$\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論とインスタントン

伊藤克司 氏（東京工業大学）

2004 年 8 月 3 日, 4 日

目 次

[0] この講義録は 2004 年の三者若手夏の学校素粒子論パートにおける伊藤克司先生による講義をノートにまとめたものです。作成者は東京大学理学部物理学科素粒子論研究室の初田、木村、立川、滝、八木です。伊藤先生にはわかりやすい講義そのものだけでなく、その後も講義に使った資料をお貸し頂き、また原稿のチェック、補遺の執筆までしていただきました。ここに重ねて感謝したいと思います。

Introduction

今日から 2 日間、弦理論とそれに関係する講義ということですけれども、弦理論は特に出てきません。場の理論の立場からいろいろ攻めていくという立場で計算します。もちろんこの話題は全く場の理論を離れて、弦理論から構成することも出来ますが、ここでは省略します。始めに、場の理論でいろいろな物理量を計算したいわけですが、それには相関関数を計算します。

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle = \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS} \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n$$

ここで $\mathcal{O}$ というのは何か場の理論に現れる operator で、その期待値を計算します。これが場の理論で重要な量です。それは通常は Minkowski 空間で計算するわけですが、厳密に計算したい場合には、それを Euclid 空間に解析接続して、例えば Wick 回転などをして、 Euclid 空間で厳密に計算する。

$$\langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_{\mathrm{E}}} \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \qquad (x_0 = -ix_4)$$

lattice QCD とかではこういう計算を実直にするわけですが、通常我々がやることは普通の真空のまわりでの結合定数 g によるべき級数展開です。これは摂動論です。これを通常の真空ではなくて、ある非自明な真空のまわりで展開すると、その寄与は典型的には $\exp(-A/g^2)$ となりまして、これは g のべき級数では表せないということなので、これを非摂動効果といいます。普通の場の理論では非摂動効果というのは exp の寄与なので、g のべき級数と比較すると、非常に小さい形に見えます。ただし、今興味がある超対称性をもつ場の理論では、摂動論の効果が fermion と boson の cancellation によって抑制されますので、$1/g^2$ の exp といえども、その非摂動効果が顕著に見える、そういう特徴があります。その非摂動効果分に興味があります。しかもある種の超対称場の理論においては、その非摂動効果が厳密に計算できる場合があり、非常に面白い。それは超対称な場合ですけれども、強結合領域での物理を記述する。どういうものかというと、閉じ込めとか、くり込み群を行うと非自明な固定点が現れるというものです。後は双対性です。強結合領域での情報がわかるので、 duality 変換での定量的な検証が出来ます。またこれは弦理論の法則に非常に密接に関係しますので、弦理論における duality というものを定量的に検証出来ます。この話ではそういうことをやってみようということです。興味があるのは、instanton にまつわる非摂動効果の研究ということです。

ここでちょっと蘊蓄というか歴史を語りますと、歴史としては 70 年代、Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin の BPST instanton [1]、これは後で説明しますけれども、そういう話が出てくる。BPST instanton というのは topological charge というものが 1 だという事実で特徴付けられます。それが Yang-Mills 理論における非摂動効果を表します。具体的にそれを場の理論で path-integral で評価したのが 't Hooft の論文 [2] です。一方 topological charge k が小さい場合の解がいろいろあるのですが、それを勝手な k に一般化したのが Atiyah-Drinfeld-Hicthin-Manin という数学者達 [3] で、その後に物理の人がいろいろこれに関係する仕事をしている。これも後で紹介します。

80 年代になりますと、 supersymmetric なゲージ理論に対して、こういう instanton の計算が応用されました。後では専ら $\mathcal{N}=2$ を扱うので、$\mathcal{N}=1$ は出てきませんが、まず

$\mathcal{N}=1$ の supersymmetric gauge 理論における gluino と呼ばれる fermion の operator の期待値を議論しましょう。$\mathcal{N}=1$ の超対称 Yang-Mills 理論ではゲージ場とその superpartner λ_α がありまして、その期待値、その condensate $\langle \lambda_\alpha \lambda^\alpha \rangle$ が計算できる。これが $\mathcal{N}=1$ Yang-Mills 理論の QCD の scale parameter × 定数という形で評価される。これに対して、大まかに言って 2 つのアプローチが追求されまして、一つは Amati-Rossi-Veneziano による、対称性と factorization と呼ばれる性質を使って condensate を計算するものです [4]。これは strong coupling analysis と呼ばれます。これはここだけでしか出てきません。もう一つは Novikov-Shifman-Vainstein-Zakharov [5] とか Affleck-Dine-Seiberg [6] とか呼ばれる weak coupling analysis で、これは後で出てきます。これは constrained instanton とも呼ばれます。これらは同時期に開発されまして、これは後で出てくるので省略しますが、この 2 つのアプローチには定数の食い違いがあります。すなわち、 dynamical scale Λ を bare coupling constant と cutoff から定めると $\langle \lambda_\alpha \lambda^\alpha \rangle = C_{\mathrm{ARV,NSVZ}} \Lambda^3$ となるのですが

$$C_{\mathrm{ARV}} \neq C_{\mathrm{NSVZ}}$$

である。これは puzzle として当時問題になっていました。

90 年代に入りますと、特に $\mathcal{N}=2$ の超対称 Yang-Mills 理論で、instanton 効果というのは厳密に計算されてきました。$\mathcal{N}=2$ 超対称 Yang-Mills 理論の低エネルギー有効理論 prepotential というのも計算されました。そしてこれが厳密に計算できるというのが Seiberg-Witten による発見 [7] で、これをいろんな意味で検証しようとか、または厳密に解いたらどういう構造が見えるかということをいろいろな人がいろいろ調べました。1-instanton とか 2-instanton による計算というのは初期の段階で、 Finnell-Pouliot [8] また Ito-Sasakura [9]、 Dorey-Khoze-Mattis [10] などによってなされました。後、Seiberg-Witten に倣った厳密な計算というのはこれはもう無数に計算があります。それでいろんな厳密解を特徴付ける。もう一方で、高次の instanton をどうやって計算するかという試みもありました。これは後で説明します。その multi-instanton の measure が分かったことで、先ほどの puzzle が解けまして、実は weak coupling analysis (constrained instanton) の方が正しい結果を与えるということが分かりました。それが 2000 年の Hollowood-Khoze-Lee-Mattis [11] による論文です。最近は $\mathcal{N}=2$ の多重 instanton の計算をもとに、より進んだ理解が得られています。一つは、これは誰が初めに言ったのかよく分からないのですが、ここで紹介する Hollowood の localization の方法 [12] です。Hollowood の方法は少しまだ難点があるので、それをもう少し上手くしてちゃんと計算できるようにしたのが Nekrasov です [13]。それで multi-instanton の計算、最近は重力補正の計算というのも厳密にされています。さらにより最近では topological string とか large N duality とかを使って instanton に対する和というのも原理的に計算できます。これは先ほども言いましたがこの講義では省略します。今回はそういう見地から多重 instanton の計算を紹介したいと思っているのですが、 introduction はこれで終わりまして、ADHM construction というのを初めに説明したいと思います。それを超対称ゲージ理論に応用するということをやります。特に興味があるのは $\mathcal{N}=2$ の場合です。次に Seiberg-Witten theory について説明しまして、その結果を踏まえて、最近の多重 instanton の計算、局所化を構成する方法について説明します。初めに言いましたようにこの講義では弦理論は登場しません。た

ぶん時間がないということが生じると思いますので、どれかのトピックは消滅してしまうかもしれません。それは状況によって考えます。

1 ADHM Construction

まず初めに spinor という概念が出てきますので、それの計算になれるために記号の準備とかも含めて少し練習していきたいと思います。次に、BPST instanton というものについて説明します。これは instanton の topological charge k が 1 の解です。

たぶんここまでは M1 でも理解できるような部分です。ここから少し話が飛んでしまいます。ADHM construction は k が一般の場合です。次に、この instanton の background の周りで path integral をどう評価するかということをやります。次には super 化するという話をします。

1.1 Notation

初めに記号なんですが、基本的にはいわゆる Wess-Bagger の notation [14] というものから出発します:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{1.1.1}$$

metric は $(-,+,+,+)$ です。Gamma 行列は 2×2 の Dirac 行列の pair です:

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}_{\mu} \\ \sigma_{\mu} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

各 Dirac 行列は

$$\sigma^{\mu} = (-1, \tau_1, \tau_2, \tau_3), \quad \bar{\sigma}^{\mu} = (-1, -\tau_1, -\tau_2, -\tau_3) \tag{1.1.3}$$

と表せます。τ というのは普通の Pauli 行列です。これは Minkowski の話です。

いま Euclid 空間にして考えます。そうすると x^0 を $-ix_4$ とします。空間成分が 4 つあるような座標に置き換えます：

$$x^0 \to -ix_4, \quad x_4 = ix^0, \tag{1.1.4}$$

$$x_n = (x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{1.1.5}$$

x_4 は ix^0 です。これが 4-vector です。metric は $(+,+,+,+)$ になっているので添え字の上げ下げに関してはもう気にしません。

それに対して Dirac 行列はどうなるかというと、普通の意味で Wick 回転をして最後に i という factor を付け加えて Euclid 空間での Dirac 行列を定義します。

$$\sigma_n = \sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} \equiv (i\vec{\tau}, 1), \quad \bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} \equiv (-i\vec{\tau}, 1). \tag{1.1.6}$$

こうしておくとあとで便利であるとわかります。これが Euclid 空間での Dirac 行列です。

Dirac 行列を足で表すときに spinor の index を導入します。これは Wess-Bagger と同じ α と $\dot{\alpha}$ という、2 つの足をとる index を導入します。spinor の添え字の上げ下げに関しては ε という tensor を用います。

$$\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}, \quad \psi^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}}. \tag{1.1.7}$$

ε は反対称 tensor で

$$\varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1, \quad \varepsilon^{21} = \varepsilon_{12} = -1, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{1.1.8}$$

例えば $\varepsilon^{\alpha\beta}$ と $\varepsilon_{\beta\gamma}$ を掛けて β について和を取ると δ^{α}_{γ} になります。

σ と $\bar{\sigma}$ の関係について、後ほど使う公式をまとめておきますと、

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}_{n} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{n\beta\dot{\beta}}, \\ \sigma_{n\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\dot{\beta}\beta}_{n} &= 2\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}, \\ \mathrm{tr}\,\sigma_n\bar{\sigma}_m &= 2\delta_{nm}. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

これは i がかかっているので Wess-Bagger の公式集と符号が異なっています。

spinor ですべてを表現したいということなので、4-vector のほうもすべて spinor で表現します。それは Dirac 行列を使って

$$x_{\alpha\dot{\alpha}} = x_n\sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} \tag{1.1.10}$$

と展開する。x_n は 4 個あって $\alpha, \dot{\alpha}$ の組もこれで 4 個ありますので対応します。

このようにして表した数を数学のほうでは四元数といいます。ADHM というのは四元数を使って instanton 解を構成したものですが、これは bispinor を使って構成するということと同じです。Pauli 行列の表式を使って計算してみますと

$$x_{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} ix_3 + x_4 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & -ix_3 + x_4 \end{pmatrix}, \tag{1.1.11}$$

このようになります。

$ix_1 + x_2$ の pair と $ix_3 + x_4$ の pair が出ますので、これを一つの複素数と思いまして、z_1, z_2 と置きましょう。

$$z_1 = x_2 + ix_1, \quad z_2 = x_4 + ix_3. \tag{1.1.12}$$

そうすると、

$$x_{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} z_2 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \tag{1.1.13}$$

となります。これは σ_n を使って構成した四元数なんですが $\bar{\sigma}_n$ を使って構成することもできます。そうして構成したものを

$$\bar{x}^{\dot{\alpha}\alpha} = x_n\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}_{n} = \begin{pmatrix} -ix_3 + x_4 & -ix_1 - x_2 \\ -ix_1 + x_2 & ix_3 + x_4 \end{pmatrix} \tag{1.1.14}$$

と置きます。先程のように複素数を用いて具体的に値を代入してみますと、

$$\bar{x}^{\dot{\alpha}\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & -z_1 \\ \bar{z}_1 & z_2 \end{pmatrix}, \tag{1.1.15}$$

こういう感じになります。なんでこんなことをやったかというと、後で ADHM 構成法の中で必要になってくるときが何回か出てくるからです。

もう少し spinor でいろいろ議論します。Dirac 行列を使って Lorentz 変換の生成子を作っていきます。それは具体的には

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{4}(\sigma_m\bar{\sigma}_n - \sigma_n\bar{\sigma}_m), \tag{1.1.16}$$

これは普通の spinor の部分に作用する Lorentz 生成子です。dotted spinor のほうに作用するのは

$$\bar{\sigma}_{mn} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_m\sigma_n - \bar{\sigma}_n\sigma_m) \tag{1.1.17}$$

で、これは、 bar 付きのものと付いてないのものを逆転したものです。これは Lorentz 群です。いま Euclidean なので Euclid の回転を生成する元になっています。

σ_{mn} と $\bar{\sigma}_{mn}$ はそれぞれ self-dual、anti-self-dual 条件を満たします。これはどういう条件かというと、いま 4 次元なので 4 階の完全反対称 tensor があって、それを用いて

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{mnkl}\sigma_{kl}. \tag{1.1.18}$$

これが self-dual という条件です。これは instanton のところでも同様な式が出てきます。anti-self-dual はこれを minus にしたものです。

$$\bar{\sigma}_{mn} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{mnkl}\bar{\sigma}_{kl}. \tag{1.1.19}$$

ε は 4 階反対称 tensor で ε_{1234} は 1 です。そして完全反対称です。

$$\varepsilon_{1234} = 1 \tag{1.1.20}$$

例えば、 $m = 1$、$n = 2$ の場合にこの関係式を確かめてみましょう。

$$\sigma_{12} = \frac{1}{4}(\sigma_1\bar{\sigma}_2 - \sigma_2\bar{\sigma}_1) = \frac{1}{4}(\tau_1\tau_2 - \tau_2\tau_1) = \frac{i}{2}\tau_3. \tag{1.1.21}$$

σ_1 は $i\tau_1$ 掛ける 1 番目の Pauli 行列、$\bar{\sigma}_2$ は $-i$ 掛ける 2 番目の Pauli 行列ですので、i と $-i$ が cancel して、あとは Pauli 行列の交換関係を使うと $i\tau_3/2$ となります。σ_{34} も同様に計算できます。

$$\sigma_{34} = \frac{1}{4}(\sigma_3\bar{\sigma}_4 - \sigma_4\bar{\sigma}_3) = \frac{1}{4}(i\tau_3 1 - 1(-i\tau_3)) = \frac{i}{2}\tau_3 \tag{1.1.22}$$

$\bar{\sigma}_4$ も σ_4 も単位行列です。$\sigma_3 = i\tau_3$ なのでこれは $i\tau_3/2$ です。これは、 self-dual の条件において ε の添え字を $1, 2, 3, 4$ としたものに対応します。σ_{mn} は m と n に対して反対称なので k, l を 3 と 4 としたものと 4 と 3 としたものを 2 つ考え合わせると、この 1/2 が消えて

$\sigma_{12} = \sigma_{34}$ となります。同様に bar のほうも具体的に計算してやりますと、anti-self-dual 条件を満たすということがわかります。具体的には

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_1\sigma_2 - \bar{\sigma}_2\sigma_1) = \frac{i}{2}\tau_3\,, \\ \bar{\sigma}_{34} &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_3\sigma_4 - \bar{\sigma}_4\sigma_3) = -\frac{i}{2}\tau_3\end{aligned} \tag{1.1.23}$$

