超弦理論における低エネルギー有効理論とその構造

末松大二郎　(金沢大学)

記録: 今井、石村、黒沢、杉本、平山、吉岡（京大）

23-24 , July , 1997 (97年 夏の学校)

目 次

1 Introduction

最初にintroductionとして、どうしてstringを考えるのかというようなことを歴史的な経緯を含めてお話しして、その次にsupersymmetry、supergravity[1, 2, 3]やheterotic string[4]について、用語の解説程度になると思いますが、最小限のreviewをしたいと思います。その後で、low-energy effective theoryの構造とその特徴について見ていき、最後にそういう枠組みの中で様々な現象論的な問題がどういうふうに解決される可能性があるのかということを話したいと思います。

1.1 standard model

今から話すことは多分もう話す必要もないことかも知れませんが、あまりごちゃごちゃしたことを話しても暑いのであまり頭に入らないと思いますので、標準模型の非常にelementaryな構造だけをまず見ておきたいと思います。この標準模型というのはもう皆さん既にご存知のように、超対称性のない、自発的対称性の破れに基づくgauge理論で、gauge群は$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$で、3世代のquark・leptonを含むようなchiralなmodelになっています。このうちのWeinberg-Salamの部分($SU(2)_L \times U(1)_Y$の部分)がchiralな構造になっているわけですが、大きく分けてgauge sectorとYukawa sectorとHiggs sectorという3つの部分から構成されているというわけですね。gauge sectorの部分はgauge bosonとfermionのinteraction、neutral currentとかcharged currentの部分を記述するわけですが、LEP等のprecise measurementで非常に精度よくその正しさが検証されています。一方、Yukawa sectorとHiggs sectorはHiggs scalarと絡んだ部分になっていますが、標準模型の中でこのHiggs scalarと言うのが非常に良く分からないものとなっているわけです。ところが、このHiggs scalarは、こういう自発的に対称性を破るようなgauge理論の中で、非常に重要な役割を果たしているのです。Higgsに真空期待値を持たせると、それはYukawa sectorを通じてquark・leptonのmass、あるいは小林-益川行列に反映します。gauge bosonにしても、やはりHiggs scalarとのinteractionを通じてmassが与えられます。Higgs scalarはそういったmassを与える起源になっているのです。ここの部分が非常に本質的なものであるのに、良く分からない部分になっているというわけです。

標準模型の問題点

そういうことに関連して、標準模型は実験的には非常に良く成功しているわけですが、理論的な問題点として良く指摘されることがいくつかあります。まず、対称性の破れ、つまりこのHiggsの真空期待値に対応するものの起源が分からないという問題です。ただし起源は分からないのだけれど、その対称性の破れをここで言ったようにHiggsの真空期待値vという形でparameterizeして理論の中に取り込めば、いろいろな予言が可能になるわけですね。ここが標準模型のうまいところだというわけです。もう1つ良く言われるのが、parameterの多さです。例えばquark・leptonのmassの固有値とか小林-益川行列は、Yukawa sectorのYukawa couplingがそのままこういうものになるのですが、それらを決める原理は 標準模型の中には含まれていないというわけですね。こういうようなものをどう理解するのか

ということが問題になってくるわけです。

gauge 階層性の問題

特にこの対称性の破れの起源ということに関して、gauge 階層性の問題 (gauge hierarchy problem) と呼ばれる問題があります。Higgs potential を書いてみますと、普通の ϕ^4 の形で書かれているわけですよね。

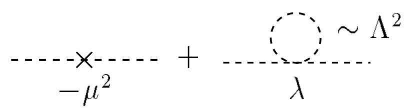
$$V = \frac{\lambda}{4}|\phi|^4 - \frac{\mu^2}{2}|\phi|^2 = \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2 + \cdots \tag{1.1}$$

ここで negative mass square ($m^2 = -\mu^2 < 0$) を入れることで ϕ に真空期待値 v が出ます。v は scalar potential の parameter (μ と λ) を使って、

$$v^2 \equiv \langle\phi\rangle^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{1.2}$$

で与えられます。ところが、これに輻射補正の効果を考えると非常に問題があるということが分かります。今、標準模型の適用限界を何かある scale Λ とし、この scale までは標準模型が使えると考えることにします。そうすると、Higgs の mass の部分に対する補正としては、次のような 2 次発散を含む loop diagram によって、cut-off を Λ とすれば、だいたい Λ^2 程度の補正が入ってくるというわけですね。

$m^2 =$



$$\sim \; -\left(\mu^2 - \lambda\Lambda^2\right) \tag{1.3}$$

Higgs の真空期待値は (1.2) のような形で決まっていますので、この 1-loop の correction を入れたところで再度、書き直してみますと、

$$v^2 = \frac{\mu^2 - \lambda\Lambda^2}{\lambda} \tag{1.4}$$

の様になります。この v が標準模型ではだいたい 250 GeV 程度にとどまって欲しいというわけです。例えばこの cut-off Λ を 1 TeV 程度にとってみますと、λ はだいたい order 1 で OK です。ところが Λ として例えば典型的に Planck scale ($M_{\rm pl} \sim 10^{19}$ GeV) 程度までこの理論が使えるとします。μ^2 はだいたい 100 GeV 近辺に tree の level で合わせておいたとすると、λ は 10^{-34} というような非常に小さな値にしなければならない。つまりものすごい fine-tuning が必要だということになります。

$$\begin{cases} \Lambda \sim 1 \text{ TeV} & \rightarrow \quad \lambda \sim O(1) \\ \Lambda \sim 10^{19} \text{ GeV} & \rightarrow \quad \lambda \sim O(10^{-34}) \quad \text{fine-tuning} \end{cases}$$

もちろん今は 1-loop の議論をしたわけですが、補正の order をあげていくと各次数ごとに非常に厳しい fine-tuning が必要であるということですね。このことは逆に言い換えると weak scale M_W という scaleが、今言ったような cut-off $\Lambda \sim M_{\rm pl}$ に比べて、どうしてこんなに小さいのか、理論の適用限界に比べて standard model のもっている特徴的な scale M_W がどうしてこんなに小さくなるんだろうか、その理由が良く分からないというわけですね。まあちょっと荒っぽい言い方ですが、このような問題を gauge 階層性の問題というふうに呼んでいます。

naturalness

別の見方をすると、よく naturalness という概念が議論されます。理論の中にある dimensionless の非常に小さな parameter a があったとします。この a を 0 に持っていったときに理論の対称性が拡大するような場合には、その理論は natural だというふうに言います。つまりどういうことかと言うと、理論の中に入っている次元のない parameter が非常に小さいということを保証している何らかの対称性があるとき、そういう理論は natural だというわけですね。

> a : dimensionless parameter
> $a \to 0$ で対称性が拡大するなら、 $a \ll 1$ の理論は natural

今の standard model の場合で言えば、dimensionless parameter というのは言ってみれば cut-off Λ と M_W の ratio です。この $M_W/\Lambda(\sim \mu/\Lambda)$ が非常に小さいというわけですね。ところが Higgs の mass を 0 に持っていったからといって、さっきの理論の対称性は全然拡大しない。これは Higgs mass に対する輻射補正の 2 次発散を禁止する対称性がないということですね。そういう意味で、standard model の Higgs sector は natural でないというふうに言われます。

このように standard model の Higgs sector は gauge hierarchy の問題とか naturalness の問題を抱えているというわけです。こういう naturalness に関係した問題としては、あとでお話ししますが、他にも例えば strong CP の問題とか、あるいは standard model を supersymmetric にした時にでてくる μ problem というような問題があります。

解決法

ではどうするのかということですね。Higgs sector が 2 次発散をもつという問題は elementary scalar が抱える問題そのものなわけで、それを解決するためには理論の中から Higgs scalar を取り除いてしまうという可能性があります。それが dynamical symmetry breaking の model、あるいは別の言葉で言うと technicolor の model と言われるものです。そして、もう 1 つの可能性が supersymmetry の導入です。technicolor の方は、現在ではいろいろな困難が分かってきています。特に LEP の precise measurement でもって得られた S-parameter とか T-parameter とか呼ばれる、standard model からのずれを electroweak gauge boson への輻射補正を用いてうまく parameterize するような parameter を、technicolor の model で評価されるものと比較することによって、technicolor の model は非常に厳しいということが分かっています。そういうわけで supersymmetry というのは今言ったような naturalness というか gauge 階層性の問題を解決する非常に有力な候補として、現在非常に精力的に研

究されています。standard model を超対称統一理論へ拡張するというのがさっき言った理論的な問題を解決するのに非常に良さそうだというわけです。

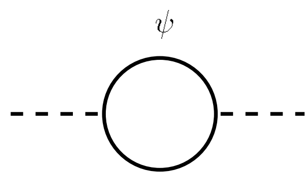
1.2 supersymmetry

超対称性

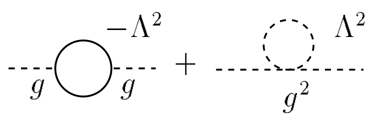
超対称性がどういうものなのかとか、それを導入するとどういう良いことがあるのかをまだ全然お話ししていないわけですが、超対称性というのは後でもう少し詳しくお話ししますが、fermion と boson を入れかえるような変換に対する対称性です。

$$\text{fermion } \psi \quad \leftrightarrow \quad \text{boson } \phi$$

もしこういう対称性が理論の中に導入されますと、例えば、(1.3) の Higgs mass に対する 1-loop の correction において、2 次発散をもたらしていた graph の内線を回っている boson に対して fermion の partner がいることになります。そうすると次のような、fermion が回る diagram が発生します。



もちろん Lagrangian の持つ fermion と boson の間の対称性ですから、coupling constant にも関係がついてきまして、この 2 次発散がちょうど cancel するというようなことが起こります。



$\Rightarrow$ 2 次発散の相殺

そう言う意味で、先程言った gauge 階層性の問題は supersymmetry を導入することによって解決されそうであることが分かります。

次に、これを naturalness という立場から見てみます。先程言ったように Higgs scalar の mass term を禁止するような対称性はありません。一方、fermion の質量は、fermion sector に chiral symmetry があれば禁止することができます。今ここで超対称性というのを入れますと、これでもって chiral symmetry の効果が、boson sector に伝搬することになります。chiral symmetry で fermion の mass が 0 になっていれば、supersymmetry のおかげで、それの partner の scalar の mass も 0 になるというわけです。こういうようなことで Higgs scalar の mass が cut-off $\sim M_{\rm pl}$ に比べて非常に小さいということをうまく説明できると考えることができます。

超対称性の破れ

ところが、これを現実の世界に使おうとすると問題が出てくるわけですね。低エネルギー領域、つまり僕らが実験を行ってる、 1 TeV よりも下くらいの領域では、少なくとも現在までのところでは superparticle は実験的に見つかっていません。従って、どこかで超対称性というのは破れてないといけないというわけですね。ところが先程から議論している gauge 階層性の問題、あるいは naturalness の問題を解決しようとすると、この破れはせいぜい 1 TeV 程度のところにないといけない。それよりも上で破れてしまうと、さっきから問題にしている gauge 階層性の問題とか naturalness の問題とかを解決できなくなってしまいます。なぜかというと、超対称性が成り立っているところでは 2 次発散は cancel しているのですが、破れたとたんにその破れの scale の 2 次の補正を拾ってくるわけですよね。そうすると、(1.4) で v が 250 GeV 程度であるとすると、だいたいこの破れの scale が 1 TeV ぐらいでなければ、やはり理論のなかに fine-tuning が必要になってくるのです。もちろん、この fine-tuning をどの程度要求するか、ということに関してはいろいろ問題があるわけですが、だいたい 1 TeV ぐらいの scale で破れていれば、まあ問題はそんなに深刻ではないだろうというわけです。

それで一旦入れた超対称性を破らなければならないわけですが、その破れには皆さんご存知のように、explicit breaking、つまりあからさまに Lagrangian レベルで破ってしまうのと、spontaneous breaking、つまり Lagrangian の symmetry ではあるけれど真空が対称性を破っている場合の 2 とおりが考えられますね。ところが、explicit breaking を入れたときに先程言った、2 次発散を発生しないという性質まで破れてしまうと、何のためにこんなもの入れたのか分からなくなってしまいます。だから、2 次発散が発生しないような破れを導入する必要が出てくるというわけですね。実際にそう言う破れは知られていて soft breaking と呼ばれるものです。言いかえれば、2 次発散のない理論は必ずしも supersymmetric な model である必要はなく、こういうあからさまに超対称性が破れている項、soft breaking term が入っているような理論も考えられるのです。ただ理論的な枠組みとしては、もちろん超対称性を考えるのには非常に魅力的なものがあるわけですから、まあそういう意味でこれを超対称性の explicit breaking と捉えるということですね。それでもう１つは spontaneous breaking です。一般に spontaneous に対称性が破れるとき、その対称性が global 対称性であれば、Goldstone boson が現れます。今の場合、超対称性の generator は fermionic なものになっていますから、Goldstone fermion が出てくるわけですね。これは Goldstone 粒子なので、もちろん massless です。ところが、low energy でいろいろな実験をしても、それに対応する massless な fermion は見つかっていないのです。neutrino が唯一の massless fermion なので、これが Goldstone fermion ではないかというような議論が昔々あったみたいなんですが、Goldstone 粒子に対する low-energy theorem を適用してみると、neutrino は Goldstone fermion ではありえないということが分かってしまうのです。超対称性を現実の世界に使おうとすると、例えば spontaneous SUSY breaking が起こるような model を考えることにすると、このような問題が出てくるわけです。

1.3 local supersymmetry

この問題を解決する可能性として、超対称性を local 化することが考えられます。Goldstone boson は、global な対称性が破れた時に physical な spectrum の中に現れました。しかし、その対称性を local なものにしてやれば、Goldstone boson は gauge 場の中に吸収されて、physical な spectrum の中から消えてなくなってしまいます。それと同じことを考えてやれば良いというわけですね。最近の議論の中で、量子重力の効果を考えると global 対称性は全て破れてしまうのではないか、つまり自然界に存在する対称性は全て local 対称性ではないかという議論もあります。まあ、そういうことは抜きにしても、このように超対称性を局所化した理論 (超重力理論 (supergravity)) には非常に良いことがいくつかあります。まず、重力が自然に組み込まれることです。あとで言いますが、この局所化された超対称性の代数を見てみると、その中に一般座標変換に対応するものが自然に入ってくるのです。もう 1 つは、局所化された超対称性の spontaneous breaking を考えてやると、さっきの Goldstone fermion が、重力を媒介する graviton の superpartner である gravitino というものに吸収されて physical な spectrum から消えてしまうということです。こういう mechanism のことを super-Higgs mechanism と呼んでいます。

このように、local な超対称性を考えると、少なくともここの段階で出てきてた問題は解決されます。だから、標準模型を超対称化して、さらにその超対称性を局所対称性にするというような手続きを踏んでやると、まあ重力まで入って非常にうまく行きそうだということになったわけです。ところが、この超重力理論の中に chiral な gauge 理論を couple させようとすると、anomaly が出てくるということが分かってきました。標準模型というのは chiral な模型になっていまして、anomaly が出てくることでなかなか consistent な理論にならないという問題があったわけです。ところが、1984 年に Green と Schwarz という人たちが、超弦理論を考えてやるとここで出てくるような anomaly を cancel するような項が、ある種の mechanism によって生じうるということを示して、超弦理論が急速に研究されるようになったわけです。その時の標語は、重力を含む統一理論の有力な候補、ということでした。この超弦理論というのは 1 次元的な広がりをもつ弦の運動の mode で素粒子を記述しようというものです。この超弦理論の中には重力が含まれていて、重力の consistent な量子論を与え得ると言われています。また、低エネルギーから見た時の特徴として、ここで強調すべきことがいくつかあります。1 つは、超対称性が、理論の特性として入ってくることです。通常、超対称化してない弦理論の場合には tachyon と呼ばれる mass square が negative になるような mode が現れてくるんですが、理論を超対称化するとそういう mode は理論の spectrum から消えてしまいます。そういう意味で、超対称性を課すことはこの弦理論を consistent な理論にするための必然的な条件となってくるのです。もう 1 つは多次元の理論になっているということですね。超弦理論を consistent に定義できる次元は 10 次元と決まっていまして、臨界次元と呼ばれています。そうすると、この 10 次元の中の 4 次元の部分が我々の住んでいる時空だというふうにしますと、6 次元部分が余分に残ってくるというわけですね。そういう余分な時空の部分に gauge symmetry とか、あるいは quark・lepton の generation、あるいは flavor 構造というようなものの起源が求められるのではないかということが考えられます。そういう意味で、超弦理論を標準模型の基礎的な理論というふうに考えるのにはかなり魅力があるということですね。まあ、今までの話の中から

言うと、この超対称性というものが理論の枠組みの中に非常に自然に入っており、低エネルギー側から見たときには非常に好ましいということです。

講義の目標

ここで講義の目標の flowchart みたいなものを書いてみます。超弦理論は Planck scale の理論になっています。我々が今知っている標準模型というものは、weak scale の理論です。直接この超弦理論でもって、low energy の議論ができれば良いんですが、まあ 現在の理論の技術的な到達点からいうと、とてもそういうようなことができるような状況にないわけです。そこで、1 つの approach として、この中間段階を設けて effective な field theory に落として、それでもって議論をしたいというわけです。そのときに、もちろんこの effective theory を厳密な形で induce することはできないわけですから、ここで、超弦理論の持ってる対称性、supersymmetry とか gauge symmetry、duality や modular 不変性など、いろいろなものをここで課してやります。そうすることで、この有効場の理論として許される枠組みを絞ってやろうというわけです。そして、逆に、weak scale で我々が知っている実験的な事実、標準模型の特性をここで課すことによって、さらに有効理論の枠組みを絞ってやります。そういう approach をしてみたいと思います。そのときに、標準模型の様々な特性のうち、答が与えられてないような課題に対して、なんらかの解答を与えることになっていないか、そのような問題にどういうような形でこの枠組みの中で答え得るのかということを見てみたいと思います。また、Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) と呼ばれる、標準模型を最小の形で supersymmetric に拡張した模型と超弦理論から導かれる理論との間で、特徴的なずれがもしあるとすれば、それはどういうものかを探ってみたいと思います。もしそういうものが分かれば、それを見つけるような実験をしてやることによって、間接的であれ超弦理論に対するなんらかの実験的な検証ができるかも知れないというわけです。

$$
\begin{array}{cccl}
\text{超弦理論} & \sim & M_{\rm pl} & \\
\Downarrow & \leftarrow & \multicolumn{2}{l}{\text{対称性 (SUSY、gauge、duality、modular invariance、etc.)}} \\
\text{有効場の理論} & \Longrightarrow & \multicolumn{2}{l}{\text{標準理論の課題の解答・MSSM からのずれ}} \\
\Uparrow & \leftarrow & \text{実験事実} & \\
\text{標準模型} & \sim & M_W &
\end{array}
$$

標準理論の特性・課題

ここで標準模型がどういう特性を持っており、どんな課題があるのか、ということを振り返っておくのは非常に意味があることだと思います。

1. $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, quark・lepton の構造
2. 世代構造：何故 3 世代なのか？
3. gauge 階層性構造、 M_W scale の起源
4. quark・lepton の質量、小林 - 益川行列の構造
5. rare processes :

standard model の枠組みでは非常にまれにしか起こらないような process があります。そういうものをどのように説明するのかという問題です。standard model の中では非常にうまく説明できているようなものも、理論を拡張するといろいろと不都合なことが現れてくるということか応々にしてあります。そういうような点がうまく回避できているのか、ということが問題となるわけです。例えば proton decay、FCNC、lepton 数が破れる process、neutron や electron の electric dipole moment などです。

