Dijkgraaf-Vafa Theory as Large-N Reduction

森田　健
(京都大学理学部)

Based on e-print hep-th/0303210
hep-th/0308???

共同研究者
川合　光氏 (京大理、理研)　黒木　経秀氏(京大理)

1.Introduction and Motivation

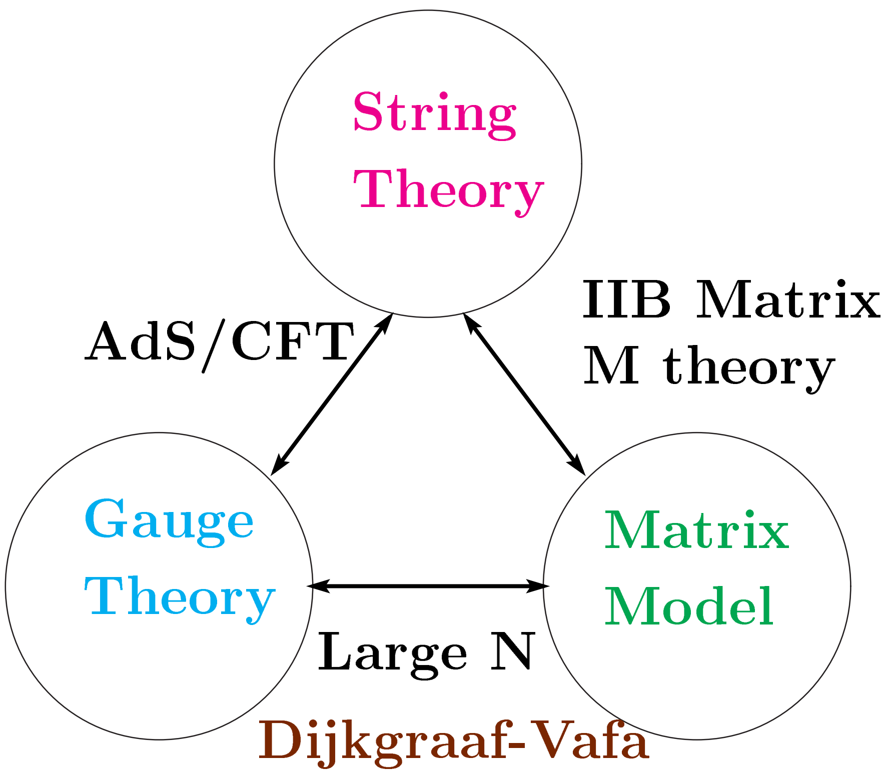
Dijkgraaf Vafa theory
(Dijkgraaf and Vafa claim hep-th/0208048)

Gauge theoryの F-term の振る舞いが
Matrix Modelで記述できる。

●一般の研究動機

「4次元 $\mathcal{N}=1$ Gauge理論の非摂動効果の解析」

●われわれの動機



「何か新しい Reductionの
メカニズムがあるのではないか？」

↓

「実は Large-N twisted reductionの
Superspaceへの拡張で説明できる。」

●目次

2.Brief Review of the Dijkgraaf-Vafa theory

● Dijkgraaf-Vafa theory

(Cachazo,Douglas,Seiberg,Witten hep-th/0211170)

○4次元 $\mathcal{N}=1$ $U(N)$ SYM + adjoint matter Φ

$$S_{\mathrm{FT}} = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}\ \mathrm{tr}_{U(N)}\left(e^{-V}\bar{\Phi}e^{V}\Phi\right) + \int d^4x d^2\theta\ 2\pi i\tau\ \mathrm{tr}_{U(N)}\left(W^{\alpha}W_{\alpha}\right) + \int d^4x d^2\theta\ \mathrm{tr}_{U(N)}\left(W(\Phi)\right) + c.c.$$

● Φ : chiral superfield

$$\bar{D}_{\alpha}\Phi = 0$$

● $W(\Phi)$:superpotential

$$W(\Phi) = \sum_{m=0}^{n} \frac{g_k}{k+1}\Phi^{k+1}$$

この理論において、

$$\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\boldsymbol{W}^{\alpha}\boldsymbol{W}_{\alpha}\boldsymbol{\Phi}^{m}\right\rangle$$