となりますから、

$$\bar{\sigma}_{12} = -\bar{\sigma}_{34} \tag{1.1.24}$$

となります。これは ADHM 構成において非常に基本的な関係式です。

通常の instanton の文献では 't Hooft の eta symbol というのを使います。これについて説明したいと思います。ここで定義した σ_{nm} とか $\bar{\sigma}_{nm}$ というのは traceless になります。これは元々の定義式から出発しますと、

$$\operatorname{tr}\sigma_{mn} = \operatorname{tr}\frac{1}{4}(\sigma_m\bar{\sigma}_n - \sigma_n\bar{\sigma}_m) = \frac{1}{4}(2\delta_{mn} - 2\delta_{nm}) = 0, \tag{1.1.25}$$

同様に

$$\operatorname{tr}\bar{\sigma}_{mn} = 0 \tag{1.1.26}$$

となり、確かに traceless です。2 行 2 列の traceless な行列は Pauli 行列で展開できます。すなわち

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{2}i\eta^c_{mn}\tau^c \tag{1.1.27}$$

となる。その係数 η^c_{mn} を 't Hooft の eta symbol といいます。bar の方も同様に Pauli 行列で展開できて

$$\bar{\sigma}_{mn} = \frac{1}{2}i\bar{\eta}^c_{mn}\tau^c. \tag{1.1.28}$$

これは instanton の文献でよく使われる式です。これだけが大体 spinor に関する基礎知識で、これから instanton の解をどのように構成するのかということを議論していきます。

1.2 Yang-Mills Theory

これから Yang-Mills 理論を考えたいと思います。初めに instanton の具体例を考えたいので BPST instanton を考えます。

Yang-Mills 理論を考えまして、gauge 群は BPST の場合は $SU(2)$ なのですが、今回は $SU(N)$ について考えます。gauge 場は $N \times N$ の行列で表します。これは $SU(N)$ 行列の Lie 環です。物理の感覚ではこれは Hermite 行列で表されますが、準備するに当たって参照にした文献は anti-Hermite だったので anti-Hermite とします。単に i がかかってるか、かかってないかの違いです。その文献についてはあとで紹介します。Hermite 共役をとると minus になります。すなわち

$$A^\dagger_m = -A_m \tag{1.2.1}$$

です。例えば、 $SU(2)$ の generator は $\frac{\tau^a}{2}$ で Pauli 行列ですがこれに i を掛けます。τ は Hermite 行列なので i を掛けると anti-Hermite 行列になります。こういう条件を満たす gauge 場を導入します。gauge 場の作用は

$$S[A] = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{tr}_N F_{mn}F_{mn} - \frac{i\theta g^2}{16\pi^2}\int d^4x\mathrm{tr}_N F_{mn} * F_{mn} \tag{1.2.2}$$

となります。第 1 項は普通に馴染みのある項なのですが、第 2 項は theta term といわれる項で θ は定数です。ここで field strength の定義なんですが、それは

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m + g[A_m, A_n], \tag{1.2.3}$$

これで定義します。Hermite にすると いろいろなところに i が出てくるので、こういうのをさけるのに anti-Hermite に定義しました。

star $*$ は掛け算ではなくて F に作用する Hodge dual という operator で、tilde とかで書いたりもしますが、4 階の反対称 tensor をつかって

$$* F_{mn} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{mnkl}F_{kl} \tag{1.2.4}$$

で定義されるものです。

gauge 場の運動方程式の解の特別なものとして 2 種類あります。field strength F_{mn} が self-dual なものと anti-self-dual なものです。それぞれに応じて instanton とか anti-instanton といいます。

$$F_{mn} = *F_{mn}. \tag{1.2.5}$$

これが instanton の解です。符号を minus にしたものが anti-instanton と呼ばれるものです。

$$F_{mn} = - * F_{mn}. \tag{1.2.6}$$

なんで instanton という言葉を使うかは、具体的な解の構造を見ればよくわかると思います。この instanton が満たす性質を少し議論していきたいと思います。解を探す議論もします。

出発点となるものは初めに

$$\int d^4x\,\mathrm{tr}_N(F_{mn} \pm *F_{mn})^2 \leq 0. \tag{1.2.7}$$

こういう不等式を考えます。F と $*F$ の plus minus の線型結合をとってその 2 乗を考えます。その trace を考えますと、いま生成子を anti-Hermitian にとっていますのでこういう不等式を満たします。等号が成り立つのは時空の各点で F_{mn} が instanton の方程式や anti-instanton の方程式を満たす場合です。これを展開してみましょう。

$$\begin{aligned}&\int d^4x\,\mathrm{tr}_N(F_{mn} \pm *F_{mn})^2 \\ &\qquad = \int d^4x\,\mathrm{tr}_N(F_{mn}F_{mn} \pm 2F_{mn} * F_{mn} + *F_{mn} * F_{mn})\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

こういうふうになります。第 3 番目の項、 $*F*F$ という項は反対称 tensor の情報を使いますと実は第 1 項と同じ値になります。

$$*F_{mn}*F_{mn} = F_{mn}F_{mn}. \tag{1.2.9}$$

従ってこの不等式は

$$\int d^4x\,\mathrm{tr}_N F_{mn}F_{mn} \leq \mp \int d^4x\,\mathrm{tr}_N F_{mn}*F_{mn} \tag{1.2.10}$$

のようになります。

$F*F$ という項は実は位相不変量であるということがわかります。位相不変量というのは積分した値がある整数に比例するものです。具体的には、

$$k = -\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}_N F_{mn}*F_{mn} \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.2.11}$$

この F と $*F$ の trace を積分した量にこういう係数を掛けると k という整数になります。これは具体的に F を評価して無限遠の積分に直してみるとわかりますが、これを説明するとまた長くなりますので、認めていただきたいと思います。

そうしますと、不等式が k を使って簡単に書き換えられます。実際の action はこの F_{mn} の積に $-\frac{1}{2}$ が掛かっていることになりますので、これに $-\frac{1}{2}$ を掛けるとこの不等号は逆転して

$$-\frac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{tr}_N F_{mn}F_{mn} \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|k| \tag{1.2.12}$$

となります。k に応じて、不等式の右辺は一方が正、他方が負になりますが、負の場合は明らかに左辺のほうが大きいので正のほうだけ考えると、絶対値をとってくれれば正になりますので、k は $|k|$ に置き換えられます。

instanton または anti-instanton 解というのは作用を極小にする解であることがわかります。その具体的な値は、

$$S[A] = \frac{8\pi^2}{g^2}|k| + ik\theta = -2\pi ik\tau\,, \quad k>0. \tag{1.2.13}$$

第 1 項は $|k|$ になりまして第 2 項は $F*F$ に絡む量なのでこれも k に依りまして、$ik\theta$ という形になります。k が正の場合は絶対値の符号がとれまして複素数 τ を用いて、$2\pi ik\tau$ になるとわかります。τ は今定義しますが、Pauli 行列の τ とは違います。k が負の場合は

$$S[A] = \frac{8\pi^2}{g^2}|k| + ik\theta = 2\pi ik\bar{\tau}\,, \quad k<0 \tag{1.2.14}$$

です。さて τ というのは

$$\tau = \frac{4\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi} \tag{1.2.15}$$

という combination です。こういう combination はいろいろなところでよく現れましてたとえば Seiberg-Witten ではある Riemann 面上の周期行列に関係する量として現れます。だから、この coupling と θ との combination は非常に重要な量です。

instanton は作用を極小にするということなのですが、これはどういうことかというと、path integral の定義のときにこの極小の周りで 1 次、 2 次という項が展開すると出てくるんですけれども、その 1 次の項が消えるということです。だから周りを展開すると次に効いてくる項は場の fluctuation に関して 2 次の項で Gauss 積分ということです。

最後に、 (anti-) self-dual の場合は運動方程式

$$\pm D_m * F_{mn} = 0 \tag{1.2.16}$$

が

$$\pm D_m F_{mn} = 0 \tag{1.2.17}$$

となって自動的に満たされることを見ます。 field strength を微分するときは共変微分

$$D_m = \partial_m + gA_m \tag{1.2.18}$$

を使います。今の場合は anti-Hermite という形式なので、第 2 項に i がこなくなります。self-dual 、 anti-self-dual という条件を使いますと

$$D_m F_{mn} = \pm D_m * F_{mn} = 0 \tag{1.2.19}$$

となります。 $D_m * F_{mn} = 0$ は恒等的に成り立つ式で、Bianchi identity と呼ばれています。例えば Abelian の場合だと field strength の非線型項がないので、field strength の値を代入してみますと、

$$\partial_m \varepsilon_{mnkl}(\partial_k A_l - \partial_l A_k) \tag{1.2.20}$$

となって、ε との contraction をとると完全反対称性によって消えてしまいまして zero になります。単に m と n の完全反対称性をつかうとこれは trivial です。non-Abelian の場合も同様にできますので考えてみてください。

ここでの instanton 解の重要な性質として作用を極小にするという性質と運動方程式を満たす。これは super の場合も応用して使える条件ですので記憶に留めておいてください。

1.3 BPST Instanton

次に、こういう instanton とか anti-instanton とかいうものがあったときに、具体的にどのような解がそういう条件を満たすのか調べます。それを初めて具体的に構成したのは Belavin 、 Polyakov 、 Schwartz 、 Tyupkin という人たちです [1]。これは初めは instanton と呼ばれておらず、pseudo-particle とかいう風に論文の title になっています。彼らは gauge 群としては一番簡単な $SU(2)$ を考えました。

少し天下り的ですが初めに解を書いてみます。いま gauge 群は $SU(2)$ なので、gauge 場 A_n は 2×2 の traceless の行列です。従って、何か 2×2 の traceless の行列を使って書けるわけですが、それとして先程出てきた Lorentz 生成子 σ_{mn} をとってくる。

$$A_n = g^{-1} \frac{2(x-X)_m \sigma_{mn}}{(x-X)^2 + \rho^2}. \tag{1.3.1}$$

これが instanton 解です。先程の 't Hooft の eta symbol を用いて Lorentz 生成子を展開しますと、$SU(2)$ の生成子 τ^a を使って

$$A_n = \frac{2}{g}\frac{(x-X)_m\eta^a_{mn}}{(x-X)^2+\rho^2}\frac{i\tau^a}{2} \tag{1.3.2}$$

と表されます。この instanton 解は、さっき出てきました topological charge k という定数が 1 というものに対応しています。

ちょっと感じをつかむために計算してみます。field strength を計算して それを具体的に trace をとって空間積分してやります。そうすると k の値がわかります。この場合には F_{mn} が self-dual という条件を満たすことを確かめないといけないので、いずれにしても field strength を計算する必要があります。微分する項と非線型の項がありますのでそれを計算してみましょう。微分すると分母を微分する項と分子の第 1 項を微分する項があります。overall に $\frac{2}{g}$ という factor が出て

$$\partial_m A_n = \frac{2}{g}\left[\frac{\sigma_{mn}}{(x-X)^2+\rho^2} - \frac{(x-X)_p\sigma_{pn}2(x-X)_m}{((x-X)^2+\rho^2)^2}\right] \tag{1.3.3}$$

となります。あと m と n を反対にしたものも使います。あと必要なのは gA_mA_n で

$$gA_mA_n \;=\; \frac{4}{g}\left[\frac{(x-X)_p(x-X)_q\sigma_{pm}\sigma_{qn}}{((x-X)^2+\rho^2)^2}\right], \tag{1.3.4}$$

こうなります。

field strength はそれぞれを反対称化して

$$\begin{aligned} F_{mn} &= \partial_m A_n - \partial_n A_m + g[A_m, A_n] \\ &= \frac{4}{g}\left[\frac{\sigma_{mn}}{(x-X)^2+\rho^2} - \frac{(x-X)_p(x-X)_m\sigma_{pn} - (x-X)_p(x-X)_n\sigma_{pm}}{((x-X)^2+\rho^2)^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-X)_p(x-X)_q[\sigma_{pm},\sigma_{qn}]}{((x-X)^2+\rho^2)^2}\right]. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

σ_{pm} と σ_{qn} は Lorentz 生成子なので Lorentz 代数の交換関係で表します。4 つの項があるんですが、

$$[\sigma_{pm},\sigma_{qn}] = -\delta_{pq}\sigma_{mn} + \delta_{mq}\sigma_{pn} + \delta_{pn}\sigma_{mq} - \delta_{mn}\sigma_{pq}, \tag{1.3.6}$$

こういう交換関係を出すことがわかります。これに $(x-X)_p$ とか $(x-X)_q$ を掛けると、例えば第 4 項は σ が p, q に関して反対称なので消えてしまいます。第 2 項が丁度先程出した field strength の式で出てくる項と cancel して、第 3 項は m と n を逆にしたものと cancel します。だからこれらの項は消えます。残りの項は第 1 項だけなのですがこれは残ります。

最終的な field strength の形を書くと

$$\begin{aligned} F_{mn} &= \frac{4}{g}\left[\frac{1}{(x-X)^2+\rho^2} - \frac{(x-X)^2}{((x-X)^2+\rho^2)^2}\right]\sigma_{mn} \\ &= g^{-1}\frac{4\rho^2\sigma_{mn}}{((x-X)^2+\rho^2)^2} \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

となります。この F_{mn} というのは σ_{mn} に比例します。σ_{mn} というのは初めに述べましたとおり self-dual というものだったのでそれから F_{mn} は self-dual という条件に従います。

次に instanton charge がいくつであるかは

$$k=-\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\,F_{mn}\widetilde{F}_{mn}, \tag{1.3.8}$$

こういう元々の k の定義式に代入して計算します。いま F が self-dual であることがわかっているので $*F_{mn}$ は F_{mn} に等しいです。だからこれを 2 乗して計算すればいいです。というわけで

$$\begin{aligned} k &= -\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\,F_{mn}F_{mn} \\ &= -\frac{1}{\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}\,\sigma_{mn}\sigma_{mn}\frac{\rho^4}{((x-X)^2+\rho^2)^4}. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

そうすると σ_{mn} が出てきまして、その Pauli 行列の τ という空間で trace をとります。必要な式は

$$\mathrm{tr}\,\sigma_{mn}\sigma_{mn}=-6 \tag{1.3.10}$$

ですが、これは Dirac 行列の定義式を組み立てて使ってやると計算できます。だから

$$k=-\frac{1}{\pi^2}(-6)\int d^4x\frac{\rho^4}{((x-X)^2+\rho^2)^4}, \tag{1.3.11}$$

こういう空間積分になります。

これは 4 次元空間の極座標に直して計算すると

$$\begin{aligned} \int d^4x\frac{\rho^4}{((x-X)^2+\rho^2)^4} &= \int drr^3d\Omega_3\frac{\rho^4}{(r^2+\rho^2)^4} \\ &= \mathrm{Vol}(S^3)\frac{\rho^4}{2}\int_0^\infty dt\frac{t}{(t+\rho^2)^4}, \quad (r^2=t) \\ &= \mathrm{Vol}(S^3)\,\frac{\rho^4}{2}\int_0^\infty dt\left(\frac{1}{(t+\rho^2)^3}-\frac{\rho^2}{(t+\rho^2)^4}\right) \\ &= \mathrm{Vol}(S^3)\,\frac{\rho^4}{2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(t+\rho^2)^2}\Big|_0^\infty+\frac{1}{3}\frac{\rho^2}{(t+\rho^2)^3}\Big|_0^\infty\right\} \\ &= \mathrm{Vol}(S^3)\,\frac{\rho^4}{2}\left\{\frac{1}{2\rho^4}-\frac{1}{3\rho^4}\right\}=\frac{\mathrm{Vol}(S^3)}{12} \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