6. CP の破れの起源、strong CP の問題
7. neutrino mass : neutrino の mass がなんで小さいのかということ。
8. SUSY breaking の起源

まあ、もっともっとあると思いますが、このようなものがあります。こういう問題をできればこの講義の中で話してみたいと思います。

今からお話することは、weak coupling の string 理論の枠組み、つまり perturbative な string 理論に基づいたお話です。皆さんご存知だと思いますが、perturbative な string 理論には真空構造に無限の縮退があって、どれが本当の真空なのか分かっていません。無限にある各真空ごとにそれぞれ string の model が対応するわけですね。だからものすごくたくさん、無限に近いぐらい model があるわけです。perturbative string の phenomenology を議論するときは、そういう model の中でいくつかを拾ってきて議論することが多いわけですが、最近 string の duality の議論によって perturbative string の真空の間に関係がつくという話があります。様々な string の model は、それぞれが M-theory と呼ばれるもののある種の極限になっているのではないか、というような議論があります。そのような議論が進んでくれば、perturbative string による phenomenology の議論というのはどんどん改善されていくことになるんでしょうけれど、今はまだ strong coupling な string 理論の構造を phenomenology の level に十分に適用できる様なところにまではどうも来ていないみたいですね。だからここでの議論というのは perturbative string の枠の中での議論にとどまります。ただ、そういうような枠組での議論を用意しておくと、将来必ず役に立つであろうと楽観的には思われます。 もし仮に非摂動的な効果を取り込んで true string vacua を見つけることができたとしても、我々の住んでいる宇宙が true vacuum でなくて false vacuum であって、ただその false vacuum の寿命が非常に長いということが仮に起こっていれば、strong coupling での議論がどの程度意味を持ちうるのかなどと言っている人もいます。だからまあ楽観的に見て、ここで行うような議論も将来意味を持ちうるだろう、少なくとも現象論を議論する際の枠組みとしては意味を持ちうるだろうというふうに僕は思っています。だいぶ長くなりましたがここまでが intro です。

2 Supersymmetric theory

2.1 supersymmetry algebra

それで今から、詳しい話は一切抜いて、これから出てくる言葉の説明に専らなるんですが、supersymmetric な理論とか supergravity の話をします。

まず先程から出てる supersymmetry ですが、supercharge と呼ばれる fermionic な charge を導入します。それで、その charge の満たす代数というのを関係する部分だけ書いておきます。

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} &= 2\sigma^m_{\alpha\dot\beta} P_m & (2.1)\\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 0 & (2.2)\\ [P_m, Q_\alpha] &= [P_m, \overline{Q}_{\dot\alpha}] = 0 & (2.3)\\ [P_m, P_n] &= 0 & (2.4) \end{aligned}$$

P_m というのは space-time translation generator で、さらに Q_α という complex Weyl fermion が supercharge です。complex Weyl fermion ですので 2 成分で、α は 1 と 2 を走ります。$\overline{Q}_{\dot\alpha}$ は Q_α の hermite conjugate です。それでまあ、super 変換っていうのは大雑把に言って互いに conjugate なものを 2 回繰り返すと、space-time の translation になるものです。

それで具体的にこの代数の one particle state 上の表現というのを導くことができます。例えば、massive な場合、この one particle state の rest frame をとってこの代数を書き換えてやると、こういうふうなものになります。

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 2M\delta_{\alpha\dot\beta} \qquad (P^2 = M^2) \tag{2.5}$$

これを例えば、次のような形にしてやると、

$$\begin{aligned} a_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2M}} Q_\alpha & (2.6)\\ a^\dagger_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \overline{Q}_{\dot\alpha} & (2.7) \end{aligned}$$

これらは fermionic な生成、消滅演算子の代数を満たしますから、この消滅演算子で消えるような state Ω_j があります。j というのはこの state の spin です。

$$\begin{aligned} a_\alpha \Omega_j &= 0 & (2.8)\\ P^2 \Omega_j &= M^2 \Omega_j & (2.9) \end{aligned}$$

そうすると、いつもやるような手続きでもって、state を構成することができます。つまり Ω_j にこの $a^\dagger_\alpha$ を掛けていけばいいわけですね。

$$\begin{array}{rl} \Omega_j & j \\ a^\dagger_\alpha \Omega_j & j + \frac{1}{2},\, j - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger_\alpha a^\dagger_\beta \Omega_j & j \end{array} \tag{2.10}$$

$a, a^\dagger$ が fermionic なのでこれ以上はもはや掛けても消えますね。で、Ω_j は spin が j の状態で、$a^\dagger_\alpha$ は spin 1/2 表現ですので、$j + 1/2$ と $j - 1/2$ 表現が出てきて、2 個掛けたのは α の足が反対称なのでまた spin j に戻ります。

こういうようにして one particle state 上の表現を構成することができるわけですが、この multiplet の bosonic な状態数と fermionic な状態数は等しくなっています。

2.2 field theory

superspace

それでまあ、こういう one particle state 上の表現を作ってみたわけですが、この symmetry を field theory の中に持ち込みたいわけです。field theory を作るときには通常、superspace と superfield というものを用いると非常に都合がいい。それには普通の spacetime coordinate x^m に Grassmann odd の変数を導入して、$z^m = (x^m, \theta, \overline{\theta})$ という空間に拡張してやります。θ は Weyl spinor です。

$$x^m \quad \rightarrow \quad z^m = (x^m, \theta, \overline{\theta}), \qquad \{\theta^\alpha \, , \, \theta^\beta\} \;=\; \cdots \;=\; 0 \tag{2.11}$$

この空間はさっきの supersymmetry 代数に対応するような群の parameter と思うことができて、群の元を

$$G(x, \theta, \overline{\theta}) \;\;=\;\; e^{i(-x^m P_m + \theta Q + \overline{\theta Q})} \tag{2.12}$$

というような形で書けます。実際に Hausdorff の公式を使って掛け算を行ってやると、

$$G(0, \xi, \overline{\xi}) G(x, \theta, \overline{\theta}) \;\;=\;\; G(x^m + i\theta\sigma^m\overline{\xi} - i\xi\sigma^m\overline{\theta} \, , \, \theta + \xi \, , \, \overline{\theta} + \overline{\xi}) \tag{2.13}$$

というふうになることを確かめることができます。これを ξ と $\overline{\xi}$ を変換 parameter とするような superspace の変換と思ってやれば、

$$g(\xi, \overline{\xi}) \cdot (x, \theta, \overline{\theta}) \;\;=\;\; (x^m + i\theta\sigma^m\overline{\xi} - i\xi\sigma^m\overline{\theta} \, , \, \theta + \xi \, , \, \overline{\theta} + \overline{\xi}) \tag{2.14}$$

というふうに変換する。つまり spacetime に対する shift と、θ、$\overline{\theta}$ に対する shift が出てくるというわけですね。で、こういうことから群の generator の derivative operator としての表現を得ることができて、それはこんな物として得られます。

$$Q_\alpha \;\;=\;\; \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \tag{2.15}$$

$$\overline{Q}_{\dot{\alpha}} \;\;=\;\; -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \tag{2.16}$$

これはすぐに確かめられますが、最初の代数を満足しているというわけです。

この $Q, \overline{Q}$ は群要素の積の作用としては左からの掛け算の derivative operator としての表現だったんですが、もう 1 つ、superfield を構成するのに必要になるんですが、右掛け算の derivative operator としての表現も考えることができて、それは次のように得られます。

$$D_\alpha \;\;=\;\; \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \tag{2.17}$$

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} \;\;=\;\; -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \tag{2.18}$$

これらは $Q, \overline{Q}$ と反可換することがわかり、supersymmetric covariant derivative と呼ばれています。

superfield

今、superspace の上の関数というのは θ と $\overline{\theta}$ の展開として定義することができます。

$$\begin{aligned} F(z) &= F(x,\theta,\overline{\theta}) \\ &= f(x)+\theta\phi(x)+\overline{\theta}\overline{\chi}(x)+\theta\theta m(x)+\overline{\theta\theta}n(x)+\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(x) \\ &\quad +\theta\theta\overline{\theta}\overline{\lambda}(x)+\overline{\theta\theta}\theta\psi(x)+\theta\theta\overline{\theta\theta}d(x) \end{aligned} \tag{2.19}$$

これに対して次のような supersymmetry に対する変換則を持つものが superfield です。

変換則：

$$\begin{aligned} \delta_\xi F(x,\theta,\overline{\theta}) &\equiv (\xi Q+\overline{\xi Q})F(x,\theta,\overline{\theta}) \\ &= \delta_\xi f(x)+\cdots \end{aligned} \tag{2.20}$$

これでもって例えば、この両辺を $\theta,\overline{\theta}$ で展開して各次数の係数関数を比較することで各 component field の変換性を導くことができます。ここでは手続きだけをお話して具体的な計算は一切省略しますが、こういうふうにして求めることができます。

それで、この一般的な superfield というのは可約な表現になっていまして、supersymmetry 変換に対して covariant な constraint を課すことで、既約な表現にすることができます。例えばその例として、次のようなものがあります。

$$\text{covariant constraint}: \begin{cases} \overline{D}F=0 & :\text{chiral multiplet} \\ F=F^\dagger & :\text{vector multiplet} \end{cases} \tag{2.21}$$

今関係するのはこの 2 つだけですが、上の constraint を満たすものを chiral multiplet と呼び、下の constraint を満たすものを vector multiplet というふうに呼びます。あと、$\overline{D}_{\dot\alpha}$ っていうのは Q_α と反可換でしたから、この constraint は supersymmetry 変換でちゃんと covariant です。

chiral supermultiplet $(\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi=0)$

それで、それぞれの superfield がどんなものになっているかというのを見てみましょう。chiral supermultiplet は $\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi=0$ という constraint を満たすものでした。

まず、$x^m+i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ という奴を、$\overline{D}_{\dot\alpha}$ で微分してやると、容易にわかりますが 0 になります。でさらに、θ を $\overline{D}_{\dot\alpha}$ で微分してやるとこれも 0。ということで 、こういう $y^m\equiv x^m+i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ というまとまりと θ の 2 つを変数とするような関数を書いてやると、自動的に $\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi=0$ を満足してしまうということがわかります。それで、この constraint の解としてこういう結果が得られます。

$$\Phi(y,\theta) = A(y)+\sqrt{2}\theta\psi(y)+\theta\theta F(y) \tag{2.22}$$

で、この時に D_α とか $\overline{D}_{\dot\alpha}$ というのを、この $(y^m,\theta,\overline{\theta})$ という座標で書き直してみると

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta}+2i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^m} \\ \overline{D}_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

となります。さっきの constraint は $\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}$ の微分が 0 ということで、このことからも $\Phi(y,\theta)$ がそのまま解になってるというのがわかります。

また、これの conjugate な superfield が考えられまして、それは $D_\alpha \Phi^\dagger = 0$ を満たすものです。こいつは y^m の部分も全部ダガーにしてやって、

$$\Phi^\dagger(y,\theta) \;=\; A^*(y^\dagger) + \sqrt{2}\overline{\theta}\overline{\psi}(y^\dagger) + \overline{\theta}\overline{\theta}F^*(y^\dagger) \tag{2.24}$$

として得られます。このように chiral superfield というのは complex scalar と 2 成分の Weyl 場を含んでいるもので、普通の標準模型を超対称化したときの quark や lepton、あるいは Higgs scalar っていうのはこういう supermultiplet で記述されることになります。

もう 1 つ注意しておく必要があるのは component field の変換性です。

$$\delta_\xi A \;=\; \sqrt{2}\xi\psi \tag{2.25}$$
$$\delta_\xi \psi \;=\; i\sqrt{2}\sigma^m\overline{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F \tag{2.26}$$
$$\delta_\xi F \;=\; i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^m\partial_m\psi \qquad \text{(total derivative)} \tag{2.27}$$

ここで、$\delta_\xi F$ の部分に注目すると全微分になっています。chiral multiplet の積は chiral multiplet になるということがすぐにわかりますので、そうすると、Lagrangian を構成するときに chiral multiplet の積の一番最後の $\theta\theta$ の部分の項（F-term)をとってくればその super 変換は全微分になって supersymmetric な Lagrangian を構成することができるということがわかります。

vector multiplet $\quad (V = V^\dagger)$

もう 1 つは vector multiplet ですが、これは gauge 場を含む supermultiplet を記述することになります。これは展開して書くとこんなふうに書けます。

$$\begin{aligned}
V(x,\theta,\overline{\theta}) \;=\;& C(x) + i\theta\chi(x) - i\overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta\left[M(x)+iN(x)\right] - \frac{i}{2}\overline{\theta}\overline{\theta}\left[M(x)-iN(x)\right] \\
&-\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\overline{\theta}\left[\overline{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\overline{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right] - i\overline{\theta}\overline{\theta}\theta\left[\lambda(x) - \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\overline{\chi(x)}\right] \\
&+\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$C, D, M, N, v_m \quad : \quad \text{real field}$$

ここで、C, D, N とか v_m というのは real field です。これって非常にごちゃごちゃしたものなんですけど、ある特殊な変換をしてやると、すっきりした形にすることができます。

今、Φ と $\Phi^\dagger$ の和を、さっき使ってた座標 y^m ではなくて x^m で書いてみます。そうするとこういうものがでてきます。

$$\begin{aligned}
\Phi + \Phi^\dagger \;=\;& A + A^* + \sqrt{2}(\theta\psi + \overline{\theta}\overline{\psi}) + \theta\theta F + \overline{\theta}\overline{\theta}F^* + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m(A - A^*) \\
&+\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\sigma}^m\partial_m\psi + \frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\theta}\overline{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\overline{\psi} + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\Box(A + A^*)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

それで、特に

$$V \quad \to \quad V + \Phi + \Phi^\dagger$$

という変換をしてみるとこんな結果がわかります。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C & \to & C + A + A^* \\ \chi & \to & \chi - \sqrt{2} i \psi \\ M + iN & \to & M + iN - 2iF \\ v_m & \to & v_m - i\partial(A - A^*) \ \Rightarrow \quad \text{Abelian gauge tr.} \\ \lambda, D & : & \text{invariant} \end{array} \right.$$

それで今、A と ψ と F を適当にとってやると、この変換でもって、C と χ と $M+iN$ というのを消すことができます。ただし、C の変換の部分は A の実数部分だけを使ってて、A の虚数部分は残りますから、v^m の変換の部分は残ってくるというわけです。 つまり、この変換というのは superfield の余分な成分を 0 にし、なおかつ残った変換の自由度は vector 場の Abelian の gauge 変換になっています。こういうふうに C とか χ とか $M+iN$ を 0 にとる gauge は普通 Wess-Zumino gauge と呼ばれてて、vector multiplet を standard model の supersymmetric 化等に使うときは通常、この Wess-Zumino gauge をとります。

$$C, \chi, M, N \quad = \quad 0 \qquad : \text{Wess-Zumino gauge}$$

その時に V というのは非常に簡単な形になって、さっきの展開をもう 1 度繰り返して書くとこういうふうに書けます。

$$V \quad = \quad -\theta\sigma^m\overline{\theta} v_m(x) + i\theta\theta\overline{\theta}\overline{\lambda}(x) - i\overline{\theta}\overline{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta} D(x) \tag{2.30}$$

これの 2 乗、3 乗を作ってみると、こういうものになっていることにも注意しておきます。

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V^2 & = & -\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta} v^m v_m \\ V^3 & = & 0 \end{array} \right.$$

それで先ほども言いましたけど、この、Wess-Zumino gauge をとった V に対して、上の変換と言うのは Abelian の gauge 変換に対応する $v_m \to v_m - i\partial(A - A^*)$ の自由度がまだ生き残っています。また、fermionic な partner である λ、およびこの最後の component の D っていうのは (super な gauge 変換に関して) gauge invariant になっていることに注意してください。そういうわけで、これは Abelian の gauge 場を記述する supersymmetric な field になってるということになります。Non-Abelian の場合も同様に Wess-Zumino gauge をとることができます。ただし、この場合には λ や D はもちろん gauge invariant ではありません。

あと必要になってくるのは、gauge 場の kinetic term を作るための superfield です。つまり、supersymmetric な field strength で、それはこのようにして作ればよいということが知られています。

supersymmetric field strength：

$$\begin{cases} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\overline{DD}D_\alpha V \\ \overline{W}_{\dot\alpha} &= -\frac{1}{4}DD\overline{D}_{\dot\alpha}V \end{cases} \tag{2.31}$$

これは、chiral superfield になっていて、さっきの、V を $V+\Phi+\Phi^\dagger$ にするという gauge 変換を施しても不変なことがわかります。

$$\begin{cases} \overline{D}_{\dot\alpha}W_\beta &= 0 \\ W_\alpha &\to W_\alpha \qquad (\text{under } V\to V+\Phi+\Phi^\dagger) \end{cases}$$

そういう意味でも、この W_α というのは、Abelian の場合の supersymmetric な field strength を与えてくれているというのがわかります。W_α の具体的な component 表示は書きませんが、vector supersuperfield の component field の変換性を書いておきます。

component field の変換：

$$\delta_\xi v_m = -i\overline{\lambda}\overline{\sigma}_m\xi + i\overline{\xi}\overline{\sigma}_m\lambda \tag{2.32}$$

$$\delta_\xi\lambda = \sigma^{mn}\xi v_{mn} + i\xi D \tag{2.33}$$

$$\delta_\xi D = \overline{\xi}\overline{\sigma}^m\partial_m\lambda - \xi\sigma^m\partial_m\overline{\lambda} \tag{2.34}$$

この Wess-Zumino gauge の中の部分で先ほど同じように特に注目すべきなのは、$\delta_\xi D$ の部分で、これもまた全微分の形になっています。また先ほど言いましたように、この D というのは Abelian の場合は自動的に gauge 不変なものにもなっています。だから、vector superfield の部分から、super 変換に関して不変な Lagrangian を作ろうとすると、それの最後の項 (D-term) を拾ってくればいいわけです。

supersymmetric Lagrangian

今まで言ったようなことを頭に入れてやると、supersymmetric な Lagrangian を構成することができます。それでもう結果だけ書くことにしますと、

$$\mathcal{L} = \Phi^\dagger\Phi\Big|_D + \Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + \lambda_i\Phi_i\right)}_{\substack{\| \\ W(\Phi):\ \text{superpotential}}}\Bigg|_F + \text{ h.c.}\Bigg] \tag{2.35}$$

ただし、これは local な gauge 不変性を課してない場合です。$\Phi^\dagger$ と Φ の積というのは vector superfield になりますが、それの D-term をとってくると、kinetic term が出てきます。それで、後ろの部分は Φ という chiral superfield だけからできている部分ですが、こういうようなものを普通 superpotential というように呼びます。

それで、これを component で書き下してやりたいんですが、このとき先ほど出てきてた Φ の F-component とか、今は入ってないですが vector superfield V の D-component とい

