_i(\alpha) \equiv \partial_i S/\sqrt{(\partial S)^2}$ を用いて以下の式により定義します.

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(\phi(\alpha)) &\equiv \int d\alpha \delta(\tilde{\phi_i}(\alpha) R_i(\alpha)) \\
&= \int d(\tilde{\phi_i} R_i) \left| \left(\frac{\partial \tilde{\phi_i} R_i}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right| \delta(\tilde{\phi_i} R_i) \\
&= \left| \left(\frac{\partial \tilde{\phi_i} R_i}{\partial \alpha} \right)^{-1} \right|_{\tilde{\phi_i} R_i = 0} . \qquad (64)
\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi(\alpha)) &= \left| \left(\frac{\partial \tilde{\phi_i} R_i}{\partial \alpha} \right) \right|_{\tilde{\phi_i} R_i = 0} \\
&= \left| \frac{\partial(\phi_i - \phi_i(\alpha))}{\partial \alpha} R_i + \tilde{\phi_i} \frac{\partial \phi_j(\alpha)}{\partial \alpha} \partial_j R_i \right|_{\tilde{\phi_i} R_i = 0}
\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{\partial \phi_i(\alpha)}{\partial \alpha} \{R_i - \partial_i R_j \tilde{\phi}_j\} \right|_{\tilde{\phi}_i R_i = 0} . \tag{65}$$

それでは真空から真空への遷移振幅

$$Z = N \int \prod_j \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-S} \tag{66}$$

をバレートラジェクトリを使って評価してみましょう.N は規格化因子です. 今 (66) に

$$\int d\alpha \delta(\tilde{\phi}_i R_i) \Delta(\phi(\alpha)) = 1 \tag{67}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} Z &= N \int d\alpha \int \prod_j \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \, \delta(\tilde{\phi}_i R_i) \left| \frac{\partial \phi_i(\alpha)}{\partial \alpha} R_i(\alpha) \right| \, e^{-S(\phi)} \\ &= N \int d\alpha \int \prod_j \frac{d\tilde{\phi}_j}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, e^{ik\tilde{\phi}_l R_l} \left| \frac{\partial \phi_i(\alpha)}{\partial \alpha} R_i(\alpha) \right| \, e^{-S(\phi)} \\ &= N \int d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\det D} \exp\left(-\frac{1}{2} R D^{-1} R k^2 \right) \left| \frac{\partial \phi_i(\alpha)}{\partial \alpha} R_i(\alpha) \right| \, e^{-S(\phi(\alpha))} \\ &= N \int d\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi (R D^{-1} R) \det D}} \left| \frac{\partial \phi_i(\alpha)}{\partial \alpha} R_i(\alpha) \right| \, e^{-S(\phi(\alpha))} . \end{aligned} \tag{68}$$

固有バレー方程式 (58) から $D^{-1}R = R/\lambda$ が言え, また R は規格化されているので

$$(R D^{-1} R) \det D = \frac{1}{\lambda} \det D \equiv \det \acute{D} \tag{69}$$

つまり我々は 1 ループの近似において次の表式を得ます.

$$Z = N \int d\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \acute{D}}} \left| \frac{\partial \phi_i(\alpha)}{\partial \alpha} R_i(\alpha) \right| \, e^{-S(\phi(\alpha))} . \tag{70}$$

今までの議論から我々は固有バレー法が固有値 λ を collective coordinate α に置き換えたのを見ました. 我々は様々な物理的状況において負, 0 又は正だが微小といった固有値の問題に出くわしますが, その場合ガウス近似を使うことができません. しかし固有バレー法は望ましくない固有値を collective coordinate に変えることによりこの状況を救っています.

ここで非摂動効果を扱う他の方法を簡単に紹介し, 固有バレー法と比較してみましょう. まずストリームライン法と呼ばれるバレー法を紹介します. バレー方程式は次のものとして与えられます.

$$\frac{d\phi_i}{d\alpha} = f(\alpha)\partial_i S \tag{71}$$

ここで $f(\alpha)$ は α の任意の関数です. この方程式はバレーラインに沿った接ベクトル $d\phi_i/d\alpha$ と勾配ベクトル $\partial_i S$ が平行であることを要求しています. このバレーライン座標 α は以前と同様で FP の方法によって導入されます. しかしこのストリームライン法には固有バレー法では知られていない数多くの困難が存在します. 最も深刻なのがガウス近似を行なう部分空間が D_{ij} の固有値に全く関係ないということです. つまり (69) において, 望ましくない固有値を除いた行列式になっているという保証がない. もう 1 つの問題は (71) は流れを記述する方程式であって, 手によって関数空間上の点を指定してはじめてバレーラインが書けるということです. よって方程式 (71) はそれ自身で解を定義することができず, バレートラジェクトリを構成するのが非常に困難となります.

次に厳密解の分かっている 2 次元モデルにこの固有バレー法を適用し, 実際よい近似を与えることを見てみます. 作用

$$S(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{g^2}\left((\phi_1^2 + \phi_2)^2 + 5(\phi_1^2 - \phi_2)^2\right) \tag{72}$$

の下で普通の Green 関数に相当する量

$$O(p,q) = \int_0^\infty d\phi_1 \int_{-\infty}^\infty d\phi_2 \ \phi_1^p \phi_2^q \ e^{-S(\phi_1,\phi_2)} \tag{73}$$

を厳密解, 固有バレー法及び拘束条件法[†] で計算してやります. 簡単に結果だけを示しますと, それは図 14, 表 1 です. 図 14 の点 a, b, c, d はそれぞれ $(p,q) = (2,2), (2,12), (12,2), (12,12)$ に対応しています. 鞍点が固有バレートラジェクトリ付近にあることから固有バレー法 が拘束条件法よりもよい近似を与えることが直観的に分かります. ただし点 b, c はバレーラインから離れていて数値的答えはずれています. それは p, q のうち片方

[†] 拘束条件法の説明は後で行ないます.

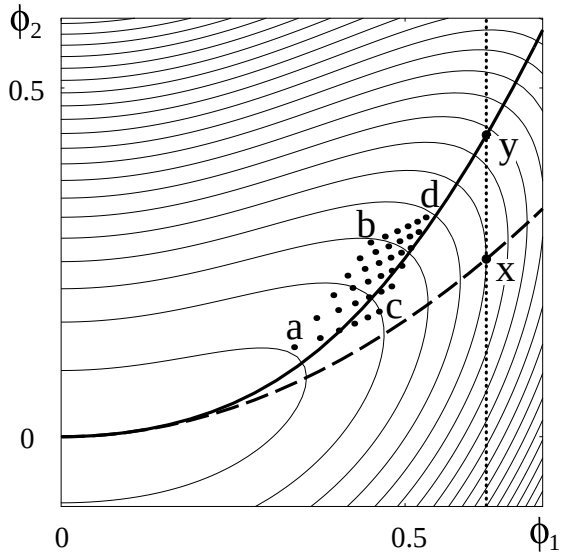


図 14: 作用 (72) のバレーインスタントンと拘束インスタントン. 線はバレーインスタントン, 破線は拘束インスタントン. 点は $O(p,q)$ の積分の鞍点の位置を記しています. 点線は拘束インスタントンの制限 $\phi_1 = \text{const}$ を記していて, 2 つの方法が全く違う点 X と Y を取り込むことを記しています.

が非常に大きい時です. つまり物理量を計算する時, 外線に入ってくる粒子が多い場合はこの近似法はよくなく, 別の近似法が必要となります.

次にバレー法の応用について述べたいと思います. ここではバウンスの励起状態の問題について考えます. バウンス解が系の崩壊確率を計算することに用いられることは 2 章で述べました. しかし励起状態, つまりエネルギーが高くなるとインスタントンと同様で近距離の問題が生じ, バレーを導入しなければなりません. このバレーを用いてバレーバブル (induced nucleation)[‡] の問題について考えます. 今作用が

$$S = \int d^4x \ \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 + V(\phi)\right], \quad V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1-\phi)^2 - \epsilon(4\phi^3 - 3\phi^4) \qquad (74)$$

で与えられる非対称井戸型ポテンシャルを持つモデルを考えます. このモデルのバレー方程式の解は図 16 で与えられます. バウンスの場合は collective coordinate が大きい値をとっても作用はインスタントンのように一定にはなりません. なぜならバウンス

[‡] エネルギーの高いにせの真空の世界が高エネルギーでのトンネル効果によってエネルギーの低い真の真空に遷移し, にせの真空の世界の中のある点に真の真空の核ができる (induced nucleation). その核の領域が泡のように全体に広がっていく (バレーバブル), という画像を考えています.