となります。角度方向から 3 次元球面の体積がでてきます。あとは動径方向の積分です。各自やってみて下さい。$\mathrm{Vol}(S^3)$ というのは $2\pi^2$ でそれを 12 で割ります。

それを上の式に代入すると

$$k=-\frac{1}{\pi^2}(-6)\frac{\pi^2}{6}=1. \tag{1.3.13}$$

この値は 1 である。なので BPST instanton というのは instanton 数 1 の解を与えています。

これは物理的にも重要で大事な解なのですが、instanton 解をこのままで使うといろいろと technical な面で不都合が生じます。その一つの理由として無限遠での収束性があります。これは $x \to \infty$ ではだいたい $\frac{1}{x}$ で減衰していきます。そうすると何か計算しようと思った場合に $\frac{1}{x}$ だと収束性を吟味しなければならないということが生じるので、あまり BPST 解をそのまま使うのではなくて、それを gauge 変換してそれと gauge 同値な解を使います。それを singular gauge といいます。

$$A_n = g^{-1} \frac{2\rho^2 (x-X)_m \bar{\sigma}_{mn}}{(x-X)^2 \left((x-X)^2 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.3.14}$$

も instanton 解となります。具体的には gauge 変換として

$$U(x) = \frac{\bar{\sigma}_m (x-X)_m}{|x-X|} \tag{1.3.15}$$

という gauge 変換をとります。それを用いて gauge 変換しますと上の解になります。これは $x \to \infty$ では $\frac{1}{x^3}$ で落ちます。そのように振舞って収束性がいいので、具体的なあとの path integral の計算ではこの singular gauge を使って計算します。

あと、 instanton というのは なんでこういう名前がついたかというと、

$$F_{mn} \propto \frac{1}{((x-X)^2 + \rho^2)^2} \tag{1.3.16}$$

field strength の形を書くとだいたいこういう形になります。この解を Euclid 空間の数で表してみますと、これは時空上の一点 X を中心として、そこから ρ ぐらいのところに局在している解です。これは時空なので空間的局在ではありません。時空である一瞬に現れてまた消えてしまう。そういう意味でこれを instanton といいます。この X というのは instanton の位置を表す量で、ρ というのは scale 、 instanton の size を表します。

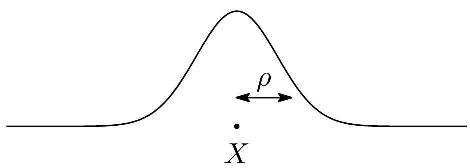

図 1: instanton

これで具体的な instanton の解のイメージと $k=1$ の場合の instanton の解がわかったと思いますので、一般の instanton number が k の解に進みたいと思います。それを特徴付ける parameter は X とか ρ というものは一般の場合にどのようなものになるかということを次の section で議論したいと思いますが、時間的に区切りが良いのでちょっと休憩にします。

1.4 ADHM Construction

続けましょう。もう時間がなくなってきたのでプロジェクターを使います。

始めのところで説明したのは instanton 数が 1 の BPST instanton というものです。これを色々説明していたわけです。一般の instanton 数に対応する解を構成したい。それは始めの歴史を話すところでいいましたけれども Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin 、これはわずか 3 ページの論文です [3]。 良いレビューとして Dorey-Hollowood-Khoze-Mattis[15] という supersymmetric なインスタントンまで扱ったもの [3] がありまして、ここでの notation はそれにのっとっています。この review は 200 ページ位になります。それを説明したいわけです。

1.4.1 構成法

ちょっと天下り的になってしまうのですが ADHM 構成はある行列から出発します:

$$\Delta_{\lambda i\dot{\alpha}} = a_{\lambda i\dot{\alpha}} + b^{\alpha}_{\lambda i} x_{\alpha\dot{\alpha}}, \qquad \lambda = 1, ..., N+2k\,; \quad i = 1, ..., k. \tag{1.4.1}$$

$$\Delta = {}^{N+2k}\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}}^{2k}\right. . \tag{1.4.2}$$

Δ は正方行列ではなくて size が非対称な行列で、複素行列です。それは x の関数で、 x の 1 次に依っています。ここに出てきた記号は四元数の表示ですけれども、始めのところで説明したものです。λ というのは 1 から $N+2k$ まで走ります。i は instanton の index と呼ばれて 1 から k まで走ります。α や $\dot{\alpha}$ は 1 か 2 です。

Δ の Hermite 共役を考えます。それは $2k \times (N+2k)$ になります。

$$\overline{\Delta}^{\dot{\alpha}\lambda}_{i} = \overline{a}^{\dot{\alpha}\lambda}_{i} + \bar{x}^{\dot{\alpha}\alpha} \overline{b}^{\lambda}_{i\alpha}, \qquad \lambda = 1, ..., N+2k\,; \quad i = 1, ..., k. \tag{1.4.3}$$

$$\overline{\Delta} = {}^{2k}\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \end{pmatrix}}^{N+2k}\right. . \tag{1.4.4}$$

こういった行列です。a とか b とかいうのは定数です。これは 非対称な行列で、大きいほうは $(N+2k)$ で N は $SU(N)$ の N です。k は instanton 数です。今、 k は正とします。

Δ の各列は $(N+2k)$-vector です。その数は $2k$ しかないのでこれは $(N+2k)$ という vector 空間の基底としては足りないです。このほかに base とは直交するある N 個の基底 vector があります。これらを合わせると、$(N+2k)$ の vector 空間の基底になります。それを言い換えますと、この空間を特徴付けるもの、補空間の特徴ですが、これは $\overline{\Delta}$ によって消される空間でそれは N 個あります。その基底を集めて U という $(N+2k) \times N$ の行列を作ります。その補空間ですので $\overline{\Delta}$ と積をとると消えます。

$$\overline{\Delta} U = 0, \quad \overline{\Delta}^{\dot{\alpha}\lambda}_{i} U_{\lambda u} = 0. \tag{1.4.5}$$

その conjugate をとると左から U の Hermite 共役を掛けると消えるということになります。

$$\overline{U} \Delta = 0, \quad \overline{U}^{\lambda}_{u} \Delta_{\lambda i\dot{\alpha}} = 0. \tag{1.4.6}$$

この基底はある直交性を持っている vector にとることにします。

$$\overline{U}^{\lambda}_{u} U_{\lambda v} = \delta_{uv}. \tag{1.4.7}$$

この U というものを用いて一般の instanton の solution というのは構成できます。それを次のようにしてとります。

$$(A_n)_{uv} = g^{-1}\overline{U}^{\lambda}_{u}\partial_n U_{\lambda v}, \qquad u, v = 1, ..., N. \tag{1.4.8}$$

ここで u と v というのは $SU(N)$ の gauge の足です。1 から N まで走ります。$(N+2k)$ の足 λ について和をとってあります。もし k が zero だったら U は $N \times N$ の行列なので これは単に pure gauge を表します。しかし k が non-zero のときはこれは non-trivial な結果になります。それを調べたいのですが、更に $\overline{\Delta}$ と Δ で書ける次のような条件を課すことにします:

$$\overline{\Delta}^{\dot{\alpha}\lambda}_{i}\Delta_{\lambda j\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}(f^{-1})_{ij}. \tag{1.4.9}$$

もうすこし説明すると、まず $\overline{\Delta}$ と Δ を掛けると $2k \times 2k$ の size です:

$$2k\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} & \overline{\Delta} & \end{pmatrix}}^{N+2k}\right. \quad 2k+N\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} \\ \Delta \\ \end{pmatrix}}^{2k}\right. \quad = \quad 2k\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}}^{2k}\right.. \tag{1.4.10}$$

その行列のうち spinor の部分に関しては行列が対角であり、その他の instanton index に関してはある invertible な行列 f で表せるという条件をおきます。しかも、 f は x の関数で $k \times k$ の Hermite 行列である、という新たな要請をします。だから、 Δ の列 vector は完全な直交性ではなくて、f という行列で曲げられた内積を持ちます。

　ということで、この Δ の列と U の列をあわせると $(N+2k)$ 次元の vector 空間の完全な base が表されます。この完全性条件は U という行列と Δ の行列について書かれた

$$\delta^{\mu}_{\lambda} = U_{\lambda u}\overline{U}^{u\mu} + \Delta_{\lambda i\dot{\alpha}} f_{ij}\overline{\Delta}^{\dot{\alpha}\mu}_{j} \tag{1.4.11}$$

という条件になります。従って、任意の vector を (U の基底ベクトルで張られるベクトル空間への) 射影演算子 P が

$$P = U\overline{U} = 1 - \Delta f \overline{\Delta} \tag{1.4.12}$$

と定義できます。これは U の orthonormal condition によって $P^2 = P$ となります。具体的に成分で書くと次のようになります:

$$P^{\mu}_{\lambda} \equiv U_{\lambda u}\overline{U}^{u\mu} = \delta^{\mu}_{\lambda} - \Delta_{\lambda i\dot{\alpha}} f_{ij}\overline{\Delta}^{\dot{\alpha}\mu}_{j}. \tag{1.4.13}$$

こういう直交演算子を使えばまずいえることはここで構成した field strength 、先程の A の定義から出発した field strength が self-dual であることがこの表式から従います。計算

を具体的にすると次のようになります。

$$\begin{aligned}
F_{mn} &= \partial_m A_n - \partial_n A_m + [A_m, A_n] \\
&= \partial_m(\overline{U}\partial_n U) - \partial_n(\overline{U}\partial_m U) + \overline{U}\partial_m U\overline{U}\partial_n U - \overline{U}\partial_n U\overline{U}\partial_m U \\
&= \partial_m\overline{U}\partial_n U - \partial_n\overline{U}\partial_m U - \partial_m\overline{U}U\overline{U}\partial_n U + \partial_n\overline{U}U\overline{U}\partial_m U \\
&= \partial_m\overline{U}(1 - U\overline{U})\partial_n U - \partial_n\overline{U}(1 - U\overline{U})\partial_m U \\
&= \partial_m\overline{U}\Delta f\overline{\Delta}\partial_n U - \partial_n\overline{U}\Delta f\overline{\Delta}\partial_m U \\
&= \overline{U}(\partial_m\Delta)f(\partial_n\overline{\Delta})U - \overline{U}(\partial_n\Delta)f(\partial_m\overline{\Delta})U \\
&= \overline{U}b\sigma_m f\bar{\sigma}_n\bar{b}U - \overline{U}b\sigma_n f\bar{\sigma}_m\bar{b}U \\
&= 4\overline{U}b\sigma_{mn}f\bar{b}U. \qquad (1.4.14)
\end{aligned}$$

ここに長い式を書いてしまっているので、黒板で説明します。出発点の定義は、まず A は

$$A_m = g^{-1}\overline{U}\partial_m U \qquad (1.4.15)$$

という式になります。これを field strength の定義の式に代入します。ここで結合定数 g は面倒くさいので省きました。それが (1.4.14) の二番目の式です。それで

$$\begin{aligned}
F_{mn} &= \partial_m A_n - \partial_n A_m + g[A_m, A_n] \\
&= \partial_m(\overline{U}\partial_n U) - \partial_n(\overline{U}\partial_m U) \\
&\quad + \overline{U}(\partial_m U)\overline{U}\partial_n U - \overline{U}(\partial_n U)\overline{U}\partial_m U, \qquad (1.4.16)
\end{aligned}$$

ここまで来ました。(1.4.14) 式の 2 行目から 3 行目に行くには、$\bar{U}\partial U$ に微分を作用させます。微分を ∂U のほうに作用させると、反対称性から第 1 項と第 2 項でキャンセルして消えますので、微分が $\overline{U}$ に掛かった項だけしか残りません。(1.4.14) 式の 3 行目で、第 1 項と第 3 項をまとめますと、$(1 - U\overline{U})$ を $\partial_m\bar{U}$ と $\partial_n U$ ではさんだ形になります。m と n を反対称化させた項も（第 2 項と第 4 項から）でてきて、それが第 4 行目です。この $U\overline{U}$ というのが、 (1.4.12) 式で出てきた projection operator です。$(1 - U\overline{U})$ というのは null space のほうではなくて、Δ で張られる空間へ射影する演算子です。あと、 (1.4.14) 式の 5 行目から 6 行目に行くには直交条件を使います。

$$\overline{U}\Delta = 0, \qquad (1.4.17)$$

$\overline{U}$ と Δ というのは直交していて掛けて zero になる、そういう条件を満たします。ですので、これを空間微分すると

$$\begin{aligned}
&\partial_m\overline{U}\Delta + \overline{U}\partial_m\Delta = 0 \\
\Rightarrow\ &\partial_m\overline{U}\Delta = -\overline{U}\partial_m\Delta \qquad (1.4.18)
\end{aligned}$$

となる。それぞれの pair に関してそういうことを行ってやると微分が全て Δ に掛かったものになります。それを m と n に関して反対称化してやると第 6 行目になります。Δ は x の 1 次の関数で、

$$\Delta = a + bx, \quad \overline{\Delta} = \overline{a} + \bar{x}\overline{b} \qquad (1.4.19)$$

という関数です。x_m に関して微分すると

$$\partial_m \Delta = b\sigma_m. \tag{1.4.20}$$

x には $x_{\alpha\dot{\alpha}} = x_n \sigma_{n\alpha\dot{\alpha}}$ のように Dirac 行列が掛かっていますので、Δ を微分すると $b\sigma_m$ という項が現れます。$\bar{\Delta}$ のほうからも同様に $\bar{\sigma}$ が現れます。これを m と n を反対称化したものもあります。f は i, j という instanton index にのみ依存しているので spinor のほうは触れません。 だから、 σ_n とか $\bar{\sigma}_m$ とは交換します。ですので、 (1.4.14) 式の 7 行目は $\sigma_n\bar{\sigma}_m$ から $\sigma_m\bar{\sigma}_n$ を引いたものになっています。で、それは Lorentz generator の 4 倍です。だから field strength は (1.4.14) 式の最後の行のような形に書けて、それは σ_{mn} に比例します。なので結論として field strength は self-dual になります。だからこれは instanton 解になります。

1.4.2 Instanton 数の計算

次にこれはどういう instanton 数の解であるかを計算します。計算に現れるのは、 self-dual であることを使うと、 F_{mn} の 2 乗の trace です。今度は n 次元空間の gauge の index の trace です。F_{mn} に (1.4.14) 式の結果を代入しますと、

$$-\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}_N F_{mn}F_{mn} \;=\; -\frac{1}{\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}_N \overline{U}b\sigma_{mn}f\bar{b}U\overline{U}b\sigma_{mn}f\bar{b}U. \tag{1.4.21}$$

この計算をちゃんと説明するとこの講義が終わってしまいますので、昔 Osborn という人が証明した公式 [16] を使います。そうすると最終的に簡単な式になります。 その公式というのは、

$$-\frac{1}{\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{tr}_N \overline{U}b\sigma_{mn}f\bar{b}U\overline{U}b\sigma_{mn}f\bar{b}U \;=\; \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x(\partial_n\partial_n)^2\,\mathrm{tr}_k \log f \tag{1.4.22}$$

です。これを 無限遠の boundary での境界積分に書き直します。その近づきかたが x^{-2} かける単位行列という形なので、これを計算してやるとこの積分は k という値になります。

$$\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x(\partial_n\partial_n)^2\,\mathrm{tr}_k \log f = k. \tag{1.4.23}$$

だからこの解は instanton number k の instanton 解ということになります。なので初めに考えた ansatz とか設定が具体的に instanton 解を構成するのに役立つということがわかります。