うのは、kinetic term のない補助場になっています。だから、これらの運動方程式を解いて、補助場を消去してやった結果を書いておくと、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -i\partial_m \overline{\psi}_i \sigma^m \psi_i + A_i^* \Box A_i - \frac{1}{2} m_{ij}\psi_i\psi_j - \frac{1}{2} m_{ij}^* \overline{\psi}_i \overline{\psi}_j \\ &\quad - g_{ijk}\psi_i\psi_j A_k - g_{ijk}^* \overline{\psi}_i \overline{\psi}_j A_k^* - V(A_i, A_j^*) \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$V = F_i F_i^* = \left| \frac{\partial W}{\partial A_i} \right|^2 \quad (\geq 0) \tag{2.37}$$

こんな形になります。2 行目の部分は、fermion-fermion-scalar の部分で、$\frac{1}{3} g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k$ の部分から出てきてるわけですが、これは普通の standard model の中の Yukawa coupling に対応しています。つまり、Yukawa coupling に対応するような部分というのは superpotential の部分から出てきます。さらに、V と書いた部分は scalar potential に対応するものです。V というのは F_i と F_i^* の積になってます。それでこれは必ず 0 以上になってる、というわけです。もし、$F_i = 0$ だと、その時の scalar potential は 0 になってしかも minimum になっています。このことは後で、supersymmetry breaking の話をする時に関係してきます。

R-invariance

もうちょっと、あと 1 つだけやって休憩にさせてください。

もう 1 つは、superpotential の部分と関係してでてくると考えたら一番いいんですが、R-invariance という対称性が supersymmetric な理論の中にはあります。

今、Φ を chiral superfield だとしてください。supersymmetry があると multiplet の boson と fermion は必ず同じ charge を持つかというとそうではなく、こういう変換を考えることができます。

$$R : \begin{cases} \Phi(\theta, x) & \to \quad e^{2ni\alpha}\Phi(e^{-i\alpha}\theta, x) \\ \Phi^\dagger(\overline{\theta}, x) & \to \quad e^{-2ni\alpha}\Phi^\dagger(e^{i\alpha}\overline{\theta}, x) \end{cases}$$

この R-invariance というのは普通の場の理論の時の global 対称性のようなものなんですが、superspace の Grassmann の座標 θ に対しても作用するような chiral 変換になっています。それで、特に注意したいのは、superpotential の R-charge です。supersymmetric な Lagrangian を作るときに superpotential W の F-term をとってきました。F-term をとるということは θ の 2 乗の項をとることですから、R-invariance を課せば W そのものは R-invariant でなくて、ある特定の charge を持たなければいけません。上のような charge convention では $d\theta$ が R-charge 1 で変換してるので、それで invariant になるには、W というのは R-charge -2 をもたないといけないということになります。

$$W(\Phi(\theta, x)) \quad \to \quad e^{-2i\alpha} W(\Phi(e^{-i\alpha}\theta, x)) \tag{2.38}$$

これは supersymmetric な field theory に特有の symmetry になっています。なんか、まだ intro のところだけですが、ここでちょっとお休みにさせてください。

（休憩）

gauge interaction

local gauge symmetryを考えますが、とりあえず今、Abelianの場合を考えます。

$$\Phi_l' = e^{-it_l\Lambda(x)}\Phi_l \tag{2.39}$$
$$\Phi_l'^{\dagger} = e^{+it_l\Lambda(x)}\Phi_l^{\dagger} \tag{2.40}$$
$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^{\dagger}) \tag{2.41}$$
$$\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda(x) = 0$$

t_l は Φ_l の $U(1)$-chargeで V はvector superfield、Λ はchiral superfieldです。

kinetic termの部分は、先ほどの話では $\Phi_l^{\dagger}\Phi_l$ というふうに書けるということを言いました。それで、上のgauge変換をこの先ほどのkinetic termに施してみますと、

$$\Phi_l'^{\dagger}\Phi_l' = \Phi_l^{\dagger}\Phi_l e^{it_l(\Lambda^{\dagger}-\Lambda)} \tag{2.42}$$

というようにおつりが出てきます。それで、このおつりの部分を吸収するようなgauge場をvector superfieldで導入してやればよろしい。それが上の V です。だから、$\Phi_l^{\dagger}e^{t_lV}\Phi_l$ というふうにvector superfieldを入れておけばgauge invariantになります。

で、結局、gauge invariantなLagrangianはこういうふうになります。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\left(W^{\alpha}W_{\alpha} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\right)\Big|_F + \Phi_i^{\dagger}e^{t_iV}\Phi_i\Big|_D + (\left.W(\Phi)\right|_F + \text{ h.c.}) \tag{2.43}$$

DとかFとか書いてるのは先ほど言ってたD-termとかF-termです。もちろん、$U(1)$ gauge invariantにするためにchargeを足したら0になってる項だけが生き残るわけです。それでこれをcomponent fieldで書き換えてやると、ちゃんと通常のgauge kinetic termやgauge interactionが出てくるというふうになっています。

Non-Abelianの場合もほとんど同じようなことができるわけですが、W の定義が若干先ほどのAbelianの場合と異なってきます。この場合、$V = V^aT^a$ をNon-Abelianのgauge場に対応するようなものとしてこんな形になっています。

$$W_{\alpha} = -\frac{1}{4}\overline{DD}e^{-V}D_{\alpha}e^{V} \tag{2.44}$$

V をAbelianにすると、先ほどの結果がでてきますよね。

あと、scalar potentialを書き下してやるとこのようになります。

$$V = \frac{1}{2}D^2 + \sum_i F_i^*F_i \tag{2.45}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_a\left(\sum_i gA_i^{\dagger}T^aA_i\right)^2 + \sum_i\left|\frac{\partial W}{\partial A_i}\right|^2 \tag{2.46}$$

gauge symmetryがあるとchiral superfieldのF-componentのほかにvector superfieldのD-componentからの寄与がscalar potentialに現れます。

それで、だいたい gauge 不変な global な supersymmetric な Lagrangian がどういうように構成されるのかというのを話しました。

non-renormalization theorem

次に、いくつか comment しておいたほうがいいと思われるのは、non-renormalization theorem というものについてです。これはどういうものかと言うと、superpotential W の係数である mass や coupling は繰り込みを受けないという定理です。ここでは結果だけですが、そういうようなことがあります。それで superpotential、つまり F-term の係数は繰り込みを受けないんですが、D-term の部分は log 発散にともなう繰り込みが発生して、kinetic term とか gauge interaction の部分ですが、wave function renormalization、あるいは gauge coupling renormalization が起こります。

2.3 supersymmetry breaking

それで、あと supersymmetry breaking の話について簡単に見ておきます。先ほどの supersymmetry の代数を書き下してやって、spinor の足について trace を取ってやるとこういうものになっています。

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 2\sigma^m_{\alpha\dot\beta}P_m \tag{2.47}$$
$$\downarrow$$
$$H = \frac{1}{4}\left[\overline{Q}_{\dot 1}Q_1 + Q_1\overline{Q}_{\dot 1} + \overline{Q}_{\dot 2}Q_2 + Q_2\overline{Q}_{\dot 2}\right] \tag{2.48}$$

すぐにわかりますように任意の状態 $|\psi\rangle$ を持ってきて、Hamiltonian H の期待値をとってやると、必ず 0 以上になってます。それで真空の energy が 0 だと、$Q|0\rangle = 0$ ということになり真空は supersymmetric になっています。真空の energy が nonzero になると、Q が真空にかかったときに 0 でなくなり、supersymmetry が破れているということになります。

$$\langle\psi| H |\psi\rangle \geq 0 \qquad : \text{for arbitrary state } |\psi\rangle$$
$$\langle 0| H |0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Q|0\rangle = 0 \quad : \text{ supersymmetric vacuum}$$

だから、さきほど scalar potential を書いたときに、$V = F_i^* F_i \geq 0$ というふうになったんですが、今のことから分かるように F_i の真空期待値が 0 だと真空は supersymmetric であり、non-zero になると supersymmetry が破れてるということになります。つまり、chiral superfield の F-term が supersymmetry の order parameter になっているということです。

O'Raifeartaigh type

spontaneous breaking の mechanism はいろいろ知られてます。あんまり詳しく話しませんが、1 つは、O'Raifeartaigh type の breaking と言われるものです、これは superpotential をうまくとると chiral superfield の F が 0 でないようにできて supersymmetry が破れるという type のものです。例えば、次のような Lagrangian がこの type です。

$$\mathcal{L} = (\lambda\Phi_0 + m\Phi_1\Phi_2 + g\Phi_0\Phi_1\Phi_1)|_F + \text{ h.c.} \tag{2.49}$$

実際ここで解いたりしませんが、$F_i^* = \frac{\partial W}{\partial A_i} = 0$ の解はありません。

Fayet-Iliopoulos type

もう1つ有名なものは Fayet-Iliopoulos type の model と言われるものです。これは $U(1)$-gauge symmetry を持つものを考えます。さっき言いましたように $U(1)$ の場合、vector superfield の D-term と言うのは gauge 不変でした。そこで先程書いた $U(1)$ symmetric な Lagrangian の中に vector superfield の D-term を次のように付け加えておきます。

$$\mathcal{L} = m\Phi_+\Phi_-|_F + \text{ h.c.} + \kappa V|_D \quad : \text{ Fayet-Iliopoulos D-term} \tag{2.50}$$

で、そういう風にして scalar potential を書くとこうなります。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}D^2 + \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial A_i}\right|^2 & (2.51)\\ &= \frac{1}{2}\left(A_+^\dagger A_+ - A_-^\dagger A_- + \kappa\right)^2 + m|A_+|^2 + m|A_-|^2 & (2.52)\end{aligned}$$

それで supersymmetry が破れていない真空期待値をさがしてやるんですが、κD のような項が入っていると、$D = F_i = 0$ の解はなくて supersymmetry は破れます。

Abelian の場合には vector superfield の D-term が gauge invariant になってるために、こんな κD のような項をいれることができます。このような項のことを Fayet-Iliopoulos D-term と呼んでいて、最近の superstring の現象論の中で、supersymmetry breaking を考えるときにいろいろ話題になっています。

supersymmetry $\otimes$ gauge symmetry breaking

もう1つ、supersymmetry と gauge symmetry の破れ方の中で、いろいろ現象論的な議論をするときに注意したいことなんですが、supersymmetry は破れていないんだけど gauge symmetry は破れるというようなことが起こりうるかどうかというのは非常に問題になってきます。それは何故かと言うと、例えば中間 energy scale を supersymmetric model の中に導入したいというときに、supersymmetry を破らずになおかつその scale を導入するというのはなかなか難しい。で、そういうような場合に何か gauge symmetry があって、そのために supersymmetry が破れないと言うようなことが起きると非常に都合がよいわけです。で、例えばこれはいろんな text に載っている例ですが、こんな model を考えてみます。

$$\mathcal{L} = (\frac{1}{2}m\Phi^2 + \mu\Phi_+\Phi_- + \lambda\Phi + g\Phi_+\Phi_-\Phi)|_F + \text{ h.c.} \tag{2.53}$$

$+$ とか $-$ というのは charge が $+1$、-1、何も書いていないのは charge が 0 です。 それで、この系について補助場の運動方程式を解いて、$F_i = 0$ となる条件を書き下してやると、こんなものになります。

$$\left\{\begin{aligned} \lambda + ma + ga_+a_- &= 0\\ a_-(\mu + ga) &= 0\\ a_+(\mu + ga) &= 0\end{aligned}\right. \tag{2.54}$$

field space の中で scalar potential への F-term contribution が 0 になるようなものを F-flat direction というようなふうに呼びます。簡単に分かりますが、

$$\begin{cases} (1) \quad a_+ = a_- = 0, \quad a = -\dfrac{\lambda}{m} \\ (2) \quad a = -\dfrac{\mu}{g}, \quad a_+ a_- = -\dfrac{1}{g}\left(\lambda - \dfrac{m\mu}{g}\right) \end{cases} \tag{2.55}$$

こういう解がでてきます。今 F-flat direction が上のようにある訳ですね。そうすると、$F_i = 0$ ですから supersymmetry はいまの段階で破れていません。

そこで今 global charge だと思っていたやつを gauge 化してみます。初めに考えていたやつは U(1) が global である限りは、scalar potential への D-term の contribution はありません。だから、F-flat の部分だけを見ていればよかったのですが、local な対称性と思うと、scalar potential への D-term からの contribution がでてきます。

$$V \;=\; \frac{e^2}{2}\left(a_+^* a_+ - a_-^* a_- + \frac{\kappa}{e}\right)^2 \tag{2.56}$$

今 supersymmetry が破れないという条件は $D = 0$ (D-flat direction) です。 そのときには、a_+ も a_- も 0 でないようなところ (global のときの (2) の場合) に解が出てきます。従って、こういうような場合は、supersymmetry は破れてないのですが、gauge symmetry が破れています。

supersymmetry が破れていないわけですから、gauge 階層性等を考えようとしたときに、その scale は原理的にはどこに持っていってもいいということになります。だから 10^{13} GeV とか、現象論的に見たときに非常に都合のいいような scale に、 こういう類の symmetry breaking を考えることで scale を導入することが出来ます。とくに今言ったような F-flat とか D-flat な方向というのは理論的にも現象論的にも非常に重要な field-space の subspace になっています。

2.4 soft breaking term

これまでは、spontaneous supersymmetry breaking の話をしてきましたが、最後に soft breaking でどのようなものがあるかをお話しします。やはり 2 次発散のない理論を考えるのですが、要するにだいたい 1TeV を超えるような scale による補正がでてこなければ良いわけです。そこで、ultraviolet な構造には関与しないような、supersymmetry の破れの項を導入します。つまり、今考えたいのは、supersymmetry を explicit に破るが 2 次発散を出さないような、いわゆる soft breaking term を入れた model です。

それで、そういう項としてどういうものがあるのかが問題になります。一番あからさまに見るのためには、spurion field というやつを導入して supergraph を使って調べるのが良いみたいですが、そのような soft breaking term の list は完全に作られていまして、こういう項です。

soft breaking terms	$m^2\varphi^*\varphi$	$m^2(\varphi^2+\varphi^{*2})$	$\mu(\varphi^3+\varphi^{*3})$	$M\lambda\lambda$
	squark mass	μ-term	Yukawa	gaugino mass

ここで、φ は chiral multiplet の中の scalar 場で、λ というのは gaugino、つまり gauge 場の superpartner の fermion です。普通の MSSM の中でいうと、一番左の項が squark の mass term、つまり quark の superpartner の scalar に対する mass term で、二番目の項が、Higgs の μ term に対応するところの mass term、三番目は scalar の 3 点ですが、Yukawa coupling に対応する breaking term です。最後が gauge fermion、つまり gluino とか wino とかの mass になっています。この list を見てみると、次元を持った項は皆 soft breaking term であるようににみえますが、唯一例外があって chiral multiplet の中の fermion の mass term $\mu\psi\psi$ は soft breaking term にはなっていないんです。これはちょっとびっくりすることですね。$m^2\varphi^*\varphi$ があってなんでこれがないのということなんですが、これは coupling の部分が関与してきますのでそう話しは単純ではなくて、とにかく soft breaking term というのはこういうものに限られています。

global な supersymmetry をもった model の話の必要な部分は大体これぐらいです。

3 Supergravity

3.1 local supersymmetry

supergravity というのは、これまで議論してきた global な supersymmetry を local にしたものです。local な supersymmetry ということから、先ほどの supersymmetry 代数 $\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} = 2\sigma^m_{\alpha\dot\beta}P_m$ に変換 parameter $\xi, \overline{\eta}$ を入れて書いたものを、

$$\begin{aligned} \left[\xi Q, \overline{\eta}\overline{Q}\right] = 2\xi\sigma^m\overline{\eta}P_m \quad &\Rightarrow \quad 2\xi(x)\sigma^m\overline{\eta}(x)\partial_m \\ \Big(\xi, \overline{\eta} \quad &\Rightarrow \quad \xi(x), \overline{\eta}(x)\Big) \end{aligned} \tag{3.1}$$

というように、$\xi(x), \overline{\eta}(x)$ という local な parameter で置き換えてみます。すると、これはまさに x^m を local な parameter で shift する

$$x^m \to x^m + \xi(x)\sigma^m\overline{\eta}(x) \tag{3.2}$$

という infinitesimal な一般座標変換になっていて、こういう対称性があることから、local な supersymmetry を持った理論の中に gravity が自然に取り込まれることが分かります。そして、このことが supergravity と呼ばれる所以になっています。

こういう symmetry で不変な Lagrangian を作ることは厄介で、普通 Noether method といわれる方法とか、off-shell のいろいろなテクニックを使って構成するわけですが、ここでは結果だけを使います。また、以下の議論では、gravity の部分の効果は、low energy にもっていく、つまり Planck scale を無限大にもっていくと、それほど本質的でなくなるので、それ以外の supergravity の中での matter と gauge の interaction を見ていくことにし

ます。ただし、supersymmetry breaking を low energy に引っ張ってくる時には、gravity の効果が重要になってきます。

3.2 coupling of matter and gauge

まず、chiral multiplet、gauge multiplet、gauge 場の field strength を次のように書くことにします。i は gauge の足で、α は gauge 群の adjoint の足です。

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{chiral multiplet} & (z_i, \chi_i) & i\,:\,\text{gauge index} \\ \text{gauge fermion} & \lambda^\alpha & \alpha\,:\,\text{adjoint rep. of G} \\ \text{field strength} & F^\alpha_{\mu\nu} & \end{array}\right. \tag{3.3}$$

ここでは、Lagrangian の bosonic part だけを見ることにし、fermionic part の方は非常に複雑なので省きますが、具体的な形は、1983 年の Cremmer et al. の Nuclear Physics の論文* の中に書かれています。

$$\begin{array}{rcll} e^{-1}\mathcal{L}_B &=& e^{-G}\left(3 + G_k (G^{-1})^k_l G^l\right) & \text{F-term} \\ && -\frac{1}{2}\tilde{g}^2 \,\mathrm{Re}\, f_{\alpha\beta}{}^{-1}\left(G^i T^\alpha{}_i{}^j z_j\right)\left(G^k T^\beta{}_k{}^l z_l\right) & \text{D-term} \quad \Big\} \text{ scalar potential} \\ && -\frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\, f_{\alpha\beta} F^\alpha_{\mu\nu} F^{\beta\mu\nu} & \text{gauge kinetic term} \\ && +\frac{i}{4}\,\mathrm{Im}\, f_{\alpha\beta} F^\alpha_{\mu\nu} \tilde{F}^{\beta\mu\nu} & \theta\text{-term} \\ && +G^i_j D_\mu z^*_i D^\mu z^j & \text{scalar kinetic term} \\ && -\frac{1}{2}R & \text{Einstein gravity} \end{array} \tag{3.4}$$

$$\left(\begin{array}{l} e \equiv \det e_\mu{}^a \\ e_\mu{}^a \;:\; \text{vierbein} \;\left[\, g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\, e_\mu{}^a e_\nu{}^b, \;\; \eta_{ab} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)\,\right] \\ \tilde{g} \quad:\; \text{gauge coupling constant} \\ T^\alpha{}_i{}^j:\; \text{generator of gauge group} \end{array}\right) \tag{3.5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} G(z^i, z^*_j) \;=\; K - \ln|W|^2 \;:\; \text{generalized Kähler potential} \\ \qquad\qquad G_k = \dfrac{\partial G}{\partial z^k}\,,\;\; G^l = \dfrac{\partial G}{\partial z^*_l}\,,\;\; G^l_k = \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^k \partial z^*_l} \\ K(z^i, z^*_j) \;:\; \text{Kähler potential} \\ W(z^i) \qquad :\; \text{superpotential} \\ f_{\alpha\beta}(z^i) \quad\; :\; \text{gauge kinetic function} \end{array}\right. \tag{3.6}$$