という correlation function は
次の Schwinger-Dyson equation を満たす。

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{W}^{\alpha}\boldsymbol{W}_{\alpha}\boldsymbol{\Phi}^{m-p-1}\right)\right\rangle\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{W}^{\alpha}\boldsymbol{W}_{\alpha}\boldsymbol{\Phi}^{p}\right)\right\rangle \\
&\qquad =\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{W}^{\alpha}\boldsymbol{W}_{\alpha}\boldsymbol{\Phi}^{m}\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{\Phi})\right)\right\rangle \\
&\qquad =\sum_{k=0}^{n} g_k\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{W}^{\alpha}\boldsymbol{W}_{\alpha}\boldsymbol{\Phi}^{k+m}\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

○Matrix Model

$$S_{MM} = \frac{\hat{N}}{g_m} \mathrm{Tr}_{U(\hat{N})} W(\hat{\Phi})$$

● $\hat{\Phi}$：Bosonic $\hat{N} \times \hat{N}$ hermite Matrix ($\hat{N} \to \infty$)

● Potential $W(\hat{\Phi})$はさっきと同じ形

● g_m：質量次元3の定数。作用を無次元化させる。

この理論では

$$\frac{g_m}{\hat{N}} \left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^m\right)\right\rangle$$

という correlation function について、
Schwinger-Dyson equationを計算すると

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{m-1} \frac{g_m}{\hat{N}} \left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^{m-p-1}\right)\right\rangle \frac{g_m}{\hat{N}} \left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^{p}\right)\right\rangle
&= \frac{g_m}{\hat{N}} \left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^m W'(\hat{\Phi})\right)\right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} g_k \frac{g_m}{\hat{N}} \left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^{k+m}\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

を得る。

場の理論での Schwinger-Dyson equation

$$\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\left(W^{\alpha}W_{\alpha}\Phi^{m-p-1}\right)\right\rangle\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\left(W^{\alpha}W_{\alpha}\Phi^{p}\right)\right\rangle = \sum_{k=0}^{n} g_k\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\left(W^{\alpha}W_{\alpha}\Phi^{k+m}\right)\right\rangle$$

と、Matrix Model での Schwinger-Dyson equation

$$\sum_{p=1}^{m-1}\frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^{m-p-1}\right)\right\rangle\frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^{p}\right)\right\rangle = \sum_{k=0}^{n} g_k\frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^{k+m}\right)\right\rangle$$

は、

$$\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr} W^{\alpha}W_{\alpha}\Phi^{q}\right\rangle \quad と \quad \frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle \mathrm{Tr}\left(\hat{\Phi}^{q}\right)\right\rangle$$

という correlation function に対して、
全く同じ関係を与えている。
↓
上の２つの correlation function は、全く同じ性質を持つ。

これが Dijkgraaf-Vafa theory の本質である。

3.Our approach to the Dijkgraaf-Vafa Theory

●アイデア

○Dijkgraaf-Vafa theory

$$\left\{\begin{array}{l}4\text{次元}\\ \text{有限 Gauge群}\quad U(N)\\ \mathcal{N}=1\quad \text{SUSY}\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{F-term}} \left\{\begin{array}{l}0\text{次元}\\ U(\hat{N}\to\infty)\\ \text{Matrix model}\end{array}\right.$$

○Large-N twisted reduced model

$$\left\{\begin{array}{l}\text{有限次元}\\ \text{有限 Gauge群}\quad U(N)\\ \text{非可換空間}\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}0\text{次元}\\ U(\hat{N}\to\infty)\\ \text{Matrix model}\end{array}\right.$$

この２つの関係はとっても似ている !!

Dijkgraaf-Vafa theory は
twisted reduced model を Superspace 上に
拡張したものとして説明できるのではないか？

●非可換空間上での場の理論と Matrix Model

○非可換 x^μ 空間 $[x^\mu, x^\nu] = -iC^{\mu\nu}$

$\infty \times \infty$ hermite行列 $\hat{x}^\mu, \hat{p}_\mu$ を次のように定義する。

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = -iC^{\mu\nu}, \qquad \hat{x}^\mu = C^{\mu\nu}\hat{p}_\nu, \qquad [\hat{p}_\mu, \hat{x}^\nu] = i\delta_\mu^\nu$$