$p\backslash q$	2	4	6	8	10	12
2	0.827	0.679	0.585	0.520	0.474	0.439
	0.545	0.248	0.110	0.049	0.022	0.010
4	0.997	0.870	0.767	0.689	0.629	0.581
	0.667	0.324	0.149	0.068	0.030	0.014
6	1.061	0.986	0.900	0.826	0.764	0.712
	0.737	0.384	0.185	0.086	0.040	0.018
8	1.064	1.046	0.991	0.931	0.876	0.826
	0.783	0.432	0.218	0.105	0.050	0.023
10	1.029	1.063	1.041	1.003	0.960	0.918
	0.815	0.473	0.248	0.123	0.060	0.028
12	0.971	1.046	1.058	1.043	1.017	0.985
	0.839	0.508	0.276	0.141	0.070	0.034

表 1: $O(p,q)$ の値に対する固有バレー法 (上行) と拘束条件法 (下行) の厳密解 $(g=0.2)$ との比.

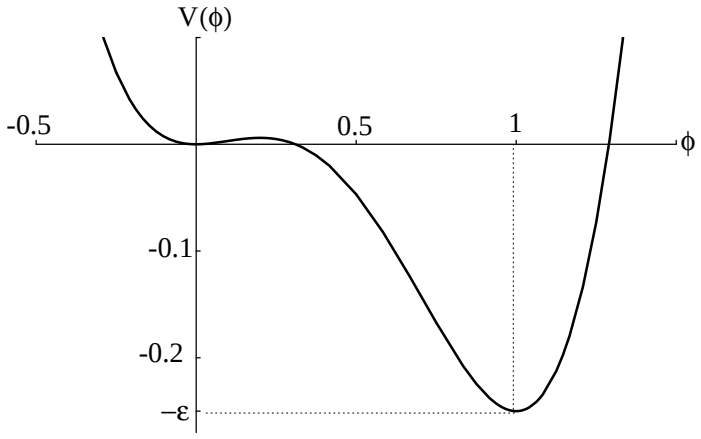


図 15: $\epsilon = 0.25$ の時のポテンシャル (74)

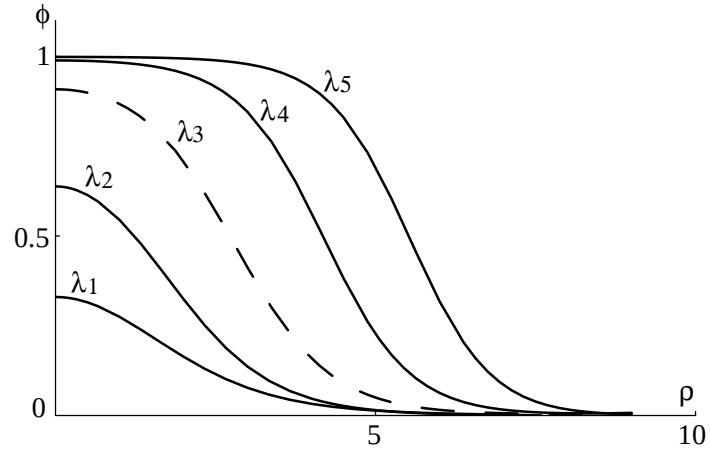


図 16: 固有バレー方程式の解.それぞれの線の固有値は $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = -0.2$, $\lambda_3 = -0.34$, $\lambda_4 = -0.25$, $\lambda_5 = -0.2$. 破線はバウンス解を記しています.

の collective coordinate は泡に覆われた領域, エネルギーの低い本当の真空にいる領域と泡に覆われていない領域, エネルギーの高いにせの真空にいる領域との境目を意味しているので collective coordinate の値が大きいと本当の真空にいる領域が広くなり, 全体のエネルギーと作用の値は小さくなるのです. バレーライン上の作用とエネルギーは図 17, 18 に与えています.

次にインスタントン解のない場合つまり有限半径のインスタントン解がない場合について簡単に述べたいと思います. そういうモデルは 2 つあり, 1 つはゲージヒッグス系でもう 1 つはスカラー場の理論でポテンシャルが不安定なものです. ここではゲージヒッグス系についてなぜ有限半径のインスタントン解がないかを説明します. ユークリディアン作用はゲージ場の運動項, フェルミオンの運動項とポテンシャル項から成り,

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{4} F^2 + |D\phi|^2 + V(\phi) \right) \tag{75}$$

と書けます. この系でインスタントン的配位を作ってやり, 有限のユークリディアン作用を取ってきます. そこで各項の積分値を $S_1,\ S_2,\ S_3$ とします. ユークリディアンなのでこれらは正定値です. 今この配位に操作を加え, 新しい配位を作ってやります. その時

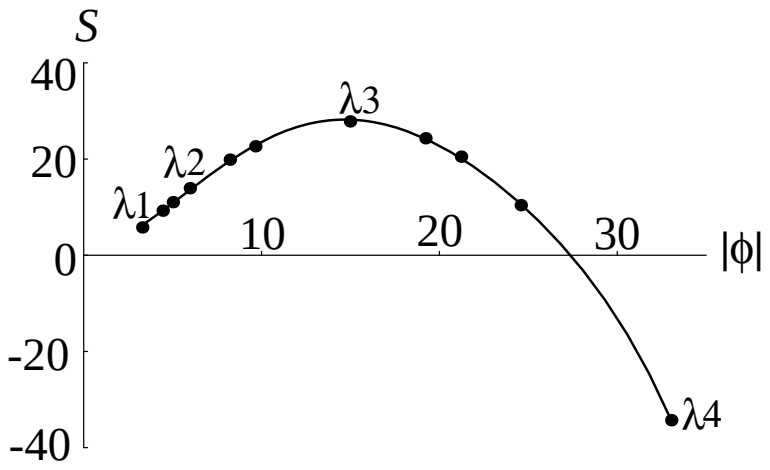


図 17: $|\phi|$ の大きさを collective coordinate にとった時の固有バレー方程式の解の作用. 固有値 $\lambda_{1\sim4}$ は図 16 と対応しています. バウンス解は作用の極値であること, 及び負の固有値を持つ理由でバレーライン上に含まれていることから λ_3 がバウンス解に相当していることが分かります.

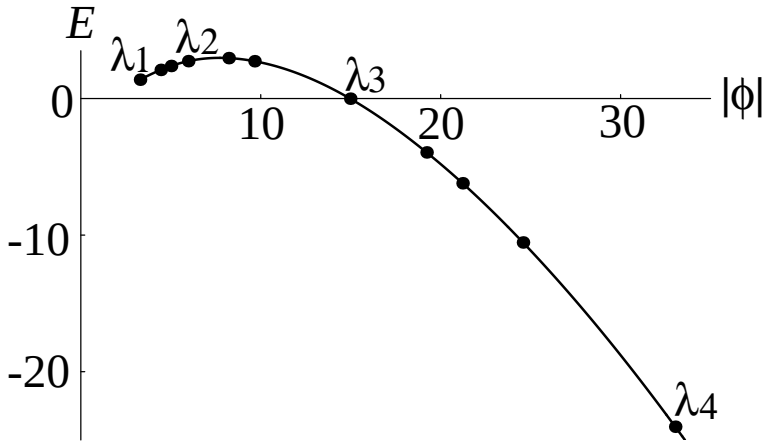


図 18: 泡のエネルギー

場を

$$(A(x),\ \phi(x)) \to \left(\tilde{A}(x) = \frac{1}{a}A(\frac{x}{a}),\ \tilde{\phi}(x) = \phi(\frac{x}{a})\right) \tag{76}$$