G というのは、generalized Kähler potential と呼ばれているもので、ここで与えた定義は、第 1 項の先頭の exponential の上が $-G$ となるようにした場合のものです。この supergravity

* E. Cremmer, S. Ferrara, L. Grardello and A. van Proeyen, *Nucl. Phys.* **B212** (1983) 413

の Lagrangian をみると、K と W は、G を通してこういう組合わせでしか現れず、独立には出て来れないことが分かります。

ここで注意しておきたいことが 2 つあって、1 つは、G や Kähler potential K が z^i と z_j^* の関数になっている一方、superpotential W や gauge kinetic function $f_{\alpha\beta}$ は chiral field z^i だけの関数になっているということと、もう 1 つは、これらの関数は任意関数、つまり supersymmetry や gauge symmetry だけからは、これらの関数形は一切決まらないものになっているということです。

質問： G が、model によらず K と $\ln|W|^2$ で書けるということは、結局、model を決めるのは K と W の形ということですか？

末松： そうです。supergravity の Lagrangian の中に出てくるときには、K と $\ln|W|^2$ の linear combination というもので書けるわけですが、field theory の枠組みの中ではこの K と W の関数形、つまり G の関数形を決める原理はありません。ところが、あとでお話しするように、supergravity を superstring の low energy effective theory と考えたときには、こういうものの関数形にはある程度制限がついてきます。

3.3 spontaneous supersymmetry breaking

ここでは、local にしたときの supersymmetry breaking がどうなるかを見ていきます。先ほど言ったように supersymmetry が破れたときには Goldstone fermion が出てきましたが、今度の場合も、spin 1/2 の fermion、つまり chiral superfield の superpartner χ と gaugino λ の super 変換を見てやれば、どういう破れをしたときに、どれが Goldstone fermion になるのかを調べることが出来ます。この変換も先ほど言った論文、あるいはいろいろな review に具体的に書かれています。spinor の chirality を一切書いていないから、いいかげんな書き方ですが、次のようになっています。

$$\left\{\begin{array}{lcl}\delta\chi_i &=& \dfrac{1}{2}\,\not{D}z_i\xi-\dfrac{1}{2}\xi F_i+\dfrac{1}{4}\chi_i\left(G_j\overline{\xi}\chi^j\right)\\ \delta\lambda^\alpha &=& \dfrac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F^\alpha_{\mu\nu}\xi+\dfrac{1}{2}\xi D^\alpha-\dfrac{1}{4}\lambda^\alpha\left(G^i\overline{\xi}\chi_i\right)\end{array}\right. \tag{3.7}$$

χ_i や λ^α に対する auxiliary field F_i、D_α が non-zero になると、(3.7) 式のそれぞれの第 2 項目の部分が constant になり、super 変換のもとで constant な shift が起こります。まさに、これが Goldstone 的な振る舞いを示しているわけで、この場合も、supersymmetry breaking の order parameter は F_i と D_α になります。これらがどう書けるかを実際に見てやれば、どこの部分で破れて、どれが Goldstone fermion になるかが分かります。

$$F_i = e^{-G/2}(G^{-1})_i^jG_j+\frac{1}{4}f_{\alpha\beta k}(G^{-1})_i^k\lambda^\alpha\lambda^\beta-(G^{-1})_i^kG_k^{jl}\chi_j\chi_l-\frac{1}{2}\chi_i\left(G_j\chi^j\right) \tag{3.8}$$

$$D_\alpha = i\,\mathrm{Re}\,f^{-1}_{\alpha\beta}\left(-\tilde{g}G^iT^{\beta}{}_i{}^jz_j+\frac{1}{2}if^i_{\beta\gamma}\overline{\chi_i}\lambda^\gamma-\frac{1}{2}if^*_{\beta\gamma i}\overline{\chi^i}\lambda^\gamma\right)+\frac{1}{2}\lambda^\alpha\left(G_i\overline{\chi^i}\right) \tag{3.9}$$

例えば、F_i の第 1 項目はまさに superpotential に関した部分になるわけですが、そこが non-zero になることで local supersymmetry が破れるとか、あるいは、F_i の第 2 項目にある $\lambda\lambda$ が condense して、F_i が non-zero になり破れるとか、そういうようなことが、この F と

か D の構造を見てやると分かります。そして、scalar 場が真空期待値を持ったり、fermion が condense したりしたときに、F_i とか D_α がどのように non-zero になってくるかを見てやれば、どれが Goldstone fermion になるかということも分かります。例えば、何らかの contribution が F についても D についても non-zero であれば、Goldstone fermion は χ と λ の linear combination になるわけです。

質問： F や D の形が複雑でよく分からないのですが、flat direction というものを、local の場合も考えることができるのでしょうか？

末松： F-term を考えたときには、その field に対する superpotential が存在すれば、多くの場合即座に flat direction はなくなってしまいます。だから、何らかの symmetry の結果、その field に対する superpotential がなければ、少なくとも繰り込み可能な polynomial の範囲で、F の部分は flat になります。例えば、moduli と呼ばれる field は、そのようなものになっています。
もし、それがさらに gauge interaction をするようであれば、D の部分が 0 になるような field space を持っていないとだめです。例えば、Abelian の場合にはさっき言ったような形で、charge が違う field があれば簡単に作ることはできます。しかし、D に関して flat な field space に対して、superpotential がなくなるかどうかは、一般的にはすぐに答えられません。

質問： gaugino condensation で第 2 項が non-zero になり SUSY が破れるというのは分かりますが、F_i の第 1 項が non-zero になることはありますか？

末松： もちろん、第 1 項が non-zero になるときもあります。一般には、model によりますが、これから具体的な場合についてそれを見ていきます。

まず、F-term breaking について考えてみます。つまり、

$$F_i \neq 0 \tag{3.10}$$

という状況ですが、こうするために 特に G_i が 0 でない場合を考えます。

$$G_i \neq 0 \tag{3.11}$$

実際こうすると、F_i の第 1 項は $W \neq 0$ の限り絶対に 0 になれません。これは何故かというと、(3.4) 式を見ると、$(G^{-1})_i^j$ というのは、scalar 場の kinetic term を与える metric の inverse になっていて 0 になれません。だから、G_i が non-zero だと、第 1 項は必ず non-zero で、F_i に効いてきます。F_i が non-zero ということから、χ_i が Goldstone fermion になることが分かります。ところで、先ほど書かなかった Lagrangian の fermionic な部分のうち、gravitino ψ_μ と Goldstone fermion χ_i に関して 2 次の項を書いてみると、

$$e^{-G/2}\overline{\psi}_\mu \sigma^{\mu\nu}\psi^\mu - \underbrace{e^{-G/2}G^i}_{\text{non-zero}}\,\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu\chi_i + e^{-G/2}\left[G^{ij} - G^iG^j - G^i(G^{-1})_l^k G_k^{lj}\right]\overline{\chi}_i\chi_j \tag{3.12}$$

となっていて、第 2 項の係数が non-zero なので、gravitino と Goldstone fermion χ_i との間に mixing mass term を生じています。この gravitino–χ_i mixing を具体的に解いてやると、gravitino mass $m_{3/2}$ は、

$$m_{3/2} \ = \ e^{-G/2} \tag{3.13}$$

で与えられます。このように super-Higgs mechanismが起こって、gravitino は mass を持つことになります。

次に、(3.4) 式の scalar potential の部分に注目します。一般に、scalar potential は次のように書けます。

$$V \;=\; -e^{-G}\left[3 + G_k (G^{-1})^k_l G^l\right] + \frac{1}{2} f^{-1}_{\alpha\beta} D^\alpha D^\beta \qquad \left(D^\alpha \equiv \tilde{g} G^i T^{\alpha}{}_i{}^j z_j \right) \tag{3.14}$$

ここで、いま supersymmetryが unbroken であるという場合を考えてみると、

$$G_k \;=\; 0\,,\;\; D^\alpha \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad V \;=\; -3e^{-G} \leq 0 \tag{3.15}$$

となり、potentialは0以下になってしまいます。global の場合、supersymmetryが破れていなければ potentialは必ず0ですが、localな場合は negativeなものも許されていて、global と localでは、かなり違う事情になっているようです。

今度は、もう少し特殊な場合、通常 minimal kinetic term あるいは minimal model と呼ばれる場合に話を限ってみます。

$$G^k_l \;=\; -\delta^k_l\,, \quad f_{\alpha\beta} \;=\; \delta_{\alpha\beta} \tag{3.16}$$

これを、(3.14) 式の scalar potential にほうり込んでやると、

$$V \;=\; e^{-G_0}\left[-3 + G_{0k} G_0{}^k\right] + \frac{1}{2} D_{0\alpha} D_0{}^\alpha \tag{3.17}$$

こんな形になります。0をつけたのは、(3.16) 式の場合という意味です。supersymmetryが破れるとすれば、G_{0k} が non-zeroかつ $D_{0\alpha}$ が non-zero、あるいは、片一方だけが non-zero という場合で、

$$G_{0k} \;\neq\; 0 \quad \text{and/or} \quad D_{0\alpha} \;\neq\; 0 \quad \Rightarrow \quad V \;\gtreqqless\; 0 \tag{3.18}$$

このとき、V の値は、0 であってもいいし、positive であってもいいし、negativeであってもいいというなんでも許される状況になっています。特に注意したいのは、supersymmetry が破れても $V = 0$ という場合が許されているということです。これがどういうことかというと、global の場合には、supersymmetry が破れると、V が non-zero になり cosmological constant が 0 でなくなってしまうわけですが、local supersymmetry の場合には、cosmological constant が 0で、なおかつ supersymmetryが破れるということが可能になるということです。

質問： いろいろ term を解析してみると、global SUSY と違って、local SUSY の場合は potential term の正負は supersymmetry breaking に全然関係していないということですか？

末松： はい、それで結構です。global SUSY の場合は potential は positive ですが、今の場合は何でもありになっています。そして、特に $V = 0$ の場合というのは、cosmological constant が非常に小さいということと何かうまく整合するような model が作れる可能性を与えてくれるのではないかということです。

質問： 非常に上の方の scale で cosmological constant が 0 であった時に low energy で 0 であるっていうことは保証されるんですか？
末松： いや、それは保証されません。だから、cosmological constant が 0 であるというのは、low energy ないしは少なくとも今観測しているような scale まで引っ張ってきたときに成り立っていないと困るわけです。
質問： string 理論が、cosmological constant が 0 になるような理論が作れたとしても、それだけでは不満だということですか？
末松： そうですね。第 0 近似として、0 であるということが、Planck scale の辺りであったとしても構わないわけですが、今言ったような low energy でどうなるかという問題をはらんでいるわけです。

質問： いろんな scalar の真空期待値っていうのは、potential を minimum にするように選ばれるものだと思うのですが、正にも負にもなり得るんだったら、負の方が選ばれるのではないのでしょうか？
末松： model を決めればいずれかの場合に定まるという意味です。

質問： 基本的な質問ですが、直感的に global の場合には、fermion の vacuum energy と boson の vacuum energy が cancel して、vacuum energy が 0 というのが global SUSY の場合ですが、local 化することによって、それがどこにでもとれるというのは、何が変わったからですか？
末松： 途中の計算を follow したことがないんでわからないんですけど、ここの $-e^{-G}[3+\cdots]$っていう定数が現れるのが essential で、計算をずっと follow すればどこから出て来るのか分かるはずです。

ここでさらに、D-term からの contribution を無視し、cosmological constant が 0 であるような場合に話を限ってみます。そうすると (3.17) 式から、

$$D_{0\alpha} \;=\; 0\,,\;\; V \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad G_{0k}{G_0}^k \;=\; 3 \tag{3.19}$$

となり、$G_{0k} = \sqrt{3}$ ということが分かります。

質問： そこで $V = 0$ としたのは要請ですか？
末松： 要請ではありません。例えば、cosmological constant $= 0$ のような model を考えたいということのために、とりあえずこう置いてみただけです。

質問： (3.17) 式の potential で、$G_{0k}{G_0}^k$ と書いた部分が 0 の方が、potential が低いような気がするんですが。
末松： $G_{0k}{G_0}^k$ の中身がどうなるかというのは、model によるわけです。だから、ある model を考えたときにはそこは 0 にならなくて、例えば下限が 3 ということがもちろんあるわけで、今はそういう場合に限って議論をしたと思って下さい。scalar potential の minimum を調べた結果こうなったとかいう議論ではありません。

また gravitino の mass は、先ほど $\exp(-G/2)$ と書きましたが、reduced Planck mass M を 1 においたものなので、M を入れて書くと次のようになります。

$$m_{3/2} \;=\; Me^{-G_0/2} \tag{3.20}$$

$$\left(\begin{array}{rcll} M &=& 1/\kappa & :\ \text{reduced Planck mass} \\ \kappa &=& \dfrac{\sqrt{8\pi}}{M_{\rm pl}} & \equiv\ 1 \end{array}\right) \tag{3.21}$$

ところで、supersymmetryが破れるscaleの2乗 ${M_S}^2$ は、F-termの期待値で与えられて、それがどうなっているかというと、

$$
\begin{aligned}
{M_S}^2 = F_k &= M^2 e^{-G_0/2} G_{0k} &(3.22)\\
&= \sqrt{3} M m_{3/2} &(3.23)
\end{aligned}
$$

というように書き表すことができます。(3.8) 式を見れば、今minimalなので $(G^{-1})_i^j$ は1で、dimensionを合わせると (3.22) 式が出てきて、さらに $G_{0k} = \sqrt{3}$ とgravitino mass $m_{3/2}$ の (3.20) 式を使えば、(3.23) 式が出てくることが分かります。これを解くと、gravitinoのmassがどの程度になるか評価できます。

$$
m_{3/2} = \frac{{M_S}^2}{\sqrt{3} M} \tag{3.24}
$$

この $m_{3/2}$ というscaleは、後でお話しするようにさっき言ったsoft breaking termを特徴づけているので、TeVぐらいのweak scaleにしたいわけですが、そのとき M_S をどの程度に持っていけるかを考えてみます。そうすると、$m_{3/2}$ はPlanck scale分の1でsuppressされてるわけですから、M_S というlocal supersymmetryが破れるscaleはかなり大きくできます。一方、最近gauge mediated supersymmetry breakingが非常に盛んに研究されてますが、その時は、分母にある M というscaleが、gauge symmetryの破れるscaleになるので、supersymmetry breaking のscaleは低くなる、あるいはgravitinoが非常に軽くなってきます。そこの辺に、最近議論されているgauge mediatedとgravity mediatedの破れの違いがあるということです。

もう1つ、supersymmetry breakingでよく議論されるのはgaugino condensationです。

$$
\lambda\lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad F \neq 0 \tag{3.25}
$$

gauge相互作用がstrongになって、F-termの第2項目にあるgauginoのpairがcondenseすれば、F-termは0でなくなりsupersymmetryが破れます。

さらにもう1つ、今まではF-term breakingの特徴について話しましたが、D-term breakingの時には、(3.9) の第1項目の部分で破ってやれば良い。もちろんこの場合、gauginoがGoldstone fermionになります。

localにした時のsupersymmetryの破れについては以上です。stringに話を持っていった場合も、stringのspectrumをeffective field theoryの形に直した結果、Kähler potentialやsuperpotential、gauge kinetic functionがどういう特徴を持つようになるかが重要で、それを踏まえた上でphenomenologyを議論することになります。そういう意味で、今話したようなsupersymmetricなmodelの特徴とかsupergravityの特徴をいろいろと押さえておくことが一番基本的な部分になります。

4 Heterotic string

今日はまず Heterotic string がどんなものかを簡単にお話しします* 。formal な部分については九後さんがお話しされると思いますので、ここでは最低限必要と思われるものをお話しします。

string というのは何か 1 次元的な広がりを持った紐です。紐がずっと伝搬するわけですから、紐の伸びているの方向を σ で固有時間方向を τ で parameterize すれば、紐の軌跡は 2 つの parameter (σ, τ) (string の world sheet と呼ばれます) で parameterize されます。

4.1 string (bosonic string)

今その string variable を X^M と書きます。M というのは時空の足です。

$$X^M(\tau, \sigma) \qquad M = 1, \cdots, D \tag{4.1}$$

ここでは closed string というものに限って話しをします。string が閉じているということは周期境界条件をおけば良いということです。だから、π だけ σ をずらしたときもとに戻るという条件をおけば閉じているということを取り入れることができます。

$$X^M(\tau, \sigma + \pi) = X^M(\tau, \sigma) \qquad (0 \leq \sigma \leq \pi) \tag{4.2}$$

この string variable の満たす action として

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^M \partial_\beta X_M \qquad (\alpha, \beta = \tau, \sigma) \tag{4.3}$$

$h^{\alpha\beta}$ は 2 次元の面の metric です。T と書いてあるのは string tension というものです。こういう action は例えば τ と σ に対する reparametrization invariance や Weyl rescaling に対する不変性という非常に高い対称性を持っています。

$$\text{reparametrization :} \quad \delta X^\mu = \zeta^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \quad \delta h^{\alpha\beta} = \zeta^\gamma \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \zeta^\alpha h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \zeta^\beta h^{\alpha\gamma} \tag{4.4}$$

$$\text{Weyl scaling :} \quad \delta h^{\alpha\beta} = \Lambda h^{\alpha\beta} \tag{4.5}$$

このような非常に高い対称性を持つ理論を量子化しようとすると拘束系の量子化というようなものになってきます。で、そういうような量子化の場合に anomaly というものが現れ、理論を consistent に量子化することができないというようなことが一般に起きます。今の場合にもそれに対応することが起こっていて、次元の D を 26 に取ったときのみ anomaly のない理論が作れます。

この X^μ の superpartner を入れた model を superstring と呼ぶと、superstring の場合には 10 次元という特別な次元でのみ consistent な量子化ができる事が知られています。

$$\text{bosonic string :} \quad D = 26 \tag{4.6}$$

$$\text{superstring :} \quad D = 10 \tag{4.7}$$

* この章の string に関する説明は全く不充分なものです。詳しくは Green, Schwarz and Witten のテキスト [4] 等を参照して下さい。

このようにして特殊な次元が現れるわけです。

今、(4.3) において conformal gauge $h^{\alpha\beta} = h\eta^{\alpha\beta}$ をとり、X^M に関する運動方程式 $\partial^\alpha\partial_\alpha X^M = 0$ の平面波解で X^M を展開することを考えます。

$$\begin{aligned} X^M(\tau,\sigma) &= X_L^M(\tau-\sigma) + X_R^M(\tau+\sigma) &(4.8)\\ X_L^M(\tau-\sigma) &= \frac{1}{2}x^M + \frac{1}{2}p^M(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\widetilde{\alpha}_n^M}{n}e^{-2in(\tau-\sigma)} &(4.9)\\ X_R^M(\tau-\sigma) &= \frac{1}{2}x^M + \frac{1}{2}p^M(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^M}{n}e^{-2in(\tau+\sigma)} &(4.10)\end{aligned}$$

これを正準量子化することにより、string に励起される状態に対する mass operator が得られます。

$$\frac{1}{8}m^2 = N + \widetilde{N} - 2 \tag{4.11}$$

ここで、N と $\widetilde{N}$ は X_L^M と X_R^M の oscillator 部分の occupation number operator を表します。

