1999年夏の学校 講義録

弦理論の構成的定義

川合 光 教授
(京都大学)

於： 長野県 木島平

1999年 7月 25~26日

講義録作成 東京大学
村松哲行　山口貴史
大島健一 小西由紀子 小又雄一郎 長岡悟史 牧本聡一郎

目 次

I 弦理論とソリトン , デュアリティ 3

I.0 Introduction 3

I.1 弦の摂動論 4

I.2 D-brane 16

I.3 BPS 状態 25

I.4 D-brane の集団運動 27

I.5 弦のデュアリティ 30

I.6 M-theory 33

II Black hole と弦理論 36

II.1 ブラックホールのエントロピー 36

II.2 弦理論からみたエントロピー 41

II.3 BPS 状態での比較 44

II.4 Holographic principle 46

III AdS-CFT 対応 47

III.1 D-brane と near-horizon 領域 48

III.2 AdS 空間 52

III.3 AdS-CFT 対応 56

IV 行列模型による弦理論の定式化 62

IV.1 D0-brane の有効理論と M(-atrix) theory 62

IV.2 IKKT model 67

IV.3 非可換幾何学 69

IV.4 非可換平面 70

IV.5 非可換球面 71

V まとめ 72

この講義では、最近の弦理論、特にここ 5 年くらいで発展してきた辺りの話をしようと思います．最初にいっておきますが，もちろん弦理論というのはまだ完全に定式化されていないわけで，むしろこれから理論を定式化していくという話であるわけです．今回の話を通じて，結局どういうことをやればいいのかわかってもらえればそれでいいと思います．それで話の組み立てですが，実はまだ完全にどういう風に話すのか決めてません．聴衆の人が M1 から Doctor まで混ざっているようなので，質問次第で変えていこうと思っているのでどんどん質問をしてください．

だいたい，大まかには 4 つに分けて，

$$\begin{cases} \text{I．弦理論のソリトンとデュアリティ} \\ \text{II ブラックホールと弦理論} \\ \text{III .AdS-CFT 対応} \\ \text{IV．行列模型による定式化} \end{cases}$$

というように話をします．最初に弦理論のソリトン，デュアリティについて話をします．次に，ブラックホールの話，これは弦理論の本当の自由度というのはどの程度なのかという話です．それから，AdS-CFT 対応の話をします，これは弦理論と gauge 場の関係の 1 つの見方ですね．それから，行列模型による定式化について話します．これだけのことを話したいのですけど，本当に基礎から全部話をしていくと，I がおそらく終わらないと思うので，ちょっと乱暴かもしれませんが，ある程度 string の知識を仮定して議論を進めて行きたいと思います．ですから，わからないところは質問してください．

I　弦理論とソリトン，デュアリティ

I.0　Introduction

まず，弦理論がどういう状況にあるかについて話をします．重力以外の素粒子物理は，みなさんご存じのように，200GeV より下のエネルギーの範囲では標準模型で完全に記述されています．これはもちろん gauge 理論のことです．これで今我々が知っている現象は全部記述される訳ですけれども，重力はどうしても標準模型を量子化するのと同じようにはできません．これは一言で言うと，繰り込みができないということです．それで，重力の量子論をどうやって作ろうかというのは，長い間みんないろいろ苦労してきたわけです．もし重力がなければ，標準模型だけで閉じてしまっているので，これ以上素粒子物理として進む手がかりはなかったと思います．理論に困難があれば，それを克服するように理論を拡大したときにさらに統一された理論ができるわけです．理論物理はそうやって進んでいったわけで，実際，標準模型と重力を統一するものとして弦理論が注目されているのです．弦理論には紫外発散がないというすごい性質がありまして，しかも，重力，gauge 場，quark，lepton などが自然にでてくる．こういう意味で，今までの困難を克服してさらに consistent になっています．そういう意味で，弦理論が我々の自然の背後にあるだろうと

いうのは，非常に有り得ることなんですけれども，まだ完成されていません．

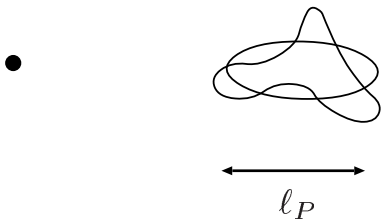


図 1: 場の理論と弦理論

次に，弦理論というものを大雑把にいってしまいます．まず，普通の場の理論というのは，点粒子の相対論的量子力学です．例えば，quark や lepton，gauge 場は点だと思っているわけです．それを弦理論では，点の代わりに輪ゴムみたいなものを考えるわけです．長さはだいたい Planck scale ぐらいの小さなものです．ですから遠くから見ると，点にしか見えない．ですけど，いろいろな振動をしますから，振動の仕方が，遠くから見ると違う量子数を持っているように見えるわけです．それが点粒子の記述のいろいろな場に対応するわけです．このようにして自然に graviton，gauge 場，物質場が入ってくるわけです．但し，問題なのは，弦理論がこのようにできていて，理論が 1 つに定まっていればいいんですけれども，実際には無限個の真空があります．つまり，弦理論の基底状態は無限個あります．ここで，無限個といっている意味は，摂動論的な意味でです．実は，弦理論は今のところ，行列模型による定式化等を除いては摂動論的にしかできていません．摂動論的な定式化の枠組みの中では，無限個の真空があります．無限個というのは，時空の次元に関してもいろいろありますし，gauge 場に関しても標準模型のようなものもあれば，もっと大きな群を持つものもあり，いろいろなものがありあります．そういう意味で，弦理論を摂動論的に扱っている限り，なぜ我々の知っている標準模型がでてくるのか説明ができず，予言能力がないわけです．しかし，摂動論を越えた定式化，つまり非摂動的定式化，あるいは構成的定式化ができれば，無限個の真空が非摂動効果によって 1 つの真空になっていると考えられます．これはもちろん，理論を実際につくって解いてみないとわからないわけですけれども，こういうことが期待されるわけです．これは，大雑把にいいますと，例えば，普通の量子力学で double-well の potential があるとします．そうすると，摂動論的には真空が 2 つあるわけですけれども，tunneling という非摂動効果を通して 2 つの摂動論的真空を重ね合わせたものが，本当の真空になる．それと同じようなことです．Introduction は，この辺にしておきまして，弦の摂動論に移りたいと思います．

I.1 弦の摂動論

普通の粒子の摂動論は，ご存じだと思いますが Feynman rule を描いてやればよいわけです．例えば，QED だと，photon がある点からある点まで飛んでいて，これが propagator

になるわけです．で，量子力学ですから中間にいろいろな状態が現れるわけで，これがいったん e^- と e^+ のペアにわかれて，また元に戻る過程も考えられます．もっと複雑なものも考えられます．そういうのを足し合わせたものが，実際に photon の伝搬を表すものになります．ですから粒子の場合には，伝搬を表すもの，propagator と interaction を表すもの，vertex の 2 つの情報を与えると，粒子の摂動論的定式化ができるわけです．

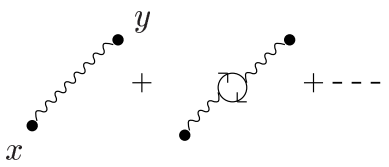


図 2: 粒子の摂動論

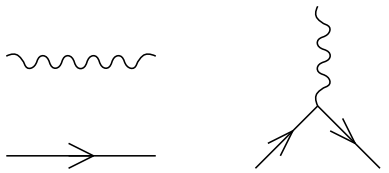


図 3: 粒子の摂動論:propagator と vertex

これを，弦理論の場合について考えます．弦理論では，弦の伝搬を表すもの，何かシリンダーみたいなものが考えられます．次に，途中で 2 つに分かれてまた 1 つに戻るようなものも考えられます．こういうものを足し上げてやります．そうすると弦の摂動論は，伝搬を与える部分と interaction を与える部分に分かれるのですけど，実は粒子の場合と大きく違っているのは，どこで分かれたのかを考えるのはあまり意味がないということです．結局，worldsheet 上で local なラグランジアン密度を与えてしまいますと，worldsheet 上で積分するわけですから，どういう風に propagate するかという情報と，どういう風に interact するかという情報が決まってしまいます．そういう意味で，普通の場の理論を考えるときには，どんな場が登場するのか決めてその場がどう interact するかを決める，という手続きだったんですけど，弦の場合は，むしろ interaction と伝搬は同じ起源のものであると考えます．

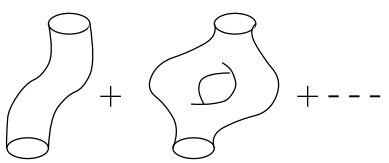


図 4: 弦の摂動論

次に，実際に worldsheet 上でどういう風な構造になっているのか少しみてみます．いく

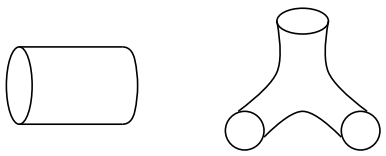


図 5: 弦の摂動論:propagator と vertex

つか出発点の違いはあると思うんですけれども，1 つの典型的な出発点として，TypeII と呼ばれている string について考えます．具体的な worldsheet の作用は，

$$S = m_s^2 \int d^2\xi \sqrt{g} \left\{ g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu + i e_i^a \bar{\psi}^\mu \rho^i \partial_a \psi^\mu + 2 e_i^a e_j^b \bar{\chi}_a \rho^i \rho^j \psi^\mu (\partial_b X^\nu + \frac{1}{2} \bar{\psi}^\nu \chi_b) \right\}, \tag{I.1}$$

と表されます．ここで，X^μ は worldsheet 上の場です．また，2 次元の worldsheet は σ τ で parameterize してやります．さらに σ τ を合わせて，ξ と書くことにします．すると X^μ は $X^\mu(\xi)$ となるわけです．それと fermionic な場 $\psi^\mu(\xi)$ も考えます．$X^\mu(\xi)$ は worldsheet 上の scalar，$\psi^\mu(\xi)$ は worldsheet 上の 2 次元の Majorana spinor です．基本的にはこれでいいのですが，worldsheet 上の reparameterization の不変性が欲しいわけですから，worldsheet 上の metric g_{ab} を考えます．それから，理論が positive definite でないと困る，つまり，弦の量子力学として捉えて Hilbert 空間を作った時に negative norm の状態があると困るわけです．後で言いますように 10 次元のときに理論が consistent になりますので X^μ の μ は $\mu = 0$,1 ,...,9 なのですが，X^μ のうちの X^0 は norm の符号が引っくり返っています．実は worldsheet の reparameterization の不変性，これは一種の gauge 不変性ですが，これがあるおかげで，この negative norm の状態は消すことができます．

これと同様に，ψ^0 を消すためには fermion 的な自由度を持ったものが欲しいのですが，そのためには worldsheet 上の gravitino χ_a が必要なわけです．これは worldsheet 上に fermionic な local な supersymmetry を持ち込むためのものです．

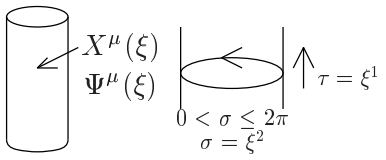


図 6: worldsheet 上の場

さらに，worldsheet 上の zweibein e_i^a を導入します．これを i ,j で contract したら metric になるわけです．また，worldsheet 上の γ-matrix を ρ_i と書くことにします．i は worldsheet 上の Lorentz の足，つまり i=0，1 です．X についてみますと，X は単に worldsheet 上の free scalar で mass はないので，X を並進しても不変になっています．

第 3 項は，worldsheet 上の supergravity の対称性を持たせるために加えたものです．実際に string でいろいろな計算をするときは特別な gauge を用いるのでこういう自由度はほとんど消えてしまいますが，原理的には，worldsheet 上の supergravity の対称性を持った作用が書ける，ということが大事なわけです．こういう形にすると，この作用は worldsheet 上で 2 次元の supergravity の作用になっています．もちろん，worldsheet 上に supergravity があることと，spacetime に supersymmetry があることは何の関係もありません．理論が worldsheet 上に reparameterization の不変性と local な supersymmetry の不変性を持っているおかげで X^0 ψ^0 の mode が落ちて，理論が positive definite に作られるわけです．

□ GSO projection

もう少し technical なことなのですが，GSO projection について話をしたいと思います．まず簡単のために，次のように gauge fixing をします:

$$\begin{cases} e_i^a = \delta_i^a \ , \\ \chi_a = 0 \ . \end{cases} \tag{I.2}$$

そうしますと作用は，

$$S = \int d^2\xi \big\{ (\partial_\mu X^\mu)^2 + i\bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi^\mu + \text{ghost term } (b\ ,c)(\beta\ \gamma) \big\}, \tag{I.3}$$

のように表せます．第 1 項が massless の scalar，第 2 項が massless の Majorana 場を表しています．Gauge fixing をしましたので，ghost term がでてきます．Ghost は $(b\ ,c)$，その superpartner は $(\beta\ \gamma)$ です．さらに，ψ^μ ρ を

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_L^\mu \\ \psi_R^\mu \end{pmatrix}, \tag{I.4}$$

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{I.5}$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{I.6}$$

のようにとってやりますと第 2 項は，

$$\psi_L^\mu (\partial_0 + \partial_1) \psi_L^\mu + \psi_R^\mu (\partial_0 - \partial_1) \psi_R^\mu, \tag{I.7}$$

と right mover と left mover に完全にわかれます．Massless ですので，worldsheet 上では，right mover と left mover が couple しないわけです．

それで，GSO projection が何かというわけですが，ここでは closed string を考えることにします．ここで worldsheet の parameter を σ とします．

図 7: closed string

Boundary condition は，

$$\begin{cases} X^\mu(\sigma = 2\pi) = X^\mu(\sigma = 0) \\ \psi_L(\sigma = 2\pi) = \begin{cases} \psi_L(\sigma = 2\pi) & \text{R-sector} \\ -\psi_L(\sigma = 2\pi) & \text{NS-sector} \end{cases} \end{cases} \tag{I.8}$$

となります．Fermion の方は，periodic なもの (R-sector) と anti-periodic なもの (NS-sector) があるわけです．作用には ψ の 2 次でしか入ってこないので，この 2 通りのどちらをとってもラグランジアン密度はちゃんと 1 価です．ψ_R についても同様なことがいえますので，fermion については次の 4 つの sector が考えられるわけです．

Left	Right
NS	NS
NS	R
R	NS
R	R

これらの 4 つの sector を全部とりいれたとすると，それによって状態の数が増えるわけで，その分 project しないと状態の数があわないわけです．つまり，振動モードを 1/4 だけ取り出すという操作が必要なわけです．それが GSO projection です．

どういう sector を取り出せば良いのかという基本原理ですが，modular 不変性と呼ばれるものを用います．これはどういうものかについて説明します．もともと string をつくるときに string の reparameterization に対する不変性を要求するわけですが，例えば torus を考えますと，無限小の変換の積み重ねでつくれないものがあるわけです．例えば torus を展開して平行四辺形として表します．そのときに，torus(図 8) をはさみで切って，切り口 A を 360 度回してまたくっつけてやりますと，それは平行四辺形を図 9 のように動かすことに相等します．あるいは，サイクル A とサイクル B を入れ替える操作は，図 10 に相等します．

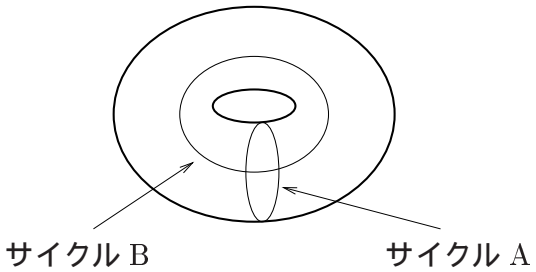


図 8: Torus

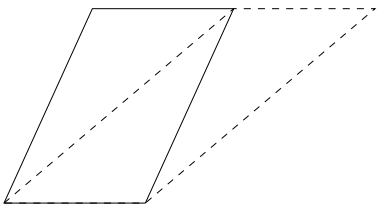


図 9: 基本領域の変形

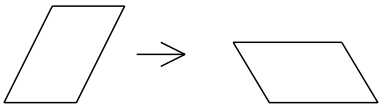


図 10: 基本領域の変形

一方 string のもう 1 つの大事な性質として，worldsheet の scale に依らないというものがあります．つまり metric g_{ab} は 2 行 2 列の対称行列ですので 3 成分ありますが，このうち 2 つは reparameterization で消せます．そうすると，局所的には reparameterization で，

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \circledcirc & \circledast \\ \circledast & \ominus \end{pmatrix} \to e^{\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{I.9}$$

まで持っていくことができます．これに加えて local scale invariance，つまり，

$$g_{ab}(\xi) \to e^{\sigma(\xi)} g_{ab}(\xi), \tag{I.10}$$

を worldsheet 上での基本的な symmetry として要求します．この要求を満たすものを critical string といいます．この symmetry のおかげで結局，

$$e^{\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{I.11}$$

とすることができます．ですから，critical string の場合は torus の大きさ自体は関係ないわけです．ですから，適当に大きさを決めることができて，図 11 のように座標をとることができます．すると先程の変換は図 12，図 13 のようになります．

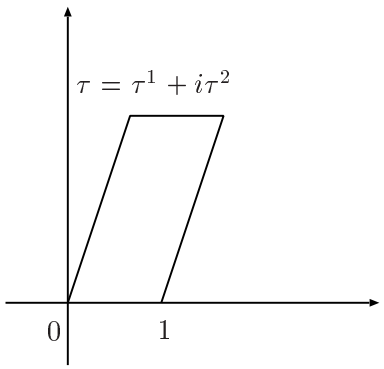


図 11: torus の基本領域

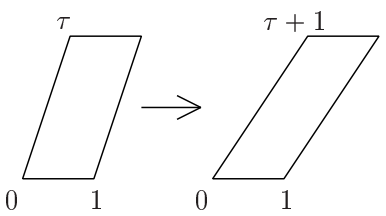


図 12: 基本領域の変形

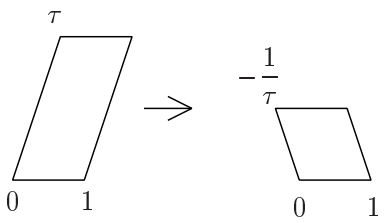


図 13: 基本領域の変形

質問 $-1/\tau$ という結果はどのようにして出てきたのですか？

解答 全体に $1/\tau$ を掛けて，$-1/\tau$ 足してやるとでます．

ここで，torus 上で作用を path integral したときの結果が，torus の形を指定する変数 τ に対する，

$$\begin{cases} \tau \to \tau + 1, \\ \tau \to -\dfrac{1}{\tau}, \end{cases} \tag{I.12}$$

という変換に対して不変でなければなりません．それを modular 不変性といいます．このような不変性を持つように projection を決めてやります．このような projection は 4 つの sector を考えたとき何通りかありますが，そのうちで spacetime の supersymmetry を持つようにしたものが type II string です．これは 2 種類ありまして，それぞれ type IIA，type IIB と呼ばれています．

大雑把に GSO projection がどういうものなのかを見てみます．まず，次のような演算子を考えてみます:

$$\begin{cases} G_L = (-1)^{\psi_L \text{の fermion 数}}, \\ G_R = (-1)^{\psi_R \text{の fermion 数}}. \end{cases} \tag{I.13}$$

今，ψ は worldsheet 上の Majorana 場ですので，ψ の励起が even 個であるか odd 個であるかは意味があることです．ですから，このような演算は意味があります．このような G_L は，ψ_L をはさむと符号が変わるので具体的には，

$$G_L \psi G_L = -\psi_L \ , \tag{I.14}$$

$$G_L^2 = 1 \ , \tag{I.15}$$

という性質を持つ G_L をつくればよいわけです．ψ_L を mode 展開して書いてやると，

$$\psi_L^\mu(\tau\ \sigma) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1/2}^{\infty} b_r^\mu e^{ir(\sigma-\tau)} + \text{C.C} & \text{for NS-sector,} \\ d^\mu + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n^\mu e^{in(\sigma-\tau)} + \text{C.C} & \text{for R-sector,} \end{cases} \tag{I.16}$$

となります．ここで NS-sector は anti-periodic ですので，mode は半奇数となります．R-sector は periodic ですから，ここが大事なところなのですが，ゼロモードがあります．それを d^μ と書きます．あとは整数モードの oscillator があります．G_L は，これらのモードを用いて

$$G_L = \begin{cases} (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_r^{\mu\dagger} b_{r\mu} + 1} & \text{for NS-sector,} \\ \pm\sqrt{2}^{10} d^0 d^1 \ldots d^9 (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_r^{\mu\dagger} d_{r\mu}} & \text{for R-sector ,} \end{cases} \tag{I.17}$$

と表せます．G_L は NS-sector のときは，単に fermion 数の偶奇を与えます．但し，これは定義の問題ですが，起点を 1 つだけずらしておきます．次に R-sector のときについて考えます．ψ は反交換関係を満たすわけで，ゼロモードは $\{d^\mu\ ,d^\nu\} = \delta^{\mu\nu}$ を満たします．ちょうど，d^μ は γ -matrix の $1/\sqrt{2}$ みたいなものですから，R-sector の基底状態は γ -matrix の表現になっているわけです．そういう意味で R-sector の基底状態は spacetime の spinor になっているわけです．このような見方をしますと，$d^0 \cdots d^9$ は spacetime の γ^5 のようなものになります．

type II の GSO projection というのは，それぞれの sector で $G_L = 1$,$G_R = 1$ と projection することを言います．Sector を 4 倍に増やしておいて，G_L で $1/2$，G_R で $1/2$ するわけですから，状態の数はあまり変わらないわけです．実は，modular 不変性を満たそうとすると状態の数が大きくは変わってはいけないのですが，sector を増やした分，projection をして大まかな状態数がそろうようにしてやれば，また modular 不変性を満たす可能性があるわけです．