と変換します. 新しい配位を記述する場を $\tilde{A}(x),\ \tilde{\phi}(x)$ とし, それで書かれる作用を $\tilde{S}$ とします.$\tilde{S}$ は $S_1,\ S_2,\ S_3$ で書き下せて,

$$\tilde{S} = S_1 + a^2 S_2 + a^4 S_3 \tag{77}$$

と書かれます. 今 $S_1,\ S_2,\ S_3$ は正なので $\tilde{S}$ は a の単調増加関数で唯一解になれるのは $a = 0$ の時です. この議論から言えることは有限のユークリディアン作用においてある配位を持ってきて (76) のような変換をしてやると必ずその作用を小さくしてやることができる. だからもとの配位は全体解にはなりえないのです. ここで a を減少させるということについて考えてみます.$A(x),\ \phi(x)$ はある領域で値を持っている. それに対し変換 (76) をしてやり a を減少させるということはこれらの場の値を持つ領域を小さくしていることになります. つまり今唯一解になれるのは $a = 0$ の時なので, 有限の大きさで有限の作用を持っているものは解にはならないことを上の簡単な議論は示しています. この問題に対し $\mathrm{I.Affleck}$ は拘束インスタントンの考えを導入することでこの 0 半径インスタントンを持つモデルの配位を計算しました. 半径 0 の点が極値なので大きく寄与することはわかりますが, 汎関数積分ではその周りの領域からの寄与も考慮する必要があります. だから半径 0 の点のみにこだわらず, 部分空間を 1 つ設定し, その中で積分を評価してやります. つまりその部分空間の中で極値を取ってその周りでガウス近似を行ない, 部分空間を連続的に変化させ, それぞれ評価してやるのです. つまり拘束条件法 とはある制限 (部分空間) の下で作用の極値をとり, それらの点の集合をバレーラインとみなすことによって経路積分を評価するというものです. ただしこの方法には経路積分に対する効果的な評価を与えるいくつかの制限の中でどれを選ぶべきかという問題があります.

最後に拘束条件法と固有バレー法の関係について簡単に述べてこの章を終りにしま

す. 固有バレー方程式 (60) を λ で割ることによってその式を制限

$$S = -\frac{1}{2\lambda}(\partial_i S)^2 \tag{78}$$

の下で作用の極値をとる, と解釈できます. つまり固有バレー法は特定な制限 (78) を持つ拘束条件法と解釈できます. しかし幾何的な特性やガウス積分に関する特徴といったものは固有バレー法特有のものであり, ここでは固有バレー法と拘束条件法を違った方法とみなします.

6 摂動論の漸近的振舞いとトンネル効果

6.1 摂動論と Borel 和.

最後に従来の方法では計算出来なかった問題にバレー法を適用することを考えます. 導き出した結果の妥当性を数値計算で検討したいのでここでは量子力学について説明します.

まず問題点をはっきりさせるために摂動論について話を始めます.

摂動論は場の理論, 量子力学を問わず物事に定量的評価を与える数少ない方法の一つですが, 非常に曖昧な点も有ります. 低次の計算結果はそれなりの答を出しますが, そもそも摂動論の「本当の正体」は何か？ について考え始めると数多くの問題が内在していることに気付きます. その一つは「摂動論の与える級数は漸近級数である」という事実に基づくものです.

何か物理量, 例えばそれを Z として, それを結合定数の巾で展開して考えるのが摂動論でした. 大抵の場合, ヤン・ミルズ理論でもそうですが, 次のように偶数巾で展開されます:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, g^{2n}. \tag{79}$$

計算したいのはこの係数 c_n であって, 場の理論であればファインマン・ダイアグラムを用いて計算します. さてこの級数の係数 c_n が n が無限大に行く時にどう振る舞うのかを考えてみます. 低次の項を幾つかとって後の項は捨てる, ということをするのなら

この級数は収束していて欲しいのですが, 一般にはこの摂動級数は普通の意味では収束しません. 良く起こるのは次の様な場合です:

$$c_n \sim (-1)^n\, n!\ \ (n \to \infty). \tag{80}$$

上の評価を示す方法は幾つかあるのですが, 十数年前に J.Zinn-Justin や L.N.Lipatov という人達は経路積分を用いて導きました. 詳細には立ち入りませんが, 彼らは鞍点部法を用いた上で評価しました. また (80) のように振舞う理論が非常に多数あることも知られています.

この様な発散する級数をどう取り扱うべきかという問題に対しては総和法を用いるというアイディアがあります. その一つが Borel 総和法です. これをまず説明します. 最初に Z を次のように書き直します:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, g^{2n}\, \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} dt\, t^n\, e^{-t}. \tag{81}$$

これは公式

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt\, t^{z-1}\, e^{-t} \tag{82}$$

と, $\Gamma(n+1) = n!$ を用いて得られる

$$1 = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} dt\, t^n\, e^{-t} \tag{83}$$

を (79) に掛けたものです. 次に, t 積分と, n に関する和の順序を形式的に入れ替えます. つまり, Z に対して次の $\tilde{Z}$ を対応させます:

$$\tilde{Z} = \int_0^{\infty} dt \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\, (t\, g^2)^n\, e^{-t}. \tag{84}$$

さて無限和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\, (t\, g^2)^n \tag{85}$$

が収束し和が定まるとします. この和を $f(t\, g^2)$ と書きあらわすと, t 積分の後に $\tilde{Z}$ が定まります. もし元の Z が収束する級数であれば, Z は 1 をかけて積分の順序を入れ替えただけなので,

$$Z = \tilde{Z} \tag{86}$$

が成り立ちます. 従ってこの場合は和を別の方法で取ったに過ぎないのですが, Z が収束しなくても $\tilde{Z}$ が存在することもあります; この $\tilde{Z}$ を Z の Borel 和と呼びます. 以上のことは発散する級数に「和」の定義を与えていることになります. 漸近級数に関する数学関係の本を見ると Borel 和と元の級数との関係, また Borel 総和可能な級数のもつ性質等が記されていますが今は省略します.

具体例を見てみます. 係数が完全に

$$c_n = (-1)^n\, n! \tag{87}$$

である場合を考えます. この時 Z は収束していません. さて $\tilde{Z}$ を計算します. まず $f(t\, g^2)$ は

$$\begin{aligned} f(t\, g^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n!}{n!}\, (t\, g^2)^n \\ &= \frac{1}{1 + t\, g^2} \end{aligned} \tag{88}$$

となるので $\tilde{Z}$ は有限な値になります. 従って, Z は存在しませんが $\tilde{Z}$ は存在します. 以上のことをもう少し精密にすれば n が非常に大きい時に (80) のように振舞う c_n に対しても $\tilde{Z}$ が存在することが示せます.

つまりもし摂動級数の係数が (80) と振舞えばその摂動級数自身は定義できませんが, Borel 和は存在します. この時はその Borel 和が本当の答えではないかと考えられます. それはある程度の理論でも直接見ることもできます.

さて問題は Borel 和が定義できない場合です. 今は (87) を考えていたのですが次に

$$c_n = n! \tag{89}$$

を考えます. 先程と同じ様に $f(t\, g^2)$ を計算すると,

$$f(t\, g^2) = \frac{1}{1 - t\, g^2} \tag{90}$$

となります. この $f(t\, g^2)$ の特異点は $t = 1/g^2$ にあり (88) と符号が反対の位置に特異点を持ちます. これより Borel 和を取る際の積分路である t の正の実軸上に $f(t\, g^2)$ は極

を持ち, 従ってこの積分は未定になります. 未定の部分はこの極をどう避けるかということ依存します. 例えば極を上に避ければその部分に虚部が出ますし, 下に避け別の虚部が出てきます. この様な特異点を Borel singularity と呼びます. 従って摂動級数を取り扱うには n が大きいときの係数の振る舞いを求め, Borel singularity が現れるのかどうかということを調べなければなりません.

