原子核三者若手夏の学校
2003年8月20日

ソリトンのお話

浜中 真志

(東大総合文化@駒場)

in collaboration with

戸田 晃一

(富山県立大学)

based on our papers:

- [hep-th/0211148]
  (to appear in PLA)
- [hep-th/0301213]
- [hep-th/030mnnn]

§1 Introduction

NC ゲージ理論 ↔ 磁場中の物理

〈特徴〉

- 特異点の解消 → 新しい物理的対象
  e.g. U(1) instantons
- 取り扱いが容易 → 様々な応用
  e.g. Tachyon 凝縮

NC ソリトンが重要な役割を果たす.

NC ソリトン

- インスタントン・モノポール (ASD eq., Bogomol'nyi eq.) → 大成功
  e.g. [MH, hep-th/0303256 Ph.D thesis]
- 他のソリトン (KP eq., KdV eq., …) → 同様の成果を期待

↓

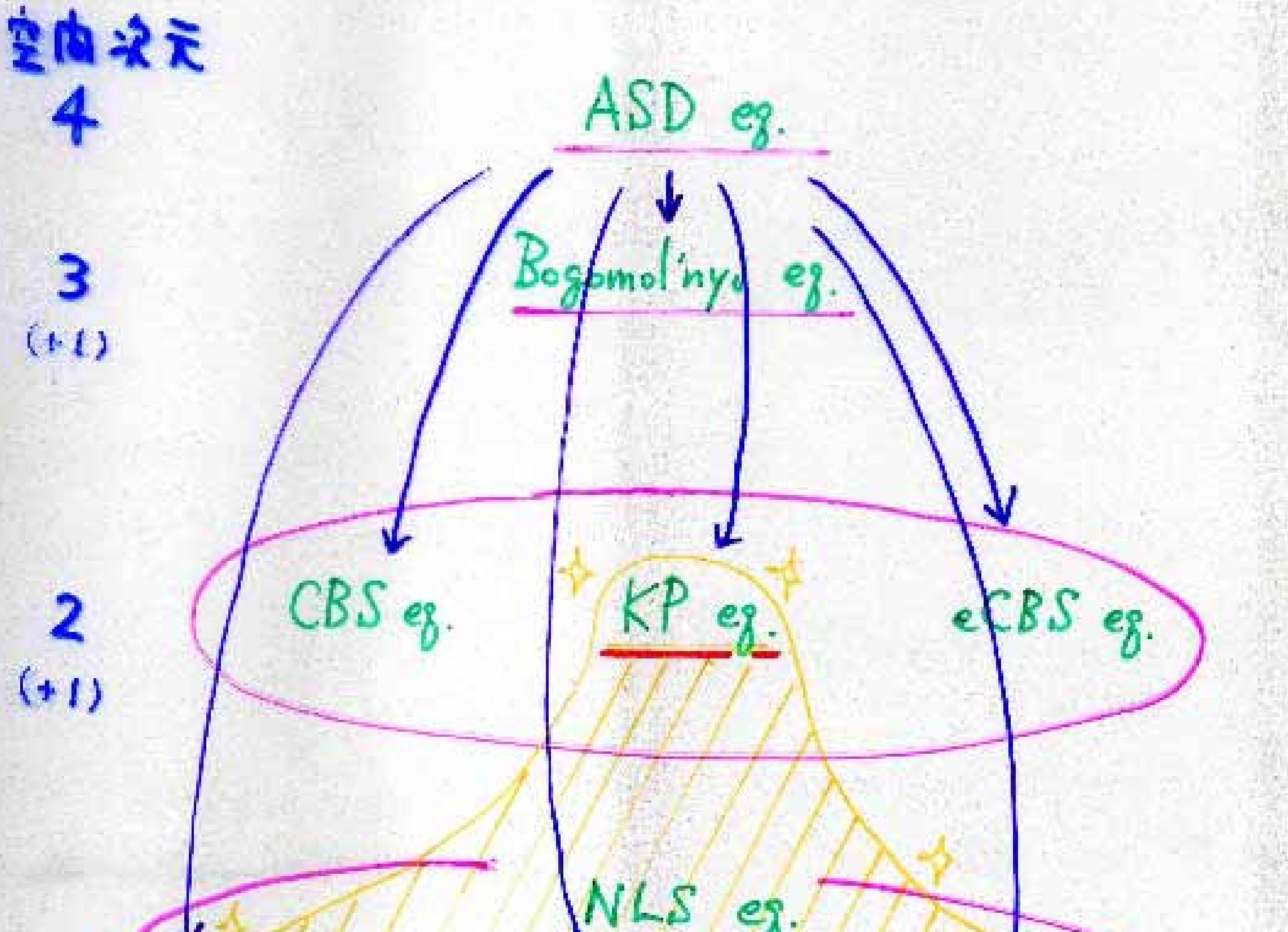
何故期待できるのか?