ここで，G_L の $\pm$ についてですが，$d^0 \cdots d^9$ は γ^5 みたいなものなので，projection をとったときに，γ^5 の固有値が $+1$ をとるか -1 を決めているのが G_L の $\pm$ なわけです．ですから，G_L，G_R で R-sector に対して，

$$\begin{cases} \text{同じ符号を持ったもの} & \text{IIB,} \\ \text{異なる符号を持ったもの} & \text{IIA,} \end{cases} \tag{I.18}$$

の 2 通りが考えられることになります．type IIB の方は left mover と right mover が同じ chirality をもっているわけですから，spacetime で chiral になるわけです．対して，IIA の方は spacetime で nonchiral となっています．

Spacetime で supersymmetric になっているものは IIA と IIB の 2 種類あるといったわけですが，それらが実際に，質量がゼロの mode をどれだけ含むかを調べておかなければなりません．時空に輪ゴムのようなものが振動していて，その振動のそれぞれの mode が何かの粒子に見えるのですが，そのうちで質量がゼロの粒子に対応している mode を見るわけです．ちょっといきなりで乱暴かもしれませんが，ここでは light cone gauge をとります．状態の数を数える場合には，light cone gauge が一番手っ取り早いのでそうすることにします．これはどのようなものかと言いますとまず $X^0, \cdots, X^9$ を，

$$\begin{cases} \dfrac{X_0 + X_9}{\sqrt{2}} = X^+, \\ \dfrac{X_0 - X_9}{\sqrt{2}} = X^-, \\ X^i (i = 1 \text{ ,...,} 8), \end{cases} \tag{I.19}$$

のように組み替えます．こうとると string の持つ不変性，reparameterization invariance と local scale invariance のおかげで，実は X^+ の振動 mode がなくなります．つまり，

$$X^+ = x^+ + p^+ \tau. \tag{I.20}$$

また，

$$p^- = \frac{1}{2p^+}(p_i^2 + N_L + N_R), \tag{I.21}$$

となります．

あとは，level matching，つまり $N_L = N_R$ の条件も必要です．これは，closed string を考えたときには，cylinder のねじれについても path integral してしまうわけですが，その結果として level matching の条件が出てきます．さらに，$N_L + N_R = 2p^+p^- - p_i^2$ より $N_L + N_R = (\text{mass})^2$ となっていますから，level matching を満たす範囲内で，$N_L + N_R$ がどのような値をとるか調べてやれば，どんな質量を持つかわかるわけです．N_L ,N_R は Hamiltonian みたいなもので，NS-sector，R-sector でそれぞれ，

$$N_L = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{Lr}^{i\dagger} b_{Lr}^i - \frac{1}{2} & \text{for NS-sector,} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n d_{Ln}^{i\dagger} d_{Ln}^i & \text{for R-sector,} \end{cases} \tag{I.22}$$

と書けます．right mover についても全く同じです．

まず，NS-NS sector について調べます．left mover の基底状態と right mover の基底状態のテンソル積

$$|0\rangle_L \otimes |0\rangle_R \ , \tag{I.23}$$

を考えると，この状態は $N_L = N_R = -\frac{1}{2}$ を表しています．そうすると $m^2 = -1$ となり，tachyon になってしまいます．ところが，この状態では $G_L = -1$,$G_R = -1$ となりますので，GSO projection をやってやりますとこれは落ちます．GSO projection の 1 つの良いところは，tachyon を理論から落としてくれるということです．

その次に mass の小さいものを考えますと，

$$b^{i\dagger}_{L\frac{1}{2}}|0\rangle_L \otimes b^{j\dagger}_{R\frac{1}{2}}|0\rangle_R, \tag{I.24}$$

となりまして，$N_L = N_R = 0$ となります．また，$G_L = G_R = 1$ となるので，これは GSO projection をしても残ります．これは何かと言いますと，i ,j の足を持っているわけで，spacetime で見れば，2 階の tensor を表しています．2 階の tensor を分解してやりますと，対称な tensor と反対称な tensor と trace の部分に分かれます．それが，結局それぞれ graviton $g_{\mu\nu}$，反対称 tensor 場 $B_{\mu\nu}$，dilaton ϕ に対応します．

後は，同様に調べていけばいいわけです．NS-R sector を調べますと，gravitino χ^a_μ，dilatino λ^a が出てきます．R-NS sector を調べますと，同様に gravitino χ'^a_μ，dilatino λ'^a が出てきます．IIA と IIB の違いは，IIB だと NS-R, R-NS sector が同じ chirality を持っていて，IIA だと逆の chirality を持っている点です．このため，R-R sector では出てくる場が IIA と IIB で違っていまして，IIA ではベクトル場 A_μ と反対称 tensor 場 $C_{\mu\nu\lambda}$ が，IIB では χ ,$B^{(2)}_{\mu\nu}$,$A_{\mu\nu\lambda\rho}$，但し $A_{\mu\nu\lambda\rho}$ は self-dual ですが，が出てきます．R-R B 場を NS-NS B 場と区別するために $B^{(2)}_{\mu\nu}$ と書きます．

今は具体的に 10 次元で consistent な string 理論を作ってみました．それが Type IIA，Type IIB というものです．一般に consistent な string を作るには，次のようにします．Worldsheet 上の作用として最初からコンフォーマルゲージをとることにしますと，時空の座標を含む部分は

$$\int (\partial X)^2 + \overline{\psi}\rho\partial\psi, \tag{I.25}$$

と表せます．

この作用は，元々の理論が worldsheet 上の supergravity で，ローカルな supersymmetry をもっていたので，そのなごりとして，コンフォーマルゲージで書いたあとも，グローバルな supersymmetry をもっています．また，worldsheet 上のローカルスケール不変性のなごりとしてコンフォーマル不変性をもっているので，結局，スーパーコンフォーマルな理論になっています．それからさきほど critical string はローカルスケール不変性を満た

さなければいけないと言いましたが，実は量子論的にもローカル不変性をみたすためには，アノマリー相殺に注意しなければいけません．簡単に言いますと，worldsheet 上の理論，

$$\int d^2\xi \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + (\text{fermion}), \tag{I.26}$$

が，量子論的なローカルスケール変換 $g_{ab} \to e^{-\sigma} g_{ab}$ に対して不変であるという要求をしたかったわけです．この作用だけ見ると，$g^{ab} \mapsto e^{-\sigma}$，$g$ は 2 行 2 列なので $\sqrt{g} \mapsto e^{\sigma}$ と変換することがわかります．したがって，X が変換しないとすると，この変換に対して作用は当然不変です．したがって worldsheet 上の作用を古典的にみている範囲内では問題ないのですが，今は worldsheet 上で path integral するわけですから，これを量子論的に扱わなければなりません．すると実はこれに対するアノマリーが出てきます．これがコンフォーマルアノマリーというわけです．つまり量子論的にはローカルスケール変換に対して必ずしも不変ではなくなります．そのアノマリーを数えるのがセントラルチャージと呼んでいるものです．ふつうセントラルチャージは 2 次元の free boson 1 個に対して 1 です．今の場合は，最終的には X^μ の成分は 10 個ということがわかるのですが，とにかく D 個あったとしましょう．するとスカラー場からの寄与は D です．この規格化のもとでは g_{ab} のアノマリーを調べてみますと -26 となります．これらを足して，全セントラルチャージを求めると，

$$c = D - 26 \ , \tag{I.27}$$

となります．

ここまでしか考えないとき，これはいわゆる bosonic string というものです．この場合 $c = 0$ すなわち $D = 26$ のときにローカルスケール不変性のアノマリーが消えます．しかし，いまは superstring を考えていますから，worldsheet 上には fermion や gravitino もいます．worldsheet 上の Majorana fermion 1 個は実はスカラー場の半分だけアノーマリーに寄与し，それから worldsheet 上の gravitino のアノマリーを調べると，$+11$ となります．したがって，全体の central charge は

$$\begin{aligned} c &= (D - 26) + \frac{1}{2} D + 11 \ , \\ &= \frac{3}{2} D - 15 \ , \end{aligned} \tag{I.28}$$

となります．すると，$D = 10$ のときにアノマリーが消えることがわかります．これが superstring は 10 次元であるという理由です．今は X と ψ だけを持ってきましたが，基本的には worldsheet 上に superconformal な場を用意し，しかも全セントラルチャージが $c = 15$ となるようなものを持ってきて，modular 不変になるように projection すれば，consistent な弦理論が得ることができます．たとえば 4 次元で consistent な string を作りたい時は，

$$\int (\partial X^\mu)^2 + \overline{\psi}^\mu \rho \partial \psi_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3), \tag{I.29}$$

という作用を考えます．このセントラルチャージを計算すると，$c = 4 + 2 = 6$ にしかなっていませんからアノーマリーを完全にキャンセルすることができません．そこで，新たに別の super conformal field を持ってきて，

$$\int (\partial X^\mu)^2 + \overline{\psi}^\mu \rho \partial \psi_\mu + (c = 9 \text{ であるような super conformal field}) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3), \tag{I.30}$$

とすれば consistent な理論を得ることができます．しかもそのようなものは無数に作れてしまうのです．ところが実は，このようにして得られた理論は，ある一つの理論，たとえば 10 次元の理論から出発して，適当な手続きによってこれらの理論に持っていくことができます．そういう意味で，

実は一つの理論の異なる真空

であるといえます．これは必ずしも完全に証明されているわけではないのですが，いくつか具体的に作れるものについては確かにそうなっているというチェックはされています．これが最初に言いましたように，string を摂動論で考えている限り，無限に真空が出てきてしまう，ということです．

Type IIA,Type IIB というのは worldsheet 上で left mover についても right mover についても supersymmetric でした．しかし left mover については supersymmetric ですが，rihgt mover については supersymmetric でないものも作ることができます．それを Heterotic string といいます．

Type IIA	world sheet	(1,1) SUSY
IIB		
Heterotic	world sheet	(1,0) SUSY

Left mover: $(\partial_a X^\mu)^2 + \overline{\psi}^\mu_L \rho^a \partial_a \psi^\mu_L$ ， $c_L = 10 + \frac{10}{2} - 26 + 15 = 0$

Left mover: $(\partial_a X^\mu)^2 + \overline{\lambda}^I_R \rho^a \partial_a \lambda^I_R$ ， $c_R = 10 - 26 + \frac{32}{2} = 0$

$\lambda^I_R \qquad I = 1, 2, ..., 32$

$SO(32)$ ゲージ，$E_8 \times E_8$ ゲージ

Heterotic の left mover については，全セントラルチャージを消そうと思うと，これは Type II と同じ構造 ($\mu = 0, 1, ..., 9$) にすればいいわけです．Right mover については，もちろん X^μ は両方に共通ですが，こちらは supersymmetric でないのでこれだけでは $c = 10 - 26$ ですから 16 個足りないわけです．というわけで 32 個 fermion をつけ足します．こうすれば Majorana fermion はセントラルチャージが $\frac{1}{2}$ ですから，$c_R = 0$ になります．あとは Modular 不変性をみたすようにこれらの境界条件を決めてやれば良い．そうするとこれらは 32 個あるわけですから対称性として $SO(32)$ 的なものが出てくるだろうと予想できます．実際，ゲージ群として可能なものは，$SO(32)$ と $E_8 \times E_8$ の 2 種類です．

さて，10 次元で $E_8 \times E_8$ の Heterotic string をつくり，その低エネルギー極限を考えます．これは $E_8 \times E_8$ ゲージ場を持った N=1 Super Gravity といわれる場の理論なのですが，これに対して適当なコンパクト化 (Calabi-Yau コンパクト化) をほどこしますと，たしかに時空が 4 次元で $N = 1$ の SUSY をもつ現実に近いモデルが得られるということがわかりました．というわけで string はにわかに現実味を帯びてきたわけですけれども，ただ当初はコンパクト化というものを比較的狭く考えていて，10 次元の $E_8 \times E_8$ から出発して 6 次元分を Calabi-Yau に落とすというものを考えていました．Calabi-Yau もたくさんありますが，それなりに現象論ができるだろうと思われたのです．しかしもう少し調べてみるとセントラルチャージが match していれば何でもいいということがわかりました．すると 4 次元で可能な理論が物凄い数になってしまい，事実上 Calabi-Yau の分類ではとうてい済まない，ということになってしまいました．

というわけで少なくとも string を摂動論で扱っている限りでは，真空はあまりにもたくさんあって，実際予言能力がない，したがって非摂動的な扱いが必要だろう，というところで，84 年から 87 年頃までの話は終わったのですが，それ以来，なんとか string の非摂動的効果を取り入れようとしていろいろ努力した結果，80 年代の終りくらいに critical string ではないけれども，おもちゃの string，noncritical string では，行列模型という形で非摂動効果も取り入れることができる，ということがわかりました．しかし，critical string の非摂動効果がどういうものなのか，なかなか正体がわからなかったわけです．しかしここ 5 年くらいで D-brane や duality を通して critical string の非摂動効果が見えはじめてきました．そしてここ 2,3 年では，昔の行列模型とは少し違った形の行列模型で critical string の非摂動的効果を取り入れ，摂動論に頼らずに弦理論を完全に定義しようとする試みがなされています．今回の講義では最終的にはこのことについてお話ししたいと考えています．

I.2 D-brane

D-brane とは，string のソリトン，すなわち古典解です．string の古典解はコンフォーマル不変性と関係しています．

$$\text{string の古典解} \Longleftrightarrow \text{worldsheet のコンフォーマル不変性} \tag{I.31}$$

古典解とは何かということを普通の場の理論，たとえば ϕ^4 理論で考えてみましょう:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 + \lambda(|\phi|^2 - v^2). \tag{I.32}$$

$\phi = v$ が一つの古典解であるわけですが，古典解であるということは ϕ をこのまわりで展開すると，そこからのずれの 1 点関数がゼロであるというようにいいかえることができます．

先ほどまでは string は flat な空間に存在しているとしましたが，曲がった空間での string

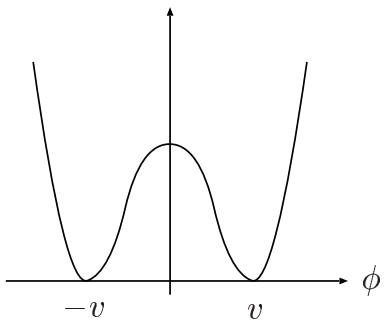


図 14: ϕ^4 理論のポテンシャル

を考えます:

$$\int d^2\xi\ [\sqrt{g}g^{ab}G_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \cdots]. \tag{I.33}$$

これは $G_{\mu\nu}$ を $\eta_{\mu\nu}$ のまわりで展開して書きますと，

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

$$\int d^2\xi \sqrt{g}g^{ab}\eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \int d^2\xi \sqrt{g}g^{ab}h_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \cdots . \tag{I.34}$$

となります．今，$h_{\mu\nu}$ が小さいとしますと，flat な時の string に何か少し摂動を加えたことになります．これは実は，graviton emission vertex ですが，ここで，emission vertex について少し説明しておきます．

string の worldsheet があって遠くから closed string がやってくるとします．たとえば 1 個の closed string がくるという様子は (図 15) のように書けるわけです．やってくる粒子，出ていく粒子というのは実は，ずっと飛んでいくことができるわけで，ずーと延びているシリンダーで表されることになります．ところが，そのように延びているシリンダーは conformal map によって一点になってしまいます．というわけで on-shell 粒子を吐き出

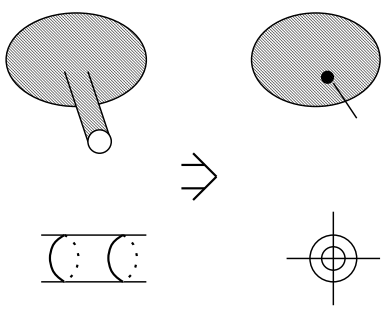


図 15: シリンダーの conformal map

したり吸収したりするのは，ローカルな operator の insertion で記述されます．ローカルな operator の insertion で，しかもローカルスケール不変性を要求していますから，たとえば，

$$\zeta_{\mu\nu}\int d^2\xi\sqrt{g}g^{ab}\colon \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ikx}\colon , \tag{I.35}$$

のようなものを考えることになります．これは古典的にはローカルスケール不変ですが，もちろん量子論的な operator ですから normal ordering をしなければなりませんが，それによって異常次元が出てくるわけです．これを数えてみますと，おおざっぱには，$\dfrac{k^2}{2}$ です．ですから大雑把にいうとこれがゼロであればこの operator はローカルスケール不変になります．しかし，∂X と e^{ikx} を contract すると k_μ がひっかかってきます．したがって，厳密には

$$\begin{cases} \dfrac{k^2}{2}=0, \\ \zeta_{\mu\nu}k^\mu=0, \\ \zeta_{\mu\nu}k^\nu=0, \end{cases} \tag{I.36}$$

という条件を課すとこの operator を積分したものはたしかにローカルスケール不変になることがわかります．つまり一般に外からやってくる粒子というのは，ローカルスケール不変な operator で書けるわけですが，たとえばそのうちの一つが (I.35) だったわけです．これは μ,ν に対して対称な tensor で，しかも $k^2=0$ ですから graviton emission を表す vertex operator です．ようするにローカルスケール不変性を要求すると，critical string には必然的に graviton が出てくることがわかったわけです．これが string に gravity が含まれるということの一つの説明です．

もちろん (I.36) に対応する条件は一般の $h_{\mu\nu}$ を持ってきた場合には満たされないわけです．ですからどういう $h_{\mu\nu}$ をもってきた時にローカルスケール不変になっているのか，つまり，この理論 (I.33) がローカルスケール不変であるための条件を考えると，どういう $G_{\mu\nu}$ が許されるのか，どういう $h_{\mu\nu}$ が許されるのかがわかるわけです．

結局，(I.33) がローカルスケール不変になる条件，つまり非線型シグマ模型としてのベータ関数がゼロということから $G_{\mu\nu}$ に対する運動方程式が得られます．実はこれは Einstein 方程式になることがわかります．

$$\beta=0 \Longleftrightarrow G_{\mu\nu}\text{ に対する方程式 (Einstein 方程式)} \tag{I.37}$$

こういうふうに見れば古典解，つまり graviton を表しているような string が condense した結果は，やはりローカルスケール不変になっている，すなわち，古典解とコンフォーマル不変性が対応していると言えるわけです．

$$\text{string の古典解} \Longleftrightarrow \text{worldsheet のコンフォーマル不変性} \tag{I.38}$$

ここでは flat なまわりで展開できたのでこのような見方ができたのですが，もう少し一般的に言いますと，とにかく worldsheet 上でローカルスケール不変性が保たれているならば worldsheet は何らかの condensation のまわりでの string の propagation をあらわしており，また，string の古典的な配位とは，何か string が condense してできているものである，と言うことができます．

Worldsheet 上のローカルスケール不変性を破らないようにいろいろな細工がどのくらいできるか，というわけで worldsheet に穴をあけてしまいます．

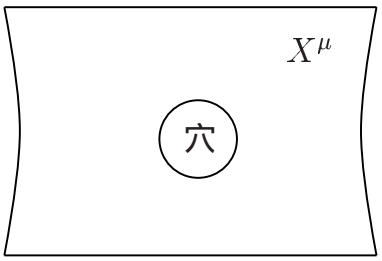


図 16: 穴をあけた worldsheet

たとえば Type II で考えますと，X^μ, ψ^μ が worldsheet 上に住んでいるわけですが，この穴の境界のところにコンフォーマル不変性を破らないような境界条件を考えることにします．具体的には境界に垂直な微分を ∂_n としますと，

$$\begin{aligned} &\partial_n X^\mu = 0 \qquad \text{Neumann 条件} \qquad \mu = 0, 1, ..., p \ , \\ &X^\mu = a^\mu \qquad \text{Dirichlet 条件} \qquad \mu = p+1, ..., 9 \ , \end{aligned} \tag{I.39}$$

と書けます．Worldsheet 上のスカラー場に対して，微分を 0 に止めるのが Neumann 条件で，値を止めるのが Dirichlet 条件です．Neumann 条件の微分は，境界に対して直角で，またコンフォーマル変換は等角写像ですからコンフォーマル不変性を破りません．また X^μ はコンフォーマル変換に対して不変ですから，もちろん，$X^\mu = a^\mu$ という条件もコンフォーマル不変性を破らないわけです．というわけで何か穴を開けて境界に (I.39) のような条件を課してもコンフォーマル不変性を破らないわけです．

質問 先ほど話されていた複素スカラー場と string の方程式の対応が良くわからないのですが．一点関数が消えるということを話されていましたが，それは string では具体的にどういうことなのでしょうか?