4.2 heterotic string

今の closed string の場合は閉じた紐の上を右回りに回る mode X_R^M と左回りに回る mode X_L^M は完全に独立な mode として考えることができます。それぞれ left mover、right mover というふうに通常呼ばれていますが、この右回りと左回りの mode に対して別々の string 模型を対応させた model を作ることができて、そういう model を heterotic string と呼んでいます。とくに left mover のほうを bosonic string に、

$$\widetilde{X}_L^M(\tau,\sigma) \qquad M = 1,\cdots,26 \tag{4.12}$$

right mover に対しては superstring に、

$$\begin{aligned} &X_R^\mu(\tau,\sigma) \qquad \mu = 1,\cdots,10 &(4.13)\\ &S_\alpha(\tau,\sigma) &(4.14)\end{aligned}$$

にしたものが Gross et al. により提案された heterotic string です [5]。そうすると左回りは 26 次元、右回りは 10 次元というような左右で違ったような string 模型になります。

質問： left mover が 26 次元で right mover が 10 次元という考え方をするのは直感的に良く分からない。left と right は運動方程式を解いて別れるのですが、action をかいた時点で left が 26 次元で right が 10 次元と勝手にわかれていいのですか？

末松： conformal gauge という gauge で運動方程式を書いてやると、普通の 2 次元の波動方程式になります。そうすると、左回りと右回りを完全に分離できます。2 つが独立な自由度になります。この別々の自由度に対して、一方に対しては bosonic string を、もう一方については superstring を考えるとことは可能です。それが実際に consistent な理論になるかはもう少しいろいろ議論が必要です。

ここで、torus compact 化といって left mover の 11 から 26 次元部分を半径 R の小さなトーラス状の空間に丸めこむようなようなことを考えます。

そして、ここの部分の自由度を gauge の自由度と読み替えます。このために、$\widetilde{X}_L^I$ について、$\widetilde{X}_L^I$ を前と同様に mode 展開すると、

$$\widetilde{X}_L^{I=11,\cdots,26}(\tau-\sigma) = x^I + p^I(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\widetilde{\alpha}_n^I}{n}e^{-2in(\tau-\sigma)} \tag{4.15}$$

のようになり、$\widetilde{X}_L^I \sim \widetilde{X}_L^I + \pi R$ の条件から、これの momentum 部分に対応する p^I が量子化されることになります。p^I の取りうる値を lattice と考えると、string を consistent にするために要請する modular invariance(reparametrization の discrete 部分です) を課すと、許される lattice は even self-dual lattice に限るという議論が出てきます。そうすると、次元 16 をもつ even self-dual lattice は $E_8 \times E_8$ と $SO(32)$ という群に対応する root lattice だけであることが数学から知られていますから、

$$p^I \ : \ E_8 \times E_8 \ \text{ or } SO(32) \text{ の root lattice 上に量子化} \tag{4.16}$$

となります。

ということで、heterotic string を 10 次元の superstring としたときには、2 つの gauge 群、$E_8 \times E_8$ と $SO(32)$、を持つ string 理論ができます。このようにして heterotic string が構成できることは '85 年ぐらいに示されました。

通常 low energy の物理と結びつくであろうと思われているのは、$E_8 \times E_8$ heterotic string と呼ばれているものです。その heterotic string の massless mode のなかにどういうものがあるかということは mass operator を調べてみることで読み取れる。ここでは結果しか書きません。どのようにして massless mode が出てくるかを簡単に見てもらえればいいのですが、

$$\frac{1}{8}m_L^2 = \frac{p_I^2}{2} + \widetilde{N} - 1 \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{8}m_R^2 = N \tag{4.18}$$

m_L^2、m_R^2 が left、right mover の mass operator で、$\widetilde{N}$、N は oscillator 部分の number operator に対応しています。 $p_I^2/2$ というのは先ほどの $E_8 \times E_8$ に対応する root lattice に compact 化した部分の momentum に対応しているものです。

massless ground state つまり真空を調べてみましょう。right mover は supersymmetry を考えていますので、

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} |i\rangle_R & \text{(vector)} \\ |a\rangle_R & \text{(spinor)} \end{array} \tag{4.19}$$

これは、10 次元の supermultiplet を構成します。また先ほど触れた modular invariance から $m_L^2 = m_R^2$ が要請されることが分かっています。すると left mover は、$\widetilde{N} = 1$ で $p_I^2 = 0$

になる場合と、$\widetilde{N}=0$ で $p_I^2=2$ になる場合で、

$$\widetilde{N}=1\,,\ p_I^2=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l}\tilde{\alpha}_L^i\,|0\rangle \\ \tilde{\alpha}_L^I\,|0\rangle\end{array} \tag{4.20}$$

$$\widetilde{N}=0\,,\ p_I^2=2 \quad\Rightarrow\quad \left|p_I^2=2\right\rangle \tag{4.21}$$

I が内部自由度になっています。physical state は left mover と right mover の直積で作られますから massless state は

$$\begin{array}{ccc} \text{right} & & \text{left} \\ |i\rangle_R & \otimes & \tilde{\alpha}_L^i\,|0\rangle \\ |a\rangle_R & \otimes & \tilde{\alpha}_L^i\,|0\rangle \end{array} \tag{4.22, 4.23}$$

が 10 次元 supergravity multiplet

$$g_{MN}\,,\ B_{[M,N]}\,,\ \psi_M\,,\ \lambda\,,\ \phi \tag{4.24}$$

になっていることが分かります。

残りの部分は、$E_8\times E_8$ の root lattice を含んでいて

$$\begin{array}{ccc} \text{right} & & \text{left} \\ (|i\rangle_R\,,|a\rangle_R) & \otimes & \tilde{\alpha}_L^I\,|0\rangle \\ (|i\rangle_R\,,|a\rangle_R) & \otimes & \left|p_I^2=2\right\rangle \end{array} \tag{4.25, 4.26}$$

が $E_8\times E_8$ vector supermultiplet をなして $E_8\times E_8$ super Yang-Mills 理論になっています。つまり $E_8\times E_8$ heterotic string の massless mode の中には 10 次元の supergravity multiplet と $E_8\times E_8$ supermultiplet が入っている model になっているということが分かります。

質問： そのときに supersymmetry はどうなっているんですか？
末松： あぁ、ここですか。時空の supersymmetry は N が 1 になっています。

これが現象論を議論する際の出発点になっています。現実の世界は 4 次元ですので、4 次元の superstring を考えたい。

4.3 4D superstring

4 次元理論を構成するには $E_8\times E_8$ heterotic string を 10 次元から 4 次元に落としてやります。余分な 6 次元部分を内部空間化、つまり compact 化してやります。そのときに対称性、supersymmetry や gauge 群をどのように破るかということが問題になる。10 次元 N=1 の supersymmetry を 4 次元に落としたときに、naive に落としてやると supersymmetry は N=4 になってしまいます。ところが、N が 1 よりもでかい model は一般に vector-like theory になってしまうのです。自然界、例えば Weinberg-Salam の sector は chiral な gauge 理論なので、4 次元の superstring を作ったときに、N=1 であるような model を作る必要があり、

compact 化するときに supersymmetry をいかにして N=1 にまで落とすか、さらに gauge 対称性は $E_8 \times E_8$ とでかい群になっていますが、これをいかに標準模型の gauge 対称性に近いように破るのかが非常に大きな問題になってきます。

高い対称性を持つ理論は条件が強く、いろいろなことが言えるという性質を持っていますが、ところが対称性が高すぎて現実的な model 作るときにその高い対称性を大幅に破ってやる必要が出てきます。この対称性がどれだけ破れるかは、6 次元部分の空間、多様体の性質によって決まります。幾つかの見方があると思うんですが、幾何学的な見方と代数的な見方があるわけです。

まず歴史的に最初に直感的に分かりやすい幾何学的な picture が調べられました。つまり、ある特別な 6 次元多様体に compact 化することで N=4 を N=1 にすることが考えられました。naive な議論ですが、10 次元の spinor を 4 次元に落したときに出てくる 4 次元の spinor を gravitino としてみたときに、その gravitino をまわす $SO(6)$ という内部対称性があります。

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & SO(1,9) & \supset & SO(1,3) & \times & \underline{SO(6)} \\
Q_a : & 8 & = & (2 & , & 4) \\
 & \underline{SO(6)} \simeq SU(4) & \supset & SU(3) & & \\
 & 4 & = & 3 & \oplus & 1
\end{array}
\tag{4.27}
$$

gravitino がこの $SO(6) \simeq SU(4)$ に対して 4 次元表現になっているということが、4 次元に compact 化したときに N=4 になるということに対応しているわけですが、これを $SU(3)\,(\subset SU(4))$ のもとで分解してみますと 3⊕1 次元表現に分かれます。だから、この 3 に対応する部分を消しちゃって 1 だけを残すようにすると N=1 にすることができるわけです。3 次元表現に属している部分を massless mode でなくしてしまうような多様体が Calabi-Yau 多様体と呼ばれるもので [6]、最初に 4 次元の model を作るときに議論されたものです。これは $SU(3)$ holonomy を持つような多様体です。こういうふうにして $SU(3)$ singlet 1 つだけを残し、N=1 にするような多様体があるじゃないかというわけです。

で、もう 1 つの例が orbifold というもので [7]、これも幾何学な picture ですが、一番簡単なものを議論することにすれば 10 次元部分をある 6 次元 torus に compact 化します。で、そのときに $SU(3)$ の部分群になっている $\mathbb{Z}_N$ 対称性で 6 次元 torus を割るというようなことで N=１だけを引っ張り出してこようという model があります。

$$
\text{orbifold} \quad : \quad T^6/\mathbb{Z}_N, \qquad (\mathbb{Z}_N \subset SU(3))
$$

こういうような形で内部空間を選んでやると N=1 に破ることができます。さらに内部空間にした余分な次元上に背景場を考えるというようなことをすると、gauge 群を破ることができて、gauge 群をかなり標準模型に近いところまで破ることができるという議論がなされまして、具体的にそういう model が作られています [8, 9]。

もうひとつは代数的につくろうとする試みがあります [10, 11]。

それは、anomaly cancelation が成り立つように 6 次元部分をいろんな conformal field theory でつくってやるという代数的な構成法で、直接 4 次元の string を作るというような形で model を作る方法です。

この時はもちろん N=1 の supersymmetry とか modular invariance を課すことで 6 次元の conformal field theory を選ぶというような形で直接 4 次元の superstring を作るという議論がなされることになります。

いずれにしても、4 次元 superstring を低エネルギー有効理論に結びつけるときに自由度として出てくるのは次のようなものになります [12]。

5 Low energy effective theory

5.1 structure

まず構造について、もちろん低エネルギー有効理論を考えようとするときには string の massless mode だけを見ればよくって、あとの部分というのは Planck scale の mass を持つわけだから、低エネルギーの現象論を議論するときにはほとんど出てこないでしょう。そうすると、N=1 supergravity に super Yang-Mills と chiral multiplet が couple した系になっています。

$$\text{N=1 SUGRA} \otimes \text{SYM} \otimes \text{chiral multiplet}$$

このとき、この枠組みを決めた中でもなおかつ残る系の自由度をまとめておきます。

- gauge 群　G
- chiral superfield Φ の表現　$\sum_R n_R R$　(R : G の表現、n_R : 表現 R の数)
- generalized Kähler potential (注 : overall の sign は第３章とは逆の convention)

$$G(\Phi,\Phi^*) \;=\; K(\Phi,\Phi^*) + \ln|W(\Phi)|^2 \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} K(\Phi,\Phi^*) &\;:\; \text{Kähler potential} \\ W(\Phi) &\;:\; \text{superpotential} \end{aligned}$$

- gauge kinetic function　$f_{\alpha\beta}(\Phi)$

これらは、今考えている枠組みの範囲の中では決まりません。それを、第 4 章で話したような string をベースに絞っていくという手続きをとります。

第 3 章でこの系の bosonic part を書きましたから、もう改めては書きませんが、重要な部分を復習しておくと、

- Kähler potential が scalar field の運動項の metric を与える。

$$\text{scalar field metric :}\quad K_i^j \;=\; \frac{\partial^2 K}{\partial\Phi^i\partial\Phi_j^*} \tag{5.2}$$

- gauge kinetic term の係数として書かれている f が、gauge coupling constant に対応している。さらにこの虚部は QCD θ-vacuum を指定する parameter になっている。

$$\text{gauge kinetic function} \quad f: \begin{cases} \mathrm{Re}\, f &= \dfrac{1}{g^2} \\ \dfrac{\mathrm{Im}\, f}{\mathrm{Re}\, f} &= \theta \end{cases} \tag{5.3}$$

(第 3 章と normalization を変えています。)

- scalar potential V は G を使って次のように書かれている。

$$V = e^G \left(G_i (G^{-1})^i_j G^j - 3 \right) + \text{D-term} \tag{5.4}$$

だから、generalized Kähler potential G を決めるのは、特にこの辺との関係で低エネルギー有効理論の model の性質を決めるという意味で非常に重要になっています。

- superpotential $W(\Phi)$ は

$$W(\Phi) = d_{ijk} \Phi^i \Phi^j \Phi^k \tag{5.5}$$

第 2 章で書いたときは質量項に対応するものが入っていましたが、今 massless mode だけ考えるのでそれは考えないことにします。さらに Φ の 1 次の部分も gauge 対称性が禁止するであろうということで考えないので、3 点の coupling だけが問題になる。低エネルギー現象論との関係ではこういう d_{ijk} ではなく、運動項の部分をきっちり規格化してやった $\tilde{d}_{ijk}$ というものが物理的 Yukawa coupling constant に対応する。

例えば $K^j_i = K_i \delta^j_i$ のときは

$$\tilde{d}_{ijk} = \frac{d_{ijk}}{(K_i K_j K_k)^{1/2}} \tag{5.6}$$

- chiral superfield の部分ですが、gauge 対称性に関して non-trivial な変換をするもの以外に gauge singlet な場がいくつかあります [13]。　こういうものの中で string の spectrum の中に現れる非常に特徴的なものが、dilaton と呼ばれるものと moduli と呼ばれるものです。これらは string の摂動的な範囲では (したがって有効場の理論の摂動論の意味でも) potential が完全に flat である、そういう特別な field になっています。だからこういうものに関しては摂動の範囲内では superpotential は存在しないわけですね。

gauge singlet fields (perturbative には flat potential)

∘ dilaton　S

∘ moduli　M (Kähler class moduli T　etc.)

質問：　perturbative には flat potential というのは対称性から禁止されているのか ? それともやってみればそうなるのか ?

末松：　対称性から禁止されているようなものになっていると思ってもらっていいと思います。

質問：　対称性から禁止されているというのは非摂動的にも現れないような気がするんですが ?

末松：　それは、例えば chiral symmetry みたいなものを考えたときに摂動的には破れないけど、非常に coupling が強くなると非摂動的には破れが起こりうる。

このmoduliは2種類ほど存在するというのが知られていまして、compact化した空間の大きさとか形を記述するようなKähler class moduliと呼ばれるものと、多様体の複素構造を規定するような複素構造moduliと呼ばれるものがあるというのが知られています。以下注目するのはKähler class moduliで、現象論を議論するときにいろんなところで重要になってきます。このSとTに関してSとTの虚数部の起源に由来して、系の対称性として次のような虚部をずらすという対称性があることが確かめられます [13]。

$$\begin{cases} S & \rightarrow & S + i\alpha \\ T & \rightarrow & T + i\beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{5.7}$$

そこで例えばこの対称性をベースにしてsuperpotentialの部分を調べてみると、superpotentialの正則性から、stringの摂動においては* SとTはself couplingのsuperpotentialを持たず、flatということが示せると同時に(5.5)のd_{ijk}は量子補正を受けないというのがわかります [15, 16]。ちょっと先走るんですが、例えばこのSについて、通常のほとんどのstring modelでは、gauge運動項$f_{\alpha\beta}$はtree levelではSで書ける。つまり、dilatonの期待値がgauge coupling constantの逆数になっています。

$$f_{\alpha\beta} \ = \ S\delta_{\alpha\beta} \tag{5.8}$$

そうすると虚部をshiftするということはθをconstantだけずらす対称性になっている。strong CPの問題を解決するときに導入されるPecci-Quinn対称性はそういう変換になっていますが、そういうわけでこの対称性は結構多くの論文の中でPecci-Quinn対称性と呼ばれています。

結局以上のような形で低エネルギー有効理論の一般的な性質はお話したわけですが、問題になるのはKähler potentialとかgauge運動項の関数形がどうなっているのかということと、gauge群Gとかその中身、chiral superfieldがどうなっているのか、あるいはmoduli構造がどうなっているのかということでこれらをstring modelをベースにして絞ります。それを元にいろいろな現象論を議論していくことになります。そういうようなものの関数形を決めるときにstringの対称性が重要になってきます。最初のところでも言いましたように純粋なstringの扱いから有効理論を厳密に導くということは今の段階ではできない。そうすると、stringの性質というのをどうやって有効理論の中に取り込むのかというと、stringの対称性のようなものをfullに生かして、それを満足するような形でこの関数形を決めていくというのが現時点では一番有効な方法であると思われます。つまりstring theoryで、

- $G(\Phi, \Phi^*)$、$f_{\alpha\beta}$ の関数形 [13, 14, 17, 18]
- G、$\sum_R n_R R$ [8, 9]

* stringの摂動を考えるとき2つの捉え方が可能で、world sheet sigma modelの摂動としてはTの期待値が、また通常のstringの摂動としてはSの期待値が摂動パラメータに対応するという事情があります。この事情を利用すると、ここで述べるsuperpotentialの性質が導けます。

- moduli M の構造 [19]

を制限したいというわけです。

5.2 string symmetry

target space duality[19]
そのとき、上のようなものを制限するのに有効な string の対称性としてどんなものがあるのかを見ておくのは非常に重要なことです。で、その中で非常に有効なのが target space duality と呼ばれるものです。最近の string duality の話の中では T-duality と呼ばれています。

今、moduli space M を特徴づける moduli field に対して、一般座標変換のような field の再定義を考えます。このとき、特に重要なのは potential が flat だという点です。そして、この reparametrization のある特別な離散的なものを T-duality と呼びます。

これの典型的で非常に簡単な例として、closed string の torus compact 化を考えます。そうすると先ほど書いたように string variable を mode 展開してやると、

$$X^i(\sigma,\tau) = x^i + p^i\tau + w^i\frac{\sigma}{\pi} + \mathrm{osc.} \tag{5.9}$$

今こいつを量子化してみます。x^i が重心の座標で、p^i が重心の運動量に対応しています。今、compact 化した torus の半径を R とすると、

$$X^i \sim X^i + mR^i \tag{5.10}$$

すると w^i は次の条件を満たすことが分かります。また波動関数が 1 価になるための条件から p^i も量子化されて次の式を満たします。

$$w^i = mR^i \quad m \in \mathbb{Z} \tag{5.11}$$

$$p^i = \frac{n}{R^i} \quad n \in \mathbb{Z} \tag{5.12}$$

それで今の場合 (5.11) を winding mode、(5.12) を momentum mode と呼ぶんですが、こういう 2 つの mode が出てくるというのが string の非常に特徴的な性質になっています。ここで言っている T-duality というのはその momentum mode と winding mode の入れ替えのようなもので、つまりこの n と m を入れ替え、それと同時に R を $1/R$ に置き換えるものです。