↓

NC Ward 予想

[MH & K.Toda, hep-th/0211148]
to appear in Phys.Lett.A

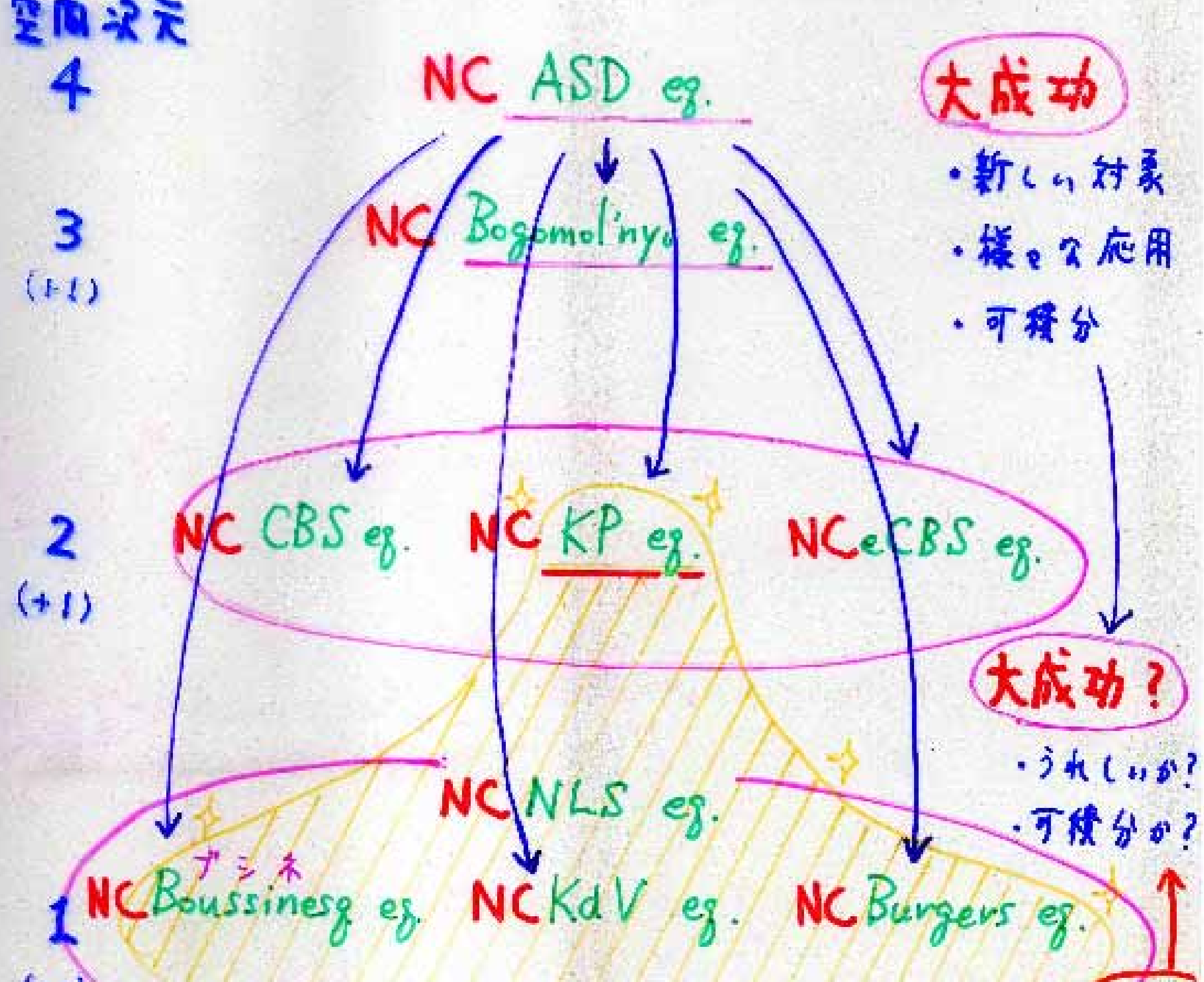
Ward予想：（ほとんど）全ての低次元の可積分方程式は4次元の ASD方程式のリダクションによって得られるであろう。