解答 あ，失礼．すみません．ありがとう！複素スカラー場の話から string へ行ってこっちに戻ってくるのを忘れていましたね (笑)

要するに string emission vertex というのはコンフォーマルゲージでかくと，(1,1) プライマリー,

$$\int dz d\overline{z} \phi(z, \overline{z}) \qquad \triangle = 1, \quad \overline{\triangle} = 1, \tag{I.40}$$

つまりローカルスケール変換に対しても，回転に対しても不変です．ところが worldsheet 上で nontrivial な次元を持つ operator の一点関数はゼロです．つまり scale 変換をすると，次元がゼロでなければ値が何倍かになってしまうはずですがコンフォーマル不変性があるとそれが元の値に等しくなければならないので，結局，一点関数はゼロでなければならないというわけです．

$$\text{worldsheet 上のコンフォーマル不変性} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \phi \rangle = 0$$

要するに worldsheet 上のコンフォーマル不変性という条件があると任意の emission vertex に対してその一点関数がゼロになる，つまり古典解になるわけです．

質問 その真空期待値は CFT の真空ですか?

解答 そうです．worldsheet 上の真空です．これは球面に emission vertex を挿入したもの，すなわち図 (17) のような期待値がゼロということであり，Target space で言えばこ

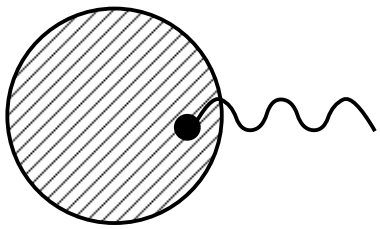


図 17: 球面上に挿入された emission vertex

の粒子の一点関数がゼロということです．

これを一般化して，worldsheet に穴をあけ，そこに (I.39) のように Neumann 条件と Dirichlet 条件を組み合わせたものを設定してやると worldsheet 上のコンフォーマル不変性を壊さないという意味で古典解に対応していると考えられるわけです．

質問 これから考える話で string の ground state というのは D-brane がうようよいるようなものを考えているのでしょうか?

解答 えーと，string の本当の ground state?真空のことですか?おそらく string の真空というのは空っぽではなくて...，

質問 いや，古典解だというのはわかっているのですけれども，普通の場の理論のソリトンでもやっぱりエネルギーを持っていますよね．本当の ground state というものがありますよね．そういう意味で言うと string の真空も空っぽかもしれないですよね．

解答 ええ，もちろん今の摂動論のまわりでの展開というイメージでは真空は空っぽと考えるべきです．今からお話ししますがこういうソリトン解はチャージを持っています．だか

らこういうソリトンがある状態は真空とは区別されています．たとえば Sine-Gordon でしたら kink はトポロジカルなチャージをもっています．これは Sine-Gordon の真空ではなくて，何かあるものがいるセクターを表している，これと同じです．

さて，worldsheet に穴をあけて (I.39) のような境界条件をおきますと，これは面に水平な方向 $(\mu = 0, 1, .., p)$ にはパーっとのびていて，残りの $(\mu = p+1, ..., 9)$ の垂直方向については a^μ というところに何かがあるという状態を表していることになります．すなわち，X^μ が a^μ から十分離れたところでは worldsheet に穴があいていることは見えないのですが，a^μ のそばにきますと，穴があいている効果が重要になるので，何か真空とちがったものになっていると感じることになります．というわけで worldsheet 上に穴をあけて (I.39) のような境界条件を課しますと何か「かべ」みたいなソリトンを記述していることになります．これを D-brane といいます．

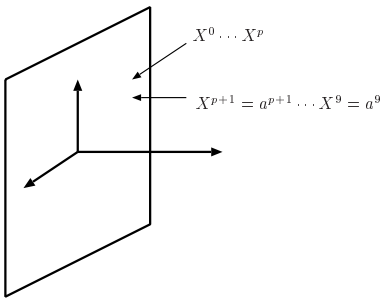


図 18: D-brane とその上の座標

一つの穴は D-brane が作る場の一点関数を表しているので D-brane が 1 枚あるときに，散乱が D-brane の影響を受けてどれくらいずれるのかを見るためには，worldsheet にいくつか穴をあけたものを足し上げればいいわけです．すなわち，穴が $0, 1, 2, \cdots$ 個の場合を考え，それぞれの穴で (I.39) を課し，穴について足し上げる．これが D-brane があるときの散乱です，たとえばグラビトン同士の散乱を考えますと図 19 のようになります．これ

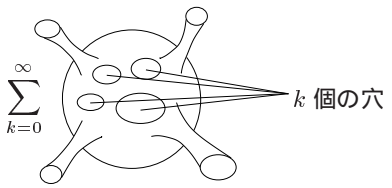


図 19: D-brane が存在する場合の散乱

は Sine-Gordon のソリトンで言えば，ソリトンがあるときにさざ波がどのように散乱するのかという問題と同じで，もちろんソリトンの影響で散乱は変更を受けるわけです．

さて，足しあげる weight をきめたくなりますが，これを決めるために Modular 不変性

を使います．そのために D-brane が 2 枚ある場合を考えます．絵で書きますと，図 20, 21 のようになります． 今度は左の D-brane を表すためにいろいろな数の穴を足し合わせ，そ

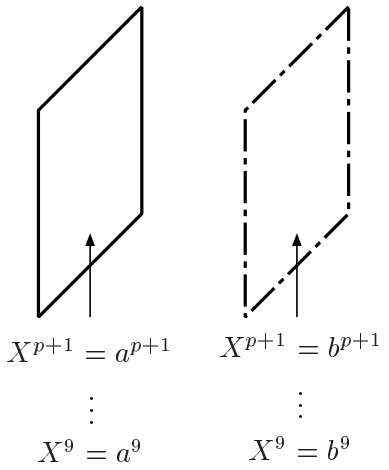


図 20: D-brane が 2 枚ある場合

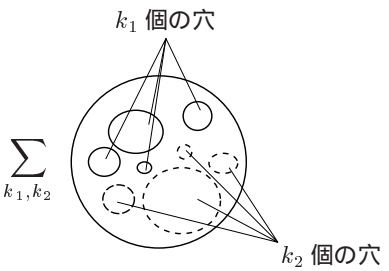


図 21: D-brane が 2 枚存在するとき

れから右の D-brane を表すためにやはりいろいろな数の穴を足し合わせます．普通考えるときは，あまり穴をぼこぼこ開けても具体的に計算することはできないのですがここでは原理をいっているわけです．今はどちらも一つずつの時を考えます (図 22)，これはもちろ

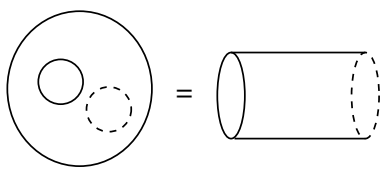


図 22: 穴が 1 つずつの場合

ん適当に伸ばしてやるとシリンダーになるわけです．両側が穴に対応します．これもあとで言いますが，こういう configuration を dual channel でみると，open string の loop になっています．したがって，open string の 1-loop を計算することによって ambiguity のな

い計算ができます．つまり overall の normalization が決まってしまうわけです．Fermion ψ の境界条件は，closed string の channel で見たときに適当に GSO projection したものと一致するようにします．

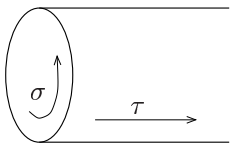


図 23: closed string の channel

ここで、closed string の channel で見たときの物理的意味を考えておきます．それは何かと言いますと，D-brane があることによって，そのまわりに重力場などいろいろな場に対応する closed string が condense しているのを表していることになります．

それでは Type IIA,Type IIB の場合，具体的にどういう境界条件になっているか調べておきましょう．実は先ほどは話さなかったのですが，Type I という string がありまして，この場合には open string と closed string が存在します．Open string の境界条件というのは以下のようになります．さきほど見ましたように worldsheet 上では fermion ψ^μ は右へ進むものと左へ進むものにわかれているわけですが，普通の Neumann 条件に対しては，

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\mu = 0, \\ \psi_L(\sigma = 0) = \pm\psi_R(\sigma = 0), \end{cases} \tag{I.41}$$

を要請します．すべての方向 μ について Neumann 条件にしたものが普通の open string の端ということになります．この場合は open string についても GSO projection をほどこすと modular 不変性が保たれています．以下で見るように modular 不変性を壊さないように X, ψ をうまく map することによって fermion に対する Dirichlet 条件をきめることができることがわかります．そのために，X^μ を left,right mover に分けて，

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma,\tau) &= x^\mu + p^\mu\tau + \sum \alpha_n e^{-i(\tau-\sigma)} + \sum \tilde{\alpha}_n e^{-i(\tau+\sigma)} \\ &= X_L^\mu + X_R^\mu, \end{aligned} \tag{I.42}$$

と書きます．ここで，

$$\begin{cases} X_L^\mu = \dfrac{1}{2}(x^\mu + p^\mu(\tau+\sigma)) + \sum \alpha_n e^{-i(\tau-\sigma)}, \\ X_L^\mu = \dfrac{1}{2}(x^\mu + p^\mu(\tau-\sigma)) + \sum \tilde{\alpha}_n e^{-i(\tau+\sigma)}, \end{cases} \tag{I.43}$$

です．Neumann, Dirichlet 条件を left, right mover を分けて書きますと，

$$\begin{aligned} &\text{Neumann 条件} \qquad \partial_\sigma X^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{X}_L^\mu + \dot{X}_R^\mu = 0, \\ &\text{Dirichlet 条件} \qquad \partial_\tau X^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{X}_L^\mu - \dot{X}_R^\mu = 0. \end{aligned} \tag{I.44}$$

結局，X_L はそのままで X_R の符号をかえる，つまり，

$$X_L \mapsto X_L, \quad X_R \mapsto -X_R, \tag{I.45}$$

というように変換すれば，Neumann と Dirichlet が移りかわることがわかります．この変換というのは，worldsheet 上では，X_L と X_R は事実上独立になっていて，それぞれ 2 次式でしか出てこなかったわけですから，たしかに worldsheet 上の Lagrangian 密度を不変に保っています．結局 fermion の方も同様に，

$$\psi_L \mapsto \psi_L, \quad \psi_R \mapsto -\psi_R, \tag{I.46}$$

とすればよいことがわかります．こうしても，worldsheet 上の super current (おおざっぱに言うと $\partial X^\mu \psi_\mu$) は不変です．したがって，すべて Neumann 条件ならば Modular 変換に対して不変であり，また (I.45),(I.46) という変換をしても，Modular 不変性を壊さないことがわかりました．つまり Dirichlet 条件に対しては L を止めて R の符号をかえればいいわけです，つまり

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\mu = 0, \\ \psi_L^\mu(\sigma = 0) = \psi_R^\mu(\sigma = 0), \quad (\mu = 0, 1, ..., p), \end{cases} \tag{I.47}$$

$$\begin{cases} X^\mu = 0, \\ \psi_L^\mu(\sigma = 0) = -\psi_R^\mu(\sigma = 0), \quad (\mu = p+1, ..., 9), \end{cases} \tag{I.48}$$

のようにとっておけば Modular 不変になるわけです．

これでは何をやったのかちょっとよくわからないかも知れませんので，もうちょっとわかりやすく言いますと，X_R^μ の符号をかえたわけですから，right mover についての space time parity であるわけです．

ところで，Type II には，left mover と right mover の両方があるので，type IIA，type IIB のどちらの場合も gravitino が 2 つありました．left mover から来る supersymmetry と right mover から来る supersymmetry の二つがあったわけです．このうち，type IIB というのは同じタイプの supersymmetry が二つあるから (2,0) SUGRA，type IIA のほうは chiarity の逆のものがあるので (1,1) SUGRA です．

同じことですが，これを保存量という立場から見ると，IIA, IIB については，super charge が二つあったわけです．Left mover がつくる super charge と right mover がつくる super charge です．ところが，open string の端点で Neumann boundary condition，あるいは Dirichlet boundary condition を課しますと，left mover と right mover が関係してしまいます．Left mover の作る 10 次元の super charge はそれぞれ 10 次元の Majorana-Weyl Spinor ですから，type II 理論は一般に，

$$\bar{\epsilon}^{(L)} Q^{(L)} + \bar{\epsilon}^{(R)} Q^{(R)}, \tag{I.49}$$

というgeneratorで不変になります．ここでϵはパラメーターであり，Type IIA，type IIBというのは任意の$\bar{\epsilon}^{(L)}$と$\bar{\epsilon}^{(R)}$に対して不変になっています．しかし，open stringですべての方向がNeumann boundary conditionの場合は，left moverとright moverを同一視しているわけですから，

$$\bar{\epsilon}^{(L)} = \bar{\epsilon}^{(R)}, \tag{I.50}$$

のときのみsymmetryです．Open stringで10次元すべてNeumann boundary conditionだったとすると，closed stringのとき二個あったsupersymmetryは一個に減ってしまうというわけです．

さて，Neumannだけではなく，Dirichlet boundary conditionも持つopen stringではどうなるかを考えてみます．

$$x_0, \cdots, x_p, \tag{I.51}$$

の方向がNeumannで，

$$x_{p+1}, \cdots, x_9, \tag{I.52}$$

がDirichletというものを考えます．方向$p+1$から9までは，さきほど述べましたように，left moverを止めておいてright moverのところを反転させればよいわけですから，式で書くと

$$\epsilon^{(L)} = \Gamma^{p+1} \cdots \Gamma^9 \epsilon^{(R)}, \tag{I.53}$$

のみsupersymmetryが残るということになります．ですからD-braneがあっても元々のsupersymmetryのうち半分が残ることがわかります．どういう半分かといいますと，(I.53)のような半分です．こういう風に，supersymmetryが一部残った状態をBPS状態と言います．

I.3 BPS 状態

これも人の名前です． Bogomolnyi, Prasad, Sommerfieldです．普通，supersymmetryがあると，真空のエネルギーが輻射補正を受けないという性質がありますね．D-braneがあってもsupersymmetryが一部残っているわけですから，そのおかげでいろんな量が輻射補正を受けずに残るということが起きるわけです．BPS状態というのはいろいろあるんですけど，とにかく定義はsupersymmetryの一部を不変に保っている状態，ということです．

たとえば，D-braneが二枚平行にあったとすると，左側のD-braneが残すsupersymmetryと右側のD-braneが残すsupersymmetryが同じですね．そうすると，全体はやはりBPS状態です．このように同じ向きのbraneの場合，何枚もってきてもSUSYは残ります．

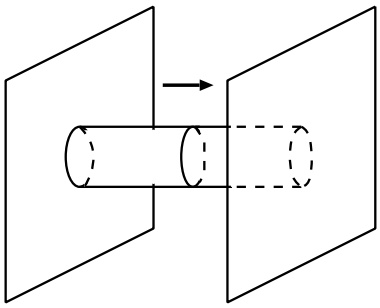


図 24: D-brane の BPS 状態

そうすると，SUSY が残っているかぎり，ground state のエネルギーは多少変形しても変わりません．つまり，brane の間の距離によらないということが予想されるわけです．

実際 string で計算してやりますとそうなります。さきほど見たように，二つの D-brane の間の相互作用を計算しようと思ったら open string の 1-loop を計算するわけです． それは Modular invariance をちゃんと中に含んでますから，D-brane 間を飛ぶ方向の channel でいうと，closed string の理論の場がいろいろと飛んでいます．どういうものが飛んでいるか調べると，$g_{\mu\nu}$，$B_{\mu\nu}$,ϕ，Ramond-Ramond sector から来る反対称 tensor 場があります．

計算しますと確かにこれらの力がキャンセルしています．D-brane での open string の boundary condition というのはさきほども言いましたたように Neumann boundary condition の right mover だけを parity 変換して得られたものです．二つの D-brane のところで同じものを持ってきているわけですから，この変換でもどしてやれば Neumann とまったく同じになるわけです．そうすると，普通の open string が 1-loop で回っていることになり，しかも，このとき supersymmetry が残っているわけですから，結局 partition function はゼロで，その空間微分はもちろんゼロになる．そういう意味で力は完全にキャンセルします．

D-brane がどういう場を exchange しているかということを細かく見ると，まず graviton とか dilaton を exchange していて，引力がありますね． この二つの D-brane は有限のエネルギー密度を持っているわけですから，その重力によって引き合うわけです．それがちょうど Ramond-Ramond の反対称 tensor 場を exchange する斥力とキャンセルします．ですから，BPS である，つまり，SUSY の一部を保っているということから安定性が保障され，D-brane の安定性が保たれるわけです．

D-brane はかなり人工的に作ったソリトンだったわけです．ですけど，ちゃんと supersymmetry を保っているおかげで，こうやってつくったものが安定になっています．勝手に場を固めて変な configuration にしてしまうと不安定で崩壊してしまうんですけど，この場合は，ちゃんと BPS のおかげで安定になっているわけです．

I.4 D-brane の集団運動

今考えたいのは同じ向きの D-brane が N 枚ある，という configuration です (図 25)．さ

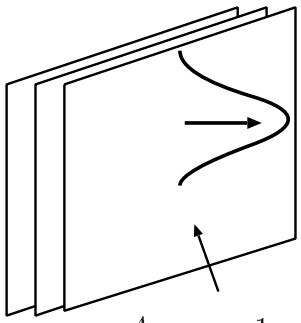


図 25: N 枚の D-brane の BPS 状態

きほど言いましたように，D-brane が同じ向きだと supersymmetry が残るわけです．残る supersymmetry は全部同じですから，これ自体が BPS state ということになります．

こういう N 枚が全部同じところに集中している，というのを出発点にします．もちろん brane ですから，グニャグニャ曲がったり，といろんな集団運動をしているわけです．その集団運動がどういう風に書けるかというと，結論から言いますと，p-brane の場合，10 次元の super Yang-Mills を $p+1$ 次元に dimensional reduction したものになります．

10 次元の super Yang-Mills というのは，

$$L = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi), \tag{I.54}$$

です．ここで，A_μ^a と ψ^a は 10 次元の vector 場と 10 次元の Majorana-Weyl spinor です．これらは super パートナーを組んでいてどっちも adjoint 表現，それを matrix で書いたのでラグランジアンはこうなります．これはいわゆる matrix ノーテーションです．これを $p+1$ 次元に dimensional reduction するわけです．dimensional reduction しますから，x^0 から x^p は残し，x^{p+1} から x^9 はつぶすということになります．そうしますと，A_μ のうち，μ が 0 から p のものは vector 場としてそのまま残るわけです．ですから，μ が 0 から p までの A_μ は world volume の上に住んでいます．

今度は μ が $p+1$ から 9 までのもの，これは p 次元空間でみると単に scalar 場に見えるわけです．これを X_μ と書きます．これはいいですね，もともと vector だったんですけど，$p+1$ 次元だけ残して残りはつぶしてしまったわけですから，残りの足のものをこの $p+1$ 次元から見ればただの scalar 場ですね．この scalar 場は，実は brane を垂直な方向に変形する平衡点からのズレを表しています．あとは ψ のほうもいいですね．ψ のほうも $p+1$ 次元のスピノルに適当に分解しているわけです．

さきほど見ましたたように，D-brane の configuration というのは，全部 Neumann のところから適当に parity 変換をして得られるということですけど，もちろん一般には world sheet にボコっと穴をあけて，conformal invariance を壊さないように適当に boundary condition を設定することになります (図 26)．その一つの特別な場合が D-brane の boundary

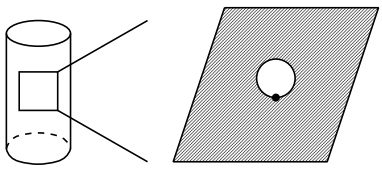


図 26: string の worldsheet

condition です．ですから，D-brane を変形するということは，この boundary condition を conformal invariance を壊さない範囲で変形するということで，それは穴の boundary に open string の emission vertex をつけるということです．さきほど，graviton の emission vertex を入れることによって $\eta_{\mu\nu}$ が $g_{\mu\nu}$ になって古典解を表しているという話をしましたけど，それと同じです． 全体の conformal invariance を壊さない範囲内で変形してやるということは，穴の boundary に open string の emission vertex をポコポコつけていけばよいわけです．

結局，D-brane の集団運動に対する有効理論をつくれと言われたら，boundary に付け加える open string の emission vertex が表す有効ラグランジアンをつくってやればよいということです．ところで，boundary condition が全部 Neumann のときは，普通の意味での open string の emission vertex なわけで，その open string の低エネルギーの有効ラグランジアンは 10 次元の super Yang-Mills になります．今は N 枚の D-brane を考えていますので少し違います．D-brane は同じところにあるものとして記述しているのですけど，絵を書くために各 D-brane をちょっと離してみて，その間で open string というのはどういう風になっているかと言いますと，同じ brane に両端がついているものや，違う brane 間

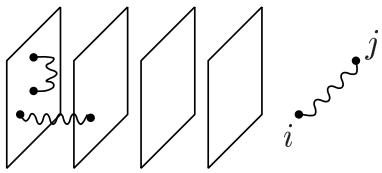


図 27: N 枚の D-brane と open string

を渡るものもあります (図 27)． Brane が N 枚あるので，open string の両端がどの brane の上にあるか，という自由度があります．すなわち，open string として i 番目の brane から j 番目の brane に向かうものが考えられるわけで，低エネルギーの有効理論は U(N) の gauge 理論になっています．

Open string の emission vertex についてですが，ここで簡単に絵で書きますと，world sheet をシリンダーとしてまず書くと，端の部分に open string の emission vertex がついているわけです．boundary に strip をつけて，図 28 の左の図のようになりますね．Open