まとめると, もし摂動級数が最初の例の様に Borel singularity を持たず Borel 和が定義できるものであれば非常に良い性質を持っているということになります. 係数が無限次まで計算できれば和は定まりますし, 係数が有限個だけしか得られなくても Borel 総和可能であるということが分かっていれば Padé 近似を適用することで任意の精度で値を求めることができます. ですから係数が (80) の様に振舞う摂動級数であれば, それほど困りません. 例えばその例としては普通の量子力学系で, 不安定性とかトンネル効果がない系であれば非常に多くの場合そうなっていますし, 例えば QED でも多分そうであろうと考えられています. しかし

$$c_n \sim n! \ (n \to \infty) \tag{91}$$

となると非常に困ります. Borel singularity があるから, その点をどう避けるかによって一般には虚部が出てきてしまいます. 今計算しているものは実数ですから, 虚部が出てくるということは我々は何らかの意味で間違った計算をしたということになります.

その間違いは我々は求めたい量の 1 部分しか計算していなかったことに起因します. Borel singularity が現れるのは, 今まで議論してきたインスタントンがある系の様に, 非摂動的効果のある系に密接に関係していることがわかるのですが, 本当の答えは摂動級数と非摂動論的な効果を足して得られるはずです. 摂動級数の Borel 和は Borel singularity の効果で虚部を持つかもしれませんが, それは非摂動論的な寄与からくる虚部と丁度打ち消しあう. だから足したものは実数になる, という構造をしていると考えられます. ところでバレー法を用いるとこの非摂動論的な寄与を計算することができるので, これにより上で述べたことを確かめられるのではないか, と考えられます. その計算を実行したのが一番最近の話題です.

何故摂動級数の係数が $n!$ と振舞ったり, 別の場合だと $(-1)^n\, n!$ と振舞ったりするのかについても説明する予定でしたが時間の都合上省略します. この性質は asympton の理論を用いて説明することが出来ます. 先にも触れた十何年前に Zinn-Justin, Lipatov 等が計算した方法は, それなりに非常に面白いのですけど, その方法だと非摂動的効果との関連が非常にわかりにくくなってます. もうちょっと違う計算することによってこういう $n!$ 等はある特定の配位の効果として現れるということがわかります. こういう配位を我々は asympton と名付けました. そういう asympoton を定める方法, そして答えはどうなるか, に関しては我々の論文に書いてますのでそちらを参照してください.

その expert はここに座っている大河内君[§] ですから彼に聞いて下さい. ぼくが帰った後にでも... (笑) .

6.2 非対称 2 重井戸型ポテンシャル.

では, 具体的にモデルをあげて説明します.

一番分り易いのは, バウンスの問題の中で「 偽の不安定性 」の問題がありましたが, そこに戻ることです. (我々の出発点でもあります.)

偽の不安定性の問題では非対称 2 重井戸型ポテンシャルを考えました. これは一次元量子力学で二つある井戸のうち片方が下がってるポテンシャルです (図 19. 二つの底の差を ϵ とする.). これを普通に計算すると, バウンスになり, バウンスの周りでの摂動を計算するとエネルギーに虚部が出てきます. その意味で「 偽の不安定性 」だ, と言いました. これを解くためにバレー法を適用します. まず固有バレー法を用いてバレーを見て, この中でバウンスを含むバレーがどういう構造をしているかを考えます.

バウンスは, 前に説明した通り Euclid 化された運動方程式に従い同じエネルギーのところを行って戻る解です. まず, このバウンスをその点の一部に含むバレーを計算し

[§] 大河内郁雄, 当時京都大学人間・環境学研究科 D2. 彼の修士論文のタイトルは「トンネル効果と摂動論の漸近的振舞い」. 青山先生の講義を最前列で聞いていた. 彼の e-mail address は dai@phys.h.kyoto-u.ac.jp.

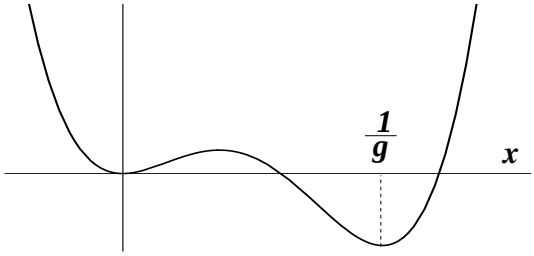


図 19: 非対称 2 重井戸型ポテンシャル. $x = 1/g$ でポテンシャルは最小値 $-\epsilon$ をとるものとする.

ます. これは先ほど高次元のバブルの場合に見たのと事実上同じ結果になります (今の場合 1 次元であることに注意). 作用を縦軸に, バレーラインを横軸に取ったものが図 20 です. 図 20 の原点は図 19 での $x = 0$ で制止した配位での作用の取る値を示し, 作用の極大値がバウンスに対応しています. バウンスは負の曲率, 負の固有値を持ってます.

バレーライン上で配位を描いてみると先ほどのバブルの図と非常に似た図が得られます. (図 21 参照.) その周りの点を直接数値計算で計算してみると, バレーラインの原点の方に行くと配位は小さくなりやがて何も起こらなくなります. バレーラインの先の方向に行くと配位は大きくなり, $x \sim 1/g$ に, つまりポテンシャルの本当の最小値にだんだん長く留まる様になります. 0 から出発して $1/g$ の近くまで行って, 暫くいて, それから戻ってくる, という様になります. バレーラインの先の方向に行くと $1/g$ から 0 に移る遷移の形は同じ様になります. 区間の長さに対応して $1/g$ の近くにどれだけの時間滞在するかが変わっていきます. つまりバブルの時に説明したように作用を小さく

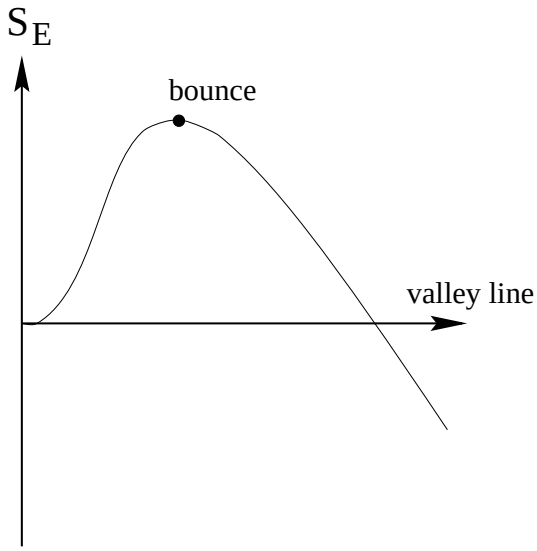


図 20: バレー上での作用. 黒丸がバウンスを表わす.

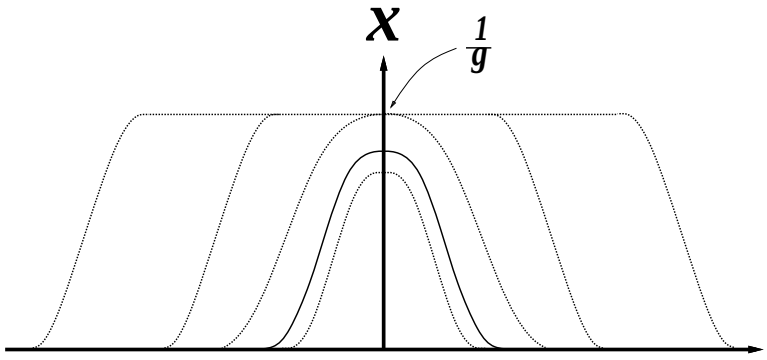


図 21: バレー上での配位. 実線がバウンス解を表わす.

するために本当の真空の方つまり, ポテンシャルの最小値, エネルギーが ϵ だけ下がっている所になるべく長く滞在するようになります. それを行っているのが, この配位です. 経路積分を実行する際, この場合だとバレーパラメータを用いてバレーラインの上で積分しますが, バレーラインの上で作用が小さくなると経路積分の指数の部分が大きくなるので, 積分に大きな寄与を与えます. これは物理的にも当然で, 境界条件として $x = 0$ から出発して $x = 0$ に戻るということを考えると, ずっと $x = 1/g$ に途中いるほうが得になります. ですから, そういう配位が非常に大きく寄与することになります. バレー法によってこの物理的な発想をうまく取入れることができました.

これを用いて考えている問題を評価してみたい, というのが目標です.