佐藤理論： KP eq. を親玉とする、ソリトン理論の最も美しい理論の1つ

NC Ward 予想：（ほとんど）全ての低次元の NC 可積分方程式は 4 次元の NC ASD 方程式のリダクションによって得られるであろう。

[MH & K. Toda, PLA 316, hep-th/0211148]



NC 佐藤理論：NC KP eq. を親玉とする、ソリトン理論の最も美しい理論の1つとなるだろう

- 佐藤理論
  - 擬微分作用素を用いた定式化
    - ← 微分作用素の自然な拡張
  - 要となるもの：
    - 階層方程式 (∞コのLax方程式)
      hierarchy
    - τ関数 (双線型化)

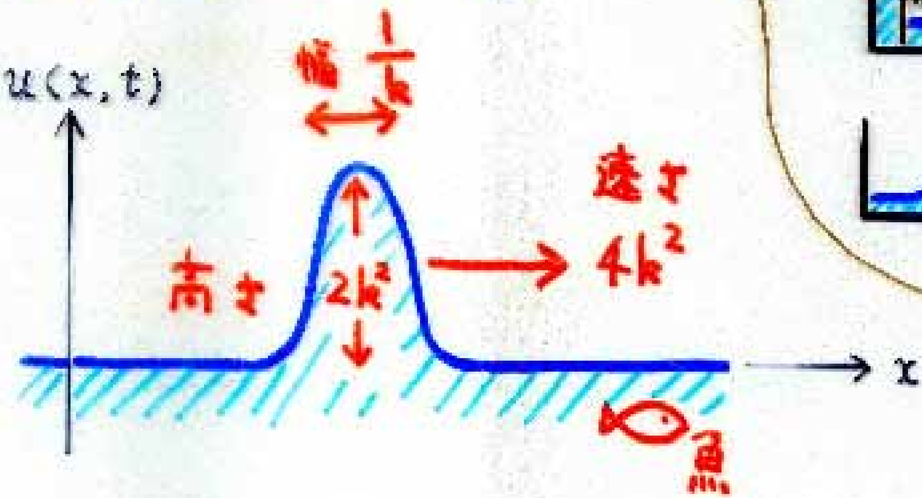
↓

- 分かること：
  - ソリトン方程式の解空間の構造
  - 厳密解
  - ソリトン方程式のもつ対称性 (無限次元の)
  - ⋮
  - その他ほぼ全て
- 今日のお話 (全てNC)
  - 擬微分作用素を用いた階層方程式の導出
  - NC Burgers eq. の性質 (厳密解, Ward予想)

§2 NC Sato Theory (擬微分作用素, Lax, 階層

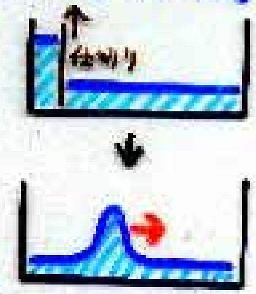
KdV 方程式

浅水波のソリトン



[Scott-Russel, 1834年]

水槽実験



cf
・榊原さんの記事
・和達さんの本

$$u = 2k^2 \,\mathrm{sech}^2(kx - 4k^3 t)$$

$$\dot{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cdots$$

などを計算して uのみたす式を導く

$$\boxed{\dot{u} + \underbrace{u'''}_{\text{分散項}} + \underbrace{6u'u}_{\text{非線型項}} = 0 \ : \ \text{KdV eq.}}$$

[Korteweg-de Vries, 1895年]
Navier-Stokes eq. から導出

- Nソリトン解をもつ (時間発展が追える)
- ∞個の保存量をもつ (無限に高い対称性の示唆)
- Lax表示をもつ
- ⋮

・ Lax表示

ある 方程式

$$\Updownarrow$$

$[\partial_t + B, P] = 0$: **Lax eq.**

$^{\exists}B, P$: 微分作用素 **(Lax pair)**

(例) KdV eq.