図 28: open string の emission vertex

string がバーっときてシリンダの boundary に吸収される，いいですね． この部分を，例によって conformal invariance でマップして一点につぶしてしまいます (図 28 右の図)．それが open string の emission vertex になるわけです．Open string の emission vertex というのは式ではどういう風に書けるかと言いますと，図 28 のように σ，τ をとりまして，シリンダの円周に沿って積分します．まず，全ての方向が Neumann の場合は

$$\int d\sigma \ \xi^\mu : \partial_\sigma X^\mu e^{ikx} : \ , \tag{I.55}$$

となり，これはちょうど target space での vector 場になります．さきほど graviton の emission vertex を書きましたけど，それに近いですね．ただし，これは一次元の boundary 上での積分です．D-brane を持ってきた場合には，Dirichlet boundary condition の方向の X^μ については σ 微分が τ 微分に変りますから，次のようになります:

$$\int d\sigma \left(\sum_{\mu=0}^{p} \xi^\mu : \partial_\sigma X^\mu e^{ikx} : + \sum_{\mu=p+1}^{9} \xi^\mu : \partial_\tau X^\mu e^{ikx} : \right) \ . \tag{I.56}$$

ここで，$\partial_\tau X^\mu$ は world sheet 上の momentum (p_μ) です．World sheet 上の momentum というのは X_μ の共役ですから，座標をシフトするわけです. また，Dirichlet の方向の X^μ は boundary で定数ですから，k^μ は Neumann 方向の成分のみ意味があるわけです．

ですから，こういう emission vertex を付け加えてやると，座標 X_μ がシフトします．いいかえると，これを exponential の肩に乗せますと，boundary の位置を ξ^μ だけ変えることになります．それがさきほど言いました，dimensional reduction したとき brane に沿っている方向は gauge 場だが，残りの方向は brane の変形を表すということです．

結局，D-brane の低エネルギー有効ラグランジアンは，

$$S_{\rm eff} = \frac{1}{g_s} \int d^{p+1}\xi \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=p+1}^{9} \sum_{i=0}^{p} (D_i X^\mu)^2 + \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=p+1}^{9} [X_\mu, X_\nu]^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^{p} {\rm tr} F_{ij}{}^2 \right\} + \text{fermion}, \tag{I.57}$$

となります．i は brane の方向で，0 から p まで，μ は垂直な方向ですから $p+1$ から 9 までです．F_{ij} というのは，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{I.58}$$

です．Dimensional reduction したので，X_μ についての微分は，$p+1 \sim 9$ の方向については落ちるわけですけど，X_μ 同士の commutator は残るわけです．

Coupling constant については，string の有効ラグランジアンの一般形，すなわち closed string の有効ラグランジアンは $1/{g_s}^2$ に比例し，open string の有効ラグランジアンは $1/g_s$ に比例するという構造になっているわけです．次元は，string のスケール ℓ_s で合わせればよいということになります．

I.5 弦のデュアリティ

さきほど，どういう super symmetry が残るかというのを言いました．

$$\epsilon^{(L)} = \Gamma^0 \cdots \Gamma^p \epsilon^{(R)}, \tag{I.59}$$

こういうのが残るというわけですね． IIB ですと，元々二つの charge というのは同じカイラリティーだったので，こういう条件が意味を持つのは $p+1$ が偶数のときです．ですから，IIB のときに存在している BPS な D-brane というのは，(-1)-brane，1-brane，3-brane，5-brane, $\cdots$ となります．それから，IIA のときに存在する BPS な D-brane というのは，IIA は元々違ったカイラリティーですから，$p+1$ が odd です．そうすると，0-brane，2-brane，$\cdots$ となります．

IIB	$p+1$ が even	$p = -1, 1, 3, 5, \cdots$
IIA	$p+1$ が odd	$p = 0, 1, 2, \cdots$

ここで，IIB の 1-brane とは何かと申しますと，これは 1 次元ですから，string，すなわち，D-string です．IIA の 2-brane は membrane ですね．膜みたいなものです．D-membrane とはあまりいわないかもしれませんが．それから，IIA の 0-brane は particle で，D-particle，となります．

IIB で，もともと fundamental なものは string なのですけど，その string の tension は定義により $1/\ell_s^2$ です．それに対して D-string の tension は，さきほど有効ラグランジアンのところで言いましたように overall に $1/g_s$ がついているので，$\frac{1}{g_s \ell_s^2}$ となります．

	F-string	D-string
tension	$\dfrac{1}{\ell_s^2}$	$\dfrac{1}{g_s \ell_s^2}$

となります．F は fundamental の F で元々の string という意味です．D-string の tension は，string coupling が小さければ小さいほど大きくなる．一般的にソリトンの質量というのはそういうケースが多いわけです．coupling constant の値が小さいほど，作用の値が大きくなって，それで mass が大きくなります．ですから，coupling constant が小さいうちは，

D-string というのは非常に重いヘンなものです．この formula がそのまま g_s が大きくなっても使えるかどうかはわかりませんが，いづれにせよ，g_s が大きくなってくると tension は小さくなってきます．そうしますと，あるところで D-string のほうが fundamental string より軽くなる可能性があるわけです．

そうすると，g_s が大きい領域というのは，むしろ fundamental string による記述よりも，D-string による記述のほうがよくなるんではないかと考えられます．もうちょっと言いますと，F-string と D-string の間にデュアリティがあります (S-dual)．これは，たとえば，2 次元 Ising model で低温側と高温側が実は完全に対応しているというのに近いわけです．それで，こういう予想をたてて，それが今までの摂動論から出発した string 理論でどの程度検証できるかと言いますと，あまりたくさんのことは言えないのですけど，たとえばまっすぐにのびた D-string が低エネルギーの excitation によってゆらいでいるとすると，さきほど (I.4) でみましたように，X_μ と ψ の方向がでてきます．一方，fundamental string がまっすぐ伸びたものを考えてやりますと，やはり X_μ と ψ がありましたから，たしかにのびた string のまわりのゆらぎは F-string と D-string で一致してます (図 29)．こ

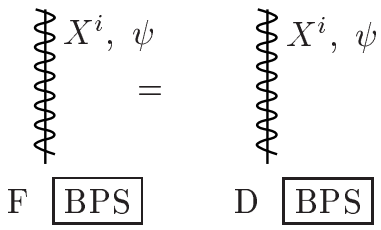


図 29: Fundamental string と D-string

こから大きくずれたときにほんとうにどうなるかというのはわからないのですけど，少なくともずっと伸びた状態からのちょっとしたズレということではたしかに一致しています．ずっと伸びた状態の string はさきほども言いましたように BPS なんですけど，そういう BPS からのちょっとしたズレということではたしかに一致しています．ですから，こういう形でデュアリティを調べることができた，というのもやはり BPS のおかげです．

別の見方で，これをチェックするために，低エネルギーの有効ラグランジアンを調べてみますと，確かにデュアリティは有効ラグランジアンでも見えることがわかります．そこで，実際に IIB の有効ラグランジアンを書いてみます。有効ラグランジアンは何で書かれているかというと，

$$\begin{array}{ll} \text{NS-NS} & g_{\mu\nu},\ B_{\mu\nu},\ \phi \\ \text{R-R} & \chi,\ B^{(2)}_{\mu\nu},\ B_{\mu\nu\lambda\rho} \\ & +\text{fermion} \end{array}$$

などで書かれています．上が Neveu-Schwarz sector から来る boson 場，下の χ と $B^{(2)}_{\mu\nu}$ と $B_{\mu\nu\lambda\rho}$ が Ramond-Ramond sector から来る boson 場です．あとは fermion です．

それで低エネルギーの有効ラグランジアンで，coupling constant ϕ を $-\phi$ にするという置き換えをしてみます．

$$\phi \to -\phi \quad (\text{ string coupling constant } g_s = e^{\phi}) .$$

この変換に対して g とか B などがどう変るかは書きませんが，たしかに，そういう symmetry を持っています．これは有効ラグランジアンだけ見ていて，F-string も D-string も見えていないので，本当にこういう深い関係 (S-デュアリティ) が成り立っているかは完全にはわからないわけですが，いづれにしろ，たしかに有効ラグランジアンの上では成り立っているように見えます．

IIB の時は F-string と D-string があったわけですが，Heterotic や type I だとどうなるかというと，type I の D-string というのは Heterotic の fundamental string に見えるのです．

$$\text{Type I の D-sting} = \text{Hetrotic の F-string} . \tag{I.60}$$

ただし，逆

$$\text{Type I の F-sting} = \text{Hetrotic の D-string} , \tag{I.61}$$

はダメです．だいたい，Heterotic には安定な D-string がないわけですね．もともと Heterotic は super charge は片一方しかなかったわけですから．また，type I というのは open string を含んでますから，type I の fundamental string は，途中でブチっと切れてしまうわけです．ですから，type I の fundamental string というのは BPS ではない．同じよ

図 30: type I の worldsheet

うに，Heterotic の D-string というのも強引に作ったとしても BPS ではない．ですから，(I.61) は全然最初から予想できないのですけれども，(I.60) の方，Heterotic の F-string ，というのはもちろん BPS です．

この関係は，一方のソリトンがもう一方の fundamental なものに対応するということで，sine-Gordon と massive Thirring の関係にかなり近いですね．sine-Gordon の kink とい

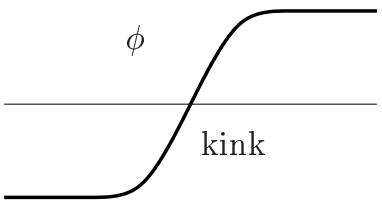


図 31: sine-Gordon の kink

うのは massive Thirring にマップしてやりますと，fundamental な fermion になっています．Sine-Gordon と massive Thirring のときは，fermion と anti-fermion の bound state が sine-Gordon の fundamental な場 ϕ に対応するというのはわかってます．ですから，何かこれに対応するようなことがあって，おそらく，Heterotic string の bound state が，type I の F-string みたいなものなんだろうと思われるんですけれども，これは BPS ではないので，なかなかちゃんとした議論ができないようです．

I.6 M-theory

ここでは M-theory についてお話ししたいと思います．M-theory というのは一言で言いますと，type IIA string の強結合極限です。まず，IIA string の低エネルギー有効理論にどんな場が含まれているかと言いますと，次のようになります:

- IIA の低エネルギー有効理論 = 10D (1,1) SUGRA

$$\text{boson} \begin{cases} g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi, & \text{(NS-NS sector)}, \\ A_\mu, C_{\mu\nu\lambda}, & \text{(R-R sector)}, \end{cases} \tag{I.62}$$

$$\text{fermion} \left\{ \psi^a_\mu, \psi^{\dot{a}}_\mu, \lambda^a, \lambda^{\dot{a}}. \right. \tag{I.63}$$

この (1,1) SUGRA の (1,1) というのはカイラリティー，+ と − の super charge が一つずつあることを表していまして，fermion の添字，a と $\dot{a}$ の一つずつに対応します．この 10D (1,1) SUGRA は 11D SUGRA の X^{11} 方向をコンパクト化して dimensional reduction したものです．

Dimensional reduction における 11D SUGRA の場と 10D (1,1) SUGRA の場との関係は次のようになります:

11D SUGRA	$\overset{\text{dim.red.}}{\longrightarrow}$	10D (1,1) SUGRA
$g_{\mu\nu}$	$\longrightarrow$	$g_{\mu\nu},\ A_\mu,\ \phi,$
$C_{\mu\nu\lambda}$	$\longrightarrow$	$B_{\mu\nu},\ C_{\mu\nu\lambda},$
ψ^A_μ	$\longrightarrow$	$\psi^a_\mu,\ \psi^{\dot{a}}_\mu,\ \lambda^a,\ \lambda^{\dot{a}}$.

例えば，11 次元の $g_{\mu\nu}$ は，一つも X^{11} 方向の足を持たないものを 10 次元に dimensional reduction すると $g_{\mu\nu}$ になり，一つだけ X^{11} 方向に足を持つ $g_{\mu 11}$ は A_μ，そして二つとも X^{11} 方向の足を持つ $g_{11\,11}$ は ϕ になります．この 11D と 10D の SUGRA はどちらも最大数の超対称性をもつので理論は unique に決まり，unique であるので 10D (1,1) SUGRA が dimensional reduction により得られるのは当然といえます．

ここまでの話しは少し形式的でしたが，次に，より物理的な見方をしてみます．dimensional reduction は，11D の理論を S^1 にコンパクト化して，S^1 方向の excitation mode を落したものになっていますが，次はその excitation，つまり Kaluza-Klein(KK) mode を含めて比較してみます (KK コンパクト化による比較)．

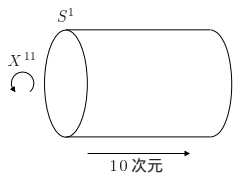


図 32: S^1 コンパクト化

11D SUGRA	$\xrightarrow{\text{KK}}$	10D IIA SUGRA
KK mode :		A_μ の charge
x^{11} 方向の運動量	$\longrightarrow$	を持った状態 :
を持った状態		D0 brane

$g_{\mu 11}$ に A_μ が対応していたわけですが，その KK 運動量を持った状態は，D-brane を考えますと RR sector の A_μ と結合する D0-brane であるということがいえます．IIA string の中には，D-brane を考えなければ，KK 運動量に対応する charge を持ち，Ramond-Ramond 場に結合する object はありませんでしたが，D-brane を考えることにより，dimensional reduction からコンパクト化に持ち上がったわけです．

いままでの話は低エネルギーだけで見たのですが，何かある理論があり，それを KK コンパクト化したものが IIA string になり，また，それが低エネルギーでは 11D SUGRA になる，と考えることができます．そのような理論を M-theory と呼びます．もちろん，これはまだ完全には構成されていません．

$C_{\mu\nu\lambda}$: membrane と couple		$B_{\mu\nu}$: F-string と couple
M-theory	$\xrightarrow{\text{KK}}$	Type IIA string

“M” は理論の基本的な物体，membrane を表していて，この membrane は 3 階の反対称テンソル場 $C_{\mu\nu\lambda}$ と couple する空間 2 次元的に広がった object です．IIA string では，このようなものは空間 1 次元的に広がった F-string で，また，F-string は 2 階反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ に couple していたわけです．

それでは，M-theory の実体はどうなっているのか，と考えるわけですが，まず，BPS 状態の比較を行なってみます．

- 二つの理論の BPS objects

Type IIA	couple する field		M-theory	couple する field
D0	A_μ	←	KK-mode	
F-string	$B_{\mu\nu}$	← w		
D2	$C_{\mu\nu\lambda}$	←	membrane	$C_{\mu\nu\lambda}$
D4	$\widetilde{C}_{\mu_1\cdots\mu_5}$	← w		
NS5	$\widetilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_6}$	←	5 brane	$\widetilde{C}_{\mu_1\cdots\mu_6}$
D6	$\widetilde{A}_{\mu_1\cdots\mu_7}$	←	Taub-NUT$\times R^7$	

ここで，w は S^1 の X^{11} 方向へ巻き付けること (wrapping) を表しています．例えば，membrane を巻き付けると次元の一つ低い F-string が得られます．NS5-brane についてはこれまで話して来ませんでしたが，この物体は，基本弦 (F-string) に couple する $B_{\mu\nu}$ の field strength(3-form) に 10 次元において dual な field strength(7-form)，これを作る $\widetilde{B}_{\mu_1\cdots\mu_6}$ に couple しています．電磁気でいうと電場の dual と couple しているような物体です．また，$\widetilde{C}_{\mu_1\cdots\mu_6}$ は $C_{\mu\nu\lambda}$ と 11 次元で dual な関係にあります．Taub-NUT は 4 次元の Instanton 解で，遠方で $\mathbb{R}^3 \times S^1$ になります．

質問 IIA には D8-brane もあると思うのですが，M-theory では何と couple しているのですか?

解答 D8-brane は残る次元が 1 なので遠方で flat になり得ません．したがって，asymptotic に flat な BPS object としては以上のもので全てだと考えられます．

さて，これまで述べて来た関係を信じたとして，二つの理論のパラメーターの間の関係はどうなっているか考えてみます．

- coupling constant と mass

$$\begin{cases} \text{Type IIA のパラメーター} & m_{\rm s} = \dfrac{1}{\ell_{\rm s}},\ g_{\rm s} = e^{\phi}, \\ \text{M-theory のパラメーター} & m_{\rm P},\ R_{\rm M}\ , \end{cases}$$

ここで，$m_{\rm P}$ は 11 次元の Planck mass で，$R_{\rm M}$ は compact 化する S^1 の半径です．$g_{\rm s}$ は摂動論的にはパラメーターですが，実際にはダイナミカルに決まると考えられる量である，dilaton の期待値 ϕ で表せます．

パラメーターの間の関係づけは次のようになされます:

$$\begin{cases} \text{D0} = \text{KK}:\text{質量}\ \ \dfrac{m_{\rm s}}{g_{\rm s}} = \dfrac{1}{R_{\rm M}}\ , \\ \text{F-string} = S^1 \text{ に巻き付いた membrane}:\ \text{tension}\ \ {m_{\rm s}}^2 = {m_{\rm P}}^3 R_{\rm M}\ , \end{cases}$$

D0-brane の質量は open string の有効ラグランジアンが $\frac{1}{g_{\rm s}}$ に比例し，一方で KK 運動量で一番小さいものが $\frac{1}{R_{\rm M}}$ ですからこのように表せます．また，F-string の effective なテンションは membrane のテンション ${m_{\rm P}}^3$ と S^1 の円周の長さ $R_{\rm M}$ の積で表されています．これらの関係式を用いると，

$$\begin{cases} {m_{\rm s}}^2 = {m_{\rm P}}^3 R_{\rm M} \\ g_{\rm s} = (m_{\rm P} R_{\rm M})^{\frac{2}{3}} \end{cases} \tag{I.64}$$

という関係式が得られます．D0, F-string 以外の BPS object を使っても，これと consistent な結果が得られます．

11 次元の M-theory のような深遠な理論があり，それが自然現象を支配しているという肯定的な考え方もできますが，一番批判的な見方をすると，BPS 状態は SUSY が残った状態であるので，いわゆる non-renormalization theorem が成立するそのような状態にのみ，ここで話したような関係が形式的に見えているだけであり，11 次元理論に大した実体はないという可能性もあるわけです．M-theory の実体はいったいどのようなものかと気になると思いますが，いずれにしても，BPS 状態においてはこのような対応関係が成立していると言えます．

II　Black hole と弦理論

ブラックホールをわざわざ持ち出しているのは，string の本当の自由度はどういうものかということを考える手だてになるかもしれないからです．以下ではブラックホールが実際に string でどのように記述されるかを考えていきます．

ここでは 3 つに分けて話をします．まず最初にブラックホールのエントロピーの軽い復習をして，それから弦理論ではそれはどのように見えるかを話します．その後，いわゆる holographic principle の話をします．

$$\begin{cases} 1\ \text{ブラックホールのエントロピー} \\ 2\ \text{弦理論ではどう見えるか} \\ 3\ .\text{Holographic principle} \end{cases}$$

II.1　ブラックホールのエントロピー

ブラックホールのエントロピーのことはいろんなところで説明がされていると思うので，さーっといきたいんですけど，例えば典型的な Schwarzschild 解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \dfrac{a}{r}} + r^2 d\Omega_2^2 \,, \tag{II.1}$$

$$a = \frac{2mG}{c^2} \ , \tag{II.2}$$

を例にして具体的に議論したいと思います．ここで a というのは Schwarzschild 半径で，よく知られているように，$r = a$ が event horizon になっています．Schwarzschild に限らず，かなり広く一般的に成り立つこととしてブラックホールのエントロピーは event horizon の面積 A で

$$S = \frac{A}{4G\hbar} \ , \tag{II.3}$$

と表わされるということがあります．以下 G と $\hbar$ は 1 にします．この辺のことは古典的な重力の話で，例えば教科書

R.M.Wald, General Relativity, the Univ. of Chicago Press (1984)

に詳しく書いてあります．この式はかなり一般的に成り立つのですけど，一般論をやってもしかたがないので，実際に Schwarzschild の場合に何が起こっているかを見ていきます．仮にエントロピーの式が正しいとして、それでは温度がどうなっているか調べます．今の場合は event horizon の面積というのは半径 $r = a$ の球の表面積

$$A = 4\pi a^2 \ , \tag{II.4}$$

ですが、$G = \hbar = 1$ の単位の場合 $a = 2m$ ですからエントロピーは

$$S = 4\pi m^2 \ , \tag{II.5}$$

になります．温度は

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \ , \tag{II.6}$$

ですが，E は今の場合は質量 m ですから，

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial m} = 8\pi m = 4\pi a \ , \tag{II.7}$$

となります．逆に温度がわかったら，この式から積分してエントロピーを求めることができます．この温度と Schwarzschild 半径 a の関係は一般的なものではなくて Schwarzschild の場合に成り立つものです．

それでは，ブラックホールの温度とはどういうものかといいますと，大雑把にいってブラックホールがあると，それはあたかも温度 T の物体があるかのように黒体輻射をする、ということです．これは Hawking が行った議論です (図 33)．あるいは同じことですが、ブラックホールを温度 T の熱溜に入れますと radiation のやり取りをして定常になります．ただし、ここでちょっと注意なのですが、比熱が負ですから，カノニカルアンサンブル的には熱溜とは平衡にならないのですけど，ミクロカノニカル的には平衡になります (図 34)．