1.4.3 余分な変数の消去

もう少し調べるために先程 Δ に関して要請した条件

$$\overline{\Delta}_i^{\dot{\alpha}\lambda}\Delta_{\lambda j\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}(f^{-1})_{ij} \tag{1.4.24}$$

をもう少し調べます。これは $\overline{\Delta}\Delta$ が spinor に関して対角化されている条件です。これを要請しますとそれは係数行列 a, b に関して次のようになります[1]:

$$(\bar{a} + \bar{x}\bar{b})(a + bx) = \bar{a}a + \bar{x}\bar{b}a + \bar{a}bx + \bar{x}\bar{b}bx = 1_{2\times 2} f^{-1}_{k\times k}.$$

添字をきちんと書くと

$$\bar{a}^{\dot{\alpha}\lambda}_i a_{\lambda j \dot{\beta}} = \left(\frac{1}{2}\bar{a}a\right)_{ij} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \tag{1.4.25}$$

$$\bar{a}^{\dot{\alpha}\lambda}_i b^{\beta}_{\lambda j} = \bar{b}^{\beta\lambda}_i a^{\dot{\alpha}}_{\lambda j}, \tag{1.4.26}$$

$$\bar{b}^{\lambda}_{\alpha i} b^{\beta}_{\lambda j} = \left(\frac{1}{2}\bar{b}b\right)_{ij} \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{1.4.27}$$

となります。これは係数の a、 b を掛けたものが spinor index に関して対角化されなさい、ということです。これが ADHM 拘束条件といわれるものです。a と b を適切に与えれば k-instanton 解が得られるわけです。

実は a とか b とかいう変数は余分な変数を含んでいまして、X とか ρ とかいう 1-instanton を特徴付けるパラメータよりも余分な情報を含んでいます。どういうことかというと、Δ や U という基底の取替えをしても、これは基底を取り替えただけだから何ら変わりません。そういう redundancy があります。いま、unitary 行列 Λ を掛けて、Δ と U に含まれる縦ベクトルで張られる $N + 2k$ 次元の空間の基底の変換をします。また、 Δ に含まれる縦ベクトルの張る空間は $2k$ 次元ですが、それは instanton index と spinor index の 2 つに分かれます。そのうちの instanton index に作用するのが γ という行列です。こういう変換をしたときに f をついでに γ で変換してやると ADHM ansatz が変わりません。というわけで、まとめると、基底の変換は

$$\Delta \to \Lambda\Delta\gamma^{-1}, \quad U \to \Lambda U, \quad f \to \gamma f \gamma^{\dagger} \tag{1.4.28}$$

というものです。

例えば、

$$\overline{\Delta}\Delta = 1_{2\times 2}(f^{-1}) \tag{1.4.29}$$

という条件を考えて、これに先程の基底の変換を考えてみます。そうするとこれは

$$(\gamma^{-1})^{\dagger}\overline{\Delta}\Lambda^{\dagger}\Lambda\Delta(\gamma^{-1}) \tag{1.4.30}$$

となる。中にはさんでいる項は Λ という行列が unitarity 条件を満たすので 1 です。一方、 f^{-1} というのは f が (1.4.28) 式のように変換すると

$$f^{-1} \to (\gamma^{\dagger})^{-1} f \gamma^{-1} \tag{1.4.31}$$

という風に変換するのでこの変換性をしても ansatz の条件は変わりません。さらに直交する条件、

$$\overline{U}\Delta = 0 \tag{1.4.32}$$

[1] ここで $1_{2\times 2}$ は (1.4.9) における 2×2 単位行列 $(\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}})$ を表す.

これは 間に unitary 行列が 2 つはさまってそれが unitary 性により identity になりますので、直交条件を変えることはありません。これでこういう対称性があります。

この対称性を使って有効な変数を減らすことができます。特に b は x に掛かっている係数ですがそれを α, β と instanton index について対角化する基底を考えます。 すなわち

$$b^{\beta}_{\lambda j} = b^{\beta}_{(u+i\alpha)j} \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^{\beta}_{\alpha}\delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.4.33}$$

$$\bar{b}^{\lambda}_{\beta j} = \bar{b}^{u+i\alpha}_{\beta j} \quad = \left(0, \quad \delta^{\beta}_{\alpha}\delta_{ij}\right), \tag{1.4.34}$$

$$a_{\lambda j\dot{\alpha}} = a_{(u+j\alpha)j\dot{\alpha}} \quad = \begin{pmatrix} w_{uj\dot{\alpha}} \\ (a'_{\alpha\dot{\alpha}})_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.4.35}$$

$$\overline{a}^{\dot{\alpha}\lambda}_{j} = \overline{a}^{\dot{\alpha}(u+i\alpha)}_{j} \quad = (\overline{w}^{\dot{\alpha}}_{ju}, \quad (\overline{a'}^{\dot{\alpha}\alpha})_{ji}) \tag{1.4.36}$$

とします。ここで

$$a_{\alpha\dot{\alpha}} = a_n\sigma_{n\alpha\dot{\alpha}}, \quad \bar{a}^{\dot{\alpha}\alpha} = x_n\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}_{n}.$$
$$u = 1, ..., N; j = 1, ..., k; \alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta} = 1, 2; \lambda = 1, ..., N + 2k$$

です。a はまだ変数として出てきます。ここで λ は $(N + 2k)$ の変数なんですが、それを 2 つに分割したわけです。一つは u という gauge の index 、もう一つは instanton index と α の 2 重の index です。u は N 個走って、 j, α という double index は j が k 個、 α は 2 個走るので $2k$ 走ります。だから全部で $(N + 2k)$ 走ります。a という行列は Δ と同じでサイズは $(N + 2k) \times 2k$ なんですが、それを $N \times 2k$ という行列と $2k \times 2k$ という対角行列に block にわけて表すことができます。

式 (1.4.35) の w と呼ばれるものは、 u が N 個走って $j, \dot{\alpha}$ は $2k$ 走ります。で、下の $2k \times 2k$ のほうは spinor の index と i, j というのがあってこれは $2k \times 2k$ です。あとその Hermite conjugate があります。このように変数を対称性を使って落としてやります。そうすると b に関する ADHM constraint （ (1.4.27) 式の 3 番目）は自動的に満たされます。

あと a に関する ADHM constraint を書きますと

$$\tau^{c\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\overline{a}^{\dot{\beta}}a_{\dot{\alpha}} \quad = \quad \tau^{c\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\left(\overline{w}^{\dot{\beta}}_{ju}w_{ui\dot{\alpha}} + (\overline{a}'^{\dot{\beta}\alpha})_{jk}(a'_{\alpha\dot{\alpha}})_{ki}\right) = 0 \tag{1.4.37}$$

です。$\overline{a}$ と a を掛けたものが traceless ということなのでそれに Pauli 行列を掛けたものが zero になるという式です。

あと (1.4.27) 式の 2 番目の条件式、a と b の絡む ADHM 条件というのは、spinor の index と instanton の index を持つ a' で書き表せて、

$$(a'_n)^{\dagger} \quad = \quad a'_n, \tag{1.4.38}$$

すなわち a'_n が Hermite であるという風に書かれます。だから、対称性から変数を減らした空間ではこの 2 つの条件が ADHM constraint です。

更に、その変数を消去した空間では f は

$$f = 2(\overline{w}^{\dot{\alpha}}w_{\dot{\alpha}} + (a'_n + x_n 1_{k\times k})^2)^{-1} \tag{1.4.39}$$

というようになります。これを見ますと、instanton index を計算したときに使った Osborn の公式は f が $x \to \infty$ では $\frac{1}{x^2}$ で decay する、そういう振る舞いを示すことがここで具体的にわかります。

それで話は済んで a', w で instanton が parametrise される、そういうことがいえたのですが、実は、まだこのように変数を消去した空間の中にもまだ redundancy が残っていまして、それは instanton の空間の index の空間で生じる unitary 変換 $U(k)$ です。それは残った変数で表すと次のような行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1_{N\times N} & \\ & \Xi 1_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \Xi, \quad \Xi \in U(k) \tag{1.4.40}$$

による変換

$$w_{\dot\alpha} \to w_{\dot\alpha}\Xi, \quad a'_n \to \Xi^\dagger a'_n \Xi \tag{1.4.41}$$

になります。こういう変換をしても fix した b はあっています。なのでこれから更に自由度を消去できます。

1.4.4 他の標準的な記法との比較

ここで議論している Dorey 達の記法というのは、あとで Nekrasov の公式で出てくる standard な notation とは若干違っています。そちらを知っている人は以下の式は説明しなくてもわかる式で、そちらを知らない人は多分説明しても判らない式ですが（聴衆笑）一応説明しますと、まず Δ を parametrize する変数の定義式ですが、

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda i\dot\alpha} &= a_{\lambda i\dot\alpha} + b^\alpha_{\lambda i} x_{\alpha\dot\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} w_{uj\dot\alpha} \\ \delta_{ij}x_{\alpha\dot\alpha} + (a'_{\alpha\dot\alpha})_{ij} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I^\dagger & J \\ z_2 - B_2 & z_1 - B_1 \\ -(\bar z_1 - B_1^\dagger) & \bar z_2 - B_2^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.4.42}$$

とする。まず b を対角化して、a を w と a' に分けました。$x^{\alpha\dot\alpha}$ というのはこれは quaternion です。これを複素変数 $z_1, z_2, \overline{z_1}$、$\overline{z_2}$ を使って書き表します。これは初めのほうにやりました。同様に a' のほうも $\alpha, \dot\alpha$ に関して四元数表示します。すると $z - B$ という形の 1 つの block が $k \times k$ の size の行列になります。それが 2×2 に並んでいます。 この w も 2 つに分けまして、$\dot\alpha$ が 1 の場合には $I^\dagger$、で 2 の場合には J というふうにします。

bar のほうはこの conjugate です:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_i^{\dot\alpha\lambda} &= \overline{a}_i^{\dot\alpha\lambda} + \bar x^{\dot\alpha\alpha}\overline{b}^\lambda_{i\alpha} \\ &= \left(\overline{w}_i^{\dot\alpha u}\ \delta_{ij}\bar x^{\dot\alpha\alpha} + (\overline{a}'^{\dot\alpha\alpha})_{ij}\right) \\ &= \begin{pmatrix} I & \bar z_2 - B_2^\dagger & -(z_1 - B_1) \\ J^\dagger & \bar z_1 - B_1^\dagger & z_2 - B_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.4.43}$$

この I と J、 B_1, B_2 というのを用いるのが standard な記法です。ここで B_1, B_2 というのは $k\times k$ の行列で、$J, I^\dagger$ というのは $N\times k$ の行列、$I, J^\dagger$ というのは $k\times N$ の行列です。それで ADHM constraint を表しますと、さっきの parametrization を用いますと次のようになります:

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}\Delta &= \begin{pmatrix} I & \bar{z}_2 - B_2^\dagger & -(z_1 - B_1) \\ J^\dagger & \bar{z}_1 - B_1^\dagger & z_2 - B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^\dagger & J \\ z_2 - B_2 & z_1 - B_1 \\ -(\bar{z}_1 - B_1^\dagger) & \bar{z}_2 - B_2^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f^{-1} & 0 \\ 0 & f^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (1.4.44)
\end{aligned}$$

行列のブロックごとに書きますと

$$\begin{aligned}
&II^\dagger - J^\dagger J + [B_2^\dagger, B_2] + [B_1, B_1^\dagger] = 0, \\
&IJ + [B_2^\dagger, B_1] = 0, \\
&f^{-1} = II^\dagger + (\bar{z}_2 - B_2^\dagger)(z_2 - B_2) + (z_1 - B_1)(\bar{z}_1 - B_1^\dagger). \qquad (1.4.45)
\end{aligned}$$

実はこの式は本当の standard な ADHM constraint とはまだ少し定義が若干ずれています。それは B_2 が $B_2^\dagger$ になっているのと B_1 の符号が逆になっているので、standard な notation とは少し食い違いが生じます。それを防ぐには、この x の 1, 2 , 3 という空間を反転してやると z_1 が $-z_1$ になって z_2 が複素共役になる、 すなわち

$$z_2 \to \overline{z_2}, \quad z_1 \to -z_1, \quad B_2 \to B_2^\dagger, \quad B_1 \to -B_1 \qquad (1.4.46)$$

となるのですが、そういう変換をしてやると次のような ADHM constraint になって、これが普通の Nekrasov が使用しているような standard な ADHM constraint です:

$$\begin{aligned}
&II^\dagger - J^\dagger J + [B_2, B_2^\dagger] + [B_1, B_1^\dagger] = 0, \\
&IJ + [B_1, B_2] = 0, \\
&f^{-1} = II^\dagger + (z_2 - B_2)(\bar{z}_2 - B_2^\dagger) + (z_1 - B_1)(\bar{z}_1 - B_1^\dagger). \qquad (1.4.47)
\end{aligned}$$

これは一番最後で出てくるものでそこまで到達する時間があるかわからないので、うろ憶えでもいいですので記憶の片隅に置いておいてください。

1.4.5 Instanton のパラメタの勘定

いろんな対称性を使って変数を減らしたのですが、独立な変数の個数は何かということを勘定してみたいと思います。instanton を特徴付ける parameter 空間を instanton の moduli space と言うのですが、その次元はいくつであるかということを計算することになります。まず a' と w というものがありまして、更に ADHM constraint があって、その residual な対称性を表す unitary 行列があります。a' は spinor の部分が 4 つ自由度があってそれと k^2 の自由度です。w は $N\times 2k$ の行列で $\dot{\alpha}$ と 2 種類ありますので $4Nk$ です。ADHM constraint は 3 つの constraint がそれぞれ k^2 の constraint を与えます。更

に residual な対称性、 unitary 対称性がありますのでそれを引いてやります。その結論は $4Nk$ で、これが instanton の moduli space の自由度です[2] 。まとめると

$$4k^2 + 4Nk - 3k^2 - k^2 = 4Nk \tag{1.4.48}$$

ということです。

1.4.6 BPST instanton の ADHM 構成

非常に面倒くさいことをしてきたので、BPST instanton というものがこの立場でどのように実現されるかということを見ていきましょう。k が 1 と言ったので、i と j というのは instanton index で 1 から k まで走っているわけですけれども、それは 1 しか走らないのでこれは無いものとします。だから Δ という行列は spinor だけの $(N+2)\times 2$ の行列で a' は i,j に関しては 1×1 の行列です。spinor の足は持ちます。この w という行列は $N\times 2$ です。a' から Dirac 行列を使って変換した行列は、Hermite 条件を考えますと real になります。これを $-X_n$ とします:

$$a'_n = -X_n. \tag{1.4.49}$$

あとでこれは BPS instanton を表すときに使った space-time における instanton の位置を表す parameter であることがわかります。ADHM constraint は w と a' で表すことができます。それを具体的に書いてやりますと

$$\tau^{c\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\left(\overline{w}^{\dot{\beta}}_{u} w_{u\dot{\alpha}} + 2a'_n a'_n \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\right) = 0 \tag{1.4.50}$$

となります。a' に関与してくる項は Pauli 行列と縮約をとると traceless という条件から消えてしまいます。だからこの w だけが残ります。これが単位行列に比例します。その比例係数を ρ とおきます。

$$\overline{w}^{\dot{\alpha}}_{u} w_{u\dot{\beta}} = \rho^2 \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}. \tag{1.4.51}$$

f というのは BPST instanton で出てきたような形になります:

$$f = 2(\rho^2 + (x_n - X_n)^2)^{-1}. \tag{1.4.52}$$

w というのは $N\times 2$ 行列なのですが

$$w_{u\dot{\alpha}} = \rho U \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{w}_{\dot{\alpha}u} = (\mathbf{1}_2, 0)U^\dagger \rho, \tag{1.4.53}$$