ここで、$C^{\mu\nu}$ は c-数。

すると、非可換空間での理論と
Matrix Model が次のように対応する。

$$O(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{O}(k) \to \hat{O} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tilde{O}(k)$$

$$\begin{aligned} O_1(x) * O_2(x) &\quad\leftrightarrow\quad \hat{O}_1 \hat{O}_2 \\ -i\partial_\mu O(x) &\quad\leftrightarrow\quad [\hat{p}_\mu, \hat{O}] \\ \int d^D x\ O(x) &\quad=\quad (2\pi)^{D/2} \sqrt{\det C}\ \mathrm{Tr}\ \hat{O} \end{aligned}$$

ここで $*$積を用いた

$$O_1(x) * O_2(x) = \exp\left(-\frac{i}{2} C^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) O_1(x) O_2(y)\bigg|_{y=x}$$

このように、非可換空間上の場の理論は
行列理論とみなせる
(twisted reduced model)

○非可換 θ 空間 $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \gamma^{\alpha\beta}$

$\hat{\theta}^\alpha, \hat{\pi}_\alpha$ を次のように定義する。

$$\{\hat{\theta}^\alpha, \hat{\theta}^\beta\} = \gamma^{\alpha\beta}, \qquad \hat{\theta}^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}\hat{\pi}_\beta, \qquad \{\hat{\pi}_\alpha, \hat{\theta}^\beta\} = \delta^\alpha_\beta$$

$SL(2, C)$ 変換を用いて、

$$(\gamma^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

とできる。このとき反交換関係は
次のように Pauli 行列で表現できる。

$$\hat{\theta}^1 = \sqrt{\gamma}\sigma^1, \quad \hat{\theta}^2 = \sqrt{\gamma}\sigma^2,$$
$$\hat{\theta}^1\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}^2\hat{\theta}^1 = 2i\gamma\sigma^3.$$

また、行列と関数の対応は先程と同様に

$$Q(\theta) = \int d^2\kappa\ e^{i\theta^\alpha\kappa_\alpha}\tilde{Q}(\kappa) = A + \theta^\alpha\psi_\alpha + \theta^2 F$$

に対して

$$\hat{Q} = \int d^2\kappa\ e^{i\hat{\theta}^\alpha\kappa_\alpha}\tilde{Q}(\kappa) = A + \hat{\theta}^\alpha\psi_\alpha - (\hat{\theta}^1\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}^2\hat{\theta}^1)F$$

すると積分は

$$F = \int d^2\theta Q(\theta) \mapsto F = \frac{i}{8\gamma}\mathrm{tr}\left(2\sigma^3\hat{Q}\right) \equiv \frac{i}{8\sqrt{\det\gamma}}\mathrm{Str}_\theta\left(\hat{Q}\right)$$

となる。$(\gamma = \sqrt{\det\gamma})$

他の演算は

$$Q_1 * Q_2(\theta) \to \hat{Q}_1\hat{Q}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}Q(\theta) \to [\hat{\pi}_\alpha, \hat{Q}\}$$

ただし、$*-$積は次のように定義する。

$$Q_1(\theta) * Q_2(\theta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta'^\beta}\right) Q_1(\theta)Q_2(\theta')\bigg|_{\theta=\theta'}$$

このように、非可換 Superspace 上での理論は、
Supermatrix Model へ map できる。

では、実際に 理論がどのようにつながるかを見る。

1. 元の場の理論を非可換空間上で考える。

$$S_{\rm NC} = \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}\ {\rm tr}\left(\bar{\Phi}^{(y^\dagger)} e^{\mathcal{V}} \Phi^{(y)} e^{-\mathcal{V}}\right)_* + \int d^4x d^2\theta\ 2\pi i\tau\ {\rm tr}\left(W^\alpha W_\alpha\right)_* + \int d^4x d^2\theta\ {\rm tr}\left(W(\Phi^{(y)})\right)_* + c.c.$$

2. Supermatrix Model へ Map する。

$$S_{\rm SRM} = \frac{i^2(2\pi)^2\sqrt{\det C}}{8^2\sqrt{\det\gamma}\sqrt{\det\gamma^*}}\ {\rm Str}_{x\otimes\theta\otimes\bar{\theta}}(\hat{\bar{\Phi}} e^{\hat{\mathcal{V}}} \hat{\Phi} e^{-\hat{\mathcal{V}}}) + \frac{i(2\pi)^2\sqrt{\det C}}{8\sqrt{\det\gamma}}\ \{2\pi i\tau\ {\rm Str}_{x\otimes\theta}(\hat{W}^{\alpha(y)}\hat{W}_\alpha^{(y)}) + {\rm Str}_{x\otimes\theta}(W(\hat{\Phi}^{(y)}))\} + c.c.$$