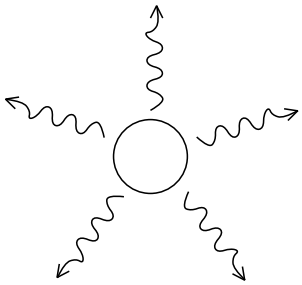


図 33: 黒体輻射をするブラックホール

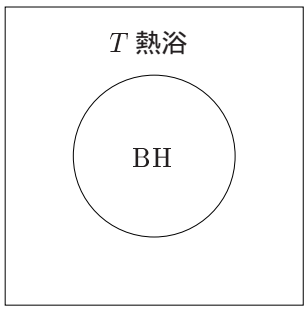


図 34: 熱浴と定常状態にあるブラックホール

はじめの見方ではどういうことをやるかといいますと，まず，塵がつぶれて重力崩壊してきてブラックホールができる場合を考えます．そうすると，event horizon ができます．図 35 の a 点で，ブラックホールからくる radiation を観測しようとしてる人には何が見えるかを考えてみます．a 点に到達する球面波は，時間をさかのぼっていきますと，しばらく，event horizon に沿っていて，b 点へ至ります．a 点の人に到達する信号というのは，時間が十分マイナスのところ、線 d の上で見てやりますと，結局，ぎりぎりで到達する c 点よりも左側の情報しか到達しないわけです．例えば線 d の上でフォトンの場が真空 (温度 $T = 0$) であるとします．真空といってもちろん零点振動の揺らぎはあります．零点振動の揺らぎの内，この c 点より左側の部分だけが a 点に影響して，右側のインフォメーションは消えてしまいます．したがって、a 点での場を見てやりますと，温度が有限になることになります．それが黒体輻射がおこるということなんですけど，それを計算するのは少し面倒なので省きます．

次の見方は，温度 T の熱溜の中のブラックホールを考えます．温度 T の熱溜に入とたときの場の partition function は，Euclid 化した作用 S_E を持ってきて，

$$Z = \int D\phi \; e^{-S_E(\phi:\frac{1}{T})} \; , \tag{II.8}$$

のように書けます．ただし，imaginary time の方向は $1/T$ の周期とします．そうすると，結局，imaginary time の方向が $1/T$ のコンパクト化された空間の中で，Euclid 化したブラックホールがどう見えるかということを考えることになります．

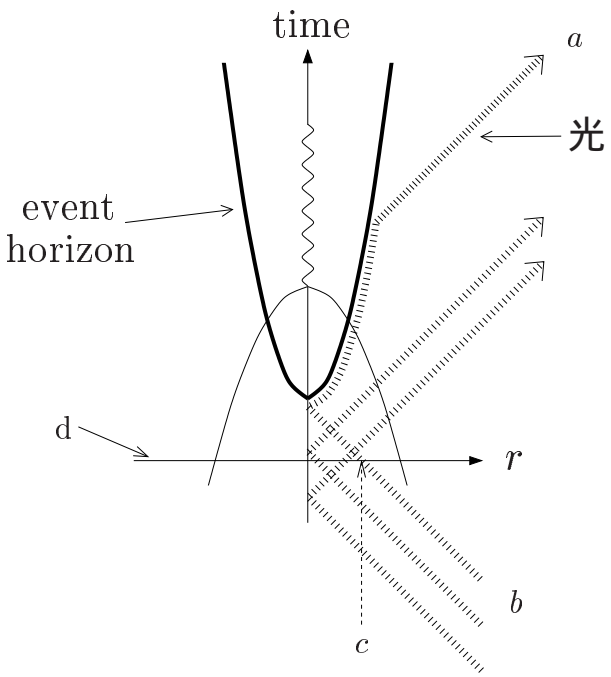


図 35: Horizon の形成と場の励起

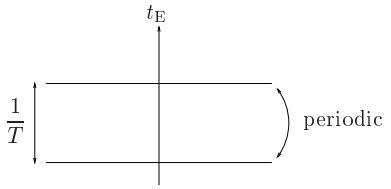


図 36: 虚時間方向にコンパクト化された空間

さきほどの Schwarzschild の解を Euclid 化します:

$$t = -it_E \ , \tag{II.9}$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt_E^2 + \frac{dr^2}{1 - \dfrac{a}{r}} + r^2 d\Omega_2^2 \ . \tag{II.10}$$

この解を Euclid 化した作用に代入するわけですが，実は t_E 方向のコンパクト化半径 $\frac{1}{T}$ が

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{4\pi a} \ , \tag{II.11}$$

を満たすときのみ，(II.10) が Euclid 化した作用の古典解となります．つまり，ちょうど Schwarzschild 半径がこの式 (II.11) を満たすブラックホールが温度 T の熱溜と熱平衡にあるといえます．これはどういうことかを説明するため，$r = a$ の付近を見てみます:

$$ds^2 \sim \frac{1}{a}(r-a)dt_E^2 + a\frac{dr^2}{r-a} + a^2 d\Omega_2^2 \ . \tag{II.12}$$

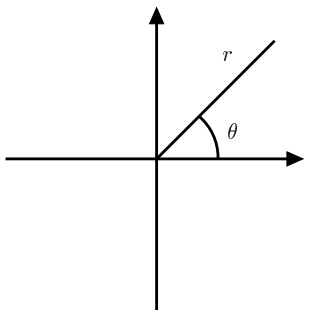
ここで，

$$R = 2\sqrt{a}\sqrt{r-a} \quad \left(dR = \sqrt{a}\frac{dr}{\sqrt{r-a}} \right) , \tag{II.13}$$

と置けば，

$$ds^2 \sim R^2 \left(\frac{dt_E}{2a} \right)^2 + (dR)^2 + a^2 d\Omega_2^2 , \tag{II.14}$$

となります．この metric を次のような普通の平面の metric と比べてやります:



$$\begin{cases} ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2 , \\ 0 \leq \theta < 2\pi . \end{cases} \tag{II.15}$$

図 37: singularity のない平面

θ の周期がちょうど 2π で，平面を表わしますが，θ の周期が 2π より小さいと円錐になって原点に singularity があります．また，周期が 2π より大きいと原点に負の曲率の singularity がありますが，周期がちょうど 2π だとすれば原点には singularity がないということになります．ですから，

$$\frac{t_E}{2a}\text{の周期 } 2\pi \quad \longleftrightarrow \quad t_E\text{の周期 } 4\pi a \tag{II.16}$$

のとき，ブラックホールの metric は conic な (円錐の)singularity を持たないので，$r > a$ のところだけとりだした解 (II.10) が Euclid 化した作用の古典解ということになります．先ほど言っていた $1/T$ はこの $4\pi a$ にあたり，Schwarzschild のブラックホールは $1/$温度 $= 1/T = 4\pi a$ の熱溜の中に stable に置くことができるといえます．

質問 今の話は何が言いたかったのですか?

解答 Schwarzschild ブラックホールは温度 T の熱溜の中で stable に存在できるということです．

質問 図 35 は何を言いたかったのですか?

解答 ブラックホールの温度の理解の仕方の一つです．d 上で，場の零点振動があるわけですが，a からはこの c よりも左側しか見えていません．その零点振動の分布を調べると黒体輻射が起っていることがわかります．これは Hawking が行った議論です．それを話すのは面倒なので，ここでは有限温度の場の理論を使ったもの，Gibons-Hawking の仕事にしたがって話をしました．

II.2　弦理論からみたエントロピー

基本的にはエントロピーというのは状態の数なわけですが，Gibons-Hawking のやり方にしろ Hawking の計算にしろ，使っているのは semi-classical な範囲内の議論であり，Schwarzschild 半径がずっと Planck スケールより大きいとき，

$$a \gg \ell_{\rm P} \ , \tag{II.17}$$

には必然的になる．いわば熱力学のようなものです．つまり，低エネルギーでの有効理論が Einstein 理論であることから必然的に出てくる結果です．もちろん a が Planck スケールなり string スケールより小さくなってくるとこれまでの議論は使えないわけですが，いずれにしても実際にブラックホールがエントロピーを持つということは低エネルギーで有効理論が Einstein 理論であるということから必然的に出てくる結果です．ある意味で string 理論が低エネルギーで重力を表わすというのは知っているわけですから，string のブラックホールがエントロピーを持つというのはむしろ最初から当たり前であるかもしれません．

弦理論は重力を表すミクロスコピックな理論だと思うわけですが，その低エネルギーの有効作用は，もちろん Einstein の作用になります．ブラックホールが十分巨視的であればエントロピーは先ほどの式で与えられます．それをミクロスコピックな状態数で説明できるかという問題を考えます．

$$\begin{array}{ccc} \text{ミクロスコピックな理論} & \overset{\text{low energy}}{\longrightarrow} & \text{Einstein eq.} \\ \text{状態数} & \underset{?}{=} & S = \dfrac{A}{4} \end{array}$$

ここに書いた関係は，ほんとに弦理論がコンシステントな理論で低エネルギーで Einstein 理論になるなら，当然成り立っていなければなりません．それを具体的にチェックしていきます．

素朴に一個の弦が振動していて，これが質量 M を持っているとします．Virasoro 代数の形を思い出してもらうと，string スケール $\ell_{\rm s}$ を 1 として，

$$L_0 = \frac{p^2}{2} + N \ , \tag{II.18}$$

ですから，質量が M の状態の level N は

$$N \sim (M\ell_{\rm s})^2 \ , \tag{II.19}$$

になります．これくらいの level を持った状態がいくつあるか数える時には conformal field の level 密度が使えます．

ここで lebel 密度の式の導き方を簡単におさらいしておきましょう．周期が L の円周の上に conformal field が乗っているとします．Conformal field theory にはスケールがないのでエネルギースケールは $1/L$ に比例しますから，エネルギー準位は

$$E_n = \frac{2\pi}{L}\epsilon_n \ , \tag{II.20}$$

と表わせます．結論を先にいいますと ϵ_n が大きいときの状態密度は

$$\rho(\epsilon) = \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{c}{6}}\sqrt{\epsilon}\right) , \tag{II.21}$$

となります．c は central charge です．この式を導くヒントは，torus 上の partition function の modular invariance を使うことです．図 38 の二つの torus 上での partition function が

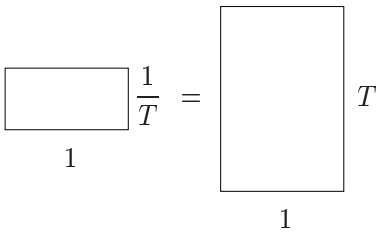


図 38: modular 変換で結び付く torus 上の partition function

等しいことと，基底状態のエネルギーが

$$\epsilon_0 = -\frac{c}{24} , \tag{II.22}$$

であることを使えば求める式が導けます．

この式を認めてもらいますと，$\sqrt{\epsilon}$ は $\sqrt{N}$ で，central charge はただの数ですから，エントロピーは

$$S \sim \text{const.} M\ell_{\rm s} , \tag{II.23}$$

となります．一方，ブラックホールのエントロピーは面積に比例しますから，それに比べて，このエントロピーはずいぶん小さいように思われますが，実はそれほど悪くはないことが以下のようにわかります．この辺の話しと次節の話は

日本物理学会誌 Vol.54 No.3 (1994) 夏梅誠

に非常に丁寧に書かれていますから，そちらも参考にしてください．

それで今，string の状態として数えたエントロピーと，effective な Einstein 方程式から出て来るエントロピーを比べてどういうことが起こっているか見て行きます．D 次元時空を考えますと，D 次元の Newton 定数というのは string coupling の 2 乗に比例していて、次元解析により，

$$G_D = g_s^2 \ell_{\rm s}^{D-2} , \tag{II.24}$$

となります．

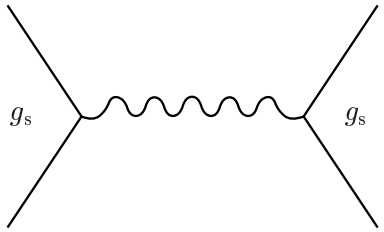


図 39: 重力定数の次元 : graviton の散乱振幅

万有引力のエネルギーが物体それ自身のエネルギーと

$$\frac{GM^2}{a^{D-3}} \sim M \tag{II.25}$$

のように等しくなるのが Schwarzschild 半径 a ですから，

$$\frac{GM}{a^{D-3}} \sim 1\ , \quad a \sim (GM)^{\frac{1}{D-3}}\ , \tag{II.26}$$

となります．これからブラックホールのエントロピーを計算すると，

$$S_{BH} = \frac{A}{4} = \text{const.}\frac{a^{D-2}}{G} = \text{const.}g_s^{\frac{2}{D-3}}(\ell_{\rm s}M)^{\frac{D-2}{D-3}}\ , \tag{II.27}$$

となります．これを絵にしてやりますと，図 40 のようになります．$\ell_{\rm s}$ がだいたい string

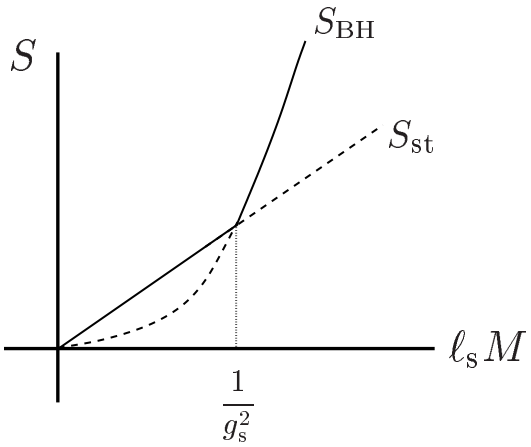


図 40: ブラックホールのエントロピー

の広がりを表わしますが，ブラックホールになっていない，

$a < \ell_{\rm s}$ のときは，string の記述がよい

ということになり，string が Schwarzschild 半径の中に入ってしまう，

$a > \ell_{\rm s}$ のときは，B.H. の記述がよい

ということになります．これは，

$$a = \ell_{\rm s} \quad \longleftrightarrow \quad \ell_{\rm s} M = g_{\rm s}^{\frac{2}{D-3}} (\ell_{\rm s} M)^{\frac{D-2}{D-3}}, \tag{II.28}$$

となることと矛盾していません．つまり，$a = \ell_{\rm s}$ で，二つの記述によるエントロピーがちゃんとうまくつながって，string で計算した状態数と低エネルギーの解から求めたブラックホールの状態数が一致するということです．

これは素朴な比較でしたが，もうちょっと手のこんだ比較は BPS 状態を使ったものです．

II.3 BPS 状態での比較

5 次元のブラックホールで，保存する $U(1)$ charge が 3 つある状況を考えます．そうすると string の状態とブラックホールとしての記述が滑らかにつながるものが作れます．なぜ 5 次元かというのはあまり意味がなくて，4 次元だと $U(1)$ charge が 4 必要だから，一番簡単なところで 5 次元を考えるということです．理論は IIB です．D1-brane と D5-brane を組み合わせて使います．時間方向 x^0 をとして，x^5, x^6, x^7, x^8 は T^4 にコンパクト化して，x^9 は S^1 にコンパクト化します．全部で T^5 にコンパクト化するのですが，その radius が違うものを考えています．D5-brane を Q_5 枚，D1-brane を Q_1 枚導入し，しかも x^9 方向に momentum n/R を持たせます．これで 3 つの量子数を持たせることができます．

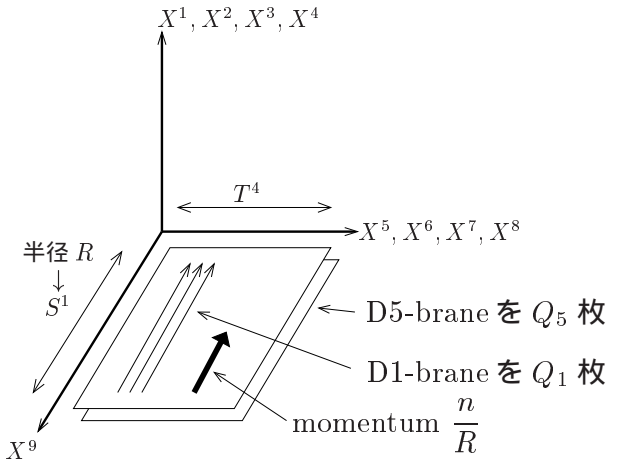


図 41: D1D5-brane 系の配位

実は，D-brane が二つあるときにお互いにはみ出している所の次元の和が 4 の倍数であれば相変わらず BPS 状態であることが示されるのですが，今の場合，D5-brane の中に D1-brane が入っているので，はみ出している部分は 4 次元ですからこの configuration は BPS 状態です．

詳しいことは言いませんが，この状態のエントロピーをミクロスコピックに求めたものを，低エネルギーの有効ラグランジアンとしての重力理論から計算したものとを比べると，確かに

$$S = \sqrt{Q_1 Q_5 n}\,, \tag{II.29}$$

で一致しています．

ブラックホールのエントロピーが string でわかったという話をいろんなところで聞かされていると思いますけど，本当に計算して一致したというのはこういう BPS 状態だけです．これは実は温度がゼロで，いわば，残留エントロピーのような形でエントロピーが残っているシステムです．つまり，断熱的に string 的な状態とブラックホール的な状態を行き来できる，そういうものに関しては実際に一致が見えたというわけです．

しかし，ブラックホールの本当の問題というのは event horizon の中に落ち込んだしまった情報がどうなるかということです．実際に物を落としてやると，horizon の中に有限な proper time で入り込んで singularity にあたるわけです．horizon の外から見ている限りでは一旦，中に入ったものは見えないわけですが，量子論の効果まで考えるとブラックホールは蒸発します．そうすると，singularity はどうなるのか？本当はそれに答えたいのです．また，例えばバリオン数がこの中に消えたときに，蒸発の最終段階でバリオン数は戻ってくるのか戻ってこないのかという問題があります．そういう問題には全然答えられていません．ですから，string でブラックホールのエントロピーが求まったからといって，ブラックホールの問題がわかったわけではなく，むしろそういう問題がおきないシステムに関して状態数が一致したということです．

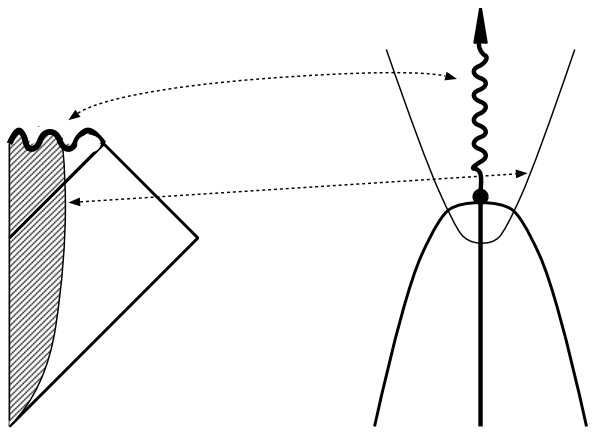


図 42: Penrose 図との対応

II.4 Holographic principle

まず，Holographic principle の原論文をあげておきます:

G. 't Hooft (gr-qc/9310026) ,
L.Susskind, J. Math. Phys. **36** (1995) 6377-6396 (hep-th/9409089) .

Holographic principle とはどんなものかというと，弱いバージョンから強いバージョンまでいろんなレベルの見方ができます．

1. 弱いバージョン

$$\text{表面積が } A \text{ の領域の中の状態数} < \exp\frac{A}{4}$$

状態数といっているのは Hilbert 空間の次元です．素朴に考えられる状態数は体積を V としますと $\exp(V/\ell_{\rm P}^3)$ となりますが，これに比べてこの bound の状態数はずっと少ないわけです．ここで，Planck 長さを $\ell_{\rm P}$ としました．これはいわゆる Bekenstein の bound です．何かあるシステムがあって，その表面積を A，エントロピーを S とします．これに外からいろんなものを落としてやりますとだんだん重くなってどこかでこれがブラックホールになります．そのときのエントロピーを S' とします．外から落とすものは実際に落とせるものを落とすわけです．すると，熱力学の第二法則から

$$S < S' \,, \tag{II.30}$$

となる．それだけの話です．言ってることは，体積に比例する自由度を考えても，あまり場を励起しすぎ ると，ブラックホールになってしまい，そのときのエントロピーは $A/4$ で押さえられているので，それ以上たくさんの状態数を考えることにそもそも意味がないという主張です．

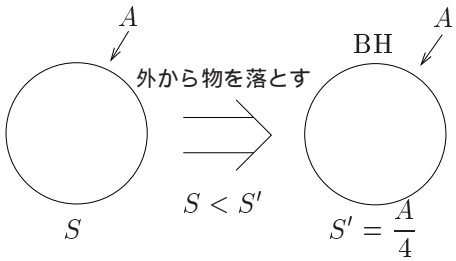


図 43: エントロピーの上限値

2. 強いバージョン
これは空間 3 次元のダイナミクスは実は 2 次元のダイナミクスで記述されている，というものです．

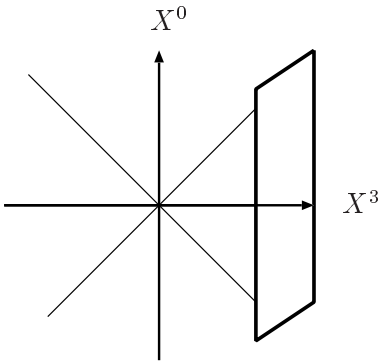


図 44: Holography

この 2 次元平面上でダイナミクスを決めてやると 3 次元のバルクのダイナミクスも決まる．これはちょうど holography でフィルムを持ってくると像ができるということに対応します．つまり，我々が 3 次元と思っているのは実は 2 次元の力学の映像を見ているだけである，というものです．そういうようなモデルも作れないでもない．Matrix theory というのは低い次元の理論から実際の高い次元の時空を構成してみせるという意味で，holographic principle の実現であるという言い方をする人たちがいるわけですが，それがどの程度本質的なのかは疑問です．

III　AdS-CFT 対応

それでは 3 番目の AdS-CFT 対応についてお話させていただきたいんですけど，3 つの節にわけて，

$$\begin{cases} 1\text{ .D-brane と near-horizon 領域} \\ 2\text{ .AdS 空間と conformal 不変性} \\ 3\text{ .AdS-CFT 対応} \end{cases}$$

のようにお話ししていきたいと思います．AdS 空間というのは，Anti-de Sitter 空間というものの略です．

AdS-CFT 対応については，非常に良く書かれているレビューがあるので，それを紹介しておきます:

O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz,
Phys. Rept. **323** (2000) 386, (hep–th/9905111).