具体的にこのように parametrise して表してみます。ここで ρ というのは w を 2 乗して ρ^2 となるようにとりまして、あとその phase の部分を unitary 行列 U で表します。ここ

[2]編注；後で見るように、ここでいう自由度は無限遠での $SU(N)$ ゲージ変換の自由度を含んで勘定している。無限遠での frame の自由度を含めているという意味で、 framed moduli space と呼ばれることもある。文献によれば無限遠での $SU(N)$ 変換を除いて定義してある場合も多いが、場の理論的には無限遠でのゲージ変換は大域対称性なので割らないほうがよい。

にある基底 vector をとったのですが、U はそれを動かさないような変換を含むので、以下の

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix}, \quad U' \in SU(N-2) \tag{1.4.54}$$

のような $(N+2)$ 成分あるうちの下の N の部分だけを変えるような変換性の redundancy[3] を持っています。

素朴にやると regular gauge というのを BPS 的な instanton の solution としますが、これを更に singular gauge にしてやるとこういう形になります。

$$A_n = g^{-1} \frac{2w_{\dot\alpha}\rho^2 (x-X)_m \bar\sigma_{mn}{}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \overline{w}^{\dot\beta}}{(x-X)^2((x-X)^2+\rho^2)} \tag{1.4.55}$$

これは $SU(N)$ の場合で、初めに説明した $SU(2)$ の場合と少し w の分だけずれていますが、基本的にはこの BPST instanton の形です。まだゲージ群の redundancy[4] があるのですが、U という変換性を 1 に fix してやりますとこれは単に次のような形になります:

$$A_n = \begin{pmatrix} A_n^{SU(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4.56}$$

ただし

$$A_n^{SU(2)} = g^{-1} \frac{2\rho^2 (x-X)_m \bar\sigma_{mn}}{(x-X)^2((x-X)^2+\rho^2)}.$$

すなわち $SU(N)$ の $N \times N$ の行列のなかで $SU(2)$ の部分だけを考えて、それに BPST instanton を入れた形になっています。(1.4.56) 式を unitary 変換で変換して (1.4.55) に出来ます。ただ、 redundancy の変換でその対角を $U(1)$ の変換をしても変わらないので、

$$A_n = U \begin{pmatrix} A_n^{SU(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^\dagger, \quad U \in \frac{SU(N)}{U(1) \times SU(N-2)}, \tag{1.4.57}$$

こういう構造をもっています。この unitary 変換の自由度を考え合わせますと、この 1-instanton を特徴付ける parameter の数というのは位置の座標 X が 4 で scale の parameter が 1 、あと gauge 変換の自由度があります。gauge 変換の自由度の計算は $SU(N)$ の次元の公式を使いますと表せます。

$$\dim SU(N) = N^2 - 1 \tag{1.4.58}$$

ですから、

$$\begin{aligned} & \dim SU(N) - \dim SU(N-2) - \dim U(1) \\ = \quad & N^2 - 1 - ((N-2)^2 - 1) - 1 = 4N - 5 \end{aligned} \tag{1.4.59}$$

[3]編注：ここでいう redundancy とは、この変換をしても w が変わらない。すなわちゲージ場 A_μ が変わらないと言う意味。当然この自由度は instanton moduli の自由度には含まれない。

[4]編注：ここでいう redundancy とは、変換が global なゲージ変換の自由度に含まれるという意味。この自由度は instanton moduli の自由度に含まれる。

ですね。
　加えてやると

$$4+1+(4N-5)=4N \tag{1.4.60}$$

となって、結果は $4N$ という parameter の個数になります。これは (1.4.48) の $k=1$ の場合と一致しています。
　一般の gauge 群の 1-instanton の場合には X とか ρ がありまして、上でつかった unitary 変換のかわりにそれぞれの gauge 群内の回転をすればよいことがわかります。それを合わせると、指数定理からわかる次元と一致します。
　一方、$SU(N)$ のままで k インスタントンを考えれば、その少し複雑な instanton の情報が parameter に入っているのですが、基本的なのはそのうちで instanton の中心に相当するものが a' の trace です:

$$X_n=-\frac{1}{k}\,\mathrm{tr}_k a'_n. \tag{1.4.61}$$

これが ADHM construction の概観です。

1.5 Collective Coordinate Integral

　我々は場の理論をやりたいわけですので、ADHM construction という解という Yang-Mills action の停留値の周りで path integral します。それをこれから具体的に議論していきます。gauge 場をある instanton 解を用い、それとその周りの揺らぎに分けてみます:

$$A_n(x)=A_n(x;X)+\delta A_n(x;X). \tag{1.5.1}$$

X というのは redundancy を除いた[5] 純粋に instanton を特徴付ける $4Nk$ 個の parameter で、moduli とか collective coordinate といいます。それで instanton 解を特徴付けます。その周りの fluctuation を δA_n としました。gauge を固定するため、 fluctuation はある gauge 条件を満たすとします。ここでは instanton background での covariant derivative で δA_n が zero になるという条件

$$D_n\delta A_n=0 \tag{1.5.2}$$

を課します。field strength がどのように fluctuation に対して変化するかということを見てみますと、

$$\begin{aligned}\delta F_{mn} &= \partial_m\delta A_n-\partial_m\delta A_n+g[\delta A_m,A_n]+g[A_m,\delta A_n]\\ &= D_m\delta A_n-D_n\delta A_m,\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

このようになります。
　一般に fluctuation を考えるわけですけどもこれは 2 種類あります。一つは変化することによって停留値からはずれる方向、energy を与える方向、そういうのを massive mode

[5]ただし global なゲージ自由度は含む。

といいます。少し変分をしてやってもまだ停留値に留まっている、そういうのを zero-mode といいます。それは path-integral では区別して扱わないといけません。今 zero mode を決める条件を考えたい。それは、少し微小変換してやった δF_{mn} がまた self-duality という条件を満たすものです。それを書いてやりますと

$$D_m\delta A_n - D_n\delta A_m = \epsilon_{mnkl}D_k\delta A_l \tag{1.5.4}$$

という条件です。これを spinor の表示に戻してやりますと

$$\begin{aligned}\delta A_n &= \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha}\delta A_{\alpha\dot{\alpha}},\\ D_m &= \frac{1}{2}\overline{D}^{\dot{\beta}\beta}\sigma_{m\beta\dot{\beta}}\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

となります。A というのを $(\alpha,\dot{\alpha})$-bi-spinor で表して D_m というのは spinor の $x^{\dot{\beta}\beta}$ に関する微分で直してやりました。

そうするとさっきの self-duality の条件というのは

$$\frac{1}{4}\left(\sigma_{m\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} - \sigma_{n\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}_m^{\dot{\alpha}\alpha} - \epsilon_{mnkl}\sigma_{k\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}_l^{\dot{\alpha}\alpha}\right)\overline{D}^{\dot{\beta}\beta}\delta A_{\alpha\dot{\alpha}} = 0 \tag{1.5.6}$$

となるのですが、これは Wess-Bagger の APPENDIX B の (B.9) という式

$$\sigma_{m\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} - \sigma_{n\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}_m^{\dot{\alpha}\alpha} = 2((\sigma^{nm})_\beta{}^\alpha\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} + (\bar{\sigma}^{mn})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\delta^\alpha_\beta) \tag{1.5.7}$$

を用いますと差が self-dual な part と anti-self-dual な part に分かれます。今、

$$\begin{aligned}\epsilon_{mnkl}\sigma_{k\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}_l^{\dot{\alpha}\alpha} &= \frac{1}{2}\epsilon_{mnkl}\left(\sigma_{k\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}_l^{\dot{\alpha}\alpha} - \sigma_{l\beta\dot{\beta}}\bar{\sigma}_k^{\dot{\alpha}\alpha}\right)\\ &= \epsilon_{mnkl}\left((\sigma^{lk})_\beta{}^\alpha\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} + (\bar{\sigma}^{lk})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\delta^\alpha_\beta\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{2}\epsilon_{nmlk}(\sigma^{lk})_\beta{}^\alpha\right)\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} + 2\left(\frac{1}{2}\epsilon_{nmlk}(\bar{\sigma}^{lk})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\right)\delta^\alpha_\beta\\ &= 2(\sigma^{nm})_\beta{}^\alpha\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} - 2(\bar{\sigma}^{nm})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\delta^\alpha_\beta\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

を使いますと、差し引き self-dual なほうは消えます。

ですので、この zero mode の条件というのは

$$(\bar{\sigma}^{mn})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\overline{D}^{\dot{\beta}\alpha}\delta A_{\alpha\dot{\alpha}} = 0 \tag{1.5.9}$$

のようになります。この $\bar{\sigma}_{mn}$ というのは't Hooft の eta symbol かける Pauli 行列で、これは non-zero ですので covariant derivative を掛けて Pauli 行列で縮約をとって

$$\vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\overline{D}^{\dot{\beta}\alpha}\delta A_{\alpha\dot{\alpha}} = 0, \tag{1.5.10}$$

こういう条件になります。これが zero mode です。これと gauge 固定条件 $D_n\delta A_n = \bar{D}^{\dot{\beta}\alpha}\delta A_{\alpha\dot{\beta}} = 0$ を合わせると $\bar{D}^{\dot{\beta}\alpha}\delta A_{\alpha\dot{\alpha}} = 0$ ($\dot{\beta},\dot{\alpha}$ は独立) が得られます.

これは $\dot{\alpha}$ のほうをのけて考えますと

$$\overline{D}^{\dot{\alpha}\alpha}\Lambda_\alpha(C) = 0 \tag{1.5.11}$$

です。単に α という spinor が Dirac 方程式を満たせば、そして $\dot{\alpha}$ というのを付け加えてやれば massless Dirac 方程式の対応する解が得られる、ということがわかるのでまずその方程式の解を求めましょう。それには実は

$$\Lambda_\alpha(C) = \overline{U}Cf\bar{b}_\alpha U - \overline{U}b_\alpha f\overline{C}U \tag{1.5.12}$$

という解があります。これは ADHM constraint のときに使った U と $\overline{U}$ で、C は定数行列です。ただし、 C というのは

$$\begin{aligned} \overline{C}_{i\lambda}a_{\lambda j\dot{\alpha}} &= -\bar{a}_{i\dot{\alpha}\lambda}C_{\lambda j} \\ \overline{C}_{i\lambda}b^\alpha_{\lambda j} &= \bar{b}^\alpha_{i\lambda}C_{\lambda j} \end{aligned} \tag{1.5.13}$$

という constraint を満たします。

(1.5.12) が Dirac 方程式をみたすことを示すために、これに Dirac operator を作用させます。

今考えている解はだいたいこういうものです:

$$\Lambda = \overline{U}JU. \tag{1.5.14}$$

ここで J というのは

$$J = Cf\bar{b}_\alpha - b_\alpha f\overline{C}. \tag{1.5.15}$$

C は定数行列です。x に依存している部分を微分するわけです。そうすると、効いてくるのはこの U に掛かってくる項とあと J を微分する項です。J を微分する項というのは微分が f だけに作用するのでそれを全部まとめてやります。そうするとこれもちょっと長い計算なので省略しますが

$$\overline{D}^{\dot{\alpha}\alpha}\Lambda_\alpha(C) \quad = \quad 2\overline{U}b^\alpha f(\overline{\Delta}^{\dot{\alpha}}C + \overline{C}\Delta^{\dot{\alpha}})f\bar{b}_{\dot{\alpha}}U \tag{1.5.16}$$

という形になるので、もし括弧の中身が zero であれば Dirac 方程式の解になります。すなわち

$$\overline{\Delta}^{\dot{\alpha}}C + \overline{C}\Delta^{\dot{\alpha}} = 0 \tag{1.5.17}$$

ですが、それを具体的に書いたものが (1.5.13) という条件です。これを満たす C というのが zero mode を特徴付ける parameter です。この解の個数は C が $(N+2k)\times k$ の行列で複素数なので 2 倍です。更に constraint と redundancy の式を書くと $2kN$ になります。すなわち

$$2k(N+2k) - 4k^2 = 2kN$$

です。この $2kN$ という数はちょうど、その instanton background で Weyl fermion の massless mode を勘定するときの zero mode の数と一致しますので、これですべての解がつくれたことになります。

zero mode を特徴付ける Dirac 方程式がわかったので具体的に zero mode を構成してみます。一般にゲージ場の変分 δA_m を

$$\delta A_m = \delta X^n \frac{\delta A_m}{\delta X^n} + \delta' A_m \to F_{mn} + \delta F_{mn} \tag{1.5.18}$$

というように、第一項の zero mode とその残りの massive mode $\delta' A_m$ にわけたいわけです。この zero mode というのは X_m を少し変化させて moduli parameter を少し変化させたことによって生じる gauge 場の変化です。それは moduli 空間のなかに留まっていますので self-duality 条件を満たします。残りの部分は massive mode です。

具体的にこれは一般的に zero mode を特徴付ける式なので、これは前に ADHM constraint によって構成した zero mode と果たして consistent であるか、A_m に ADHM 解を代入して果たしてこうなっているかどうかを確かめます。それも一つの解なのでまたは $F_{\mu\nu}$ の self-duality を check してやって、同様の step によるという計算で check してやります。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_n}{\partial X^\mu} &= \frac{\partial}{\partial X^\mu}(\overline{U}\partial_n U) \\
&= \frac{\partial \overline{U}}{\partial X^\mu}\partial_n U + \overline{U}\partial_n \frac{\partial U}{\partial X^\mu} \\
&= \frac{\partial \overline{U}}{\partial X^\mu}\partial_n U + \partial_n\left(\overline{U}\frac{\partial U}{\partial X^\mu}\right) - \partial_n \overline{U}\frac{\partial U}{\partial X^\mu} \\
&= \partial_n\left(\overline{U}\frac{\partial U}{\partial X^\mu}\right) + \frac{\partial \overline{U}}{\partial X^\mu}(U\overline{U} + \Delta f \overline{\Delta})\partial_n U - \partial_n \overline{U}(U\overline{U} + \Delta f\overline{\Delta})\frac{\partial U}{\partial X^\mu} \\
&= D_n\left(\overline{U}\frac{\partial U}{\partial X^\mu}\right) + \frac{\partial \overline{U}}{\partial X^\mu}\Delta f \overline{\Delta}\partial_n U - \partial_n \overline{U}\Delta f \overline{\Delta}\frac{\partial U}{\partial X^\mu} \\
&= D_n\left(\overline{U}\frac{\partial U}{\partial X^\mu}\right) + \overline{U}\frac{\partial a}{\partial X^\mu} f \bar{\sigma}_n \bar{b} U - \overline{U} b \sigma_n f \frac{\partial \overline{a}}{\partial X^\mu} U
\end{aligned}
\tag{1.5.19}
$$

となり、結局

$$
\frac{\partial A_{\alpha\dot{\alpha}}}{\partial X^\mu} = -D_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\overline{U}\frac{\partial U}{\partial X^\mu}\right) + 2\Lambda_\alpha\left(\frac{\partial a_{\dot{\alpha}}}{\partial X^\mu}\right) \tag{1.5.20}
$$

となってチェックができました。

結局、 spinor index で表しますと gauge 変換で書かれる部分と Λ_α というのは Dirac 方程式を解くときに定義した関数です。そこに a_α の moduli 微分を挿入すればよろしい。この微分が constraint を満たしていれば具体的にさっきの微分が zero mode になってくれるということが確かめられます。さて、微分がその constraint を満たしているということは元々の ADHM constraint を X で微分すれば確かめられます。これで zero mode の構造がわかったので path-integral します。