そのために $x \sim 1/g$ に長く留まる配位について詳しく調べます. 固有バレー方程式に λ という固有値がでてきました. その固有値を描きますと, バレーラインの先の方では固有値は 0 に近づきます. バウンスの点ではもちろん固有値は負になります. 以上は数値計算で分るのですが, ある程度解析的に示すこともできます.

どうするかというと, この様な配位においては遷移している領域は同じ形に見えることに注意します. 従って単に $x = 0$ を出発して $x = 1/g$ へ行く部分を取り出してそれがバレー方程式の解として作れるのではないか, と考えられます. そういうバウンスを含むバレーですが, バレーラインの大きくなる方向をかなり行ったところでは, 単に 0 から出発してその後漸近的に $1/g$ へ近づく, こういう図 22 の様な配位が存在して, それに逆向のものをくっつけたもので非常に大きなサイズまで広がったバレーの配位を近似できるのでは, と考えることができます.

これはインスタントンに似ていますが, 本当のインスタントン解ではありません. これはバレーの方程式に固有のものなのでバレーインスタントンと呼びます. 本当の意味でインスタントンでないのは, このポテンシャルにはインスタントン解は存在しないからです. 今問題にしているのは 0 から漸近的に $1/g$ へ近づくもので, これは運動方程式の解としては実現できないものです. ただし, バレー方程式の解としてなら可能です.

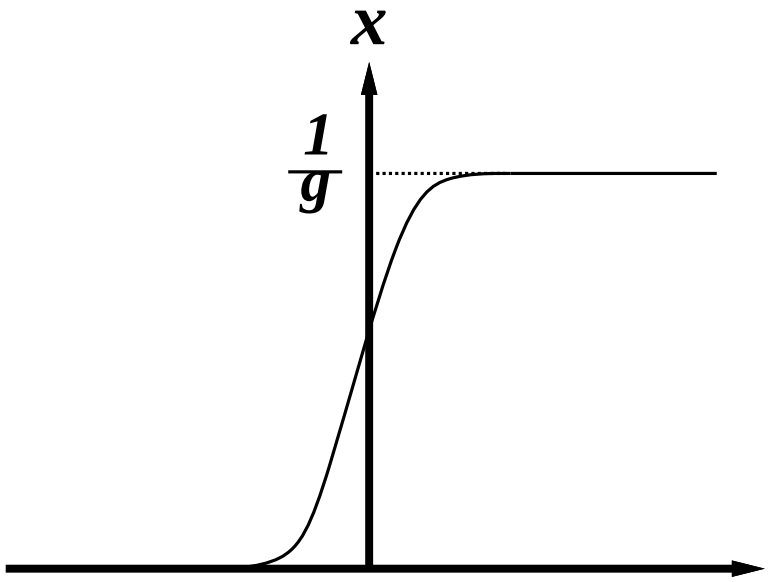


図 22: $x = 0$ から $x = 1/g$ に近づく配位.

実際に解いて構成することができますし, 数値的に求めることも可能です.

一つ強調したいのはこのバレーインスタントンは固有値 0 を持っていることです. インスタントンでも似た現象がありましたが, 今の場合の理由はその時のものとは全く異なります. インスタントンの時の零固有値の存在は, インスタントンが運動方程式の解であることの反映でした. 復習しますと, インスタントンの場合はその方程式

$$\frac{\delta S}{\delta x^I} = 0 \tag{92}$$

を τ 微分することによって得られる

$$\frac{\delta^2 S}{\delta x^I \delta x^I} \frac{dx^I}{d\tau} = 0 \tag{93}$$

から零固有値の存在がわかりました. これはあくまでも運動方程式が成り立っているからこそいえることです. ところがバレーインスタントンはこの様な運動方程式を満たさないので零固有値の存在は保証されていません. しかしこの驚くべき性質はバレー方程式を使うと証明することができます. まずバレー方程式

$$\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \frac{\partial S}{\partial \phi_j} = \lambda \frac{\partial S}{\partial \phi_i} \tag{94}$$

を補助場

$$F_j = \frac{\partial S}{\partial \phi_j} \tag{95}$$

を用いて書き直すと

$$\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i \partial \phi_j} F_j = \lambda F_i \tag{96}$$

が得られます. これを量子力学の場合に書き下してみると, ϕ に相当するのは x で, i や j に相当するのは τ ですから, (95) に対しては運動方程式

$$-\partial_\tau^2 x + V'(x) = F \tag{97}$$

が, (96) に対しては

$$\left(-\partial_\tau^2 + V''(x)\right) F = \lambda F \tag{98}$$

が得られます. なお, $F = 0$ とすると, (97) は本当の運動方程式ですし, (98) は $0 = 0$ で自明に満たされ, 運動方程式はバレー方程式に含まれることがわかります. 本当の運動方程式との違いである F がうまく働くと本当の運動方程式では実現できなかった解が存在することが (97) から想像できると思います. つまりバレーインスタントンは F の効果によって生まれます. 外力が働いていて, 高い方の山の頂上に押し上げるわけです. (運動方程式のポテンシャルは (図 19) と符号が逆転しています.) 外力でじっくり押し上げて頂上でとめる, その様な F が (98) を満たしながら存在すればいいわけです.

零固有値の存在を示すには, まず (97) を τ で微分した後 F を書けて積分します:

$$\int d\tau\, F \left(-\partial_\tau^2 x + V''\right) \partial_\tau x = \int F\, \partial_\tau F\, d\tau. \tag{99}$$

左辺は部分積分すると

$$\lambda \int d\tau\, F\, \partial_\tau x \tag{100}$$

となります. 部分積分する際に境界項が現れますが, これは 0 になります. F の働き方は, 最初に低い方の山にいたものが外力 F が働いて高い方の山に登り頂上でずっといたい, というものなので外力 F は最初と最後で 0 になるからです. 同様にして右辺は

$$\int d\tau \frac{d}{d\tau} \frac{1}{2} F^2 \tag{101}$$

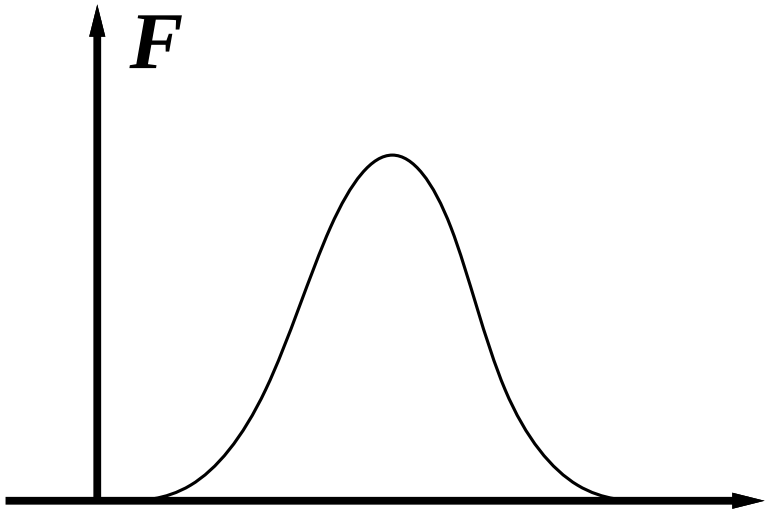


図 23: 補助場 F.

と書き直されます. 以上から

$$\lambda \int d\tau\, F\, \partial_\tau x = 0 \tag{102}$$

が導かれます. 従って λ が 0 か, あるいはこの積分が 0 になるのですが, この積分が零でないことを見ることは容易です. まずバレーインスタントンの形から x というのは τ の空間で 0 から $1/g$ に単調に増加しているものであることがわかります. さて F は外力として途中でうまく押し上げなければならないので同じように τ 空間で書くと途中で零でないが両端で零になるという形をしています (図 23). すると $\partial_\tau x$ は中心で零でない値を持つのでそれに F を掛けて積分したものは零と異なることがわかります.

以上より $\lambda = 0$ がわかります.

ですからこれは普通のインスタントンの場合と似て非なるもので, 重要なのは固有バレー方程式を用いて厳密に証明できる性質だということです.