3. D-V と比較するために F-term に注目する。

Holomorphy により１項目は効かない。
すると２項目と３項目は結合しなくなる。

$$S_{\rm SMM} = \frac{i(2\pi)^2\sqrt{\det C}}{8\sqrt{\det\gamma}} {\rm Str}_{x\otimes\theta}(W(\hat{\Phi}))$$

F-term の Matter の振る舞いを調べるのには、
この部分にだけ注目すれば十分である。

まとめると

$$S_{\rm NC} = S_{\rm SRM} \overset{\text{F-term}}{=} S_{\rm SMM}$$

Dijkgraaf-Vafa theoryと比較するために、
非可換 パラメータ $C^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha\beta} \to 0$ とする。

しかし一般に、量子補正により

$$S_{\mathrm{FT}} \neq S_{\mathrm{NC}} \quad (C, \gamma \to 0)$$

である。
ただ、今回の場合、F-termに関しては

$$S_{\mathrm{FT}} \overset{\text{F-term}}{=} S_{\mathrm{NC}} \quad (C, \gamma \to 0)$$

が（間接的に）言える。

また、Supermatrix Modelに関しては
Correlation functoin が C, γ に依存しないことが言える。

よって

$$\begin{array}{ccc} S_{\mathrm{NC}} = S_{\mathrm{RM}} & \overset{\text{F-term}}{=} & S_{\mathrm{SMM}} \\ \downarrow & C, \gamma \to 0 & \downarrow \\ S_{\mathrm{FT}} & \overset{\text{F-term}}{=} & S_{\mathrm{SMM}} \end{array}$$

●ここまでの結論

Supermatrix Model

$$S_{\mathrm{SMM}} = \frac{i(2\pi)^2\sqrt{\det C}}{8\sqrt{\det\gamma}}\mathrm{Str}_{x\otimes\theta}(W(\hat{\Phi}))$$

は、$N = 1$ Gauge理論の F-termと等価である。

この Actionは、Dijkgraaf-Vafaの
Bosonic Matrix Model

$$S_{\mathrm{MM}} = \frac{\hat{N}}{g_m}\mathrm{Tr}(W(\hat{\Phi}))$$

と、Supermatrixか Bosonic Matrix かの違いしかない。

(ただし、もともと g_m は適当な係数だったので $\frac{i(2\pi)^2\sqrt{\det C}}{8\sqrt{\det\gamma}} = \frac{\hat{N}}{g_m}$ とする。)

実際、にSupermatrix modelで
適当な古典解から、展開して計算すると
Bosonic Matrix Modelの計算に帰着することができる。

$$S_{\mathrm{FT}} \overset{\text{F-term}}{=} S_{\mathrm{SMM}} = S_{\mathrm{MM}}$$

Dijkgraaf-Vafa theoryが twisted reduced modelで
説明できた!!

さらに $C,\gamma \to 0$ で先に述べた

$$\frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr} W^\alpha W_\alpha \Phi^k \right\rangle = \frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle \mathrm{Str}\hat{\Phi}^k \right\rangle$$

が直接言える。

●道具

1. 非可換場の理論の特殊な性質

$$\left(\frac{\hat{N}^2}{g_m^2}\delta^4(\hat{x}-x)\delta^2(\hat{\theta}-\theta)\right)^2 = 1$$

2. 小西アノマリー

$$\delta^4(x)\delta^2(\theta){\delta^i}_j\Big|_{(x,\theta)\to 0} \overset{\text{正則化}}{=} \frac{1}{64\pi^2}{(W^\alpha W_\alpha)^i}_j$$