今こういう対称性があるわけですが、supersymmetric な model の中で chiral superfield の scalar 成分というのは complex field になっています。つまり、supersymmetry があると moduli は complex になって、これに対する $SL(2,\mathbb{Z})$ の symmetry が生じます [20]。

$$T = R + i\eta \tag{5.13}$$

$$T \to \frac{aT - ib}{icT + d} \qquad (ad - bc = 1) \tag{5.14}$$

例えばこの半径 R に対応するものが、なにか moduli field の真空期待値で書けるようなものだとすると、これを real part とする何か complex fieldが存在するはずです。そのとき、$R \leftrightarrow 1/R$ を一般化したような対称性が (5.14) に対応し、T-duality の一番簡単なものになっています[†] 。

もちろんもうちょっと複雑な compact 化を考える model の中でこれに対応する対称性を決めようとすると、moduliがどういう構造を持っているかが問題になるわけです。非常に簡単な moduli の構造を持つ比較的現実に近い例として、$\mathbb{Z}_n$ や $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ といった orbifold の modelがあります。これは 6 次元 torus をこういう離散的な群で割ったようなものなんですが、具体的に T に対応するものがこの model の中には入っていて、上の対称性が存在することが知られています。また、例えば Calabi-Yau 多様体のような複雑な多様体になると moduli 空間の構造が良くわからなくなって、上の例の $SL(2,\mathbb{Z})$ に対応するような対称性がどういうものか良く分かっていません。ただ、Calabi-Yau でも large radius limit というか、compact 化した manifold の半径が非常にでかい、言ってみれば compact 化していないようなものですが、そういう model の中ではそういった対称性が存在しているということも確かめられています。このような対称性が低エネルギー有効理論の Kähler potential の構造を制限するのに有効になってくるわけです[‡] 。

discrete symmetry

もう 1 つは discrete symmetry で、string の model の中には一般に非常に豊富な離散的対称性が存在することが知られています。この中には、第 2 章で紹介した R-symmetry の discrete 部分も含まれます。この場合には superpotential が R-変換のもとである特殊な R-charge を持たないといけないということから、superpotential の形を制限するのに非常に有効になっています。例えば、Yukawa coupling 等の構造を制限して現実的な quark, lepton の質量行列を議論するとき、この離散的対称性は非常に有効になります。ただしこの場合、普通の field theory の範囲内で quark, lepton の質量行列を議論しようとしたときには、consistent な形であればどのような離散的対称性でも課すことができるわけですが、今の場合には string という枠を決めていますからその中に存在するような対称性しか使えないという制限が入ってきます。このように、普通の場の理論の枠の中で議論しようとする場合と若干違ってきます。

超対称性の破れ

最後に、有効理論の構造を決めるうえで重要になってくる超対称性の破れについて話しておきます。第 2 章でお話ししたように、超対称性の破れというのは、何らかの自発的な対称性の破れの結果として soft breaking term が導き出せれば好ましいわけですよね。こういうことについて今からお話しします。

それで、string の現象論の話の中で最近、といっても 2 年前ぐらいになりますが、その

[†] 容易に見て取れるようにこの symmetry は (5.7) が world sheet 上の非摂動効果 [16] で破れた結果残る discrete symmetry をその一部として含んでいます。

[‡] これらの対称性が string あるいは有効場の理論の非摂動的効果によっても破れない場合は、そのような効果によって生じる部分を含めて superpotential の形 (次節の (5.18)) に制限を与えることになります。実際、そのような仮定の下で、これらの対称性により supersymmetry breaking をもたらす superpotential の形を制御しつつ、soft breaking term の議論が行われています。

頃まで soft breaking term が string の枠組みではどんな形になるのかがかなり盛んに議論されてきました。supersymmetry の現象論をやろうとすると soft breaking term の構造が非常に essential になってくるので、その辺の構造がはっきりしてくることは現象論的に非常に重要になってきます。

soft breaking term の役割ということですが、標準模型の話を introduction のところでしましたが、そのときには対称性の破れの起源は分からないけれどもとにかく Higgs の期待値に対応するものを v という形で parameterize すれば、非常に多くの予言ができたわけですよね。soft breaking term というのは、それと同じような役割を、現象論的にはし得るんだということを少し強調しておきたいと思います。それはどういうことかというと、MSSM、標準模型を minimal に supersymmetry に拡張した model を考えます。そのときに superpotential のうち、通常の Yukawa coupling の部分は次の形になります。

$$W = y_U Q H_2 \overline{U} + y_D Q H_1 \overline{D} + y_E L H_1 \overline{E} + \mu H_1 H_2 \tag{5.15}$$

ここで H_1、H_2 と Higgs が 2 つ入っていますが、標準模型を supersymmetric にしたときには Higgs が 2 つ必要になります。なぜかというと、superpotential は chiral superfield の積で書けていますが、up sector と down sector に couple する Higgs は hypercharge の符号が逆になって入らなければならない。1 つの Higgs で 2 つの coupling を作ろうとすると、一方が他方の conjugate になっていないといけないわけですね。ところが、これは chiral superfield の積の形では書けないので、必ず 2 つの Higgs が必要になってくる。また、model の gauge anomaly を cancel するためにも 2 つ必要になる。その 2 つの理由から 2 つの Higgs を導入する必要がでてきます。

gauge 対称性からだけですと、例えば次のような項も gauge 不変になっていますが、

$$QL\overline{D}, \quad LL\overline{E}, \quad \overline{UDD} \tag{5.16}$$

R 対称性を課すことでこれらを禁止することができます。ここでいう R 対称性というのは連続的な対称性ではなくて離散的な R-parity と呼ばれるものになっていて、次のように component に assign されています。

$$\text{R-parity} \ : \ R_p = (-)^{3B+L+2S} \ \ (B : \text{baryon 数、} L : \text{lepton 数、} S : \text{spin})$$

すると、例えば普通の quark や lepton が入っている ordinary field については R-parity は $+$ で superpartner は $-$ になっています。連続的な R 対称性と R-parity が同じ役割を果たすということを強調しておきます。R-parity 不変性を課すとこういう項は自動的に落ちてしまう。もしこのような項が入っていると、proton decay がすぐに起こってしまうので、これは危険な項なんですね。だけど、この対称性を課すことで model の中から取り除くことができる。

これを元に scalar potential V を書いてやると、

$$V \ = \ \left|\frac{\partial W}{\partial \phi}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\phi^\dagger g T^a \phi\right|^2 + m^2|\phi|^2 \tag{5.17}$$

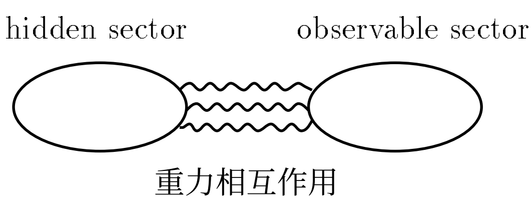
今、MSSM の scalar potential はこういう形になっていて Higgs の scalar potential を決めるのにはここの部分だけが効いてきます。この ϕ って書いたのは Higgs scalar を代表して書いていると思ってください。

ϕ^4 の項は、MSSM の場合には D-term の部分から出てきます。だから標準模型の場合の 4 次の coupling λ は MSSM の場合には存在しない。存在しない代わりに $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の gauge coupling constant g_2 と g_1 に置きかわる。そして、soft breaking term として (5.17) の第 3 項が入ってきます。それで、こいつに対して輻射補正を考えて low energy までくりこみ群でずーっと引っ張ってくると Higgs mass square が negative に変わって spontaneous symmetry breaking が起こる。これを radiative symmetry breaking と呼びます。で、その結果として v が決まるというわけです。今、λ という coupling constant がなくて、それが $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ の coupling に置きかわっているわけですが、そうするとこの v という Higgs の真空期待値っていうのは、soft breaking term の大きさで決まってくることになります。だからまあ、少なくとも radiative symmetry breaking の scheme にのっとる限りは v が soft breaking mass m に置き変わるというふうに考えることができます。ただし今、(5.15) の第 4 項の μ の scale については何も言ってませんが、今までの話はこの μ の scale が決まってればの話です。

とにかく soft breaking term っていうのは、MSSM では Higgs の真空期待値 v に置き変わるようになっているということを、このような形で見ることができます。

それで、soft breaking term がどのような形で出てくるのかというのを議論したいというわけです。で、ここでの議論は local な supersymmetry breaking が何らかの非摂動的な効果で M_S という scale で起こったと、これまあ、何か、その起源は問いませんが、それが我々が観測している observable sector とは重力の効果だけでつながっている sector で起こったとしましょう。その、重力だけで我々の世界とつながっているのを hidden sector と呼びます。そこで、M_S の scale で supersymmetry が破れているとしましょう。

そのときに重力の効果で supersymmetry の破れが mediate されることになると、$1/M_{\rm pl}$ という suppression factor をからめたような相互作用で observable sector に破れの効果が伝わることになります。したがって、observable sector に現れる breaking scale は、例えば $M_S^2/M_{\rm pl}$ や $M_S^3/M_{\rm pl}^2$ になります。このときに breaking の scale がだいたい 1 TeV ぐらいになるようにということが gauge hierarchy の問題から要請されるとすると、M_S という scale



$$m_{\rm soft} \sim \frac{M_S^2}{M_{\rm pl}}, \frac{M_S^3}{M_{\rm pl}^2}$$
$$\sim 1\text{TeV} \ll M_S$$

図 1: gravity mediation

がどのぐらいになるかは逆算すると出てくる。すると、$1/M_{\rm pl}$ がかかってることの結果として、この observable sector の breaking scale に対して、hidden sector で local SUSY が破れる scale は非常にでかくできる、っていうのが今のような重力で mediate される場合の特徴です。

それで次に、起源は問わないけれども何らかの形で hidden sector で local supersymmetry が破れたときに、observable sector に出てくる soft breaking term がどのように決まるのかをお話したいと思いますがちょっと時間が経ちましたのでここで休憩しておきます。

5.3 soft SUSY breaking term

supersymmetry breaking っていうのは非摂動的な効果なわけで、非摂動的な効果を取り扱うのは場の理論の枠の中でも非常に困難な問題です。で、なおかつ string の枠の中ではとてもこのようなものを取り扱えるような状況にはない。それが今の現状です。

では実際に supersymmetry breaking がどのような効果で起こるのかということですが、可能性としては純粋に stringy な非摂動的な効果で起こるという可能性が 1 つ。あるいは、stringy ではなくてむしろ field theory の効果、つまりかなり low energy に落ちてきて string の効果というよりはむしろ場の理論的に取り扱えるような効果で破れているという 2 つの可能性が考えられるでしょう。ここでは、とりあえずは field theory の枠の中で supersymmetry の破れが取り扱えるという後者の立場で議論をしていきます。10^{13} GeV ぐらいのところで local supersymmetry が破れているのであれば、それは必ずしも string の非摂動的な効果というよりは場の理論的な非摂動的効果で取り扱えるのではないかと考えられます。そのときに、どのような起源で破れているのかに関して、mechanism は問いません。ただし、何らかの形で破れているという、それを出発点にして soft breaking term がどのような形で書き下せるのかを見てみたいというのが今からやることです [21, 22]。

chiral superfield を一般的にここでは Q^I とかきます。これはさっきの言葉では observable sector の field です。もうひとつ moduli field という chiral superfield があると言いましたが、それをここでは Φ_i と書いておきます§ 。それと、superpotential W についてですが、もともとこの Φ_i は W の中には入っていないと先程言いましたが、何らかの非摂動的な効果で supersymmetry が破れている、そういう dynamics があるとすると、この Φ_i も W の中に (例えば (5.20) の $\widehat{W}$ のように) 入ってくる。つまり、その非摂動的な効果を生み出す sector を integrate out して effective theory を作ると、このように Φ_i が W の中に入ってくると一般には考えられます。

それで、今この Q^I という observable sector の field で K と W を展開します。

$$\begin{array}{rcl} \text{chiral superfield} & : & Q^I \quad \text{(observable sector)} \\ \text{moduli field} & : & \Phi^i \end{array}$$

W を展開すると、tree の部分は 3 点の項だけです。

$$W = W^{(\mathrm{tree})} + W^{(\mathrm{ind.})} \tag{5.18}$$

$$W^{(\mathrm{tree})} = \frac{1}{3}\widetilde{Y}_{IJK}Q^IQ^JQ^K \tag{5.19}$$

$$W^{(\mathrm{ind.})} = \widehat{W}(\Phi) + \frac{1}{2}\widetilde{\mu}_{IJ}Q^IQ^J + \cdots \tag{5.20}$$

§ ここでの moduli field Φ^i は dilaton も含めた広い意味で使っています。

K の部分も同様に展開すると、

$$K = \kappa^{-2}\widehat{K}(\Phi,\Phi^*) + Z_{I\overline{J}}(\Phi,\Phi^*)Q^I Q^{*\overline{J}} + \frac{1}{2}\left(H_{IJ}(\Phi,\Phi^*)Q^I Q^J + h.c.\right) + \cdots \quad (5.21)$$

$$\kappa^2 = \frac{8\pi}{M_{\rm pl}^2} \quad (5.22)$$

まあ、naive に展開しただけです。κ^{-1} は reduced Planck mass です。

scalar potential は、

$$V = \kappa^{-2}e^{\kappa^2 G}\left(G_i(G^{-1})^i_j G^j - 3\kappa^{-2}\right) + \text{D-term} \quad (5.23)$$

generalized Kähler potential G は、ちゃんと dimension も合わせると、κ も入れて次のように書けます。

$$G = K + \kappa^{-2}\ln(\kappa^6|W|^2) \quad (5.24)$$

それで、今 supersymmetry はとにかく破れているとして、gravitino の mass は fix しておいて low energy でどういう構造になるかを調べたいので、Planck scale を無限大に飛ばす flat limit と呼ばれている極限をとります。そのときに scalar potential V がどういう構造になるかを見ることで、soft breaking term の構造を読み取ることができます。それを計算してやると次のような結果が出てきます。

$$V = \kappa^{-2}(F_i F^i - 3m_{3/2}^2) \qquad \leftarrow \text{cosmological constant} \quad (5.25)$$

$$+\partial_I W^{(\text{eff})} Z^{I\overline{J}} \partial_{\overline{J}} \overline{W}^{(\text{eff})} + \sum_{a\in \mathrm{G_{obs.}}} \frac{1}{2} g_a^2 \left(\overline{Q}^I Z_{\overline{I}J} T^a Q^J\right)^2 \qquad \leftarrow \text{global SUSY} \quad (5.26)$$

$$+M_{I\overline{J}}^2 Q^I \overline{Q}^{\overline{J}} + \left(\frac{1}{3}A_{IJK}Q^I Q^J Q^K + \frac{1}{2}B_{IJ}Q^I Q^J + \text{h.c.}\right) \quad \leftarrow \text{soft breaking} \quad (5.27)$$

1 行目は cosmological constant に対応する部分、2、3 行目は Q について higher order の項で、2 行目は global SUSY の scalar potential に対応する部分、3 行目は soft breaking term の部分です。1 行目において、

$$m_{3/2} \equiv \kappa^2 e^{\widehat{K}/2}|\widehat{W}| \quad (5.28)$$

$$F_i \equiv \kappa^2 e^{\widehat{K}/2}(\widehat{W}\widehat{K}_i + \widehat{W}_i) \quad (5.29)$$

$$\widehat{W} \equiv e^{i\phi}|\widehat{W}| \quad (5.30)$$

となっています。2 行目 (5.26) については、

$$W^{(\text{eff})} = \frac{1}{2}\mu_{IJ}Q^I Q^J + \frac{1}{3}Y_{IJK}Q^I Q^J Q^K \quad (5.31)$$

$$Y_{IJK} = e^{\widehat{K}/2}\widetilde{Y}_{IJK} \quad (5.32)$$

$$\mu_{IJ} = e^{\widehat{K}/2}\widetilde{\mu}_{IJ} + m_{3/2}e^{i\phi}H_{IJ} - F^{\overline{j}}(\partial_{\overline{j}}H_{IJ}) \quad (5.33)$$

$\widetilde{Y}_{IJK}$ や $\widetilde{\mu}_{IJ}$ は (5.6) で規格化した $\widetilde{d}_{ijk}$ 等に対応します。 Y_{IJK} は通常の Yukawa coupling に対応するものですが、μ_{IJ} は supersymmetric な standard model の μ-term と呼ばれるもので、supersymmetric な mass term になっています。ただ、今は scalar potential の部分のみ見ているわけですから、これはその scalar component の mass term に対応しています。

ここで注意して欲しいのは、MSSM の枠組みの中では、この μ は supersymmetric な mass で、その scale が weak scale 近辺にある必然性は何もないわけです。ところが、今のような枠組みの中で議論していくと、少なくとも第 2 項以下は supersymmetry breaking scale、すなわち $m_{3/2}$ という gravitino mass で書かれてしまいます。つまりこういう枠組みの中で話をすると、MSSM で μ の scale がどうして weak scale なのかということに一定の解を与える可能性が出てくる。これについては後で話します。

3 行目の soft term (5.27) は、今の flat limit をとった計算をすると次のようになります ¶ 。

$$M^2_{I\overline{J}} = m^2_{3/2} Z_{I\overline{J}} - F_i F_{\overline{j}} \left(\partial^i \partial^{\overline{j}} Z_{I\overline{J}} - \partial^i Z_{M\overline{I}} Z^{M\overline{I}} \partial^{\overline{j}} Z_{I\overline{J}} \right) + (F^i F_i - 3m^2_{3/2}) Z_{I\overline{J}} \tag{5.34}$$

$$A_{IJK} = F^i \left[\left(\partial_i + \frac{1}{2} \widehat{K}_i \right) Y_{IJK} - Z^{M\overline{L}} \partial_i Z_{\overline{L}(I} Y_{JK)M} \right] \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned} B_{IJ} = {} & F^i \left[\left(\partial_i + \frac{1}{2} \widehat{K}_i \right) \mu_{IJ} - Z^{M\overline{L}} \partial_i Z_{\overline{L}(I} \mu_{J)M} \right] \\ & + \left[F^i \left(\partial_i + \frac{1}{2} \widehat{K}_i \right) - 2m_{3/2} e^{i\phi} \right] F^{\overline{j}} \partial_{\overline{j}} H_{IJ} \end{aligned} \tag{5.36}$$

$Z_{I\overline{J}}$ は kinetic term の前の係数 $\left(Z_{I\overline{J}} \partial_\mu Q^I \partial^\mu \overline{Q}^{\overline{J}} \right)$

特に、F^i は (5.29) のように書けていて $e^{i\phi}$ という phase が出てきますが、実際に $m_{3/2}$ を使ってこの部分を書き変えていくと、だいたい F は $m_{3/2}$ の order になるのがわかりますので、$M_{I\overline{J}}$ は $m_{3/2}$ で書けます。で、A_{IJK} も dimension を持っている部分は F の部分だけですから、$m_{3/2}$ で書けています。B_{IJ} もそうですね。つまり、gravitino の mass でもって soft breaking term は全て特徴づけられることになっています。

言い忘れましたけど、このように書き下したときに kinetic term の normalization はやっていません。つまり、kinetic term の部分は、$Z_{I\overline{J}}$ がかかったまま書かれてますので、kinetic term が 1 に normalize されるようにもう一度 normalize し直さないといけないです。そうしないと physical な soft breaking term にはなりません。その辺は注意が必要です。