ところで λ が零であることにこだわるのは, そうであれば非常に様々なことを導くことができるからです. 例えばバレーラインの周りでのガウス積分から出てくる行列式

$$\frac{1}{\sqrt{\Pi'_n\, \lambda_n}} \tag{103}$$

が閉じた形で書き下すことができます. これについての詳細は省略しますが, 用いる方法は基本的には Coleman の "The uses of instantons"[12] に書いてある方法を少し変更したものです. 普通のインスタントンとの類似の性質を利用して行列式が評価できます. また, ヤコビ行列式や Faddeev-Popov の行列式についても求めることができます. さらに, もちろん数値的にはバレーインスタントンの形はわかりますが, これをある程度解析的に確かめることもできます. 時間の関係上詳細は触れられないのですが, 基本的には (97) と (98) を解けばいいのです. $\lambda = 0$ が分かっているので解くべき方程式は

$$-\partial_\tau^2 x + V'(x) = F \tag{104}$$

$$\left(-\partial_\tau^2 + V''(x)\right) F = 0 \tag{105}$$

となります. これに対して解析的な計算を実行します. 厳密解を求めることはできないのですが, 摂動を考えることができます. そのためにまずポテンシャルを具体的に与えます. 2 重井戸型のポテンシャルは

$$V(x) = \frac{1}{2}\, x^2\, (1 - g\, x^2) \tag{106}$$

となるのですが, 今は片方の井戸が少し下がったものにしたいので (106) に x の一次式を付け加えます.

$$V(x) = \frac{1}{2}\, x^2\, (1 - g\, x^2) - \epsilon\, g\, x \tag{107}$$

定数 g が結合定数の役割を果たしていたので g は 1 より非常に小さいところに限っています. ϵ も非常に小さいとします. この項を付け加える前はポテンシャルは $x = 0$ と $x = 1/g$ で極小値を持ち $V(0) = V(1/g) = 0$ と縮退していまが, この項を付け加えると $V(1/g) = -\epsilon$ と ϵ だけポテンシャルの井戸の底が下がります. もちろん線形項を付け加えたので $x = 1/g$ ではポテンシャルは極小値を取りませんが, 本当の極小値との違いは高次の微少量なのであまり気にしなくてかまいません.

そうすると, この場合にバレーインスタントンを ϵ のパラメータについて近似的に求めることができます. 答えだけを書いておきます. 元々のインスタントンは

$$x_0(\tau) = \frac{1}{g}\, \frac{1}{1 + e^{-\tau}} \tag{108}$$

であることは最初の講義で述べました. これは $\epsilon = 0$ の時のインスタントン解です. 今バレーインスタントンを ϵ について展開することができます. (実質上の展開パラメータは $\epsilon\, g^2$ です.) それを自明でない次数まで書くと

$$x = x_0 + \epsilon\, g^2 \tag{109}$$

$$F = -6\,\epsilon\, g^2\, \dot{x}_0 + 18\,(\epsilon\, g^2)^2\, \tau\, \dot{x}_0 \tag{110}$$

($\dot{x}_0$ というのは x_0 の τ 微分のことです.) となります. より高次の項も計算することが可能です. これは零固有値の性質を使った面白い展開なのですがその詳細は省略します. 一つ述べておくと (110) の右辺の第 2 項に τ が含まれているので τ が大きい時第 2 項は第 1 項に比べて大きくなります. 従ってこの展開は

$$\tau \ll \frac{1}{\epsilon\, g^2} \tag{111}$$

においてのみ意味を持ちます. 一方 τ が非常に大きい

$$\tau \gg 1 \tag{112}$$

の時には x や F は非常に小さくなりので方程式を x,F について線形化できます. 線形化された方程式の解の係数は任意係数になりますが, その係数は $\epsilon\, g^2$ が非常に小さい時は (111) と (112) は重なり会うことに注意すれば二つの解の接続を行うことで求めることができます. この接続を行うことは自明でないのですが, 今求めた展開式 (109) (110) とこの線型化した式が非常にうまく対応し, 遠方での振る舞いと中心部での振る舞いが非常に滑らかにつながっていることがわかります. これも零固有値を持つという固有バレー方程式から直接証明できる性質です. あと, まだヤコビ行列式の計算もあるのですが省略します.

以上でバレーインスタントンに零固有値が存在する利点としてガウス積分が実行できることと, バレーインスタントンを解析的に調べることが出来るという 2 点について説明しました.

さてこれからどう話が進むかといえば, まず, こういうバレーインスタントン, もしくは τ を $-\tau$ に入れ替えて得られるバレー反インスタントン, さらにはこの希ガス近似を考えることが出来ます. この希ガス近似においてエネルギーを計算すると虚部が存在しないということを示すことが出来ます. これはしばらく前に論文になっています.

より最近の発展はこれに相互作用を導入したことです. これは今までと全く別のことをするというのではないことを注意しておきます. 希ガス近似はバレーラインのずっと行った先の極限のところでのみ正しいので, それより内側では自然にバレーインスタントン, バレー反インスタントンの距離に作用は依存することからも分かる様に, 相互作用の導入はバレーのより内側をみていることに相当します. さてこうして計算するとエネルギーに虚部が現れます! ところがこれは偽の不安定性に関係することではなくて最初にも述べた通り摂動論から生じる虚部と打ち消し会うべきものです.

その虚部の現れ方について結果だけ見ておきます. 今考えているポテンシャルでは右と左の極小値の周りにエネルギー順位を考えることができます. トンネル効果で双方の順位が交わりますが, 井戸の右側では摂動的には,

$$\frac{1}{2} + N_L \tag{113}$$

となります. これに対する非摂動論的補正は

$$E_L^{(N.P.)} = \frac{1}{2} + N_L + \alpha^2 \left(-\frac{2}{g^2}\right)^{2N_L+\epsilon} \frac{(-1)^{N_L+1}}{N_L!}\Gamma(-N_L-\epsilon) \tag{114}$$

となります. ただし, ϵ が整数でないとします. この式はエネルギーを決定する式を解いて得られるのですが解く際に「ϵ が整数」でないという条件を使います. また (114) で ϵ を整数にすると,ガンマ函数から極が現れ発散します. ϵ が整数の時は別の式がありますが省略します.

また, ヤコビ行列式, 行列式 (固有値の積), $\exp$ の肩に $-$ (バレーインスタントンの作用) を乗せたもの, そういう非摂動効果を全部まとめて α で表わしました.

また, 非摂動効果の部分だけを計算したので $N.P.$ と記しました.

重要なのは (114) の中の

$$\left(-\frac{2}{g^2}\right)^{2N_L+\epsilon} \tag{115}$$

という部分です. ここから, 一般には虚部が生じます. これは g^2 に関する解析接続を説明しなければならないので省略しますが, 虚部は

$$\mathrm{Im}E_L^{(N.P.)} \sim \sin \pi\epsilon \tag{116}$$

という形で現れます.

この虚部は摂動的な部分から生じる虚部と打ち消しあうはずです. そうすると我々は実数の答を得ることができます. これを逆向に考えてこの非摂動的な部分の虚部がわかれば摂動的な部分の虚部がわかると考えます.

$$\mathrm{Im}E_L^{(P)} = -\mathrm{Im}E_L^{(N.P.)}. \tag{117}$$

($E_L^{(P)}$ は摂動級数の Borel 和.) つまり, 摂動級数の虚部がこの式で逆に決まったと考えます.

摂動級数から生じる虚部は高次の項と密接な関係があったことを考えると上の関係式から摂動級数の高次の振る舞いが分かるようになります. 具体的には $E_L^{(P)}$ とかいた摂動部分は g^2 が正の時に虚数部をもっているわけですから正の実軸にカットがあるわけです. この時解析性を用いて分散公式を得ることができます. つまり g^2 空間で, $E_L^{(P)}$ を g^2 の函数とみて Cauchy の積分公式を適用します.

$$E^{(P)}(g^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint dt \frac{E^{(P)}}{t - g^2} \tag{118}$$

この積分経路の半径を無限大にします. 函数 $E^{(P)}$ に特異点がないとし, また $E^{(P)}$ が無限遠でゼロにいくとするとこの遠くに動かした円からの寄与はなくなり残る寄与はカットの上と下を通る二つの線上となります. これは向きが反対なので符号が異なります. 従って (118) は

$$E_L^{(P)}(g^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{\mathrm{Im}E_L^{(P)}(t)}{t - g^2} \tag{119}$$

となります. 今遠方での収束性を仮定しましたが, 収束性が悪ければ改善する「引き算法」というのが分散公式にあります. 今はこの様に単純に書いておきます. つまりカットにおける値で全空間の $E_L^{(P)}$ が決まります.