$$\begin{cases} P_{KdV} = \partial_x^2 + u(x,t) \\ B_{KdV} = \frac{1}{2}u\,\partial_x - \frac{1}{4}u' \end{cases}$$

$$[\partial_t + B_{KdV}, P_{KdV}] = 0$$

$$\Updownarrow \quad \Leftrightarrow\ \underbrace{\bigcirc}_{\text{ない?}}\partial_x^2 + \underbrace{\square}_{\text{ない?}}\partial_x + \triangle = 0$$

$$\dot{u} + \frac{1}{4}u''' + \frac{3}{2}u'u = 0 \qquad \text{KdV eq.!}$$

※ "次元" が 分かる

$[x] = -1$

$[u] = +2$

$[B] = +3$

$[t] = -3$

Lax表示を持つと いろいろうれしい!

・NC Lax 表示

※場同士の積は全てスター積

あるNC方程式

$$\Updownarrow$$

$$[\partial_t + B, P]_\star = 0 \quad : \quad \text{Lax eq.}$$

$\exists B, P$: 微分作用素 (Lax pair)

(例) KdV eq.

$[t, x] = i\theta$

$\theta^{12} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} P_{KdV} = \partial_x^2 + u(x,t) \\ B_{KdV} = \frac{1}{2} u \partial_x - \frac{1}{4} u' \end{cases}$$

$$[\partial_t + B_{KdV}, P_{KdV}]_\star = 0$$

$\Updownarrow$ $\bigcirc \partial_x^2 + \square \partial_x + \triangle = 0$

ない!?

$$\Updownarrow$$

$$\dot{u} + \frac{1}{4} u''' + \cancel{\frac{3}{2} u' u} = 0 \quad \text{NC KdV eq.!}$$

$$\frac{3}{4}(u' \star u + u \star u')$$

対称化

※"次元"が分かる

$[x] = -1$

$[u] = +2$

$[B] = +3$

$[t] = -3$

NC Lax表示を持つと (多分) いろいろうれしい!

※ スター積（Moyal積）

2次元

(例) $\theta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$

反対称テンソル

$$f \star g(x) := e^{\frac{i}{2}\theta^{ij} \partial_i' \partial_j''} f(x') g(x'') \Big|_{x'=x''=x}$$

$[x^1, x^2] = i\theta$

$$= f(x)\cdot g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\, \partial_j g(x) + O(\theta^2)$$

↑ ∞階微分含む！

(性質)

・結合則をみたす

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$$

・"非可換空間"を与える

$$[x^i, x^j]_\star := x^i \star x^j - x^j \star x^i$$

$$= i\theta^{ij}$$

（座標関数同士の積が非可換）

非可換パラメータ

・「変形された」積である

$$f \star g(x) \xrightarrow[\theta \to 0]{} f\cdot g(x)$$

可換極限

※ゲージ理論では「変形」
⇕
「背景磁場」

階層方程式…擬微分作用素というものを用いた Lax eq. の系列

(例) KdV 階層

$$[\partial_{t_n} - B_n , P]_* = 0$$

$$\begin{cases} P = \partial_x^2 + u \\ B_n = \text{(存在する!)} \end{cases}$$

$$[B_n] = n$$

$$[t_n] = -n$$

$$(n=3) \quad B_3 = \frac{1}{2} u \partial_x - \frac{1}{4} u'$$

問いかけ： Pの平方根？

$$\sqrt{P} = \sqrt{\partial^2 + u} = ?$$

$$\Updownarrow$$

$P = L \cdot L$ となる L はあるか？

cf. $\left(\begin{array}{l} \sqrt{-1} = ? = i \\ \sqrt{\partial^2 + m^2} = ? = \text{Dirac作用素} \end{array} \right)$

◎ 微分作用素の負べき

$$\partial_x^n \circ f = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n}{j}}_{\text{‖ 二項係数}} (\partial_x^j f)\, \partial_x^{n-j}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{j(j-1)(j-2)\cdots 1} \quad \begin{matrix} \leftarrow j\text{コの積} \\ \leftarrow j\text{コの積} \end{matrix}$$

nを負の数に拡張しよう ⇝ 2項係数をこの定義のまま $n<0$ に拡張

(例)

$$\partial_x^3 \circ f = f\,\partial_x^3 + 3f'\partial_x^2 + 3f''\partial_x + f'''$$

$$\partial_x^2 \circ f = f\,\partial_x^2 + 2f'\partial_x + f''$$

$$\vdots$$

$$\partial_x^{-1} \circ f = f\,\partial_x^{-1} - f'\partial_x^{-2} + f''\partial_x^{-3} - \cdots$$

$$\partial_x^{-2} \circ f = f\,\partial_x^{-2} - 2f'\partial_x^{-3} + 3f''\partial_x^{-4} - \cdots$$

$$\vdots$$

Well-defined !
(no problem)

cf. さっきの問いかけの答え：

$$\sqrt{\partial^2 + u} = \partial + \frac{1}{2}u\,\partial^{-1} - \frac{1}{4}u'\partial^{-2} + \cdots$$ 存在!