もう 1 つ soft breaking term として挙げられていたのは、gaugino mass で、

$$M_a = \frac{1}{2} e^{-i\phi} (\mathrm{Re}\, f_a)^{-1} F^{\overline{j}} \partial_{\overline{j}} f_a , \qquad a \in \mathrm{G_{obs}} \tag{5.37}$$

と書かれます。第 3 章で言った、N=1 SUGRA の Lagrangian を具体的に書き下した Ferrara et al. の Nuclear Physics の論文に、具体的にこの表式に対応する部分が入ってきていますが、それをここでは単に書き写しているだけです。

¶ この表式において A_{IJK} や B_{IJ} は Y_{IJK} や μ_{IJ} を含めた形で与えられていることに注意して下さい。この後で議論される A や B はこれらで割った通常の定義に従っています。

こういうものを見ていると soft breaking term の構造というのは非常に Kähler potential に依存しているということがわかりますし、先程も言いましたように $m_{3/2}$ で特徴づけられるということもわかります。例えば、orbifold などの非常に簡単な model については、string の 1-loop の level 程度ぐらいまでは Kähler potential の構造等も計算できます [17, 18]。それは、実際に、vertex operator の期待値をとって散乱振幅を計算してその結果をじっと見ることで、Kähler potential の構造を読み取ることができます。すると、$Z_{I\bar{J}}$ などの構造が具体的に決まるわけですよね。それを代入することで $M^2_{I\bar{J}}$、A_{IJK}、B_{IJ} の構造が具体的に決まる。

特に現象論的な議論をするときには、次の parameterization が非常に便利です。

$$F_i((K^{-1})^i_i)^{1/2} \equiv \sqrt{3}Cm_{3/2}e^{i\alpha_i}\Theta_i \tag{5.38}$$

$$C^2 \equiv 1+\frac{V_0}{3m^2_{3/2}} \tag{5.39}$$

$$\sum_i \Theta_i^2 = 1 \tag{5.40}$$

$$V_0\,(=F_iF^i-3m^2_{3/2}) \ : \text{cosmological constant}$$

今、D-term からの contribution は考えずに、F-term で破れる contribution のみを考えて、supersymmetry の破れに寄与する Φ_i のうち、F-term が nonzero のものにそれぞれ Θ_i という angle を assign しています。そして、$m_{3/2}$ を F_i で書いた式が saturate されるように、Θ_i^2 を i で足しあげて 1 になるように parameterize しています。これは何を意味するかというと、moduli の中の何が Goldstino になるのか、つまり moduli 空間の中の Goldstino に対応する方向を指定する vector になってるわけです。C は、cosmological constant V_0 が 0 であれば $C=1$ になるような parameterization になってますが、一般に、このように cosmological constant を parameter として浮かせてやると非常に便利です。

例として、moduli として第 5.1 節で書いた S と T (overal lmoduli) の 2 つだけがあるような model を考えます。今、(5.38) の F に対応するものが F_S と F_T になるわけですが、それをこの parameterization で書くと、

$$F_S((K^{-1})^S_S)^{1/2} \equiv \sqrt{3}Cm_{3/2}e^{i\alpha_S}\sin\theta \tag{5.41}$$

$$F_T((K^{-1})^T_T)^{1/2} \equiv \sqrt{3}Cm_{3/2}e^{i\alpha_T}\cos\theta \tag{5.42}$$

今、2 つだけなのでこれを saturate するために θ という angle を 1 つ入れればよくて、それを sin と cos で書いておきます。

そのとき、S と T に対して Kähler potential がどうなるかに関しては、色々な perturbative string の構成を行って K を計算すると、かなりの model に共通した K の構造として次のものが知られてます [17]。

$$K(S,\overline{S},T,\overline{T},c^i,\overline{c}_i) = -\log(S+\overline{S})+K_0(T,\overline{T})+\widehat{K}^j_i c^i\overline{c}_j+\cdots \tag{5.43}$$

$$(c^i,\overline{c}_j : \text{matter fields})$$

dilation に対する Kähler potential は $\log(S+\overline{S})$ という形であらゆる string の model に出てくることが知られてます。3 項目以降は、c、$\overline{c}$ について展開しています。 $K_0(T,\overline{T})$ の構造とか、matter field $c, \overline{c}$ の 2 次の係数 $\widehat{K}_i^j$ は完全に model に依ったものになってます。ただし、非常に多くの場合、$\widehat{K}_i^j$ は diagonal な形になることがわかっているので、ここでは diagonal になっていることを仮定して少し特徴を見てみたいと思います。

非常に特徴的な case として dilaton dominated case というものがあります。それは F_S だけで supersymmetry breaking が saturate されている場合、つまり $\sin\theta = 1$ の場合です。どうして、非常に特徴的な場合になっているかというと、dilaton の coupling が model に依らなくなっているという特性のためです。soft term を実際に書き下してやりますと、

$$M_a = \sqrt{3}Cm_{3/2}\frac{k_a\,\mathrm{Re}\,S}{\mathrm{Re}\,f_a}e^{-i\alpha_S} \tag{5.44}$$

$$\widetilde{m}_i^2 = C^2m_{3/2}^2 + 2m_{3/2}^2(C^2-1) \tag{5.45}$$

$$A_{ijk} = -\sqrt{3}Cm_{3/2}e^{-i\alpha_S} \tag{5.46}$$

k_a は、string model では gauge 群は Kac-Moody 代数で構成できるんですが、それの level と呼ばれる数ですね。通常は cosmological constant が 0 になる $C=1$ であるような model の場合に限って考えます。

B についてですが、μ-term はいくつかの項から成り立ってましたよね。μ を (5.33) のように書いておくと、第 2、3 項は H からの contribution があるときのみ生じてくるので、第 1 項と第 2、3 項は全く性質が違ってきます。どの項から μ が作られているのかによって B の構造が全然違ってきます。とりあえずここでは 2 つの場合を書いておくと、

$$B_\mu = m_{3/2}\left(1-\sqrt{3}Ce^{-i\alpha_S}\right) \tag{5.47}$$

$$B_H = m_{3/2}\left(2+\frac{2}{H}(C^2-1)\right) \tag{5.48}$$

これらは MSSM で B と書かれる部分に対応しています。 B_μ は第 1 項からの contribution で作られている場合に対応し、B_H は第 2、3 項からの contribution によって μ が作られている場合です。この結果を見ればすぐにわかるように全てが $m_{3/2}$ で書けている。さらに、今、$c, \overline{c}$ の種類に依らずに全て書けてしまう。つまり、dilaton dominated な場合は soft breaking term は universal になっています。

現象論的な観点から言うと、universal な soft breaking term は今から話す FCNC などに関して非常に良い性質を持っているんですが、これは非常に特殊な dilaton dominated な場合にのみ起こることで、一般には matter field $c, \overline{c}$ の係数 $\widehat{K}_i^j$ の構造が soft breaking term に反映してしまっていて、matter の種類に依らずにすべて等しい soft breaking term を与えるという性質は一般に破れています。すると、実験的にシビアな constraint である FCNC の process がぼこぼこ起こってしまうわけで、逆にそういうものが出てこないように $\widehat{K}_i^j$ の構造を抑えることで、ある意味で string model への constraint を見つける事ができる。それは、実験的な constraint を逆に上に持ち上げてきて string model への情報を得る可能性を与えてくれる例になっています。

6 Phenomenological aspect

6.1 squark mass

MSSMの構造に限ってここでは話します。今、興味のあるのはsoft breaking termの部分です。MSSMのsuperpotentialはさっきも書きましたように、

$$W = Q_i y_U^{ij} H_2 \overline{U}_j + Q_i y_D^{ij} H_1 \overline{D}_j + L_i y_E^{ij} H_1 \overline{E}_j + \mu H_1 H_2 . \tag{6.1}$$

Soft breaking termに対応する部分はMSSMではこういうふうになっています。

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\rm soft} &= \Big\{ Q_i A_U^{ij} y_U^{ij} H_2 \overline{U}_j + Q_i A_D^{ij} y_D^{ij} H_2 \overline{D}_j + L_i A_E^{ij} y_E^{ij} H_1 \overline{E}_j + \mu B H_1 H_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_a M_a \lambda^a \lambda^a + \text{h.c.} \Big\} + \sum_\phi \widetilde{m}_\phi^2 |\phi|^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

質問： A って y に比例してるんですか？
末松： 比例してるとは思ってません。

今、質問にありましたように一般にYukawa couplingにA-termはmatrixとして比例する必要はないので各Yukawa couplingごとにAが違うという、一番一般的な場合を考えてます。こういうようなものを、今何らかのstring modelをbackに考えて、Kähler potentialをその枠の中で決めてしまうと 例えば(5.46)のように具体的に決まってくるというわけです。

まず、squark massを考えます。ここではsuperfieldとscalar componentを同じnotationで書いているのを注意してください。up quarkのsectorのsquark mass matrixを書きますとこういうふうになります。

$$(Q, \overline{U}^\dagger) \begin{pmatrix} \widetilde{m}_Q^2 + m_U m_U^\dagger + m_Z^2 \cos 2\beta (T_U^3 - Q_U \sin^2\theta_W) & m_U (A_U + \mu^* \cot\beta) \\ (A_U^\dagger + \mu \cot\beta) m_U^\dagger & \widetilde{m}_{\overline{U}}^2 + m_U^\dagger m_U + m_Z^2 \cot 2\beta Q_U \sin^2\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^\dagger \\ \overline{U} \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

m_U, Q_U っていうのは、up sectorのquarkのmassおよびhyperchargeで、m_Z^2に比例する部分がD-termからの寄与です。down sectorも同じように書けて、UをDに変えて、$\cot\beta$を $\tan\beta$に置き換えればdown sectorのsquark mass matrixになります。

このsquark mass matrixの構造で1番問題になるのはFCNCの問題です。実験的に非常にこれはsuppressされています。これはSMの中では、GIM mechanismが働いてくれることで説明できます。それはごく簡単に書くと、図2のようなquark lineにcharged vectorがつながるgraphを考えてやるといいわけですが、こういうprocessはどのように書けるかと言うと、KM matrix elementを使って、

$$(\text{図 }2) \;\propto\; \sum_X U_{\beta X}^\dagger U_{X\alpha} \frac{1}{\not{p} - m_X} \tag{6.4}$$

このprocessはこういうものだとわかります。もし、すべてのup quarkの質量が縮退していたら、$1/(\not{p} - m_X)$のfactorは前に持ち出すことができます。すると $\sum_X U_{\beta X}^\dagger U_{X\alpha}$ の部分は

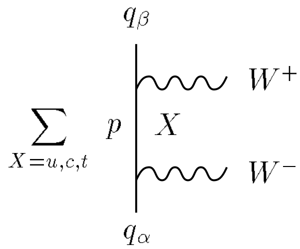


図 2: FCNC process

まさにKM matrixのunitarityの結果として$\delta_{\alpha\beta}$になります。それが一般にGIM mechanismとして知られているわけです。

ところが、これを議論するときはもちろんquarkのmass matrixはdiagonalizeしてそのmixingの効果というものをすべてcharged currentに押し付けてやるわけですが、そういうベースをとった時にこのsquarkのmass matrixというのがどういう形になるかというのが、supersymmetricにしたときにGIM mechanismのようなものが働いてFCNCがsuppressされるかいうことに関わっている。それで一般にはsquark mass matrixは各ブロックの部分が3行3列の行列になっているわけですが、それぞれがoff diagonalな部分をもっている。そうした時、quarkのmass matrixをdiagonalizeするようなベースをとったときに$m_U m_U^\dagger$, $m_U^\dagger m_U$の部分はもちろん対角化されます。ところが、$\widetilde{m}_Q^2$や$\widetilde{m}_{\overline{U}}^2$のようなsquark mass matrixの部分、またはA_Uの部分というのがdiagonalになるかどうかはsoft breaking termの構造に完全にdependしたものになっています。つまり、squark mixingの起源というのはこういうものになります。

$$\begin{cases} \cdot\ A_f \ \not\propto \ 1 \\ \cdot\ \widetilde{m}_Q^2,\ \widetilde{m}_{\overline{U}}^2 \ \not\propto \ 1 \end{cases} \tag{6.5}$$

それで、一般にこのA_fが1に比例してて、squarkのsoft massが縮退していれば、$m_U m_U^\dagger$を対角化するようなmatrixをsquark mass matrixの両方から掛けたときに、$\widetilde{m}^2$は単に1に比例している訳ですからすりぬけてdiagonalizeすることができます。つまりdegenerate squark massでなおかつA_fが1に比例する場合は、新たなflavor changing currentの種というか、squark mixingはなくなるわけです。だからこのsectorにはFCNCのoriginはなくなる。それで、SMのsectorではGIM mechanismが働いているわけですから、FCNCの問題はとくにシビアではない。ところが一般にこういうようなことは成り立っていなくて、squark soft breaking massの部分の構造にdependした形でのFCNCへのcontributionが発生します。さっき言ってたように、$\widetilde{m}_{Q,\overline{U}}^2$とか$A_f$がKähler potentialの構造等で具体的に決まるということがありましたが、逆に実験的な制限、つまりFCNCのconstraintを課すことで、$\widetilde{m}_{Q,\overline{U}}^2$等の構造に対する制限が加わって、これがKähler potentialへの制限として読み変えられてstring modelへの制限として取り込めるというようなことがあります。それで、一般に今言ったようなsquark massのdegeneracyっていうやつがどのくらい普通のstring modelの中で保証されるのか、ということですが[22]、もし先程書いたKähler potentialのmatter fieldに関する2次の部分の係数の部分$\widehat{K}_i^j$がdiagonalになってない場合

は squark mass matrix は diagonal ではなく、一般に $\widetilde{m}_i^2$ と $\widetilde{m}_j^2$ というのが等しくなくなる。

$$\widehat{K}_i^j \neq \widehat{K}_i \delta_{ij} \;\;\Rightarrow\;\; \widetilde{m}_i^2 \neq \widetilde{m}_j^2 \tag{6.6}$$

つまり、degeneracy というのが壊れてしまう訳ですね。で、また、仮に $\widehat{K}_i^j$ が diagonal でも matter によって $\widehat{K}_i$ の部分が違えばこの $\widetilde{m}_i^2$ と $\widetilde{m}_j^2$ というのがもちろん等しくなくなってしまいます。一般には $\widehat{K}_i^j$ は diagonal でなくって off diagonal の部分を含んでいて、なおかつ $\widetilde{m}_i^2$ と $\widetilde{m}_j^2$ が等しくない、そういうような状況が一般的です。で、今その $\widehat{K}_i^j$ というのを diagonalize した後 soft breaking mass term がどうなるかという事をみてみると、そのときは off diagonal な部分が一般に出てきてしまいます。それでそういうものに対する制限というのは、例えば $K^0 - \overline{K}^0$ mixing みたいなものからの制限として得られて それを $\delta m_{\widetilde{sd}}^2$ に対する制限でみると squark mass の平均値を $m_{\tilde{q}}^2$ と書いた場合に 10^{-2} くらいの制限になっています。

$$K^0 - \overline{K}^0 \text{ mixing} \;\;\longrightarrow\;\; \delta m_{\widetilde{sd}}^2 / m_{\tilde{q}}^2 \leq 10^{-2} \tag{6.7}$$

ところが、普通今まで知られてきている模型のほとんどのものっていうのは $\widehat{K}_i^j$ というのが一般的に diagonal な形になっています。だから squark mass matrix の off diagonal な部分というのは発生しないんですが、ただし $\widetilde{m}_i^2 = \widetilde{m}_j^2$ という縮退は一般には保証されていないので、非縮退の部分から $K^0 - \overline{K}^0$ mixing への効果が出てくる。だから $\widehat{K}_i^j = \widehat{K}_i \delta_{ij}$ のような状況の場合にも、squark mass に縮退が、少なくとも low energy で same charge の squark mass に縮退がないと困る。それで、そういうようなことが起きうるのかということですが、これは high energy の領域での string model に制限を付けます。すなわち、squark mass が縮退していないといけないという制限を付けるわけです。だけど別の可能性もあって high energy で仮に squark mass が縮退していない、つまりかなり non universal になっているような場合でも、gaugino mass が squark mass よりも非常にでかいような場合には、Planck mass 近辺から繰り込み群で standard model の scale まで引っ張ってくると、実際に squark mass の繰り込み群方程式を書いて見るとわかりますが、gluino mass が非常に dominate に効いてくるわけですね。そうすると、仮に high energy のところ、Planck scale でずれていても、low energy に持ってきた時には gluino mass でもってその squark mass の差っていうのは完全に dilute されてしまって、ほとんどその gluino mass になっちゃうというようなことが、繰り込み群を使って解析してやると起こるいうことがわかります。

$$\begin{array}{ccc} \text{at } M_{\rm pl} & & \text{at } M_W \\ m_{\tilde{q}_1}^2 \neq m_{\tilde{q}_2}^2 & \xrightarrow{\text{繰り込み群}} & m_{\tilde{q}_1}^2 \sim m_{\tilde{q}_2}^2 \sim M_g^2 \end{array}$$

$$\left(M_g^2 \text{ (gluino mass)} > m_{\tilde{q}}^2 \right)$$

つまり、high energy の scale で仮に same charge の squark の mass が縮退していなくっても $M_g^2 > m_{\tilde{q}}^2$ のような soft breaking term を与える model の場合には flavor changing neutral current の問題というのは解決できる可能性があるというわけです。だから、必ずしも universality というのは必要ないかもしれない、もしくはないような場合もありうる

んだということもこういう可能性は示唆している。これが FCNC との関係からの話です。

質問： この場合、same order の squark mass というのは、偶然ではなくて何か fixed point に行ってるようなものなんですか？

末松： fixed point とは関係ないと思うのですが、この $m_{\tilde{q}}^2$ の繰り込み群方程式を書いてやると右辺の方に $M_{\tilde{g}}^2$ がぼこっと入る。で、残りがちょろちょろちょろというようなものです。それでその繰り込み群方程式を走らせるその main な source というのは $M_{\tilde{g}}^2$ になってしまうというような事情です。

次に、時間過ぎちゃったんですけど CP phase の話と μ-term の話までして、途中ですが終わりにしたいと思います。

6.2 new CP phase

soft breaking term の中には、新しい CP breaking の source が含まれています。というのは、A-term とか B-parameter とか gaugino mass とか μ は一般に complex です。今、H_1 や H_2 の真空期待値と $B\mu$ が real になるように superpotential の中の phase をとる convention にします。

$$A_f, B, M, \mu, \quad \cdots \quad : \text{complex} \quad (\text{但し } \mu B \in \mathbb{R}) \tag{6.8}$$

$$\langle H_1 \rangle, \langle H_2 \rangle \quad : \text{real} \tag{6.9}$$

$$\mu = |\mu| e^{-i\widetilde{\phi}_B} \qquad A_f = |A_f| e^{i\widetilde{\phi}_A}$$