次に両辺を g^2 について展開します. $E_L^{(P)}$ は

$$E_L^{(P)}(g^2) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{L,n}^{(P)}\, g^{2n} \tag{120}$$

となりますから,

$$E_{L,n}^{(P)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dt\, \frac{\mathrm{Im} E_L^{(P)}(t)}{t^{n+1}} \tag{121}$$

を得ます. この様にすると虚部が分かれば $E_{L,n}^{(P)}$ が求まります. この式はどんな n に対しても成り立つのですが, 我々が計算した虚部は弱結合の極限です. (途中でトンネル効果が小さいように g が非常に小さいとしました.) つまり t の全領域にわたって $E_{L,n}^{(P)}$ が分かっているわけではありません. ですが, n が非常に大きいときには積分に大きく寄与するのは t が小さいところでの積分なのでその時には $E_{L,n}^{(P)}$ を求めることができます. その答えは次の様になります:

$$E_n = \frac{3}{\pi}\, \frac{6^{\epsilon}}{\Gamma(\epsilon+1)}\, \Gamma(n+\epsilon+1) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (n \to \infty). \tag{122}$$

簡単のために摂動論の基底状態に対してのみ記しました.

ここで注意すべきなのは先程のバレーインスタントンの構成は $\epsilon\, g^2$ の展開で行いました. 従って高次な項は求めていません. しかしそれらの高次の項はここには全く効いてきません. ここで効いてこないという意味は, n が無限大の時にはそれらの効果は全て $O(1/n)$ に入るという意味です. バレーインスタントンを自明でない次数まで構成すればそれだけで n が大きいときの主要な項は決まっている, という構造をしています. 従って非常に幸いなことに全ての次数を計算しなくてもここまで知ることができます.

さて, (117), つまり, 摂動展開から現れる虚部と非摂動論的計算から出る虚部が打ち消し会うという構造が正しいのなら (122) も正しいはずです. この (122) は計算機で確かめることができます. 普通の一次元の量子力学での基底状態からの摂動論の計算に従い摂動係数を 200 次まで (つまり g^{400} 次まで) 様々な ϵ に対して計算しました.

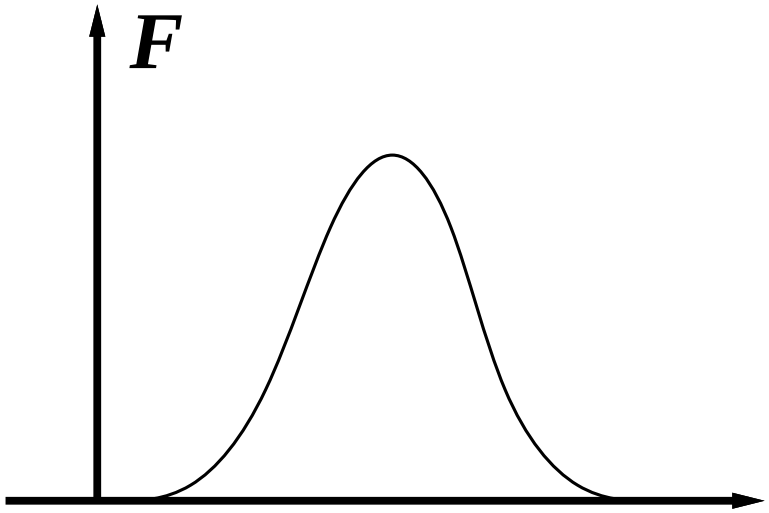
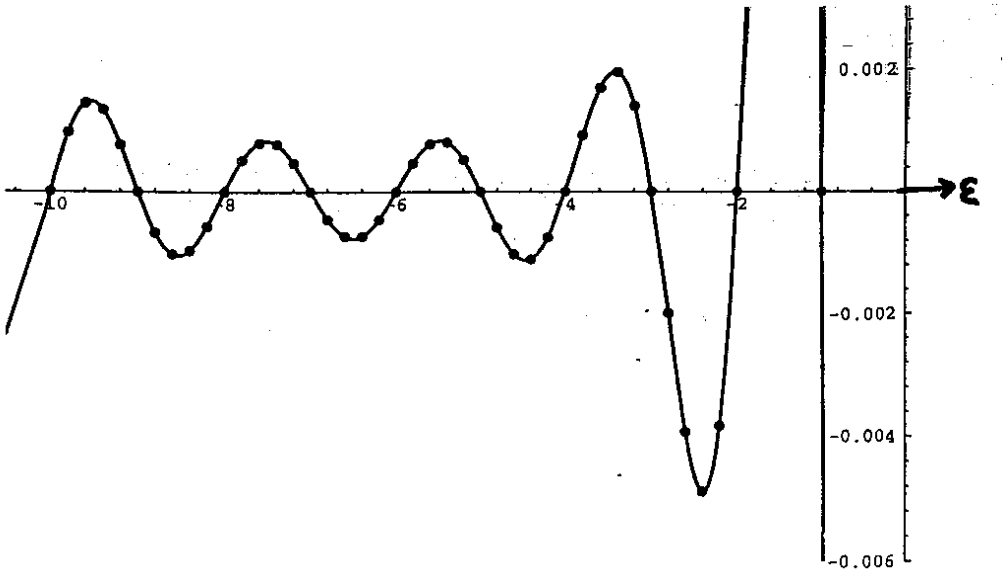


図 24: (122) を $3^n\, n!$ で割ったもの.

すぐに確かめられるのは 3^n や $n!$ の振舞いです. (122) をそれらで割った値に点をうったのが図 24 です.

横軸が ϵ で $+20$ から -20 まで 0.2 刻みで計算しました. 黒い線がバレー法の予言値です. 図より分かるように ϵ が負の整数のところではガンマ函数が極を持ち, この値はゼロになっているので見えないので拡大したのが下図です.



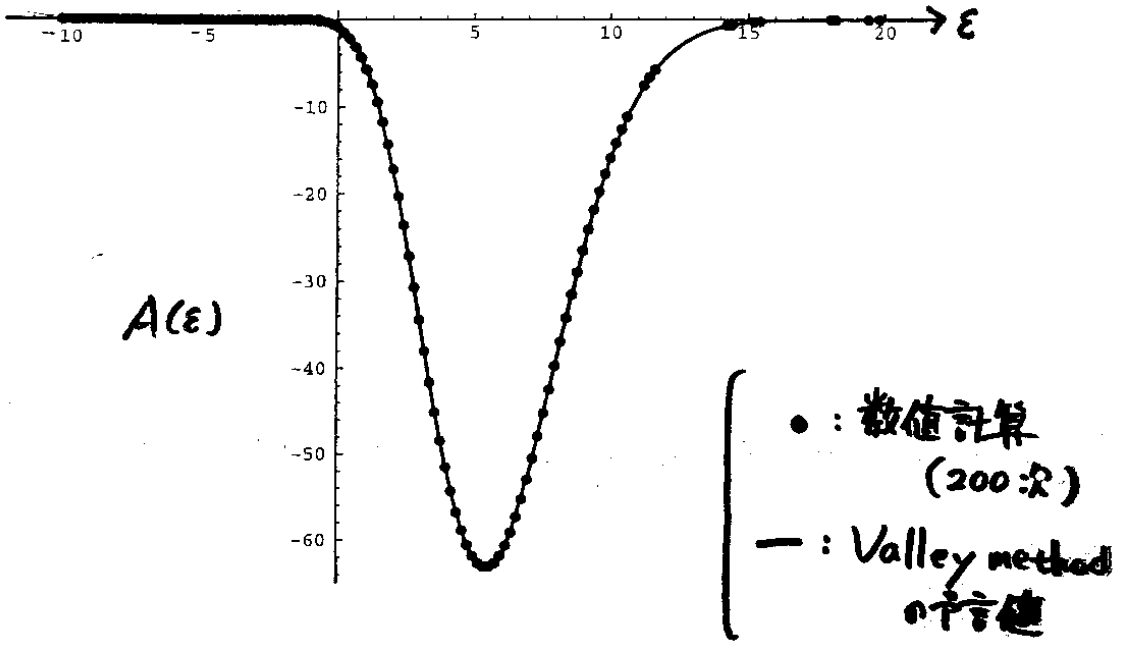


図 24 は摂動論的な基底状態にたいして行ったものですが, 励起状態に対しても同様に計算できます.