●証明

$$\begin{aligned}
&\frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle \mathrm{Str}_{x\otimes\theta}(\hat{\Phi}^k)\right\rangle \\
&= \frac{\hat{N}}{g_m}\left\langle \mathrm{Str}_{x\otimes\theta}\left(\delta^4(\hat{x}-x)^2\delta^2(\hat{\theta}-\theta)^2\hat{\Phi}^k\right)\right\rangle \\
&= \int d^4x d^2\theta \ \left\langle \mathrm{tr}\left((\delta^4(x-x')\delta^2(\theta-\theta'))^2\Phi^k\right)\right\rangle_* \\
&= \int d^4x d^2\theta \ \left\langle \mathrm{tr}\left(\delta^4(x)\delta^2(\theta)\delta^4(0)\delta^2(0)\Phi^k\right)\right\rangle_* \\
&\xrightarrow{C,\gamma\mapsto 0} \int d^4x d^2\theta \ \left\langle \mathrm{tr}\left(\delta^4(x)\delta^2(\theta)\delta^4(0)\delta^2(0)\Phi^k\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{tr}\left(\delta^4(0)\delta^2(0)\Phi^k\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{64\pi^2}\left\langle \mathrm{tr}\left(W^\alpha W_\alpha \Phi^k\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

1. 非可換場の理論の特殊な性質の証明

$$\left(\frac{\hat{N}^2}{g_m^2}\delta^4(\hat{x}-x)\delta^2(\hat{\theta}-\theta)\right)^2 = 1$$

○$\delta(x)$について

$$\begin{aligned}
\delta^4(x) * \delta^4(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx} * \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{i(p+q)x - iCpq/2} \\
&= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{ilx - iC(l-q)q/2} \\
&= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{il(x-Cq/2)} e^{iCqq/2} \\
&= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta(x - Cq/2) \\
&= \frac{2^4}{(2\pi)^4 \det C}
\end{aligned}$$

○$\delta(\theta)$について

$$\begin{aligned}\delta^2(\theta) * \delta^2(\theta) &= (\hat{\theta}^1\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}^2\hat{\theta}^1)(\hat{\theta}^1\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}^2\hat{\theta}^1) \\ &= (2i\gamma\sigma^3)^2 \\ &= -4\det\gamma\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left(\delta^4(x)\delta^2(\theta)\right)^2 &= -\frac{64\det\gamma}{(2\pi)^4\det C} \\ &\equiv \left(\frac{g_m}{\hat{N}}\right)^2\end{aligned}$$

2. 小西アノマリーの証明

$$\frac{\delta\Phi^i(x,\theta)}{\delta\Phi^j(x',\theta')} = \delta^i_j \delta^4(x-x')\delta^2(\theta-\theta') = \delta^i_j \langle x,\theta|x',\theta'\rangle$$

なので、これを heat kernel

$$\Box_{cov} = \frac{1}{16}\bar{D}^2 e^{-V} D^2 e^V$$

を用いて正則化する。

$$\begin{aligned}
&\langle x,\theta|x,\theta\rangle \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int d^4k \int d^2\kappa \langle x,\theta|\exp(\tau\Box_{cov})|k,\kappa\rangle\langle k,\kappa|x,\theta\rangle \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 4\int d^2\kappa \ \left(\exp(\tau\Box_{cov})e^{ikx+i\theta\kappa}\right) e^{-ikx-i\theta\kappa}, \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 4\int d^2\kappa \exp\frac{\tau}{16}\left(-16k^2 - \kappa^2\bar{D}^2 - 8i\kappa W\right. \\
&\left. -4ik_\mu\kappa\sigma^\mu\bar{\theta}\bar{D}^2 + \bar{D}^2 e^{-V} D^2 e^V + 16k_\mu W\sigma^\mu\bar{\theta}\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 4\int d^2\kappa \ e^{-\tau k^2}\frac{\tau^2}{2}\left(-\frac{i}{2}\kappa W\right)^2 \\
&= \frac{1}{64\pi^2} W^\alpha W_\alpha
\end{aligned}$$

●結論

- Dijkgraaf-Vafa theoryはLarge-N reductionで説明できる。
- 非可換 Superspace のおかげで、Component fieldsを一つのSupermatrixにまとめることができた。

●問題点

- Bononic matrix modelに対応する Supermatrix modelの古典解が一部しか見つかっていない。
- $\gamma \neq 0$のときに Matrix modelとNon-commutative field theoryの関係で不明瞭な点が残っている。

●展望

- 一般にMatrix Modelを Super Matrix でもっとまとめられるか。
- Graviphoton Backgroundでの応用。