質問: 基本的なことを聞くんですけれども X というのは何ですか。

答え: X というのは抽象的に moduli 空間を特徴付ける parameter です。

質問: この場合具体的に X はどういうものなのですか。インスタントンの中心の位置の x だったらなんとなくわかるのですが。

答え: 一般にこれを表すことは難しいです。μ というのは 1 から $4kN$ までを走ります。k

が 1 の場合には X^μ というのは $SU(2)$ の instanton の位置と instanton の size と、あとそれを考えているゲージ群に埋め込む gauge 変換の parameter を与えたものです。一般の場合にはこれに相当するうまい parameter が選びにくい。instanton の位置とか size とか gauge 変換とかいうものは名前を付けられるのですが、一般の場合ものにはそういう名前は必ずしも付けられないのでそれをとりあえず X というふうに呼んでいます。

質問: instanton をひとつ与えたとして、それを回転させたような解が出るわけですよね。そういうのが zero mode になっているのですね。

答え: はい、そうですね。それはその全 moduli 空間の中の一部の parameter になっています。

解を

$$\delta_\mu A_{\alpha\dot{\alpha}} = 2\Lambda_\alpha \left(\frac{\partial a_{\dot{\alpha}}}{\partial X^\mu}\right) \tag{1.5.21}$$

で定義したもので少しずらしてやってもまた instanton の方程式の解になります。ここで今までやったことは zero mode と、zero mode でない massive mode とを区別して書くためで path integral をするときにはそれを区別して考えます。instanton の background の周りで作用を展開してみます:

$$S = -2\pi i k\tau - \frac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{tr}_N \delta\overline{A}^{\dot{\alpha}\alpha}\Delta_\alpha^{(+)\beta}\delta A_{\beta\dot{\alpha}} + \cdots . \tag{1.5.22}$$

そうするとまず $2\pi ik\tau$ というのは停留点の値です。それから 1 次、 2 次という変分の値があるのですが、1 次は運動方程式で消えます。2 次の分が残ります。ここでたくさん Δ というのが出てくるのですがこれは Laplacian です:

$$\Delta^{(+)} = -\not{D}\overline{\not{D}} = -1_{2\times 2}D^2 - gF_{mn}\sigma_{mn} \tag{1.5.23}$$

となって、spinor の空間に作用する部分と実の空間に作用する部分があります。spinor に関しては対角です。

Fluctuation は時空に依ります。一つは今まで議論してきた zero mode の部分と non-zero mode の部分です。それは区別して計算します。

$$\delta A_{\alpha\dot{\alpha}} = \delta X^\mu \delta_\mu A_{\alpha\dot{\alpha}} + \widetilde{A}_{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{1.5.24}$$

Zero mode は action には寄与しません。すなわち Laplacian の固有値が zero ですのでそれを区別します。これは string(の経路積分) でもでてくるような扱い方です。zero mode の部分はどういうふうに measure を定義するかというと zero mode に関して内積を定義します。一般には zero mode の空間は曲がってまして、上の基底では直交しないのですのでその曲がった寄与を determinant g というふうに表してその metric は

$$g_{\mu\nu}(X) = -2g^2\int d^4x\,\mathrm{tr}_N \delta_\mu A_n(x;X)\delta_\nu A_n(x;X) \tag{1.5.25}$$

で与えられます。経路積分は

$$\int DA_n = g^{-4kN} \int \prod_\mu \frac{dX^\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\det g(X)} D\widetilde{A}_n \tag{1.5.26}$$

となります。

moduli parameter X に関してとりあえず吟味します。いま、積分領域とかそういうことはまったく議論してなくて formal な積分です。それを Gaussian 部分だけ用いて massive mode に関して積分してしまいます。すると

$$\begin{aligned}\int DA_n e^{-S} &= \frac{e^{2\pi ik\tau}}{g^{4kN}} \int \prod_\mu \frac{dX^\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\det g(X)} \frac{1}{\det' \Delta^{(+)}} \\ &= \frac{e^{2\pi ik\tau}}{g^{4kN}} \int_{\mathcal{M}_k} \omega \frac{1}{\det' \Delta^{(+)}}\end{aligned} \tag{1.5.27}$$

となってこういう Laplacian の determinant になります。det の肩の $'$ は zero mode を除くという意味です。この zero mode に関する部分を

$$\omega = \prod_\mu \frac{dX^\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\det g(X)} \tag{1.5.28}$$

と 書きまして instanton 空間の moduli space 上の volume form という風に考えます。これは実は幾何学的には面白い対象で hyper-Kähler 構造、具体的には hyper-Kähler 商構造、商というもので定義できる moduli 空間です。 まあちょっとこれはまったく時間が無いのでこういう面白い話に関しては省略します。

これで一応 ADHM の構成に関する path integral のところまでは終了しました。

2 Instanton Calculus in Supersymmetric Gauge Theory

2.1 $\mathcal{N}=1,2,4$ Supersymmetric Gauge Theory

今やった話を超対称ゲージ理論に適用するとどうなるかということで、まずトピックとしては、超対称性ゲージ理論というのをどのように表すのか、で、 instanton というのは超対称理論においてはどのように考えることが出来るのか。それに対する path-integral の measure について。それで具体的に積分を行った場合に、$\mathcal{N}=2$ の議論に応用しますと Seiberg-Witten 理論に出てくる prepotential というのが計算できます。今日は 1-instanton での具体的な計算をやってみて、その計算が非常に難しいのでどのようにしたらいいのか。それらのアイディアの中で非常に面白いのが局所化という方法を使って計算することなので、まあ、ここまで説明しないと明日につながらないので $\cdots$

まず超対称ゲージ理論というのはどういうものか。それは 4 次元ですと 1, 2, 4 の 4 個まで supersymmetry が取り入れることが出来るんですが、この instanton というのをそれに応じていろいろ議論していきます。これを統一的にまじめに記述する framework を説明します。今、$\mathcal{N}$ という supersymmetry があったとしましょう。ゲージ理論ですから、その gauge 場がまず出発点となって、そのスーパーパートナーである fermion が $2\mathcal{N}$ 個あります。そのうち $\mathcal{N}$ 個は chiral で、もう一つの組は anti-chiral です。さらに scalar 場が、実で勘定して $2(\mathcal{N}-1)$ 個、複素で勘定して $\mathcal{N}-1$ 個あります。これは on-shell のはなしです。実際には superfield でやってやろうとすると、補助場というのが出てくるのですが、その補助場というのは消去してやります。$\mathcal{N}=4$ というのは off-shell で定義しようとすると非常に難しいので on-shell で定義します。

$\mathcal{N}=1$ というのは、 gauge 場に関して 1 個、あと $\overline{\lambda}$ も含めて fermion が 2 個あります。$\mathcal{N}=2$ というのは gauge 場 A_m と、λ^1、λ^2 とそのバー、あと real scalar 場が 2 個あります。$\mathcal{N}=4$ というのは 4 個の fermion とそのバー、それと 6 個の real scalar があります。まとめると

- $\mathcal{N}=1 \quad A_m,\ \lambda,\overline{\lambda}$
- $\mathcal{N}=2 \quad A_m,\ \lambda^1,\lambda^2,\overline{\lambda}^1,\overline{\lambda}^2,\ \phi_1,\phi_2$
- $\mathcal{N}=4 \quad A_m,\ \lambda^a,\overline{\lambda}^a(a=1,2,3,4),\ \phi_1,\cdots,\phi_6$

となる。これらの場はすべてゲージ群に関しては adjoint 表現に属しているとします。

もう後は作用を書くだけなんですが、 Minkowski で書いてみましょう。それは

$$S=\int d^4x\ \mathrm{tr}_N\Big\{\frac{1}{2}F_{mn}^2+\frac{i\theta g^2}{16\pi^2}F_{mn}*F_{mn}+2iD_n\overline{\lambda}_A\bar{\sigma}_n\lambda^A-D_n\phi_aD_n\phi_a$$
$$+g\overline{\lambda}_A\Sigma_a^{AB}[\phi_a,\overline{\lambda}_B]+g\lambda^A\overline{\Sigma}^{aAB}[\phi_a,\lambda^B]+\frac{1}{2}g^2[\phi_a,\phi_b]^2\Big\} \tag{2.1.1}$$

第一、二項は gauge 場、ここに出てくるのは今まで出てきた Yang-Mills の action で、第三項は fermion の kinetic term で、第四項は scalar 場、さらに第五、六項に fermion の bilinear と scalar 場が couple するような湯川相互作用、あと scalar 場の potential が入っ

ています。$\mathcal{N}=2$ と $\mathcal{N}=4$ では結合の仕方を決定する Σ と呼ばれる量が若干違うんですが、次のようになっています:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}=2 \quad & \Sigma_a^{AB}=\epsilon^{AB}(i,1),\ \overline{\Sigma}_{aAB}=\epsilon^{AB}(-i,1);\\
\mathcal{N}=4 \quad & \Sigma_a=(\eta^3,i\overline{\eta}^3,\eta^2,i\overline{\eta}^2,\eta^1,i\overline{\eta}^1)\\
& \overline{\Sigma}_a=(-\eta^3,i\overline{\eta}^3,-\eta^2,i\overline{\eta}^2,-\eta^1,i\overline{\eta}^1).
\end{aligned}$$

ここで η というのは 't Hooft の η -symbol です。

一般に action はつぎのような on-shell の SUSY 変換で不変になっています。

$$\begin{aligned}
\delta A_n &= -\xi^A\sigma_n\overline{\lambda}_A-\overline{\xi}_A\bar{\sigma}_n\lambda^A,\\
\delta\lambda^A &= -i\sigma^{mn}\xi^A F_{mn}-ig\Sigma^A_{abB}\xi^B[\phi_a,\phi_b]+\Sigma_a^{AB}\sigma^n\overline{\xi}_B D_n\phi_a,\\
\delta\overline{\lambda}_A &= -i\bar{\sigma}^{mn}\overline{\xi}_A F_{mn}-ig\bar{\sigma}^B_{abA}\overline{\xi}_b[\phi_a,\phi_b]+\overline{\Sigma}_{aAB}\bar{\sigma}^n\xi^B D_n\phi_a,\\
\delta\phi_a &= i\xi^A\overline{\Sigma}_{aAB}\lambda^B+i\xi_A\Sigma_a^{AB}\overline{\lambda}_B
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

on-shell というのは変換しておつりが出てきてもそれが運動方程式を使って 0 になれば supersymmetry が成り立つと考えるというものです。我々は Minkowski の理論ではなくて Euclid の理論を考えたいので、

$$\begin{aligned}
x^n=(x^0,\vec{x}) &\rightarrow x_n=(\vec{x},x_4=ix_0)\\
\sigma_n=(-1,\vec{\tau}) &\rightarrow \sigma_n=(i\vec{\tau},1)=i(\vec{\tau},-i)
\end{aligned}$$

というように x^0 という座標を x^4 に持っていって、Dirac 行列はこの変換の後に全体に i を掛けるということをやります。そうすると Euclidean な action はこのような変換をしてやった後に、あと積分の方に i があるのでそれを除いてやって、$S_{\text{Minkowski}}\times(-i)$ で Euclidean な action になります:

$$S_{\text{Euclidean}}=-iS_{\text{Minkowski}}. \tag{2.1.3}$$

これはかなり細かいことなんですが、ちょっと若干不都合が生じるのは、spinor の扱いの部分、 Minkowski 空間では Lorentz 群は $SO(1,3)$ でこれは $SL(2,\mathbb{C})$、だからこれは α に関しては $SL(2)$ の doublet 表現なんですが、これが Hermite 共役のかわりにつながっているという条件が

$$(\lambda^A_\alpha)^\dagger=\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}A},\ (\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}_A)^\dagger=\lambda^{\alpha A} \tag{2.1.4}$$

に当たります。Euclidean 空間では Lorentz 群が $SO(4)$ で、これは $SU(2)\times SU(2)$ なんで、この spinor $\lambda_\alpha,\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ は独立に変換する spinor です。ちょっと spinor の扱い方が Minkowski と Euclid で違ってくるんですが、このように、ただこの action は必ずしも実ではない。それにも関わらずこういう解析接続の方法で計算してやって最後に Minkowski に直してやれば、何か物理的な結果が得られるだろうという期待で Euclid で計算した後で Minkowski に直します。本当は細かい議論が必要です。それで Euclidean action では

$$\begin{aligned}
S=\int d^4x\,\mathrm{tr}_N\Big\{&-\frac{1}{2}F^2_{mn}-\frac{i\theta g^2}{16\pi^2}F_{mn}*F_{mn}-2D_n\overline{\lambda}_A\bar{\sigma}_n\lambda^A+D_n\phi_aD_n\phi_a\\
&-g\overline{\lambda}_A\Sigma_a^{AB}[\phi_a,\overline{\lambda}_B]-g\lambda^A\overline{\Sigma}^{aAB}[\phi_a,\lambda^B]-\frac{1}{2}g^2[\phi_a,\phi_b]^2\Big\},
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

このようになり、 Minkowski の場合とほとんど変わりませんが、若干 factor が違ってきます。それで instanton の方程式を書かなければいけないので、まず運動方程式をみたさなければいけない。それをちょっと書いてみます。

$$
\begin{aligned}
D_m F_{mn} &= 2g[\phi_a, D_n\phi_a] + 2g\bar{\sigma}^n\{\lambda^A, \overline{\lambda}^A\}, \\
\overline{\not{D}}\lambda^A &= g\Sigma_a^{AB}[\phi_a, \overline{\lambda}_B], \\
\not{D}\overline{\lambda}_A &= g\overline{\Sigma}_{aAB}[\phi_a, \lambda^B], \\
D^2\phi_a &= g^2[\phi_b, [\phi_b, \phi_a]] + g\overline{\Sigma}_{aAB}\lambda^A\lambda^B + g\Sigma_a^{AB}\overline{\lambda}_A\overline{\lambda}_B.
\end{aligned}
\tag{2.1.6}
$$

それで Euclid version の on-shell SUSY 変換は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
\delta A_n &= i\xi^A\sigma_n\overline{\lambda}_A + i\bar{\xi}_a\bar{\sigma}_n\lambda^A, \\
\delta\lambda^A &= i\sigma^{mn}\xi^A F_{mn} - ig\Sigma^A_{abB}\xi^B[\phi_a, \phi_b] - i\Sigma_a^{AB}\sigma^n\bar{\xi}_B D_n\phi_a, \\
\delta\overline{\lambda}_A &= i\bar{\sigma}^{mn}\bar{\xi}_A F_{mn} - ig\overline{\Sigma}_{abA}{}^B\bar{\xi}_B[\phi_a, \phi_b] - i\overline{\Sigma_{aAB}}\bar{\sigma}^n\xi^B D_n\phi_a, \\
\delta\phi &= i\xi^A\overline{\Sigma}_{aAB}\lambda^B + i\xi_A\Sigma_a^{AB}\overline{\lambda}_B.
\end{aligned}
\tag{2.1.7}
$$

以上はちょっと面倒くさかったので、具体例を $\mathcal{N}=1$ の場合をみましょう。この場合はちょっと simple で fermion と gauge 場しかないので、作用は

$$
S = \int d^4x\, \mathrm{tr}_N \left\{ -\frac{1}{2}F_{mn}^2 - \frac{i\theta g^2}{16\pi^2}F_{mn} * F_{mn} - 2D_n\overline{\lambda}\bar{\sigma}_n\lambda \right\} \tag{2.1.8}
$$