・(1階の)擬微分作用素

普通の微分　　微分の「負べき」!

$$L = \partial_x + u_2 \partial_x^{-1} + u_3 \partial_x^{-2} + u_4 \partial_x^{-3} + \cdots$$

今とりあえず $u_1 = 0$　　mass 次元

$$u_i = u_i(t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots)$$

無限次元空間上の場

(非可換性の与え方は任意)

・Lを用いた Lax eq. の系列(階層方程式)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_n} - B_n ,\ L\right]_\star = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$B_n = (L^n)_{\geq 0}$$

L^n の正べきをとれ

両立条件

$$\begin{cases} L \star \psi = \lambda \psi \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t_n} = B_n \star \psi \end{cases}$$

(例)
$$B_1 = (L)_{\geq 0} = \partial_x$$
$$B_2 = (L^2)_{\geq 0} = \partial_x^2 + 2u_2$$
$$B_3 = (L^3)_{\geq 0} = \partial_x^3 + 3u_2 \partial_x + 3u_3 + 3u_2'$$
$$\vdots$$

各 ∂^{-n} の係数 $= 0$ ⇒ ∞コの微分方程式

“実部 虚部 = 0”　→ 実数の式

• NC KP 階層　（可換の場合 $gl(\infty)$ の対称性）

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_n} - B_n \,,\, L\right]_\star = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$B_n = (L^n)_{\geq 0}, \qquad L = \partial_x + u_2 \partial_x^{-1} + u_3 \partial_x^{-2} + u_4 \partial_x^{-3} + \cdots$$

• $n = 1$:　$(u_i)_{t_1} = (u_i)_x \quad \therefore\ t_1 \equiv x$

• $n = 2$:　$\partial_x^{-1})\quad (u_2)_{t_2} = \underline{2u_3'} + u_2''$

$\partial_x^{-2})\quad (u_3)_{t_2} = \underline{2u_4'} + u_3'' + 2u_2 \star u_2' + 2[u_2, u_3]_\star$

$\partial_x^{-3})\quad (u_4)_{t_2} = \underline{2u_5'} + u_4'' + 2u_3 \star u_2' + 2[u_2, u_4]_\star$

$\vdots$

↑

$u_3, u_4, u_5, \cdots$ が全て1つの場 u_2 で書ける

• $n = 3$:　$\partial_x^{-1})\quad (u_2)_{t_3} = u_2''' + 3u_3'' + 3u_4' + 3u_2' \star u_2 + 3u_2 \star u_2'$

$\vdots$

u_3, u_4 を u_2 で表し，$t_2 \equiv y$，$t_3 \equiv -t$，$u_2 \equiv \dfrac{u}{2}$ と書くと

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{4}(u_x \star u + u \star u_x) + \frac{3}{4}\partial_x^{-1}u_{yy} + \frac{3}{4}[u, \partial_x^{-1}u_{yy}]_\star = 0$$

NC KP !

- NC KdV 階層（KP の 2-reduction）

NC KP 階層に次の条件を課す：

$$L^2 = B_2 := (L^2)_{\geq 0}$$

L の 2 乗は（普通の）微分作用素

$\Downarrow$

$$\partial_x^{-1})\quad 2u_3 = -u_2'$$

$$\partial_x^{-2})\quad 2u_4 = -u_3' - u_2^2$$

$$\vdots$$

$u_3, u_4, \cdots$ は全て 1 つの場 $\underset{\left(\overset{\|}{u}\right)}{u_2}$ で書ける.

NC KdV 階層：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_n} - \underset{\underset{(L^n)_{\geq 0}}{\|}}{B_n},\ L^2\right]_\star = 0$$

- $n = 3 \rightarrow$ KdV eq.