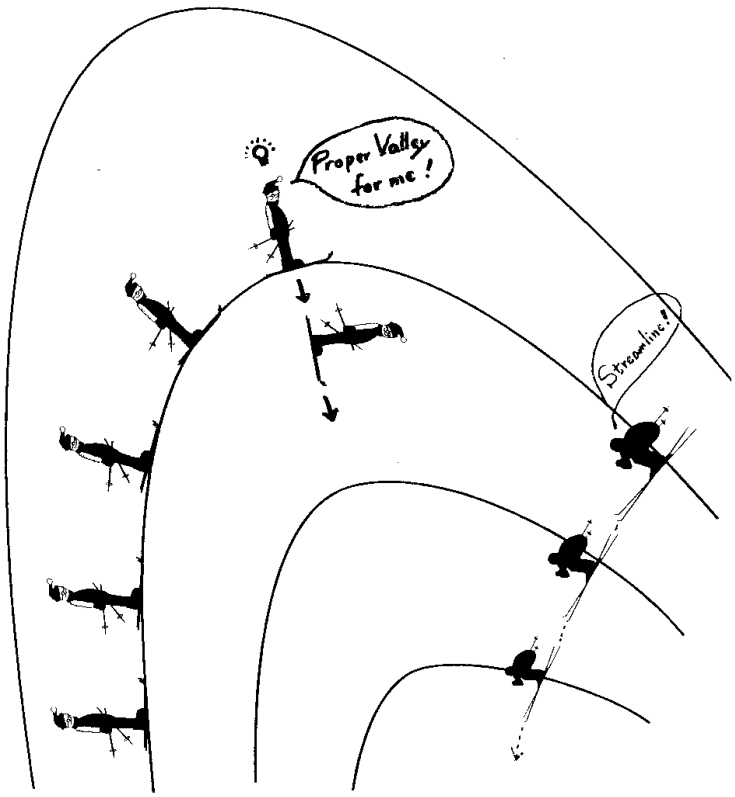
実は話はまだ続きまして, ϵ が整数の時には Borel 総和可能になる場合があります. より正確に述べると ϵ が整数の時に 2 つの井戸の内, 底の低い方を基底状態を取り摂動級数を構成するとそれは Borel 総和可能になっています. さらに励起状態に対しても幾つか Borell 総和可能になります. その特徴ははっきりして, ϵ が整数というのはポテンシャルの底と底の間の差が整数になるということです. 摂動的順位をこの周りで作ると, 一つの底と, もう一つの底とで作った摂動的順位の幾つかは縮退します. 摂動的順位の縮対していない $-\epsilon$ と 0 の間にあるエネルギー準位は Borel 総和可能となります. 0 以上の縮対している方ではボレル和は定まりません. この様に ϵ が整数の場合にはこういう変わったことが起こります. ϵ が整数でない場合にはこういうことは起こりません. 実際には $\epsilon = 1$ の場合にはこれは超対称性を持つ量子力学になっています. 超対称性を持つ量子力学の場合には摂動論の効果が効かないということが分かっていて, つまり摂動論がないのですから, Borel 総和可能です. 我々が発見したのは ϵ が 1 でない整数の場合にも Borel 総和可能となるということです. ここら辺には超対称性を拡張した meta

SUSY が存在していてこういう変わった対象性が Borel 総和可能性を保証している, という興味深い現象が起きていると考えることができます. 因みに, かつて, Zinn-Justin, Lipatov が計算した時には全然別のことを言ってました. 彼らには多分摂動論の高次の項を計算して今のように非対称な場合に確認するということができなかったので自分たちで言ったことが間違っていることに気付かなかったのでしょうが, 我々は以上の様に実際に計算することができました.

バレー法を用いることでこの様な性質を導くことができたのです.

7 最後に....

いろいろ話をしましたが結論は一つで, バレー法は今まで適用してきた数々の場面で非常な成功を収めてきた, ということです. いつもこの話をする時最後に見せる transparent は漫画なのですが... バレー法の技術的なことは忘れても, この漫画だけは多分覚えていてもらえるでしょうから...



この漫画のアイディアは青木健一氏によるものです. これは地形図で, 今スキーをしていると考えてください.

あるところにスキーヤーが立ってます. この人は特攻型で, 多分スキーがすごくうまいんでしょうが, 立ってたらそのまま滑り始めます. 滑り初めてからどこに行くかというと, 真下に向かってまっすぐ直滑降で行きます. それが stream line method です. いいですか, 常に真下に行く.

スキーの初心者はそういうことをすると危ないのでそうはしません. この人は例えば, 図の位置に立ってたとします. ここは等高線がつまってて割と急ですね. 急だから怖いんですね. 怖いから下に滑るのをやめまして, とことことこと, 平らに歩いていきます. スキーをしたことがある人だったらわかりますね. こういうふうにとことことこと, 歩いていきます. まだちょっと急だな, もうちょっと先に行くと緩くなるなと, 段々緩くなるわけですね. 一番緩いと思ったところで降りていくわけですね. これはちょうど固有バレー方程式を Lagrange の未定係数法のように解釈したことに相当します. むろんこの人は「ここが緩い」と思って真っ直ぐ下に降りたりしません. スキーの初心者なら当然怖いですから, 次の緩いところを狙っていきます. 緩いところ緩いところをたどっていけば, 固有バレー法からでてくるバレーラインだということです.

<u>質問</u>

Q. 固有バレー法と複素時間法との関係は?

A. 複素時間法だと一般に Bohor-Sommerfeld の量子化条件がでるので, ポテンシャルの底の間の順位の近似表式が導き出せるのだと思いますが, その表式の中に摂動部分と非摂動部分がどう混ざっているかがぼくにはわからない. 順位を決定する式は摂動と非摂動が混然一体となっているので, それらを分離するのは難しいのだと思います. この方法の利点は, 詳しく説明できなかったのですが, バレー法で計算している部分はあくまでも非摂動的で摂動論と完全に別という性質が保証されています. そのためには解析接続の話を説明しなければならないのですが. こ

の様にバレー法では摂動と非摂動を分けて議論することができますが, 複素時間法には多分そういう性質はないのだと思います.

参考文献

[1] H. Aoyama, H. Kikuchi, T. Harano, I. Okouchi, M. Sato and S. Wada, *Prog. Theor. Phys. Supplement* **127** (191997) 1 and references contained therein.

[2] t'Hooft *Phys. Rev. Lett.* **37** (191976) 8;*PR* **D14** (191976) 3432.

[3] N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D28** (191983) 2019. F. R. Klinkhamar and N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D30** (191984) 2212.

[4] H. Aoyama and H. Goldberg, *Phys. Rev. Lett.* **188B** (191987) 506.

[5] A. Ringwald.

[6] O. Espinosa, *Nucl. Phys.* **B343** (191990) 310.

[7] H. Aoyama and H. Kikuchi, *Phys. Lett.* **B247** (1990) 75; *Phys. Rev.* **D43** (1991) 1999; *Int. Mod. Phys.* **A7** (1992) 2741.

[8] V. V. Khoze and A. Ringwald, *Nucl. Phys.* **B259** (1991) 106.

[9] H. Aoyama and H. Kikuchi, *Nucl. Phys.* **B369** (191992) 219.

[10] H. Aoyama,*Mod. Phys. Lett.* **A7** (191992) 1337.

[11] H. Aoyama, A. M. Tamra, *Nucl. Phys.* **B384** (1992) 229.

[12] S. Coleman, Aspects of Symmetry "The uses of instantons" (Cambridge,1985).

[13] H. Aoyama, H. Kikuchi, I. Okouchi, M. Sato and S. Wada, quant-ph/9710064, to be published Phys. Lett. B.