今、こういうベースをとっておいて、R 変換を施すことで gaugino の mass を real にします。そういう変換を施してやると、

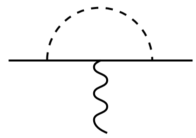
$$\lambda^a \quad \to \quad e^{i\alpha}\lambda^a \tag{6.10}$$

$$A_f \quad \to \quad A_f e^{2i\alpha} = |A_f| e^{i(\widetilde{\phi}_A + 2\alpha)} = e^{i\phi_A}|A_f| \tag{6.11}$$

$$\mu \quad \to \quad \mu e^{-2i\alpha} = |\mu| e^{-i(\widetilde{\phi}_B + 2\alpha)} = e^{-i\phi_B}|\mu| \tag{6.12}$$

$$\phi_{A_f} \equiv \arg(A_f M^*), \quad \phi_B \equiv \arg(BM^*)$$

この α は、gaugino の mass を real にするための変換 parameter で、こういう変換を施したのに伴う変化が A_f, μ の phase の shift として現れています。この ϕ_A というのは $\arg(A_f M^*)$、Mっていうのは real にする前の gaugino mass です。もし A-term が universal な場合は、新たな CP phase が 2 つ (ϕ_A , ϕ_B) 入ってくることになりますけど、一般には A_f というのは quark ごとに違うわけですから universal の場合にくらべて新たな CP phase っていうのは flavor の分増えちゃうわけですね。まあとにかくこういう CP phase が新たに現れてきます。それでこういう CP phase は neutron の EDM(electric dipole moment) とか electron の EDM という CP violating な量に効いてきまして、実際に例えば下のような 1-loop の graph を通して EDM に効いてきます。で、この neutron や electron の EDM を今の実験の bound 以下に抑えようとしますと、ϕ_A とか ϕ_B っていうのは 10^{-3} よりも小さくないといけないというような constraint が出てきます。これらがなぜ小さいのか というのは 1 つの



$\Rightarrow \quad \phi_A \,, \, \phi_B \ \leq 10^{-3}$

supersymmetric model の中での naturalness にかかわる大きな問題で、どうしてこんなに小さいのかということが色々問題にされています。

それで、ここでは詳しく話せないんですが、string の model では例えばさっきちょっと詳しく話した dilaton dominated な場合にこの phase をいろいろ調べてみますと、その場合には ϕ_A が 10^{-3} というのはかなり自然に説明できるというような議論があります [22]。ところが ϕ_B については議論が難しい。それはなぜかと言うとさっき話しましたように、B というのは origin に非常に依っていて、どんな origin でもって B が出てくるのかで phase の特質っていうのは全然違ってきてしまうので、そういう一般的な議論はできないという特徴があるからです。それからもう 1 つ、さっき言った moduli や dilaton に対する対称性 :

$$\begin{cases} S \to S + i\alpha \\ T \to T + i\beta \end{cases}$$

こういう対称性を詳しく調べてみると、この対称性の結果として少なくとも ϕ_A は非常に小さく抑えられるという結果が得られています [23]。 ところがこの場合にも ϕ_B っていうのはそういう議論ができないというわけです。だから通常の μ-term を $\mu H_1 H_2$ のような形で与えるような場合には、どうして phase がかなり小さな、10^{-3} よりも小さな値をとるのかというのが説明できない。但し、この ϕ_A という phase が小さいということを説明することは、ある場合に限ってはできるわけですね。そういうことを考えてやると、μ-term というのを Yukawa coupling で置き換えるような、例えば何か singlet S を入れてこの S の真空期待値でもって μ-term が生成されるというような場合に話を持っていくと都合がいい。

$$\mu H_1 H_2 \quad \to \quad \lambda \langle S \rangle H_1 H_2 \tag{6.13}$$

そうするとこの ϕ_B に対応するようなものも ϕ_A の性質に置き替わるわけですから、ここでいったような議論が可能になって、これは ϕ_B の小ささをうまく説明できるかも知れない。いずれにしても supersymmetric な version にしたときに soft breaking term に入っている CP の phase が小さいって言うことは、なんらかの形で説明しなければならない。 String の場合はもしかしたらこういうような形で説明できるのではないかという可能性があるということです。でまあ、具体的なことは何も言いませんでしたけど、色々、論文をあたってもらえればその辺の詳しい議論をしている論文を見つけることができる事ができると思います* 。

* ここでは話せませんでしたが、CP の破れの起源や strong CP 問題等についてもコンパクト化した空間の複素構造との関係、Peccei-Quinn 対称性との関係などから議論がなされています。これについては [12] であげた文献等を参考にして下さい。

6.3 μ-problem

最後に μ-problem について話をしたいと思います。superpotential の中に μ-term というのが MSSM では入っています。

$$W \supset \mu H_1 H_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \sim O(M_W) \tag{6.14}$$

ところがこいつは MSSM の中では supersymmetric な mass term になっていてこれが何で weak scale なのかということについてはなんの保証もないわけですね。naturalness というような話もしましたが、μ を 0 にするからといって何らかの symmetry が増大するということにはなっていない。ということで、supersymmetric にすることであたかも hierarchy problemっていうのは解決したかのように見えていたんだけど、実は μ のところに問題が押し込まれているというような見方もできないことはないわけですね。じゃあ、これを解決する可能性はどういうふうな形で今の場合 string の枠の中で考えられるのかということですが、1 つは新しい singlet を導入するということですね。つまり、さっきのように μ scaleっていうのを singlet の真空期待値の結果として生成させてやればよい。

$$\mu H_1 H_2 \;\Rightarrow\; \lambda S H_1 H_2 \quad \rightarrow \quad \mu = \lambda \langle S \rangle \qquad (\leftarrow m_{3/2}) \tag{6.15}$$

そうした時に、じゃあこの真空期待値はどうして出てくるのかというと、今度は soft breaking term という supersymmetry の breaking、$m_{3/2}$ で特徴づけられるようなそういう S の soft mass term が入ってくる。それに対して輻射補正の効果を考えることで、$\langle S \rangle$ の scale というのをうまく weak scale に出すようなそういう可能性を考える事もできます。実際にまあそういうようなことは可能だというような議論が色々ありますが、それが 1 つの可能性ですね [24]。

質問： singlet かませるっていうのはいいんですけど、field の対称性からすれば μ-term は手でいれてもいいんですよね。

末松： ああ、だけど例えば余分な $U(1)$ 対称性みたいなものを考えるとか、なんか余分な対称性でこの μ-term は禁止されるというような model をつくることができます。普通、こういうような話にしようとするときには、まあ非常に自然なのは extra $U(1)$ を入れて、この S の期待値で extra $U(1)$ が破れるというような形で model を構成するというのが 一番自然だと思います。string 模型の中で gauge 群の構造の中には非常にしばしば余分な $U(1)$ が入っていますから、それを使うということで superpotential の中にもこういう形ではいる modelっていうのは結構多く知られています。

質問： $U(1)$ を破るとすると Goldstone は？

末松： この $U(1)$ はだから gauge ですよ。Goldstoneっていうのはこれに吸われちゃいますから。それ以外で、S の 4 乗 term を作るために、superpotential の中に S の 3 乗というのを入れるような可能性もあります。その場合には $\lambda S H_1 H_2$ への置き換えに伴い現れうる global $U(1)$ symmetryっていうのはそこで破れてしまいます。$\mu H_1 H_2$ をもし何か $U(1)$ 対称性のような global 対称性を考えることで禁止しようと思ったとき、S の 3 乗 term で破られなければ Goldstone が出てきて、結局 $\mu H_1 H_2$ は禁止できない。実際には string の model の中で extra $U(1)$ gauge 対称性が入ってくるのは　結構あるんでこれが 1 つの可能性です。

それで、さっきいろいろぐじゃぐじゃ計算した時に μ というのが出てきています。

$$\mu \;=\; \underbrace{e^{\widehat{K}/2}\widetilde{\mu}}_{(a)} + \underbrace{m_{3/2} e^{i\phi} H_{IJ} - F^{\bar{j}}(\partial_{\bar{j}} H_{IJ})}_{(b)} \tag{6.16}$$

(a) non perturbative symmetry breaking effects in hidden sector

(b) tree level Kähler potential

ここの第 1 項はどうして出てきているかというと、一番最初に非摂動的な効果で effective な superpotential が induce されるという時に、この $\tilde{\mu}$ というのも出てきました。だから supersymmetry を破るようななにか非摂動的な効果で出てきているようなものです。したがって、$\tilde{\mu}$ の部分っていうのはなんらかの non-renormalizable な term というような形で出てきているということが考えられるわけで、supersymmetry breaking と併せて考えてやると、例えば

$$\tilde{\mu} \ : \text{non-renormalizable term} \quad \sim \left(\frac{M_S}{M_{\rm pl}}\right)^n \cdot M_S \tag{6.17}$$

と言うような形で出てきます。それでこの n がどのぐらいの値をとるのかということによって、たとえば M_S を 10^{11-14} GeV というような scale にとったとした時に、このような形で出てくるのであれば、$(M_S/M_{\rm pl})$ の部分が suppression factor として効きますから、$\tilde{\mu}$ っていうのは結構 weak scale 近辺に出すことができる。まあ、それはこの n っていうのが完全に model dependent に決まってくるわけですからそういう modelができるかどうかというような話になってきます [22]。

で、もう 1 つはこの (b) の部分です。(b) のほうは tree level の Kähler potential の中に $\frac{1}{2}H_{IJ}Q^IQ^J$ という奴を入れたことによって出てきている項です。だから Kähler potential の中に Higgs の H_1H_2 というような項が入っていれば、その項を通じて μ-term の (b) の部分を出すことができます。それでこの部分っていうのは $m_{3/2}$ で特徴づけられていますので自然に weak scale というか TeV 領域の soft breaking mass と同程度の order のものを与えるということがわかります。で、こういう項を Kähler potential の中に入れればいいじゃないかっていうのは supergravity の枠組みのなかでずいぶん前に知られてたんですが、string model の中で実際に string の計算を使って Kähler potential の構造を調べたときに、ある場合にはこういうような項が実際に存在するというような例も知られています [25]。ということで、基本的に μ-problem というやつを解決する方法として、supersymmetry breaking となんらかの関係を付けることで μ の scaleっていうのを weak scale に出すというような枠組みを与えることができる可能性があるということです。それで phenomenological な application の話がほとんどできなくて非常に申し訳ないんですが、一応ここまでで時間も来たことでおしまいにしたいと思います†。

6.4 終わりに

それで、非常にごちゃごちゃいろんなことを話して、こんなものはやめたほうがいいというふうに思った人もいるかもしれないけど、それは単に僕の話が下手であるということであって、まあ最近、string そのものの発展っていうのは formal な部分では非常に大きな

† これ以外の phenomenological な問題については、少し古くなりますが、私の研究会報告 [12] やそこで引用した文献などを参考にして下さい。

ものがあります。string dualityっていう奴で、但しそれがまだ phenomenology を議論する所まで、どういうふうにそこでの発展っていうのが phenomenology の議論をするときに使えるのか、どういうような特徴を引き出してくるのかというようなところがまだよくわかってないので phenomenological な議論っていうのはあまり進んでません。けれども、もしその辺の突破口が見つかるとかなりいろいろな進展があるかも知れない。だからまあ、そういう意味では賭けですけどね。そういうようなことを、string の最近の発展を踏まえて phenomenologyっていうのをやってみるっていうのは面白いかもしれない。もしそれがうまくいけば、あっというまに世界の最先端で何かやれるということになるかもしれない。まあ、非常な賭けで必ずしもお勧めはできないかもしれないですが、そういう可能性があるのではないかというふうにも思います。Review も最近はあまり出てないですけど、phenomenology の reviewっていうのも少し年代をさかのぼれば結構ありますので、そういうものを読んでいただければいいと思います [27]。で、なんか非常にごちゃごちゃとわかりにくい話をして申し訳なかったんですがこれで終わりにしたいと思います。ありがとうございました。（拍手）

質問： 講義を通じてどの時代になされてきたのかというのがあまりよくわからなかったんですが。

末松： string 模型を使っての low energy の effective theory の、例えば Kähler potential とかの構造等については、90 年前後ですね。それ以前にいろいろ調べられたのは、どういう model が construct できるのかということで、例えば gauge 群の構造とか matter content というのが Calabi-Yau とか orbifold とか fermionic construction 等を使って最初にいろいろ議論されました。それでだいたい群構造とか matterっていうのがどんなものがありうるのかっていうのが調べられたわけですね。それが 85、86 年ぐらい。87 年あたりから Yukawa coupling の計算っていうのが結構いろいろやられました。何で Yukawa coupling を計算するのかっていうと、いろいろ string model が作れるわけですよね。それで別の construction でつくった model 同士の同等性みたいなものを議論しようとすると、まず、最初に調べるのが massless mode、その次に Yukawa coupling みたいなのをそれぞれ調べてみて同じような構造になっているのかというのを調べるというのがあって、Yukawa coupling の計算等がやられたのが 87、88 年ぐらいですが、その後 Kähler potential とか gauge kinetic function の構造、例えば orbifold 等で、string model から tree、1-loop amplitude を計算してそういうものの構造を引き出すっていうような仕事が 91、92 年頃にわたってやられました。そのあと、93 年ぐらいから soft breaking term の構造についてかなり色々調べられたというわけですね。で、それ以外に純粋に phenomenology との接点でいろいろな neutrino mass の問題とか proton decay の問題というのはその期間を通じてずっといろいろの model のなかで議論されている。その soft breaking term の議論がなされて、それより少し遅れるくらいの感じで quark mass matrix の構造についてのいろいろな研究が行われてきているということですね。あと、supersymmetry breaking との関わりでは、94 年頃から cosmological moduli problem というような、cosmology との関係で moduli というのは cosmological には非常にやばい性質を持っているというような議論がありまして、その辺の cosmology との関係も 94、95 年ぐらいですか。あと gauge coupling unification の研究なんかも、LEP の data が出て 10^{16} GeV ぐらいで一致すると。ですが string の scaleっていうのはもう少し、factor 20 ぐらい上にあるんですよね。その辺をどのように説明するのかという、そういう話題も 93、4、5 年ぐらいですか。そのぐらいにやられている。で、最近の M-theory なんかも 1 つの phenomenological な background の中に coupling unification が LEP の scale と factor 20 ぐらいずれている、それを説明しようとすると strong coupling な領域に string scale がないといけないというよ

うなことがあって、その辺もまあ、1 つの非常に phenomenological でちょっとちゃっちい (実はかなり大きな) 動機の 1 つではあったのかも知れないですね。で、soft breaking term の構造をしらべるような時のベースになっているのは string duality というふうな話です。あと supersymmetry breaking を考えるような場合に、dilaton、これは gauge coupling constant にかかわるわけですが、これに対しての superpotential を supersymmetry が破れたと考えて書いたら、無限遠に run away するような構造をもたらします。この dilaton の potential を stabilize するような何らかの効果を導入しないといけないんだけど、naive な string の議論している限りは 途中で minimum があってそこで有限な S の真空期待値が決まるというのは考えられない。無理やりかなり phenomenological な理由で S に対して、S を $1/S$ に置き換えるような S に関する duality を、つまり dilaton の potential に無理やり有限な所に真空期待値をもたせるような S-duality というようなものを課して、dilaton の superpotential の議論を supersymmetry breaking にからめてやった人もいますが [26] たぶんそれが S-duality というのが言われだした最初じゃないですか。そういう非常に formal な形というよりは、phenomenological にむしろ無理やり手で入れたようなところが最初にあったような感じがしないでもないです。それ以降、S-duality、T-duality というような形で相補的に duality の構造が調べられるようになって、最近の発展につながっているというわけで、phenomenological な議論が formal な議論に逆に何か刺激を与えているような側面もなきにしもあらずですね。最近はだから phenomenological な議論の論文っていうのは減ってしまったという印象がありますね。それは、そういうようなことをやっていた人が M-theory とかのかなり formal な議論に移って行ってて、phenomenology の方への適用可能性、どういう特徴が出てくるのかという事に関して結果を出せるところまで来てないという状況の結果でしょう。だいたい歴史的な経緯としてはそんな感じです。

参考文献

[1] J. Wess and J. Bagger, *"Supersymmetry and Supergravity"*, Princeton Univ. Press, 1983 (Princeton series in Physics).

[2] H. P. Nilles, Phys. Rep. **110** (1984) 1.

[3] H. Haber and G. Kane, Phys. Rep. **117** (1985) 75.

[4] M. Green, Schwarz and E. Witten, *"Superstring Theory"*, vol. 1,2 , Cambridge Univ. Press (1987) (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

[5] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec and R. Rohm, Phys. Rev. Lett **54** (1985) 502; Nucl. Phys. **B256** (1985) 253.

[6] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Nucl. Phys. **B258** (1985) 55.

[7] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. **B261** (1985) 687; Nucl. Phys. **B274** (1986) 285.

[8] E. Witten, Nucl. Phys. **B258** (1985) 75.

M. Dine, V. Kaplunovsky, M. Mangano, C. Nappi and N. Seiberg, Nucl. Phys. **B259** (1985) 549.

[9] L. E. Ibãñez, H. P. Nilles and F. Quevedo, Phys. Lett. **187B** (1987) 25.

L. E. Ibãñez, J. Mas, H. P. Nilles and F. Quevedo, Nucl. Phys. **B301** (1988) 157.

[10] H. Kawai, P. C. Lewellen and S. H. H. Tye, Nucl. Phys. **B288** (1987) 1.

I. Antoniadis, C. Bachas and C. Kounaas, Nucl. Phys. **B289** (1987) 87.

[11] D. Gepner, Phys. Lett. **199B** (1987) 380; Nucl. Phys. **B296** (1988) 757.

[12] 末松大二郎, 研究会報告 素粒子論研究 **86** (1993) D143; 素粒子論研究 **92** (1995) A35.

[13] E. Witten, Phys. Lett. **155B** (1985) 151.

[14] J.-P. Derendinger, L. E. Ibãñz and H. P. Nilles, Nucl. Phys. **B267** (1986) 365.

C. P. Burgess, A. Font and F. Quevedo, Nucl. Phys. **272** (1986) 661.

[15] M. Dine and N. Seiberg, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 36.

[16] E. Witten, Nucl. Phys. **B268** (1986) 79.

[17] D. J. Dixon, V. S. Kaplunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. **B329** (1990) 27.

[18] D. J. Dixon, V. S. Kaplunovsky and J. Louis, Nucl. Phys. **B355** (1991) 649.

[19] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, Phys. Rep. **244** (1994) 77.

[20] S. Ferrara, D. Lüst, A. Shapere ans S. Theisen, Phys. Lett. **B225** (1989) 363.

S. Ferrara, N. Magnoli, T. R. Taylor and G. Veneziano, Phys. Lett. **B245** (1990) 409.

[21] V. S. Kaplunovsky and J. Louis, Phys. Lett. **B306** (1993) 269.

[22] A. Brignole, L. E. Ibãñez and C. Muñoz, Nucl. Phys. **B422** (1994) 125.

[23] K. Choi, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 592.

[24] D. Suematsu and Y. Yamagishi, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 4521.

M. Cvetic and P. Langacker, hep-ph/9707451.

[25] I. Antoniadis, E. Gava, K. S. Narain and T. R. Taylor, Nucl. Phys. **B407** (1993) 706.

[26] A. Font, L. E. Ibãñez, D. Lüst and F. Quevedo, Phys. Lett. **B249** (1990) 35.

[27] 最近の review としては次のものがあります。これらには最近の発展を含めて、多くの参考文献がリストされているのでそれらも参照して下さい。

F. Quevedo, *"Lectures on Superstring Phenomenology"*, hep-ph/9603074.

L. E. Ibáñez, *"New Perspective in String Phenomenology from Dualities"*, hep-th/9804236.