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{4}(u_x \star u + u \star u_x) = 0$$

Remark $\underset{(2m)}{n}$: 偶数のとき $[B_n, L^2]_\star = [(B_2)^m, B_2]_\star = 0$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t_{2m}} = 0 \quad \text{（次元還元）}$$

可換の場合　対称性は $\widehat{sl}_2$（∞-dim アフィン Lie 環）

• NC Boussinesq階層 (NC KPの3-reduction)

NC KP階層に次の条件を課す:

$$L^3 = B_3 = (L^3)_{\geq 0}$$

Lの3乗は(普通の)微分作用素

$\Downarrow$

$\partial_x^{-1})\quad 3u_4 = -u_3' - u_2'' - 3u_2^2$

$\partial_x^{-2})\quad 3u_5 = -3u_4' - u_3'' - 3u_2 \star u_3 - 3u_3 \star u_2 - [u_2', u_2]_\star$

$\vdots$

$n=2$ の Lax eq. $\left[\frac{\partial}{\partial t_2} - B_2, L\right]_\star = 0$

$\partial_x^{-1})\quad 2u_3' = (u_2)_{t_2} - u_2''$

$\vdots$

$u_3, u_4, \cdots$ は全て1つの場 $u_2 \left(\equiv \frac{u}{2}\right)$ で書ける。

• $\left[\frac{\partial}{\partial t_2} - B_2, L^3\right]_\star = 0$

$\Downarrow\ t_2 \equiv t$

$$u_{tt} + \frac{1}{3} u_{xxxx} + (u \star u)_{xx} + [u, \partial_x^{-1} u_t]_{\star x} = 0$$

NC Boussinesq eq.!

Remark $\frac{\partial u}{\partial t_{3m}} = 0$ 　対称性は可換のとき $\widehat{sl}_3$

§3 NC Burgers 階層

Lとして一般形をとる：

$$L = \partial_x + \underbrace{u_1}_{\text{含める}} + u_2\partial_x^{-2} + u_3\partial_x^{-3} + \cdots$$

Lax eq.：

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t_n} - \underset{\underset{(L^n)_{\geq 1}}{\parallel}}{\tilde{B}_n}\ ,\ L\Big]_\star = 0$$

NC Burgers 階層

$[u] = 1$

$L = B_1 = \partial_x + u$ を課す $\rightsquigarrow u_2, u_3, u_4 \equiv 0$

- $n=2$： $u_{t_2} = u'' + 2u \star u'$

NC Burgers eq.！

- $n=3$： $u_{t_3} = u''' + 3u \star u'' + 3u' \star u' + 3u'^2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

高次 Burgers eq. が続く

可積分か？

[MH & K. Toda, JPA (to appear), hep-th/0301213]

$$\dot{u} + u'' + 2u \star u' = 0$$

$[t, x] = i\theta$

$$u \star u' = e^{i\frac{\theta}{2}(\partial_{t'}\partial_{x''} - \partial_{x'}\partial_{t''})} u(t', x') u'(t'', x'')\Big|_{\substack{x'=x''=x \\ t'=t''=t}}$$

時間微分を∞コ含む！
(初期値問題は？？？)

$u = \tau^{-1} \star \tau'$ で変換 $\left(\xrightarrow{\theta\to 0} \partial_x \log\tau\right)$

$[u] = 1$

$$\dot{\tau} = \tau''$$

拡散方程式（時間について1階微分）

線型 eq.

可積分！

Naive 解 ("NC Shock-wave 解")

$$\tau = 1 + \sum_{i=1}^{N} h_i\, e^{a k_i^2 t} \star e^{\pm k_i x}$$

※"衝突しない"多重ソリトン解は存在する
$f(t) \star g(t) = f(t) g(t)$
(可換と同じ)

Remark

"2-Shock wave 解"については τ^{-1} or u が求められ、NC 変形の効果が見られる [Martina & Pashaev hep-th/0302055]

NC Ward conjecture

(Ex) NC Non-Linear Schrödinger (NLS) eq.