III.1　D-brane と near-horizon 領域

今，空間的に p 次元に広がっている Dp-brane を N 枚同じところにおいたとします (図 45)．この D-brane の系から離れた全体の空間のことを，bulk と呼ぶことにします．ここから十分離れた領域は flat になっています．

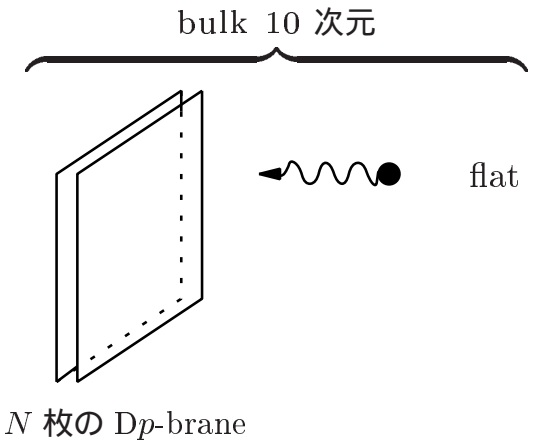


図 45: D-brane と Bulk

flat な空間からこの D-brane に向けて，closed string の状態が入ってくるとします．すなわち bulk の方から何らかの粒子を打ち込んでやります．その時に D-brane がどういう反応をするのか，ということを考えてみます．この場合，十分低エネルギーの極限を考えることにします．すなわち，bulk で打ち込む粒子はもちろん closed string の状態なんですけど，そのうちで massless の状態を打ち込む，ということを考えます．

ここで brane の tension ですが，N 枚重なった全体系の tension は，それぞれの tension

$$\frac{m_{\rm s}^{p+1}}{g_{\rm s}} \ ,$$

の N 倍となります． $m_{\rm s} = \dfrac{1}{\ell_{\rm s}}$ というのは string の mass scale です．

次にこの Dp-brane の系が重力のゆがみまで含めたらどういうふうに見えるか，ということを考えます．まず，Newton 定数は，時空が 10 次元ですから，

$$G = \frac{g_{\rm s}^2}{m_{\rm s}^8} \ ,$$

となります．Schwartzschild 半径 a はどうなるかといいますと，これは今残りの空間は $9-p$ 次元ですから，

$$\frac{G}{a^{7-p}} \frac{m_{\rm s}^{p+1} N}{g_{\rm s}} \sim 1 \ ,$$

という条件から決まってくるわけです．つまり重力による self energy が，もとの brane tension と同じぐらいである，ということから決まります．

この条件から，

$$a \sim (g_{\rm s}N)^{\frac{1}{7-p}} m_{\rm s}^{-1} \ ,$$

というように Schwartzschild 半径がわかります．

このことからどういうことがいえるのか，ということを以下に議論します．ここでは $p < 7$ とします．実際にはこれから具体的に考えるのは $p = 3$ の場合です．いずれにしても，$7 - p$ は正の量だとします．

そうしますと，まず $g_{\rm s}N \ll 1$ の時は，Schwartzschild 半径 a は，string scale の $\ell_{\rm s}$ に比べて十分小さくなります:

$$a \ll \ell_{\rm s} \ .$$

ですからこの場合は D-brane による記述が良いわけです．

今度は逆に，$g_{\rm s}N \gg 1$ の領域を考えます．この場合でも，N が非常に大きい領域を考えますので，string coupling 自体は，

$$g_{\rm s} < 1 \ ,$$

である，として良いことに注意しましょう．そもそも string 理論の記述自体は $g_{\rm s}$ が 1 より小さい時に良いわけですから，このような領域を考えるわけです．

Planck scale $\ell_{\rm P}$ は，

$$G = \frac{g_{\rm s}^2}{m_{\rm s}^8} = \ell_{\rm s}^8 g_{\rm s}^2 = \ell_{\rm P}^8 \ ,$$

という関係を満たします．よってこの領域のように $g_{\rm s}$ が 1 より小さい場合は，当然 $\ell_{\rm P}$ は $\ell_{\rm s}$ よりも小さくなります．すなわち，

$$\ell_{\rm P} < \ell_{\rm s} \ll a \ ,$$

という関係になります．Schwartzschild 半径 a というのは，だいたい時空がどれぐらい曲がっているか，ということを表します．すなわち曲率半径です．それが Planck scale $\ell_{\rm P}$ よりも十分大きいわけですから，この領域では古典重力による記述が良くなります．

どういうことかといいますと，この N 枚の D-brane の系が，実は古典重力の Schwartzschild 解のようなものになっている，つまり black p-brane 解になっている，ということです (図 46)．それで，この black p-brane 解で Schwartzschild 半径に対応するもの，それが a ですが，これが Planck scale よりも十分大きい:

$$a \gg \ell_{\rm P} \ .$$

IIA string 理論なり IIB string 理論なり，どちらを考えても良いわけですが，ともかくこの領域ではそれらの低エネルギー有効理論である，IIA SUGRA とか IIB SUGRA の古典解による記述が良くなる，ということになります．

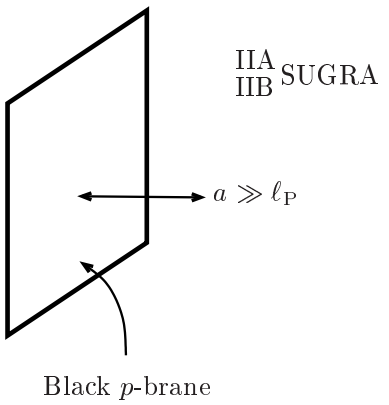


図 46: Black p-brane

結局，D-brane 的な記述と，black p-brane 解による記述は，実は一つのものを違った見方をしているだけである，とういように考えることができます．D-brane 的な描像で見た場合の低エネルギー有効ラグランジアンは，前にもいいましたように，10 次元の super Yang-Mills 理論 (以下 SYM 理論と略) を $p+1$ 次元に reduce したものになります．

一方 black p-brane の解の方は，単に supergravity の解として表されます．そういう意味で，supergravity と SYM 理論の間に“ デュアル ” な関係がある，ということができます．“ デュアル ” といっている意味は，一つのものを違った見方をしている，という意味です．

次にこの辺りをもう少し詳しく見ていきましょう．実際に black p-brane 解がどういう空間になっているか，ということを見てみます．メトリックは，

$$\begin{cases} ds^2 = \dfrac{1}{H(r)}\left(-dt^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{p}(dx^i)^2\right) + \sqrt{H(r)}\left((dr)^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2\right), \\ H(r) = 1 + \dfrac{R^{7-p}}{r^{7-p}}, \\ R^{7-p} = d_p g_{\rm s} N \ell_{\rm s}^{7-p}, \\ e^{\phi} = g_{\rm s}\left(H(r)\right)^{\frac{3-p}{4}}, \end{cases} \tag{III.1}$$

となります．ここで d_p というのはある定数です．これを見ると明らかに，$r=0$ が horizon になっています．

また，$p=3$ の時は嬉しいことがあります．(III.1) 式より，dilaton ϕ は定数になります．ϕ が string coupling だったわけですから，$p=3$ の時には string coupling はどの領域で

も定数にとどまっている，ということになります．つまり，string coupling が発散してしまったりするような悪いことはおきない，ということになります．曲率の方も，$p = 3$ ですと発散していない，ということがわかります．そういう意味で $p = 3$ というのはなかなか良い条件，ということになります．

以上をまとめると，

- $p = 3$ の時，$\phi = \text{const}$,曲率半径 $> R$.
- $p \neq 3$ の時，ϕ や曲率半径は $r = 0$ で singular.

のようになります．

これからやるのは，horizon のそばの領域を調べるわけですが，あまり horizon に近づきすぎ ると，$p \neq 3$ の場合は $r = 0$ が singular になるので，これからやる議論は破れてしまいます．つまり，古典重力で近似するという議論は破れてしまいます．しかし $p = 3$ の場合は，horizon の近傍までいっても，まだ

$$\ell_{\rm P} < \ell_{\rm s} \ll \text{曲率半径},$$

の条件が満たされていますから，古典重力で近似するということには，本質的な困難はない，ということになります．

以下具体的に $p = 3$ の場合を考えます．もちろん $p \neq 3$ の場合も，あまり horizon に近づきすぎないとかそういう注意をすれば，同様な議論をすることができるのですが，ここでは $p = 3$ の場合に限って考えていきます．

こらから物理的にどういうことをやりたいのか，ということをもう一度まとめておきます (図 47)．Dp-brane が N 枚ある時，bulk から何かを打ち込んでその反応を見る，ということをまず考えます (図 47 左)．AdS-CFT 対応の基本的なアイデアは，この系が black p-brane があるところに，対応する massless の粒子を打ち込んだ時と同様な振る舞いをするであろう，ということです．

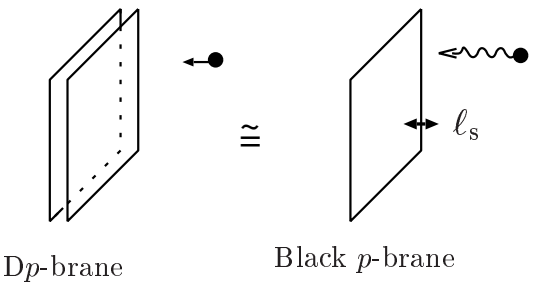


図 47: D-brane と black brane

今は低エネルギー極限を考えているわけですけど，実は $r \sim 0$ の付近で red shift の影響がものすごく大きくなります．ですから，図 47 の右で低エネルギーの粒子を打ち込んだとしても，十分近づいてくると，エネルギーがだいぶ大きく見えてくるわけです．それで，図 47 の左の D-brane の振る舞いと同じような振る舞いは，図 47 の右の black p-brane 側ではどの部分に見えるか，ということを考えてみますと，結局 brane からの距離 r が string scale $\ell_{\rm s}$ に比べると大きいが曲率半径 R に比べると十分小さいところだと思われます．

ところで，(III.1) 式のメトリックは $p = 3$ の場合，

$$R = (g_{\rm s}N)^{1/4}\ell_{\rm s}d_p \ ,$$

となりますから，古典重力による記述が良い場合，すなわち $g_{\rm s}N \gg 1$ となる場合には，R は $\ell_{\rm s}$ よりも十分大きく，確かに上のような r の領域が存在していることがわかります ．

結局，r が R に比べて十分小さい領域を考えるわけですから，(III.1) 式において，

$$H(r) = 1 + \frac{R^{7-p}}{r^{7-p}} \ ,$$

の部分で 1 を忘れてしまって，R^{7-p}/r^{7-p} で近似して良い，ということになります．特に $p = 3$ では，

$$H(r) \sim \frac{R^4}{r^4} \ ,$$

として良く，

$$\sqrt{H(r)} \sim \frac{R^2}{r^2} \ ,$$

となります．そうすると (III.1) 式のメトリックは，

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_1^2 + dx_3^2) + R^2\frac{dr^2}{r^2} + R^2 d\Omega_5^2 \ , \qquad \text{(III.2)}$$

となります．$R^2 d\Omega_5^2$ は半径 R の 5 次元球面のメトリックそのものであり，残りの部分が，5 次元の Anti-de Sitter 空間と呼ばれるもののメトリックになっています．

III.2　AdS 空間

それでは次は AdS 空間の構造について調べてみます．D 次元 AdS 空間，つまり AdS^D 空間のメトリックは，

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_{D-2}^2) + R^2\frac{dr^2}{r^2} \ ,$$

のようになっています．具体的には，$D = 5$ の場合を調べたいわけです．

ここでもう少しメトリックの構造を見やすくするために，

$$y = \frac{R^2}{r} \ , \tag{III.3}$$

という変数を定義します．そうすると，

$$\frac{dr^2}{r^2} = \frac{dy^2}{y^2} \ ,$$

のように書きなおせますので，メトリックは

$$ds^2 = R^2 \frac{-dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_{D-2}^2 + dy^2}{y^2} \ , \tag{III.4}$$

と書きなおすことができます．今 (III.3) 式のように y を定義しましたので，horizon の部分は，

$$r = 0 \longleftrightarrow y = \infty$$

のように対応します．それから無限遠点に対応するところは，

$$r = \infty \longleftrightarrow y = 0$$

という対応関係になります．

(III.4) 式のメトリックは，CFT などでよく出てくる Poincaré の上半平面の次元を高くしたものにすぎないのですが，これについてちょっと説明しておこうと思います．

このままでもいいんですけど，Euclid 化した方が見やすいので Euclid 化して議論します．つまり，

$$x_0 \equiv -ix_{D-1} \ ,$$

とおきます．そうするとメトリックは，

$$\frac{1}{R^2} ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_{D-1}^2 + dy^2}{y^2} \ , \tag{III.5}$$
$$y > 0 \ ,$$

となります．これは 2 次元の場合，

$$\frac{1}{R^2} ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \ , \tag{III.6}$$

となりますが，これが Poincaré の上半平面です．ここで，

$$x + iy \equiv z \ ,$$

と起きますと，複素平面の上半分となります (図 48)．メトリック (III.6) 式自身は，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ で不変になっています．すなわち，

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\ ,$$
$$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\ ,$$
$$ad-bc=1\ ,$$

という，上半平面を上半平面自身に写すような分数一次変換で不変なメトリックです．測地線は x 軸上に直径を持つような半円になります (図 48)．(III.5) 式のメトリックは，図 48 で x 軸方向を $D-1$ 次元にしただけで，構造は基本的に同じです．

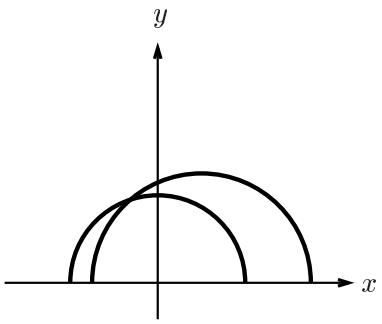


図 48: 上半平面と測地線

2 次元についてはこれ以上深入りしないで，次に一般の D 次元の場合について述べます．2 次元の場合は，メトリックは $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\simeq\mathrm{SO}(2,1)$ 不変でした．一般の D 次元の場合は，$\mathrm{SO}(D,1)$ 不変になります．これはどのような変換からなっているか，ということを見てみます:

$$\begin{cases} x^\mu & \longmapsto & \lambda x^\mu \\ y & \longmapsto & \lambda y \end{cases} \quad \text{Scale 変換}\ ,$$

$$\begin{cases} x^\mu & \longmapsto & x^\mu + b^\mu \\ y & \longmapsto & y \end{cases} \quad \text{並進}\ ,$$

$$\begin{cases} x^\mu & \longmapsto & M^\mu_{\ \nu} x^\nu \\ y & \longmapsto & y \end{cases} \quad \text{回転}\ ,$$

$$\begin{cases} x^\mu & \longmapsto & \dfrac{-x^\mu}{x^2+y^2} \\ y & \longmapsto & \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{反転}\ .$$

最後の反転というのが大事です．これはさっきの 2 次元の場合でいうと，

$$z \longmapsto -\frac{1}{z}\ ,$$

という変換を引き起こします．反転してから並進して，もう一度反転するような変換を special conformal 変換と呼びます．いずれにせよ，上の 4 種類の変換で，SO(D,1) の変換が generate される，ということになります．

先ほど $r \to \infty$ のところは $y \to 0$ の領域に対応しているといいました．この領域は brane から十分離れた領域なのですが，より詳しく議論すると次のようになります．まず brane を N 枚持ってきたとします．そうすると，その周りに時空の曲がりができます．我々はその Schwartzschild 半径 R よりも十分近いところ，すなわち，

$$r \ll R, \qquad R = (g_{\rm s}N)^{1/4}\ell_{\rm s}\ ,$$

なる領域を考えています．ですから，いったん Schwartzschild 半径 R よりも近い領域を考えて，そこでいっているところの $r \to \infty$ という極限とは，本当に r を無限大にするというわけではなくて，R と同程度の領域 $r \sim R$ ということです (図 49)．

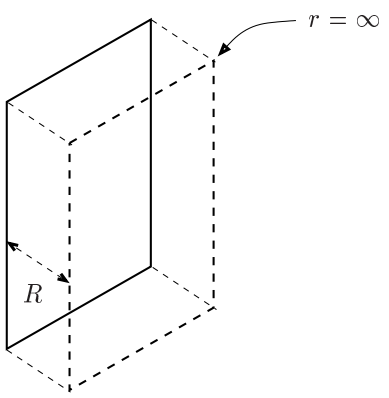


図 49: R と r

次に，この領域 $y \sim 0$ についてくわしく議論してみたいと思います．2 次元の時の分数一次変換は，実軸 ($y = 0$) を実軸に写したわけです．同じく一般の D 次元の場合の SO(D,1) の変換の場合も，$y = 0$ の領域はやはり $y = 0$ に写しています．ですからこの SO(D,1) の変換は，$y = 0$ の領域，すなわち $D = 5$ の場合は 4 次元の領域に対する変換でもあるわけです．つまり，先ほどの SO(D,1) の変換を，$y = 0$ の領域に制限することができます．すなわち $(x_1, \cdots, x_{D-1})$ という $\mathbb{R}^{D-1}$ の中での変換と考えることができます．

$y \to 0$ の領域は，$r \to \infty$ であって，この領域を AdS 空間の“ boundary ”と呼びます．この領域は AdS 空間の“ 無限遠方 ”のことです．もちろん無限遠方といっても，先ほどいいましたように，もとのメトリックで言うとだいたい $r \sim R$ あたりのことですが，AdS 空間の立場から見れば，無限遠方とみなせます．これを Poincaré の上半平面の場合でいいますと，$y > 0$ の上半平面がありまして，その“ boundary ”は $y = 0$ の実軸となっています．ですから SO(D,1) の変換が $y = 0$ の領域に制限できる，ということは“ boundary ”

に制限できる，と言い直すことができます:

$$\text{Boundary} : (x_1,\ \cdots,\ x_{D-1})\ .$$

このように AdS 空間の boundary 上に SO(D,1) の対称性が作用しています．この SO(D,1) は，$D-1$ 次元空間上の conformal 不変な場の理論の持っている対称性と同じです．一般に場の理論で scale を持たないようなものを scale 不変な場の理論といったわけですが，conformal 不変というのは「局所的には scale 変換であるような変換」に対しても不変，ということです．ちょっと conformal 変換について思い出してみましょう．$D-1$ 次元空間 $\mathbb{R}^{D-1}$ を考えてやりますと，その $\mathbb{R}^{D-1}$ 上での diffeomorphism で，局所的には回転と拡大・縮小をしているような変換を，conformal 変換といいます (図 50)．Conformal 変換というのが具体的にどういうものか，ということですが，それが先ほど書いた SO(D,1) の $(x_1,\ \cdots,\ x_{D-1})$ への作用になっています．

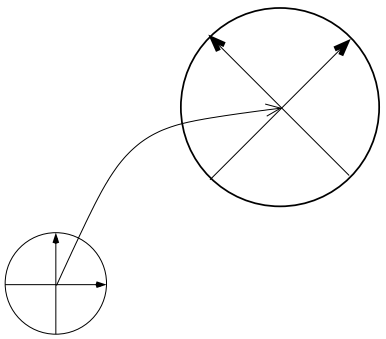


図 50: Conformal 変換

一般に場の理論が scale 不変，といっている場合には普通は global な scale のことをいっているだけです．ところが，元々場の理論は local なラグランジアンで書かれていますから，それが global な scale 変換に対して不変であれば，自然に local な scale 変換に対しての不変性に拡大すると考えられます．結局，通常の場の理論では，scale 不変と conformal 不変は同じことです．

III.3 AdS-CFT 対応

相関関数の対応

さっきの brane 系を gravity の立場で見ると，(III.2) 式のように $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ というメトリックになります (図 51 右)．それで図 51 右の空間自体が $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ で，$y=0$ のところが boundary です．で，$y=0$ の boundary のところをみてやりますと，4 次元の conformal 不変な構造が見える，ということになります．

この boundary に定義されている理論について考えます．図 51 の左のように D3-brane が N 枚あるわけですから，この系の低エネルギーの有効ラグランジアンは，10 次元の SYM 理論を 4 次元へ dimensional reduction したものになります．それは 4 次元の $\mathcal{N}=4$ SYM 理論になります．この理論には十分たくさんの supersymmetry がありまして，conformal 不変だということもわかります．

それで，図 51 の左と右が等価である，というのが AdS-CFT 対応の主張なわけですが，このことは結局，4 次元の $\mathcal{N}=4$ の SYM 理論というのが $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ を boundary 付近で眺めたものに一致している，ということになります．具体的にいいますと，図 51 の右の boundary 付近で graviton などの massless 粒子を打ち込んだ，という状況が，図 51 左の SYM 理論の系に外から何らかの外場を打ち込んだものと等しい，ということです．

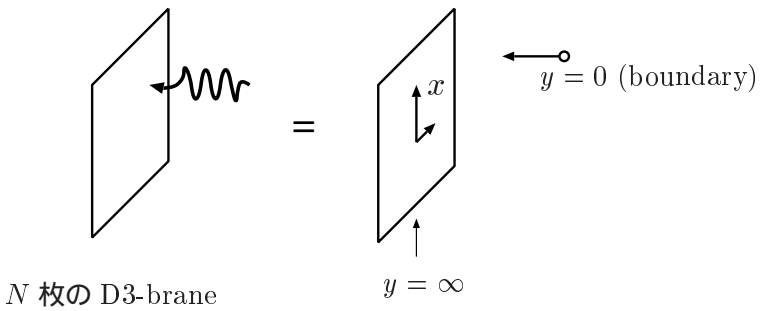


図 51: AdS-CFT 対応

このことをもう少し定量的に議論してみます．まず数式を先に書いておきます．これにはさまざまな表し方がありますが，例えば以下のようになります:

$$\underbrace{\left\langle \exp\left[\int d^4x\,\phi_0(x)\mathcal{O}(x)\right]\right\rangle}_{\text{CFT}} = \underbrace{\exp\left[I_{\text{SUGRA}}(\phi)\right]\Big|_{\phi(x,\ y=\epsilon)=\phi_0(x)}}_{\text{AdS}}, \qquad \text{(III.7)}$$

ϕ : 古典解 .