と書かれて、運動方程式は

$$
\begin{aligned}
D_m F_{mn} &= 2g\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha}\{\lambda_\alpha, \overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}\}, \\
\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} D_n\lambda_\alpha &= 0, \\
\sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} D_n\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.1.9}
$$

となります。 supersymmetry は

$$
\begin{aligned}
\delta A_n &= i\xi\sigma_n\overline{\lambda} + i\bar{\xi}\bar{\sigma}_n\lambda, \\
\delta\lambda &= i\sigma^{mn}\xi F_{mn}, \\
\delta\overline{\lambda} &= i\bar{\sigma}^{mn}\bar{\xi}F_{mn}.
\end{aligned}
\tag{2.1.10}
$$

これから議論したい $\mathcal{N}=2$ というのは、 scalar 場が 2 種類ありますがそれを

$$
\phi = \phi_1 - i\phi_2,\ \phi^\dagger = \phi_1 + i\phi_2 \tag{2.1.11}
$$

と複素で組んでやって、あと $\mathcal{N}=2$ というのは $\mathcal{N}=1$ がその中に含まれているわけで、その一つをペアに作って matter とペアになるような $\mathcal{N}=1$ の部分対称性を使って、その scalar のパートナーを ψ とおいて、 gauge 場のパートナーを λ とおきます。gauge 場のパートナーは $\mathcal{N}=1$ の理論と構造は同じです。その作用は

$$
\begin{aligned}
S = \int d^4x\, \mathrm{tr}_N \Big\{ &-\frac{1}{2}F_{mn}^2 - \frac{i\theta g^2}{16\pi^2}F_{mn} * F_{mn} - 2D_n\overline{\lambda}\bar{\sigma}_n\lambda - 2D_n\overline{\psi}\bar{\sigma}_n\psi \\
&+ D_n\phi^\dagger D_n\phi + 2ig\overline{\psi}[\phi, \overline{\lambda}] + 2ig[\phi^\dagger, \lambda]\psi + \frac{1}{4}g^2[\phi, \phi^\dagger]^2 \Big\},
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

こういう形になります。湯川 coupling と scalar potential があります。それで運動方程式は

$$
\begin{aligned}
D_m F_{mn} &= g[\phi^\dagger, D_n\phi] + g[\phi, D_n\phi^\dagger] + 2g\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha}\{\lambda_\alpha^A, \overline{\lambda}_{A\dot{\alpha}}\}, \\
\overline{\not{D}}\lambda^A &= ig[\phi, \overline{\lambda}^A], \\
\not{D}\overline{\lambda}_A &= -ig[\phi^\dagger, \lambda_A], \\
D^2\phi &= g^2[\phi, [\phi^\dagger, \phi]] - 2ig\epsilon_{AB}\lambda^A\lambda^B, \\
D^2\phi^\dagger &= g^2[\phi^\dagger, [\phi, \phi^\dagger]] + 2ig\epsilon_{AB}\overline{\lambda}^A\overline{\lambda}^B
\end{aligned}
\tag{2.1.13}
$$

となります。一般式に σ という値を代入して計算してやるとこういう形になることを確かめられます。それで instanton というのはこういう方程式の解で supersymmetric になる。super 変換ていうのは

$$
\begin{aligned}
\delta A_n &= i\xi^A\sigma_n\overline{\lambda}_A + i\overline{\xi}_A\bar{\sigma}_n\lambda^A, \\
\delta\lambda^A &= i\sigma^{mn}\xi^A F_{mn} - \frac{1}{2}ig\xi^A[\phi, \phi^\dagger] + \sigma^n\overline{\xi}^A D_n\phi, \\
\delta\overline{\lambda}_A &= i\bar{\sigma}^{mn}\overline{\xi}_A F_{mn} - \frac{1}{2}ig\overline{\xi}_A[\phi^\dagger, \phi] - \bar{\sigma}^n\xi_A D_n\phi^\dagger, \\
\delta\phi &= 2\xi^A\lambda_A, \\
\delta\phi^\dagger &= -2\overline{\xi}_A\overline{\lambda}^A
\end{aligned}
\tag{2.1.14}
$$

となります。まあ全部覚えておく必要はないので。

2.2 Supersymmetric Instanton

supersymmetric な instanton 、それを super-instanton configuration と呼びます。それは作用を minimize して、しかも先ほど書きました equations of motion の解となる。そういう解の例として例えば、 gauge 場として ADHM solution 、他の場をすべてゼロとする、

$$
\begin{aligned}
&A_m : \text{ADHM solution}, \\
&\lambda^A = \bar{\lambda}^A = 0, \\
&\phi_a = 0.
\end{aligned}
$$

こういうのは解となっています。でもこれは何というか不都合が生じる。というのは、instanton background では fermion はゼロモードで、そのゼロモードは元々の運動方程式に出てきますので、ゼロモードを含めてそれを満たして、全体の運動方程式の解になっているということです。例えば、

$$
\begin{aligned}
\bar{\not{D}}\lambda^A &= 0, \\
\not{D}\bar{\lambda}^A &= 0, \\
D^2\phi_a &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

これは$\mathcal{N}=2$の version ですけども、これを左辺を全てゼロにおけば、これは ADHM の解だけで運動方程式の解になっている。でも例えばϕをゼロにしても、この（λに関する）Weyl 方程式はゼロモードに落ちますので、ノンゼロである解を持つ。その解が (2.1.13) のϕの式の右辺に現れてきて、それは運動方程式を coupling constant の order gで modify する。それは拘束となってその方程式の解をノンゼロにし、その影響がまた運動方程式の右辺に入ってきて、運動方程式の全体の解の部分が変化する。なので supersymmetry がある場合は複雑になる。それで運動方程式を coupling constant gで展開して、各 order gで解を構成していく。それが super-instanton の解と呼ばれるものです。はじめに気にしなければいけないのは、一番低次では、運動方程式で複素の作用に基づく項[6] は消しまして、この fermion のゼロモードを考慮してやります。はじめにバーの方、これはゼロモードがないということが分かります。これは何故かというと、$-\bar{\not{D}}\not{D}$ を $\Delta^{(-)}$ と書いてやりますと

$$\bar{\not{D}}\not{D}\bar{\lambda}^A = -\Delta^{(-)}\bar{\lambda}^A = D^2\bar{\lambda}^A + \bar{\sigma}_{mn}F_{mn}\bar{\lambda}^A \tag{2.2.2}$$

となって、このように普通の scalar に対する共変微分の 2 乗とそれから$\bar{\sigma}$に比例する項がある。この項はFが self-dual な解なので、$\bar{\sigma}_{mn}F_{mn}=0$になります。ですから、これは普通の scalar 場の方程式

$$D^2\bar{\lambda}^A = \bar{\not{D}}\not{D}\bar{\lambda}^A = 0 \tag{2.2.3}$$

になって、この固有値は positive-definite なので 0 になるのは解が 0 になるときのみです。だからこの anti-chiral な方はgの linear order で 0 、しかしλの方は、 0 のまわりで展開してますが、

$$\not{D}\bar{\not{D}}\lambda^A \equiv -\Delta^{(+)}\lambda^A = D^2\lambda^A + F_{mn}\sigma_{mn}\lambda^A = 0 \tag{2.2.4}$$

となり第二項はノンゼロになり、ゼロでない解を持ちます。実際それは前に解きました Dirac 方程式、これと同じ方法で解けて

$$\lambda_\alpha = g^{-1/2}\Lambda_\alpha(\mathcal{M}) = g^{-1/2}(\bar{U}\mathcal{M}f\bar{b}_\alpha U - \bar{U}b_\alpha f\bar{\mathcal{M}}U) \tag{2.2.5}$$

と書けます。そのときはCは単に定数行列だったのですが、今度はλが Grassmann 数なので、Grassmann valued な$\mathcal{M}$というのになります。この$\mathcal{M}$は ADHM constraints から導かれる fermionic な場の運動方程式

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{M}}_i^\lambda a_{\lambda j\dot{\alpha}} &= -\bar{a}_{i\dot{\alpha}\lambda}\mathcal{M}_{\lambda j},\\ \bar{\mathcal{M}}_{i\lambda}b^\alpha_{\lambda j} &= \bar{b}^\alpha_{i\lambda}\mathcal{M}_{\lambda j}\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

をみたします。これはCがみたす方程式と同じです。それであとこれは

$$\mathcal{M}_{\lambda j} = \mathcal{M}_{(u+i\alpha)j} = \begin{pmatrix}\mu_{uj}\\ (\mathcal{M}'_\alpha)_{ij}\end{pmatrix} \tag{2.2.7}$$

[6](2.1.12) 式の作用の第二、六、七項に基づく項から出て来る (2.1.13) 式の第二式、第三式の右辺など。

と書きますと (2.2.6) の第二式から

$$\bar{\mathcal{M}}'_\alpha = \mathcal{M}'_\alpha \tag{2.2.8}$$

第一式から

$$\bar{\mathcal{M}} a_{\dot\alpha} + \bar{a}_{\dot\alpha}\mathcal{M} \equiv \bar\mu w_{\dot\alpha} + \bar{\dot\alpha}\mu + [\mathcal{M}'^{\alpha}, a'_{\alpha\dot\alpha}] = 0 \tag{2.2.9}$$

となります。こういう fermion 的な自由度が supersymmetric な理論から出てくる。それを fermionic な moduli といい、それに対応する $\mathcal{M}$ という行列がみたす方程式を fermionic な ADHM constraints であるといいます。fermion の moduli というのは、前 BPST で表した位置とか大きさとか gauge 変換に対応するようなパラメータのフェルミオン版です。そのうちで比較的単純なものは supersymmetric zero mode と superconformal zero mode と呼ばれているものです。一つはある場に super 変換をしてやっても、それがゼロモードであり続ける、だから例えば、super 変換を用いてやりますと、

$$\begin{aligned} \delta\lambda^A &= i\sigma_{mn}\xi^A F_{mn}, \\ \delta\bar\lambda^A &= i\bar\sigma_{mn}\bar\xi^A F_{mn} = 0 \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

というように F_{mn} 掛ける Lorentz generator に比例するというふうになるのですが、$\bar\lambda$ の方は F_{mn} が self-dual という条件からゼロになる。λ の方はノンゼロです:

$$\begin{aligned} \lambda^A_a &= i\sigma_{mn}\xi^A F_{mn} \\ &= 4i(\sigma_{mn}\xi^A)_\alpha \bar{U} b\sigma_{mn}\bar{b} f U \\ &= -4i\bar{U}(b\xi^A f\bar{b}_\alpha - b_\alpha f\xi^A\bar{b})U \\ &= \Lambda_\alpha(-4ib\xi^A). \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

実はこの式は fermion 的な一般式 (2.2.5) から見ると、$\mathcal{M}$ という行列に

$$\mathcal{M}^A_{\lambda i} = -4i\xi^A_\alpha b^\alpha_{\lambda i}, \;\; \bar{\mathcal{M}}^{\lambda A}_i = -4i\xi^{\alpha A}\bar{b}^\lambda_{\alpha i} \tag{2.2.12}$$

という値を代入したものに等しいことが分かる。だから、$\mathcal{M}$ の中には 2 倍の $\mathcal{N}$ 個の super 空間での transformation から来るゼロモードがある。さらに superconformal 変換

$$\xi^A_\alpha(x) = \xi^A_\alpha - x_{\alpha\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha A}, \;\; \bar\xi^\alpha_A(x) = \bar\xi^\alpha_A + \eta^A_{\dot\alpha}\bar{x}^{\dot\alpha\alpha} \tag{2.2.13}$$

に関するゼロモードがあるのですが、それも同じように

$$\begin{aligned} \lambda^A_a &= \Lambda_\alpha(-4ia\bar\eta^A) \\ &= -4i\bar{U}(a\bar\eta^A f\bar{b}_\alpha - b_\alpha f\bar\eta^A\bar{a})U \\ &= 4i\bar{U}(bx\bar\eta^A f\bar{b}_\alpha - b_\alpha f\bar\eta^A\bar{x}\bar{b})U \\ &= -4i(\sigma_{mn}x\bar\eta^A)_\alpha\bar{U}b\sigma_{mn}\bar{b}fU \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

というふうになり $\mathcal{M}$ に

$$\mathcal{M}^A_{\lambda i} = -4ia_{\lambda i\dot\alpha}\bar\eta^{A\dot\alpha}, \;\; \bar{\mathcal{M}}^{\lambda A}_i = -4i\bar\eta^A_{\dot\alpha}\bar{a}^{\dot\alpha\lambda}_i \tag{2.2.15}$$

を代入したものに等しくなっています。そうするとこういうゼロモードがあることによって、 scalar field の運動方程式が modify される。

$$D^2\phi_a = g\bar{\Sigma}_{aAB}\lambda^{(0)A}\lambda^{(0)B}. \tag{2.2.16}$$

これを解く。だから scalar 場がノンゼロになります。それでこれを逆に解かないといけないんですが、これは非常に難しい計算で、僕もまだ完全に check しきれてないんですが、さっき紹介した review の appendix に載ってる式ですけども

$$\phi_a = -\frac{1}{4}\bar{\Sigma}_{aAB}\bar{U}\mathcal{M}^A f\bar{\mathcal{M}}^B U + \bar{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_N & 0\\ 0 & \varphi_a\mathbf{1}_2\end{pmatrix}U \tag{2.2.17}$$

(2.2.16) を解くとまあこうなるということです。これにでてくる φ_a は

$$\varphi_a = \frac{1}{4}\bar{\Sigma}_{aAB}\mathbf{L}^{-1}(\bar{\mathcal{M}}^A\mathcal{M}^B) \tag{2.2.18}$$

こう書かれる。ここに $\mathbf{L}$ というのが出てきまして $\mathbf{L}$ はこういうふうに書ける:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\dot{\Omega} &= \frac{1}{2}\{\bar{w}^{\dot{\alpha}}w_{\dot{\alpha}},\Omega\} + \frac{1}{2}\bar{a}'^{\dot{\alpha}\alpha}a'_{\alpha\dot{\alpha}}\Omega - \bar{a}'^{\dot{\alpha}\alpha}\Omega a'_{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\Omega\bar{a}'^{\dot{\alpha}\alpha}a'_{\alpha\dot{\alpha}}\\ &= \frac{1}{2}\{\bar{w}^{\dot{\alpha}}w_{\dot{\alpha}},\Omega\} + [a'_n,[a'_n,\Omega]]\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

ただこれからやろうとすると、一般的にこれから order をどんどん高めていって、解を求めるというのは非常に難しいということが予想されます。一般には A、λ とか $\bar{\lambda}$ を g で展開していく。

$$\begin{aligned}A_m &= g^{-1}A_m^{(0)} + gA_m^{(1)} + g^3A_m^{(2)} + \cdots,\\ \lambda^A &= g^{-1/2}\lambda^{(0)A} + g^{3/2}\lambda^{(1)A} + \cdots,\\ \bar{\lambda}_A &= g^{1/2}\bar{\lambda}_A^{(0)} + g^{5/2}\bar{\lambda}_A^{(1)} + \cdots,\\ \phi_a &= g^0\phi_a^{(0)} + g^2\phi_a^{(1)} + \cdots\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

とするわけです。出発点としては

$$A_m^{(0)} = \bar{U}\partial_m U,\ \ \lambda^{(0)A} = \Lambda(\mathcal{M}^A) \tag{2.2.21}$$

ですね。まあしかしやってみると実は exact な解というのは g の lower order で完全に書けてしまうという状況が生じる。まず $\mathcal{N}=1$ の場合は leading order の解

$$A_m = g^{-1}A_m^{(0)},\ \ \lambda^A = g^{-1/2}\lambda^{(0)A},\ \ \bar{\lambda}_A = 0 \tag{2.2.22}$$