Reduced ASD eq. : $(\underset{\text{4-dim.}}{x^\mu} \to \underset{\text{2-dim.}}{(\xi, \tau)})$

$$\begin{cases} B' = 0 & \cdots ① \\ C' - \dot{A} + [A, C]_\star = 0 & \cdots ② \\ A' - \dot{B} + [C, B]_\star = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

$' = \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\cdot = \frac{\partial}{\partial \tau}$ $\quad A_\mu(x_z, x_{\bar{z}}, \cancel{x_\rho}, x_{\bar{\rho}})$

$\xi \leftarrow \text{real} \rightarrow \tau$

$A_z = 0,\ A_{\bar{z}} =: A,\ A_\rho =: B,\ A_{\bar{\rho}} =: C$

さらに reduce (①, ③ をみたす) : $A = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$C = -i\begin{pmatrix} q \star \bar{q} & q' \\ \bar{q}' & -\bar{q} \star q \end{pmatrix}$

$$② \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i\dot{q} - q'' - 2q\star\bar{q}\star q \\ i\dot{\bar{q}} + \bar{q}'' + 2\bar{q}\star q\star\bar{q} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore\ i\dot{q} = q'' + 2q\star\bar{q}\star q$ **NC NLS !**

[Legare]

Note $A, B, C \in gl(2, \mathbb{C}) \xrightarrow[\theta \to 0]{} sl(2, \mathbb{C})$

U(1) パートあり

(Ex.) NC Burgers eq. [hep-th/0301213 v2]

$G = U(1)$ で考える.

Reduced ASD eq. : $(x^\mu \to (x, t))$

$$\dot{A} + [B, A]_\star = 0$$

$$\dot{C} - B' + [B, C]_\star = 0$$

$G = U(1)$ でも残る!

$$' = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \dot{} = \frac{\partial}{\partial t} \qquad A_\mu(\cancel{x_\alpha}, \underset{\substack{\| \\ x}}{x_{\bar{\alpha}}}, \cancel{x_\beta}, \underset{\substack{\| \\ t}}{x_{\bar{\beta}}})$$

$$A_\alpha = 0,\ A_{\bar{\alpha}} =: C,\ A_\beta =: A,\ A_{\bar{\beta}} =: B$$

$\downarrow$ さらに reduce

$$A = 0,\ B = u' - u^2,\ C = u$$

$$\dot{u} = u'' + 2u' \star u$$ NC Burgers eq.!

Note $[\ ,\ ]_\star$ がないと.

$$\dot{u} = u'' + \underbrace{u' \star u + u \star u'}$$ が出る

対称化 → 線型化はおろか Lax にも書けない

§4 Conclusions and Discussions

NC Sato Theory

(i) NC 階層 → 階層構造をもつ方程式を大量に作ることができた！

- NC KP 階層

  ↓ reduction

  [MH & K.Toda, hep-th/0309265]

- NC KdV, Boussinesq (ブシネ), Burgers 階層 …

  Burgers ↓ 線型化 (可積分!)

  $u = \partial_x^2 \log\tau$ の非可換化

(ii) NC 双線型化 (τ関数) → まだ

【ハードル】 $u = \partial_x^2 \log\tau$ の非可換化 → Wanted! …

$[u] = 2$ 　 $P = \partial^2 + u$

exp $f(x)$, … の非可換化

(i) & (ii) $\xrightarrow{\text{即}}$ NC Sato (解空間, 対称性, …)

【他の課題】

- $\theta^{ij} \neq 0 \Rightarrow i, j$ 方向の時間発展? (cf. Ostrogradski 変換?)
- 弦理論への埋め込み (↔ Ward 予想)

1 非可換関係のレヴュー(物理)

- 基礎とタキオン凝縮への応用(SGT)：
  J. A. Harvey, hep-th/0102076;
  浜中 真志, 素粒子論研究 104-5 (2002-2) E27
- 場の理論的側面：
  Douglas-Nekrasov, hep-th/0106048
  Szabo, hep-th/0109162
- 非可換トーラス：
  Konechny-Schwarz, hep-th/0012145
- 基礎と非可換モノポール：
  Nekrasov, hep-th/0011095
- 基礎と非可換インスタントン：
  Konechny-Schwarz, hep-th/0107251
- 幾何学的側面(トポロジカル・チャージなど)：
  Furuuchi, hep-th/0010006;
  Harvey, hep-th/0105242
- ADHM/Nahm構成法：
  浜中 真志『ADHM/Nahm構成法とその双対性』
  素粒子論研究 106-1 (2002-10) 1-60;
  綿村 哲『非可換空間上のゲージ理論』,
  「数理物理2002」予稿集 35-98

[http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~hamanaka]