次にこの式の意味について説明します．Boundary 付近で眺めるということは，IIB SUGRA のいろいろな場の boundary 付近での振る舞いを調べる，ということです．

図 51 の右のように brane と平行な方向の座標を x と書いて，brane と垂直方向を y と書きます．$y=0$ が boundary ですから，式 (III.7) の右辺のように，$y=0$ の付近での場の値を与えます．この場は例えば dilaton，あるいは $B^{\mu\nu}$ とか，何でもいいんですが，とにかく何らかの場の値です．それで boundary で場の値を与えて，SUGRA の作用を minimize する，ということを考えます．すなわち古典解を考える，ということです．

それは図 51 左の元々の D-brane の立場に戻ると，その D-brane に何らかの外場を打ち込む，ということに対応しています．ですから式 (III.7) の左辺，すなわち brane 上の有効ラグランジアンである SYM 理論の何らかの対応する operator と外場を結合させて，

exponential の肩にのせて期待値を取ったもの，と式 (III.7) の右辺が等しい，と考えることができます．これが AdS-CFT 対応と呼ばれているものです．

この対応がどれぐらいチェックされているか，ということですけど，これは群論的な構造で protect されているところは完全に一致します．その群論的な構造とは何をいっているか，というのを以下に説明します．4 次元の $\mathcal{N}=4$ SYM 理論は supersymmetric なだけでなく，conformal 不変でもあるわけですから，Supersymmetric な場の理論が superconformal まで拡大しているわけです．つまり，$D=4$，$\mathcal{N}=4$ の superconformal 理論です．先ほどいいましたように，scale 不変な場の理論でなかったら，当然 4 次元の Poincaré symmetry しか持たないわけですけど，scale 不変であるために対称性が conformal symmetry の SO(5,1) に拡大しています．

さらに $\mathcal{N}=4$ の supersymmetry を持つと，いわゆる R-symmetry を持ちます．ここで R-symmetry というのは，いくつかある supercharge を混ぜるような変換に対する対称性です．今の場合は 10 次元から 4 次元に reduce した時の，残りの 6 方向の回転に対する対称性です．つまり R-symmetry は SO(6) になります．これは AdS の側では S^5 の isometry に対応しています．

このように $D=4$，$\mathcal{N}=4$ SYM 理論の持つ対称性が，$AdS_5\times S^5$ の持つ isometry に map されているわけです．

そうしますと，図 51 の左側に現れる色々な状態が，superconformal の表現によってある程度制限できます．それで superconformal の表現のうちで BPS なもの，つまりある程度の SUSY を残すもの，を調べてやりますと，確かに図 51 の左側と右側で spectrum が一致している，ということが知られています．

Wilson loop

次に Wilson loop についての議論に入ります．Wilson loop というのは，SYM 理論の方でいうと，この理論が定義されている 4 次元時空の中で loop を張ってその期待値をとる，ということです (図 52)．式で書くと，

$$\left\langle \mathrm{tr}\exp\left[i\oint A_\mu(x^\mu(\sigma))\frac{dx^\mu}{d\sigma}d\sigma \right] \right\rangle$$

となります．

この brane 上の A_μ という場は，この前もいいましたが，open string の端点の deformation だったわけです．この議論においては，D-brane は world sheet に穴をあけることで，今いった deformation というのは，(I.56) からもわかるように，その穴の境界にそって $A_i(X)\partial_\sigma X^i$ を積分することにより表されます．ですから，brane 上のゲージ場は，string の端点と結合しているわけです (図 53)．

つまり図 52 の Wilson loop は，図 54 の真中の図のように絵で書くと，D-brane 上の loop

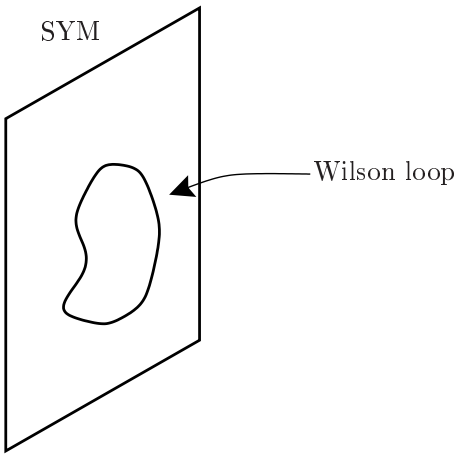


図 52: Wilson loop

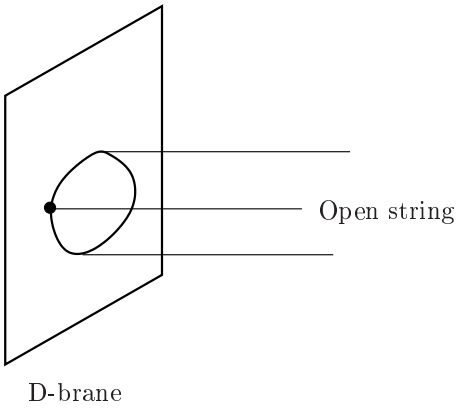


図 53: Open string と D-brane

の所に無限遠から string が入ってきて，その端点とゲージ場 A^μ が結合している，ということになります．

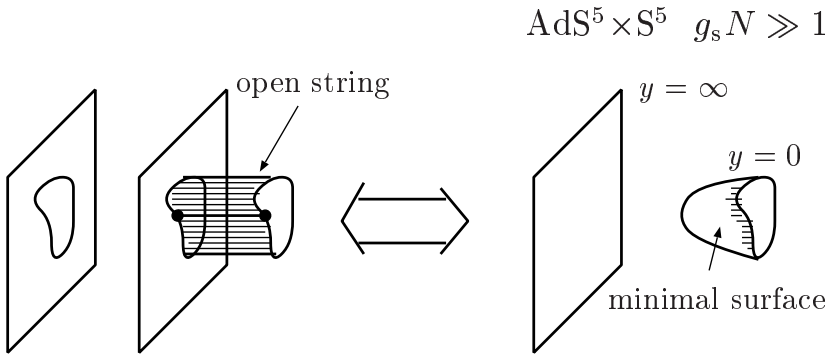


図 54: Wilson loop と minimal surface

今度は重力の方の記述で見てやります．図 54 の真中の図での無限遠方の方というのは，AdS 空間の boundary に対応しているので，重力の方の記述は図 54 の右図のように，boundary で loop を与えてそこで minimal surface をつくりなさい，ということになります．この minimal surface は，もちろん $\mathrm{AdS}_5\times\mathrm{S}^5$ という曲がった空間内での minimal surface です．ですから SYM 理論の Wilson loop を求める，という問題が，古典的に minimal surface を求める，という問題に map されます．

質問 SUGRA の方でその loop が boundary にある，と考えるのはどうしてなんですか？

解答 Wilson loop は，string の端点と結合しています．ですから，Wilson loop の期待値をとるということは，string でいうと，図 55 のように動いている string の partition function を考えているのと同じ，ということになります．

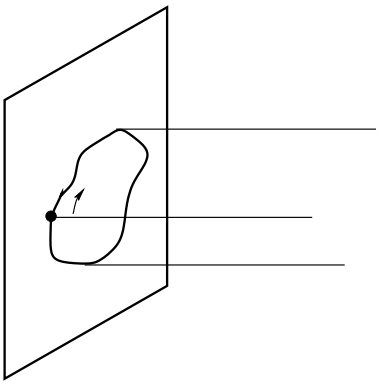


図 55: Wilson loop と string

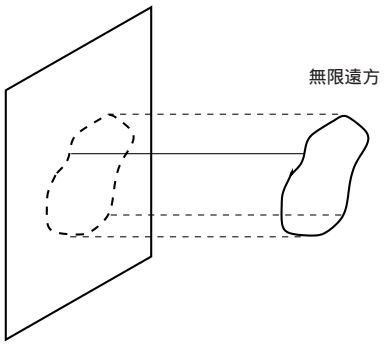


図 56: 無限遠方での loop

それは結局無限遠方でどこか切り口をとって，図 56 のような string の configuration を与えて，その string がどう走るかを議論している，ということです．

もう少し説明します．何か，string を発生させるようなものを無限遠方に持ってきたとします (図 57)．

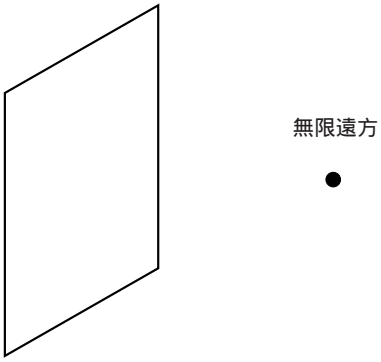


図 57: 無限遠方に string の source

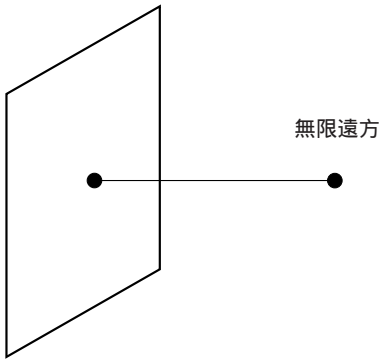


図 58: Source から string が伸る

で，そこから string が伸びていって，D-brane に吸収されたとします (図 58)．その D-brane に吸収された端点とゲージ場 A_μ が結合します．それで D-brane 上の Wilson loop を考えたかったら，無限遠方に持ってきた端点を少し動かしてやります (図 59)．

そしてそのままぐるっと一周させますと，D-brane 上でもう一方の端点が loop を描きます．だから結局無限遠方で loop を張るような string を持ってきたことになります．

無限遠方で string の端点を今のように並べた状況を，AdS の方で見ると，その boundary 付近で図 54 の右のような string の configuration を与えたものになります．それが古典重力の範囲内でどういう surface をつくるか，という問題になります．D-brane

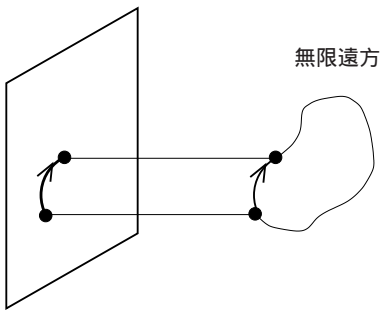


図 59: 無限遠方で string の端点を動かす

だったらピーンと張ってしまいますが，それを重力の近似でみると，時空が曲がっているわけですから，どこかでぐにゃっと曲がっているわけです．

Wilson loop についてはだいたいこんなかんじでいいでしょうか？

有限温度と QCD

次は本当の QCD にしたかったらどうすればいいか，ということについて説明します．今までのやりかたですと，どうしても supersymmetry が残ってしまいます．では supersymmetry を壊すにはどうすればいいかというと，それは有限温度にしてやればいい，というわけです．すなわち 5 次元の場の理論を考えて，第 5 方向に有限温度の boundary condition を課してやります．つまり fermion に対して，periodic ではなくて anti-periodic にしてやるわけです．

今度は一つ次元を上げてやりまして，AdS_6 を考えます．先ほどは普通の $3+1$ 次元の Schwartzschild solution を考えてやりましたけど，Euclid 化したらそれは遠方では $S^1 \times \mathbb{R}^3$ と同じ構造だったわけです．それと同じように，今度は AdS_6 空間の上に Euclidean の Schwartzschild solution をおいてやります．そうすると，その boundary は $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^4$ になります．つまり，$\mathrm{AdS}^6 \times \mathrm{S}^4$ 上で，こういう configuration をとったものは D-brane の立場でみると，結局 IIA の D4-brane が N 枚あって，1 方向を S^1 コンパクト化したものになります．

M-theory で考えてもいいんですけど，IIA でやることにします．それで S^1 コンパクト化する際は，有限温度，すなわち fermion を anti-periodic にしてやります．そうすると fermion が massive になって，supersymmetry が壊れます．それで，温度よりも，すなわち半径 a よりも，十分遠いところでみてやりますと，結局 SUSY のない普通の Yang-Mills 理論になります．

大体こういうわけですが，これでは温度 a よりも近づいてしまうと，もう普通の Yang-Mills 理論ではなくて，supersymmetric な Yang-Mills 理論に戻ってしまいます．そうい

う意味で，これは QCD の強結合展開のようなものです．距離が a より大きいところでの Yang-Mills 理論の有効理論にすぎないわけです．

それで a を小さくしてやることを考えてみたくなりますが，あまり小さくしすぎると，重力による記述が破れてしまいます．ですからいくらがんばっても，Λ パラメータよりも近いところの asymptotic freedom とか，そういうものは見えないわけですね．そういった事情があるので，これはあまりうまくいっていないと私は思うわけですが，このようなモデルで glueball の mass を求めたり，格子ゲージ理論と比較したりしている人たちもいます．

IV　行列模型による弦理論の定式化

今まで、摂動論の延長上で見えるような弦理論の非摂動効果を調べてきたわけですが，次のステップとして完全に非摂動的な定式化が欲しくなります．その候補が行列模型と呼ばれているものです．それがどの程度うまくいっていて，これから何をしていかなくてはならないかを議論しようと思います．

ここではまず，いわゆる M(-atrix) theory という Banks，Fischler，Shenker，Susskind (BFSS) が M-theory の行列模型として提唱したものを，少し冷静に吟味してみたいと思います．次に我々，Ishibashi，Kawai，Kitazawa，Tsuchiya が提唱した IKKT model について議論し，そのあとでこれからの方向性の一つとして非可換幾何学について議論します．

$$\begin{cases} 1\ \text{.D0-brane の有効理論と M(-atrix) theory} \\ 2\ \text{.IKKT model} \\ 3\ \text{非可換幾何} \end{cases}$$

IV.1　D0-brane の有効理論と M(-atrix) theory

それでは，BFSS から始めましょう．彼らのふれこみは M-theory を記述したということで，それを Discrete Light Cone Quantization (DLCQ) という形で導いたと言っているのが Seiberg と Sen です．これが本当に導いた事になっているのかを冷静に見ていきましょう．

11 次元の理論を考えます．M-theory を考えているつもりで x^{11} 方向を半径 $R_{\rm M}$ の円にコンパクト化します．M の添字は M-theory を表しています．I.6 で説明した M-theory と type IIA 理論との関係から

$$R_{\rm M} = g_{\rm s}\ell_{\rm s},\ \ \ell_{\rm P}^3 = R_{\rm M}\ell_{\rm s}^2, \tag{IV.1}$$

が成り立ちます．最初の式は D0-brane と KK-mode の対応を表し，次の式は membrane と F-string の対応を表しています．この系を Infinite Momentum Frame (IMF) でみます．

IMF とはこの系を 11 方向にものすごく boost していった frame でみようということです．そのために light cone 座標を

$$x^{\pm} = \frac{x^{11} \pm x^0}{\sqrt{2}}, \tag{IV.2}$$

と定義します．それに対応して運動量も

$$p^{\pm} = \frac{p^{11} \pm p^0}{\sqrt{2}}, \tag{IV.3}$$

とします．どのようなコンパクト化をしているのかをもとの座標系で書くと

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^{11} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^0 \\ x^{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi R_{\mathrm{M}} \end{pmatrix}, \tag{IV.4}$$

という同一視をすることになります (図 60)．

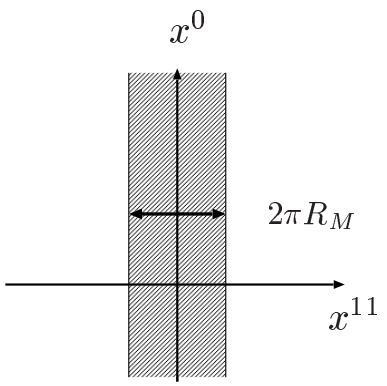


図 60: x^{11} 方向を半径 R_{M} の円にコンパクト化

これを light cone 座標でみると,

$$\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} + \sqrt{2}\pi R_{\mathrm{M}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{IV.5}$$

となりますが，さらにこれを Lorentz boost します:

$$\begin{pmatrix} x^{+\prime} \\ x^{-\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\omega} x^+ \\ e^{\omega} x^- \end{pmatrix} . \tag{IV.6}$$

x^+ を 10 倍したら x^- を 10 で割りなさいということを表しています．同様にして運動量も

$$\begin{pmatrix} p^{+\prime} \\ p^{-\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\omega} p^+ \\ e^{\omega} p^- \end{pmatrix}, \tag{IV.7}$$

となります．Lorentz boost した $'$ のついた座標で先程の同一視を書き直すと

$$\begin{pmatrix} x^{+\prime} \\ x^{-\prime} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^{+\prime} \\ x^{-\prime} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\pi e^{-\omega} R_{\rm M} \\ \sqrt{2}\pi e^{\omega} R_{\rm M} \end{pmatrix}, \tag{IV.8}$$

となりますが，ここで，

$$2\pi R \equiv \sqrt{2}\pi e^{\omega} R_{\rm M}, \tag{IV.9}$$

と定義して，右辺を書き直すと次のようになります:

$$\begin{pmatrix} x^{+\prime} \\ x^{-\prime} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^{+\prime} \\ x^{-\prime} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi \dfrac{R_{\rm M}^2}{R} \\ 2\pi R \end{pmatrix}. \tag{IV.10}$$

次に $R = \dfrac{e^{\omega}}{\sqrt{2}} R_{\rm M}$ を fix して，$\omega \to \infty, R_{\rm M} \to 0$ の極限をとります．以下ではこの frame で議論するので $'$ を省いて書くと,

$$\begin{pmatrix} x^{+} \\ x^{-} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x^{+} \\ x^{-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi R \end{pmatrix}, \tag{IV.11}$$

となり，x^- の方向に $2\pi R$ の方向に行ったところを同一視したことになっています (図 61)．

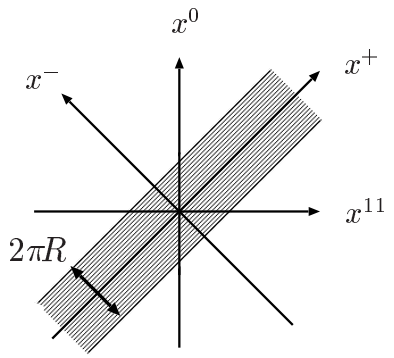


図 61: x^- 方向を半径 R の円にコンパクト化

M-theory の $R_{\rm M} \to 0$ 極限を $\omega \to \infty$ boost した記述を求めたわけですが，$R_{\rm M} = g_{\rm s}\ell_{\rm s}$ ですから，これは type IIA 理論の弱結合極限を IMF で眺めたものに他なりません．

Boost 前の N 個の D0-brane の系は，D0-brane の数が KK momentum ですから

$$P^{11} = \frac{N}{R_{\rm M}}, \tag{IV.12}$$

となり，N 個の D0-brane のハミルトニアンは次のように書けます:

$$H = P_0 = R_{\rm M} {\rm tr} \left(\frac{P_i^2}{2} + \frac{1}{4\ell_{\rm P}^6} [X_i, X_j]^2 + \cdots \right) + \frac{N}{R_{\rm M}}. \tag{IV.13}$$

最後の項は N 個の D0-brane の静止質量で，一つの D0-brane の静止質量が $1/R_{\rm M}$ ですからそれが N 個あって $N/R_{\rm M}$ となります．このハミルトニアンは次のように導かれます．N 個の D0-brane の集団運動の有効ラグランジアンは 10 次元の super Yang-Mills 理論を 1 次元に dimensional reduction して得ることができ，

$$S = \frac{\ell_{\rm s}^3}{g_{\rm s}} \int dt \left\{ {\rm tr} \left(\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{2} \dot{X}_i^2 \ell_{\rm s}^{-4} + \sum_{i,j=1}^{9} \frac{1}{4} [X_i, X_j]^2 \ell_{\rm s}^{-8} \right) + {\rm fermion} \right\}, \tag{IV.14}$$

となります．Over all に $1/g_{\rm s}$ としておいて，次元を $\ell_{\rm s}$ でそろえてやれば良いわけです．これであっていることは X_i が長さの次元を持つとすると簡単に確かめることができます．これを次のように書き直しましょう:

$$S = \frac{1}{g_{\rm s}\ell_{\rm s}} \int dt \ {\rm tr} \left(\frac{1}{2} \dot{X}_i^2 \right) + \frac{1}{g_{\rm s}\ell_{\rm s}^5} \int dt \left(\frac{1}{4} [X_i, X_j]^2 \right) + {\rm fermion.} \tag{IV.15}$$

和の記号は書かない事にします．それでこの作用からハミルトニアンを求めます．共役な運動量は，

$$P_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = \frac{1}{g_{\rm s}\ell_{\rm s}} \dot{X}_i, \tag{IV.16}$$

ですから，通常の力学でラグランジアンが

$$L = m \frac{\dot{x}^2}{2}, \tag{IV.17}$$

のときハミルトニアンが

$$H = \frac{p^2}{2m}, \tag{IV.18}$$

となることと同様にして

$$H = \frac{g_{\rm s}\ell_{\rm s}}{2} {\rm tr} P_i^2 + \frac{1}{4 g_{\rm s}\ell_{\rm s}^5} {\rm tr} [X_i, X_j]^2 + \cdots, \tag{IV.19}$$

を得ます．$\ell_{\rm s}$ がどのように入っているかに注意しなくてはなりません．$g_{\rm s}\ell_{\rm s}$ でくくって，

$$H = g_{\rm s}\ell_{\rm s} \left(\frac{1}{2} {\rm tr} P_i^2 + \frac{1}{4 (g_{\rm s}\ell_{\rm s})^2 \ell_{\rm s}^4} {\rm tr} [X_i, X_j]^2 + \cdots \right). \tag{IV.20}$$

$\ell_{\rm P}^3 = R_{\rm M} \ell_{\rm s}^2, \ R_{\rm M} = g_{\rm s}\ell_{\rm s}$ を用いて M-theory のパラメータで書き直すと，

$$H = R_{\rm M} \left({\rm tr} \frac{P_i^2}{2} + \frac{1}{4\ell_{\rm P}^6} {\rm tr} [X_i, X_j]^2 + \cdots \right), \tag{IV.21}$$

となります．この結果を $P^{\pm}$ に代入すると次のようになります:

$$P^- = \frac{H - P_{11}}{\sqrt{2}} = \frac{R_{\rm M}}{\sqrt{2}} {\rm tr} \left(\frac{P_i^2}{2} + \frac{1}{4\ell_{\rm P}^6} [X_i, X_j]^2 + \cdots \right), \tag{IV.22}$$

$$P^+ = \frac{H + P_{11}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\frac{N}{R_{\rm M}} + \cdots . \tag{IV.23}$$

これは boost 前ですから boost 後の座標系で見ると,

$$P^{-\prime} = e^{\omega} P^- \to R{\rm tr}\left(\frac{P_i^2}{2} + \frac{1}{4\ell_{\rm P}^6}[X_i, X_j]^2 + \cdots\right), \tag{IV.24}$$

$$P^{+\prime} = e^{-\omega} P^+ \to \frac{N}{R}, \tag{IV.25}$$

となります．ここでの $\to$ は boost ∞ の極限をとることを意味しています．この frame でみると確かに light cone の方向に有限のコンパクト化の半径があるように見えますが，もとの 11 次元でみると $R_{\rm M}$ は 0 になっています．

$$P^{-\prime} \equiv H_{\rm DLCQ}, \tag{IV.26}$$

として，これがいわゆる BFSS のハミルトニアンで M(-atrix) theory と呼ばれているものです．参考文献は

T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind,
Phys. Rev. **D55** (1997) 5112 (hep-th/9610043),

です．

これが M-theory になるといっている根拠はかなり薄弱です．Light cone の方向は有限のコンパクト化の半径を持つように見えますので，この議論から出発して light like にコンパクト化した 11 次元の supergravity における D0-brane の散乱，あるいは D0-brane とは KK mode ですから，結局，11 次元の supergravity の graviton の散乱が一致していると言う話がありますが，結局調べているのは空間的には半径 0 にコンパクト化してしまったものであり，ただ無限に boost したので一見有限のコンパクト化半径を持った理論を調べているように見えるに過ぎないと思われます．実際に見ているものは 10 次元の type IIA の weak coupling limit でかつ非相対論的領域です．

結局，ここで議論した M(-atrix) theory が構成的定義になるためには次の点をクリアしなくてはならないでしょう．

1. $N \to \infty$ 極限は？
   11 次元あるいは 10 次元の Lorentz 不変性を回復するためには $N \to \infty$ 極限，すなわち，

$$P^+ = \frac{N}{R} = {\rm fix} \quad , \quad N \to \infty \quad , \quad R \to \infty, \tag{IV.27}$$

   という極限をとることが必要です．しかし，その場合は 10 次元では weak coupling ではないので，Seiberg-Sen の議論は使えなくなってしまいます．言いかえますと，本

当に M-theory(有限の結合定数を持った IIA) になるという根拠が失われてしまうわけです．また，$N \to \infty$ の極限で Maximal SUSY (Lorentz 不変性) が回復しているかどうかも，信じる根拠がないように思われます．

2. $P^+ \sim 0$ の困難をどうさけるか？
よく知られているように，light cone quantization の弱点は，非摂動効果 (真空の構造など) が $P^+ \sim 0$ の領域に隠されてしまい，非常に見にくいことです．これは light cone quantization の根本的な問題であり，M(-atrix) theory がこの問題をうまく回避しているという根拠はありません．

IV.2 IKKT model

次に IKKT model，別名 IIB matrix model についてお話しします．参考文献は

N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya,
Nucl. Phys. **B498** (1997) 467, (hep-th/9612115),

です．IIB matrix model の作用は次のように与えられます:

$$S = -\frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu[A_\mu, \psi]\right). \tag{IV.28}$$

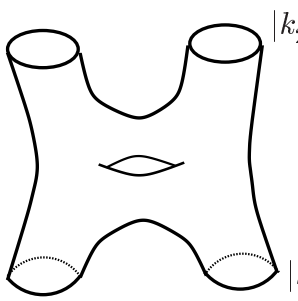
ここで， A_μ は 10 次元のベクトル，ψ は 10 次元 Majorana-Weyl spinor であり，それらの成分はすべて $N \times N$ の Hermite 行列です．

これは 10 次元の super Yang-Mills 理論を 0 次元に dimensional reduction したものに他なりません．この model の一つの問題点は何がオブザーバブルかはっきりしないことですが，1 つの可能性として off shell の string amplitude を考えることができます．

この model で off shell の string amplitude を与えるために，まず Wilson loop

$$w(k^\mu(\sigma)) = \mathrm{tr}\left(\exp\left[i\int k^\mu(\sigma)A_\mu d\sigma\right]\right), \tag{IV.29}$$

を考え，その多点関数の期待値を用いて次のように定義します:



$$\underset{N\to\infty}{=} \langle w(k_1^\mu(\sigma))w(k_2^\mu(\sigma))\cdots\rangle. \tag{IV.30}$$

IIB string の off-shell の amplitude

ここで期待値 $\langle\ \rangle$ はこの作用 (IV.28) での期待値です．これが IIB matrix model の基本的な conjecture です．残念ながら，有限の amplitude を得るためには，$N \to \infty$ の極限をとるときに，N と g^2 をどのように連動させたら良いかは分かっていません．次のように，$N \to \infty$, $g^2 \to 0$ とするときに，

$$g^2 N^\star = \text{fix}, \tag{IV.31}$$

とするのは確かなのですが，N の巾が分かっていません．

ここで，IIB といっているのは，IIB の string が素朴な $1/N$ 展開から出てくることが期待されるという意味で IIB と言っています．もちろん，全ての string 理論はデュアリティでつながっているわけで，非摂動論的な効果まで考えれば同じものとなるはずです．ですから，IIB matrix model といっているのは，比較的 IIB string がみやすい形の matrix model であるという程度の意味です．

(IV.30) が我々の conjecture なのですが，これがどれくらい示せているかを説明します．昔から，このような Wilson loop に対しては loop equation と呼ばれる手法がありまして，それは一言でいうと Wilson loop に対する Schwinger-Dyson equation です．しかしながら，(IV.30) のように amplitude を与えてみても，実際は発散があってなかなかコントロールしにくいもので，N の巾が決まらないのもその辺の事情によるものです．そういう問題をおいておいて，ごくおおざっぱに loop equation の構造を調べてやりますと，それは light cone gauge での IIB string field を摂動論的に再現していることを示すことができます．Loop equation 自体は複雑な方程式なのですが，登場する loop が全て light front $X^+ = \text{const}$ の上にのっているように制限すると (図 62)，結構簡単化することができ，

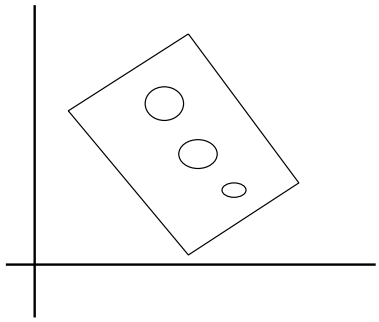


図 62: Loop を light front の上に制限

string field と比べることができるというわけです．

Light cone の string field はちゃんとしたものなのですが，さっきも言ったように light cone では $P^+ \sim 0$ の問題がありますから，摂動級数を再現するという意味では良い理論なのですが，非摂動効果まで含めて議論していることにはなりません．その意味ではむしろ full theory を light cone に持っていって，非摂動論効果をわざとみないようにして摂動的

効果だけを見ていくと，確かに string field を再現できているということになります．これをきちんと示すことができれば，少なくともこの理論は摂動論的には IIB string であることを示したことになります．摂動論的には IIB string を再現して，しかも，この作用自体は下からバウンドされており，path integral が完全に well defined なので，非摂動論的に定義された理論になっているということができます．この model が正しいと信じる根拠を他にも幾つか挙げることができるのですが，それは review

H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya and T. Tada.
Prog. Theor. Phys. Suppl. **134** (1999) 47, (hep-th/9908038),

をみてもらうことにしましょう．

IV.3　非可換幾何学

非可換幾何学というものに何か決まった定義があるわけではなく，そういう意味で一つの “参考” に過ぎないのですが，

A. Connes, Commun. Math. Phys. **182** (1996) 155, (hep-th/9603053),
A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz, JHEP 9802 (1998) 003, (hep-th/9711162),

を挙げておきます．彼らが言っている非可換幾何学が，必ずしも今から議論するものと同じではないということを注意しておきます．

N 個の D-brane を考えます．D-brane がお互いに離れているときには，D-brane の座標は古典的な座標で表すことができます．ところが，これらが近づいて来ますと，有効ラグランジアンは 10 次元の super Yang-Mills 理論を reduction したものとなり，座標は $N \times N$ の行列となります．行列の対角成分は古典的な座標ですから，string の基本的な自由度は古典的なものよりもずっと複雑な非可換なものではないかと考えることができます．こういう目で matrix model を眺めてみますと，例えば IIB matrix model の場合，

$$A_\mu : \mu = 1, 2, \cdots, D, \tag{IV.32}$$

は “空間座標” と考えられます．その目でみると作用

$$S = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}[A_\mu, A_\nu]^2 + \cdots, \tag{IV.33}$$

は，A_μ 自身に μ の足がありますので flat space に住んでいるように見えます．実際，形式的ではありますが flat space の中の string の Schild action の Poisson bracket $\{\ ,\ \}$ を $[\ ,\ ]$ に置き換えたものが (IV.33) と一致します．いずれにしろ，A_μ の contraction の仕方をみると，

$$[A_\mu, A_\nu]^2 = [A_\mu, A_\nu][A_\alpha, A_\beta]\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}, \tag{IV.34}$$

というふうに，flat なメトリックで contract されているわけです．

それでは時空のいろいろなトポロジーはどのようにして記述されているのでしょうか．一つの可能性として，A_μ はこれは無限サイズの行列なので無限のなかには何でも入り得るという意味で，IIB matrix model は完結しており，いろいろな時空が自動的に入っているかも知れませんが，もう一つの可能性として，この model は時空を local に記述しているだけで，複雑なトポロジーを持った時空の一つの patch を記述しているのではないかと考えることができます．IIB matrix model が今の形のままで十分なのか，それともこれを拡張してはじめて本当に正しい理論が得られるのかは分かりませんが，拡張の方法の 1 つの方向としては，IIB matrix model が記述しているのは local な patch であって，全体を記述する理論はそれを張り合わせた様な形に作るという事も考えられます．

そこで，非可換な幾何学をつなぎ合わせて多様体をつくることがどれくらい難しいかをみてみましょう．非可換な平面を張り合わせて非可換な多様体をつくることは，数学でも長い間試みられているようですが，今のところ答えは見つかっていません．しかし，数学屋さんの言っていることを物理屋はあまり気にしてはいけませんので，数学のサイドでも気にされている問題であるということだけを言っておきます．どこが問題点なのかをもう少し詳しく言っておきたいので，まず非可換平面から議論を進めましょう．

IV.4　非可換平面

古典的な平面を $\mathbb{R}^2$ と書きます．x^1 と x^2 で張られた平面を考えると，点というのは確定した座標 (x, y) で与えられます．この非可換バージョンを考え，x と y が行列であるとします．どんなものを選ぶかでバリエーションがいろいろありますが，ここでは次のように選びます：

$$x^1 = \widehat{p}, \quad x^2 = \widehat{q}, \quad [\widehat{p}, \widehat{q}] = -i. \tag{IV.35}$$

$\widehat{p}$, $\widehat{q}$ は量子力学の運動量と座標です．良く言われているように，p と q の平面でみるとだいたい面積 2π くらいの領域に量子的な状態が 1 つ対応しているわけです (図 63)．

ですから，これは逆に言いますと長さが $\sqrt{2\pi}$ に比べて十分大きい領域で眺めまてやりますと p, q は古典的に見えて普通の平面にみえるようになるわけです．つまり，遠方から眺めると普通の平面なのですが，近距離までみていくと非可換に見えてきます．

これは先程言った，Planck スケールに比べて十分遠いところでみると多様体のような時空が見えているのですが，もっと近くに行くと非可換性が現れる感じに似ています．

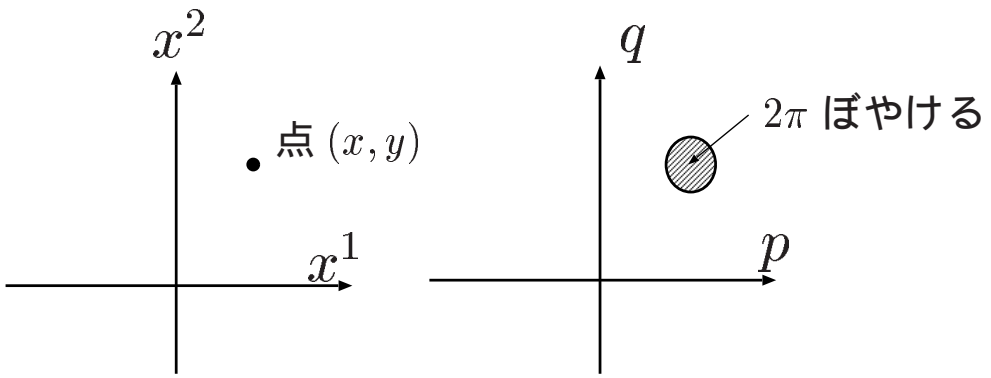


図 63: 古典平面と量子化された平面

IV.5　非可換球面

さて，次に非可換球面です．古典的な S^2 をどう表すかはいろいろあるわけですが，非可換球面に拡張しやすいものは 3 次元空間中に埋め込んだ，

$$x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2, \tag{IV.36}$$

です．これに対応した非可換球面として，角運動量の代数

$$\widehat{x} = \widehat{\ell}_x, \quad \widehat{y} = \widehat{\ell}_y, \quad \widehat{z} = \widehat{\ell}_z, \tag{IV.37}$$

$$\widehat{x}^2 + \widehat{y}^2 + \widehat{z}^2 = \ell(\ell + 1), \tag{IV.38}$$

$$[\widehat{x}, \widehat{y}] = i\widehat{z}, \ \cdots . \tag{IV.39}$$

を考えます． これがどういう意味で非可換球面になっているかをみてみましょう．どこでもいいのですが，北極の近くに注目しましょう．Rescale して，

$$\widehat{x}' \equiv \frac{\widehat{x}}{\sqrt{\ell}}, \quad \widehat{y}' \equiv \frac{\widehat{y}}{\sqrt{\ell}}, \quad \widehat{z}' \equiv \frac{\widehat{z}}{\sqrt{\ell}}, \tag{IV.40}$$

と定義し直しますと，

$$\widehat{x}'^2 + \widehat{y}'^2 + \widehat{z}'^2 = (\ell + 1), \tag{IV.41}$$

$$[\widehat{x}', \widehat{y}'] = i\frac{1}{\sqrt{\ell}}\widehat{z}', \ \cdots , \tag{IV.42}$$

となります．$\widehat{\ell}_z$ の固有値が最大値

$$\widehat{\ell}_z|\ell\rangle = \ell|\ell\rangle, \tag{IV.43}$$

となる付近の状態，すなわち

$$|\ell\rangle, \quad |\ell-1\rangle, \quad |\ell-2\rangle, \cdots, \tag{IV.44}$$

というように，ℓ_z の値があまり $|\ell\rangle$ から離れていない状態で張られる subspace が北極に対応しています．このあたりの状態に限ると交換関係は，

$$[\widehat{\ell}_x, \widehat{\ell}_y] = i\widehat{\ell}_z \sim i\ell, \tag{IV.45}$$

となります．これを rescale した座標でみると，

$$[\widehat{x}', \widehat{y}'] = i. \tag{IV.46}$$

となり，確かに北極のそばでは非可換平面を再現していることが分かります．もちろん，北極に限らず各点の周りで非可換平面のようになっています．そういう意味でこれを非可換球面と呼んでも良いでしょう．

普通の古典的球面を南極側と北極側の 2 つの patch で張り合わせてつくれるように，非可換平面を 2 枚張り合わせて非可換球面をつくることができないかを考えてみましょう．しかし，これはなかなか難しいのです．Patch を張り合わせるという事は，ある patch の点と別の patch の点を identify しなさいというルールを与える事なのですが，一度非可換性を与えると，点は local なものではなく広がったものになってしまいます．すると patch と patch を張り合わせるところで，互いに端の方が他の patch ににじみでた状態が現れてしまい，片方の patch だけにしか含まれていない状態というものを考えられなくなります．そのような理由で，適当な非可換平面を持ってきて，それを適当に切り出し，適当に張り合わせることによって，非可換多様体をつくることは，なかなかうまくいかず，数学屋さんでも悩んでいるようで，まとまった答えはないという状況です．

1 つの方向として，行列模型を局所的な patch を表すものとし，本当の model は global な幾何学を表すものであるという立場で拡張できたらなかなか面白いのですが，一番簡単な球面の場合でさえ難しそうです．

V　まとめ

行列模型を適当にもう少し良い形に持っていて，本当の model を見つける $\cdots$．おそらく本当の理論とはそういうものだと思います．非可換幾何学はその手がかりになるかも知れません．あるいは，今の行列模型が本当にそれ自身で完結した理論になっていて，むしろ曲がった時空が matrix model の中でどのように表されているのか？といった解釈が問題となるのかも知れません．どうやるのかは完全には分からないのですが，いずれにしても，行列模型で string の非摂動的な定式化ができつつあると言って良いと思います．しかし，まだ最終的な形には，おそらくなっていません．これから string の勉強をする人は，

これからがとても良い時期で，ほんのちょっと積み上げれば最終的な理論がつくれると思われます．ですから，野心を持って頑張ってください．

謝辞

ずいぶん久しぶりに若手夏の学校に参加して，大変楽しかったです．若手の人達に感謝したいと思います．準備校の方々も大変だとは思いますが，ぜひこのよき伝統を続けていっていただきたいと思います．また，村松哲行さん，山口貴史さん，大島健一さん，小西由紀子さん，小又雄一郎さん，長岡悟史さん，牧本聡一郎さんには講義録を作っていただきました．荒っぽい話っぱなしの講義をビデオから起こして下さり，大変見やすい講義録ができました．この場をお借りしてあらためて感謝させていただきます．

川合先生には，私たちが書いた粗雑な文章を大変丁寧に校正して頂きました．その他の様々な問い合わせやお願いにも，常に快く応じてくださり，講義録作成の作業を快適に行うことができました．この場をお借りして川合先生に深く感謝致します．

講義録作成者一同