が exact な解になっている。$\mathcal{N}=2$ の場合は、もし scalar 場の期待値が 0 だったら低次の近似で

$$A_m = g^{-1}A_m^{(0)}.\ \ \lambda^A = g^{-1/2}\lambda^{(0)A},\ \ \bar{\lambda}_A = 0,\ \ \phi_a = g^0\phi_a^{(0)} \tag{2.2.23}$$

これが exact な solution になっている。しかし Seiberg-Witten 理論とかで考える場合は scalar 場の期待値がある場合を考えたいわけです。しかしその場合には非常に困難な現象

が起こりまして、もし scalar 場に期待値があれば、今まで構成してきた instanton 解というのは運動方程式の exact な解ではない。それは size-dependence をみてみると zero-size が一番小さいエネルギーを持っているということになって、これは Derrick の定理とかいうものでまとめられる定理の一つなのですが、これまで作った instanton 解は action を minimize しない。 minimize させようとすると潰れてしまう。ちょっとこれは困る。困るというか Affleck という人は次のようなことを考えました [19]。今この理論にある高い mass 次元を持つ operator を insert します。 Fadeev-Popov 流に insert して、これは高階微分を含んでいてもいいんですけど、そういう寄与によって instanton をある有限の size で minimize させるようなうまい高次元の operator を導入します。そうするとこの解というのはそういうある operator を insert した、 modify した理論での instanton なので、constrained instanton と呼ばれる。それである有限の size での instanton を使って計算した後に、そういう operator を decouple する。そうやって局所的にある有限の size でも使えるような instanton というものを定義しました。その instanton というのは order g の higher order で運動方程式を modify するわけですけども、実は今考えているような状況では、その高次の operator というのは低次の近似だというので、それで実際の寄与というのはここから出てきません。しかも scalar 場の期待値を十分大きくすると、 effective coupling が非常に小さくなる。だから一次の近似だけで理論が正確に予言できて、結局結論としてはそういう高次の operator を考えなくても、今まで考えてきた近似解を使って計算すれば instanton 計算ができる。そういうことを Affleck は主張しました。その近似の妥当性に関してはいろいろ議論はあるわけですけども、そういうものを使ってこれから計算していきます。特に漸近自由な理論で coupling が非常に小さくできるような場合に関しては、そういう近似は非常にいいだろう。実際それは Seiberg-Witten の厳密解とも非常にあっている。

2.3 Supersymmetric Collective Coordinates

それで、super collective coordinate 積分をこれから実行したい。これからやりたいことは、 supersymmetric な collective coordinate ψ^{iA} $(i = 1, \cdots, 2kN)$ を導入して、

$$\lambda^A(x) = g^{-1/2}\lambda^{(0)A}(x; X, \psi) + \widetilde{\lambda}^A(x; X, \psi) \tag{2.3.1}$$

と展開し、volume form を計算する。時間がないので結論だけ少し。まず、ゼロモードを特徴づけるものですが、 bosonic な collective coordinate と fermionic な collective coordinate を導入します。それで今までの bosonic な coordinate + fermionic な積分、この fermion の積分をゼロモードの積分とそうでない時に分ける。すると

$$\int \prod_{A=1}^{\mathcal{N}} [D\lambda^A][D\overline{\lambda}^A] = g^{4kN\mathcal{N}} \int \prod_{A=1}^{\mathcal{N}} \left\{ \prod_{i=1}^{2kN} d\psi^{iA} \left(\mathrm{Pfaff}\frac{1}{2}\Omega(X) \right)^{-1} [D\widetilde{\lambda}^A][D\overline{\lambda}^A] \right\} \tag{2.3.2}$$

となる。fermionic な measure に関しては、内積からくる Pfaffian というのの inverse が出てきます[7] 。これは Grassmann 積分から出てくる。後は作用を展開して評価してやる。

$$
\begin{aligned}
S[A_m,\lambda^A,\overline{\lambda}^A,\phi_a] &= S[g^{-1}A_m^{(0)}+\widetilde{A}_m, g^{-1/2}\lambda^{(0)A}+\widetilde{\lambda}^A,\overline{\lambda}^A,\phi_a] \\
&= -2\pi i\left(\frac{4\pi i}{g^2}+\frac{\theta}{2\pi}\right)k+S_{\mathrm{kin}}+S_{\mathrm{int}}
\end{aligned}
\tag{2.3.3}
$$

とばらすと、

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{kin}} &= \int d^4x\ \mathrm{tr}_N\left\{-\frac{1}{2}\widetilde{\overline{A}}^{\dot\alpha\alpha}\Delta_\alpha^{(+)\beta}\widetilde{A}_{\beta\dot\alpha}-2D_n\overline{\lambda}_A\bar\sigma_n\widetilde{\lambda}^A+D_n\phi_a D_n\phi_a\right\}, \\
S_{\mathrm{int}} &= \int d^4x\ \mathrm{tr}_N\Big\{-\lambda^{(0)A}\overline{\Sigma}_{aAB}[\phi_a,\lambda^{(0)B}]-2g^{1/2}[\widetilde{A}_n,\overline{\lambda}_A]\bar\sigma_n\lambda^{(0)A} \\
&\qquad -2g^{1/2}\lambda^{(0)A}\overline{\Sigma}_{aAB}[\phi_a,\overline{\lambda}^B]+\cdots\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.3.4}
$$

です。それでノンゼロモードについて積分してしまって、ゼロモードに対する積分は残ります。それを instanton effective action といいます。

$$
\begin{aligned}
&e^{-S_{\mathrm{eff}}} \\
&= e^{2\pi ik\tau}\int[D\widetilde{A}][Db][Dc][D\widetilde{\lambda}][D\overline{\lambda}][D\phi]\exp(-S_{\mathrm{kin}}-S_{\mathrm{int}}-S_{\mathrm{gh}})
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

実は積分した方の寄与は determinant で表されるのですが、それは supersymmetry によってほぼ cancel します。すこし詳しく言うと、Dirac operator の bilinear の determinant の比

$$
\frac{\det'\Delta^{(+)}}{\det\Delta^{(-)}}=\mu^{-4Nk}\quad(\Delta^{(+)}\equiv-\not{D}\overline{\not{D}},\ \Delta^{(-)}\equiv-\overline{\not{D}}\not{D})
\tag{2.3.6}
$$

になります。ゼロモードを除いた部分が det ′。この spectrum というのは、 fermion と boson で ゼロモードを除いた部分では等しい。Pauli-Villars の regularization を使うと、その差というのは、 regulator の方はゼロモード、ノンゼロモードを気にせずまわりますので、そのゼロモードをさっ引いた部分だけの Pauli-Villars regulator の mass が spectrum の比として出てくる、というわけで μ のベキが出るわけです。最終的には super の collective coordinate の積分というのは instanton effective action

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_k^{\mathcal{N}} &= \int_{\mathcal{M}_k}\omega^{\mathcal{N}}e^{-\widetilde{S}_{\mathrm{eff}}} \\
&= \left(\frac{\mu}{g}\right)^{4kN(4-\mathcal{N})}e^{2\pi ik\tau}\int\left\{\prod_{\mu=1}^{4kN}\frac{dX^\mu}{\sqrt{2\pi}}\prod_{A=1}^{\mathcal{N}}\prod_{i=1}^{2kN}d\psi^{iA}\right\}\frac{\sqrt{\det g(X)}}{(\mathrm{Pfaff}\,\Omega)^{\mathcal{N}}}e^{-\widetilde{S}_{\mathrm{eff}}(X,\psi)},
\end{aligned}
\tag{2.3.7}
$$

こういう形になる。

---

[7]編註: Phaffian というのは $2n\times 2n$ 反対称行列 $M_{ij}=-M_{ji}$ に対して

$$
\mathrm{Phaff}\,M=\epsilon^{i_1j_1i_2j_2\cdots i_nj_n}M_{i_1j_1}M_{i_2j_2}\cdots M_{i_nj_N}
$$

で定められるもので、行列式の平方根になります: $\det M=(\mathrm{Phaff}M)^2$.

後、 instanton effective action の具体的な評価ですが、ϕ のゼロモードを代入して、期待値がある場合はこういうふうに $\widetilde{S}$ も期待値があるということが生じまして、

$$\widetilde{S} = \int d^4x \,\mathrm{tr}_N (D_n\phi_a^{(0)} D_n\phi_a^{(0)} - \lambda^{(0)}\overline{\Sigma}_{aAB}[\phi_a^{(0)}, \lambda^{(0)B}]) \tag{2.3.8}$$

となる。ここでは、抽象的に bosonic な collective coordinate とか fermionic な collective coordinate を使っての積分の形なんですが、実際の計算では ADHM 変数による積分に

$$(X, \psi) \to (a, \mathcal{M}) \tag{2.3.9}$$

と焼き直してやる。すると最終的には instanton effective action というのはこういう形になります。

$$\begin{aligned}\widetilde{S} &= 4\pi^2 \mathrm{tr}_k \left\{ \frac{1}{2}\overline{\Sigma}_{aAB}\overline{\mu}^A\phi_a^0\mu^B + \overline{w}^{\dot\alpha}\phi_a^0\phi_a^0 w_{\dot\alpha} - \varphi_a \mathbf{L}\varphi_a \right\} \\ &= 4\pi^2 \mathrm{tr}_k \Bigg\{ \frac{1}{2}\overline{\Sigma}_{aAB}\overline{\mu}^A\phi_a^0\mu^B + \overline{w}^{\dot\alpha}\phi_a^0\phi_a^0 w_{\dot\alpha} \\ &\quad - \left(\frac{1}{4}\overline{\Sigma}_{aAB}\overline{\mathcal{M}}^A\mathcal{M}^B + \overline{w}^{\dot\alpha}\phi_a^0 w_{\dot\alpha}\right)\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{4}\overline{\Sigma}_{aCD}\overline{\mathcal{M}}^C\mathcal{M}^D + \overline{w}^{\dot\beta}\phi_a^0 w_{\dot\beta}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

結局

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}_k} \omega^{(\mathcal{N})} =& \frac{c_k^{(\mathcal{N})}}{\mathrm{vol}\,U(k)} \int d^{4k(N+k)}a \prod_{A=1}^{\mathcal{N}} d^{2k(N+k)}\mathcal{M}^A |\det \mathbf{L}|^{1-\mathcal{N}} \\ &\times \prod_{r=1}^{k^2} \Bigg\{ \prod_{c=1}^{3} \delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_k\, T^r(\tau^{c\dot\alpha}_{\dot\beta}\overline{a}^{\dot\beta}a_{\dot\alpha}\right) \\ &\times \prod_{A=1}^{\mathcal{N}}\prod_{\dot\alpha=1}^{2} \delta\left(\mathrm{tr}_k\, T^r(\overline{\mathcal{M}}^A a_{\dot\alpha} + \overline{a}_{\dot\alpha}\mathcal{M}^A)\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

ただし、

$$c_k^{(\mathcal{N})} = 2^{-k(k-1)/2 + kN(2-\mathcal{N})}\pi^{2kN(1-\mathcal{N})}. \tag{2.3.12}$$

この a とか $\mathcal{M}$ というのは ADHM の constraint を満たしているので、δ 関数を挿入してその条件を課します。あと $|\det \mathbf{L}|^{1-\mathcal{N}}$ は Jacobian からくる factor なんですが、それを説明するには、hyper Kähler 構造を使って説明するのが一番スマートです。それはちょっと時間の都合上説明できないので、こういう factor がくると納得して下さい。それで次回はこれを使っていろいろ具体的な物理量を計算していきたいと思います。それで Seiberg-Witten 理論の紹介とこういうふうに計算した結果との比較、時間があればこれをもう少しスマートに計算する方法を説明します。[8]

通常のゲージ理論の立場からの instanton 計算に戻って、前回全く駆け足で説明してしまった moduli space に関する積分、それは bosonic な ADHM instanton moduli と fermionic

[8] ここで 1 日目の講義が終わる。実際には、 2 日目の講義は §3.1 の Seiberg-Witten theory の説明から始まり、その後この続きをやったが、この講義ノートでは内容のつながりを優先して順番を入れ替えてある。

な moduli がありまして、それについて積分します。そしてそれだと複雑な volume form を見つけないといけないので、それを今までの性質のわかっている ADHM 変数についての積分に直してやります。その際に constraint を δ 関数的に instanton moduli 上の積分に導入しなさいということでした。更に、$U(k)$ というのが作用しているので $\mathrm{vol}\,U(k)$ で割っています。後、 Jacobian から生じる factor があります。そのままでは使いづらいので、δ 関数をさっき duality 変換でやったような [9] exp のところに格上げしてやると、計算が非常に便利である。各 constraint に対応して、補助場を導入します:

$$
\begin{aligned}
\chi_a &: \text{Hermitian}\ \ k\times k,\ \ \text{matrices}\ (a=1,\cdots,2(\mathcal{N}-1)),\\
\vec{D} &: \text{Hermitian}\ \ k\times k\ \ \text{matrices}\\
\overline{\psi}^{\dot\alpha}_A &: \text{Grassmann}\ \ k\times k\ \ \text{matrices}\ (A=1,\cdots,\mathcal{N}).
\end{aligned}
$$

Grassmann の $\bar\psi$ というのは、fermionic な ADHM constraint に couple します。普通の ADHM constraint は D です。さっき Jacobian に付随する場を導入しましたけど、それを出すために χ という場を導入しました。$\det\mathbf{L}$ の何乗というのはこの項から出てきます。そうすると、何か計算したい instanton の measure というのは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{(\mathcal{N})}_k =& \frac{2^{2(2-\mathcal{N})}\pi^{(2-3\mathcal{N})}c^{(\mathcal{N})}_k}{\mathrm{vol}\,U(k)}\int d^{4k(N+k)}a\, d^{3k^2}D\, d^{2(\mathcal{N}-1)k^2}\chi\\
&\times\prod_{A=1}^{\mathcal{N}} d^{2k(N+k)}\mathcal{M}^A\, d^{2k^2}\overline{\psi}_A\, e^{-\widetilde{S}-\widetilde{S}_{\mathrm{L.M.}}}
\end{aligned}
\tag{2.3.13}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S} &= 4\pi^2\mathrm{tr}_k\Bigg\{|w_{\dot\alpha}\chi_a+\phi^0_a w_{\dot\alpha}|^2-[\chi_a,a'_n]^2+\frac{1}{2}\overline{\Sigma}_{aAB}\overline{\mu}^A(\mu^B\chi_a+\phi^0_a\mu^B)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\overline{\Sigma}_{aAB}\mathcal{M}'^A\mathcal{M}'^B\chi_a\Bigg\},\\
\widetilde{S}_{\mathrm{L.M.}} &= -4i\pi^2\mathrm{tr}_k\left\{\overline{\psi}^{\dot\alpha}_A(\overline{\mathcal{M}}^A a_\alpha+\overline{a}_{\dot\alpha}\mathcal{M}^A)+\vec{D}\cdot\vec{\tau}^{c\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\overline{a}^{\dot\beta}a_{\dot\alpha}\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.3.14}
$$

こういう風になります。 L.M. は Lagrange Multipliers の略です。これからこれを出発点に議論をしていきたいわけですが、$\widetilde{S}+\widetilde{S}_{\mathrm{L.M.}}$ は instanton の moduli space 上の effective な action です。

以上の ADHM 変数の中にも supersymmetry というのがあります。これは brane の立

[9] 編註 : このノートでは 3.3.5 節です。

場で理解できるものでもありますけども、天下りに書いておきますと

$$\delta a'_{\alpha\dot{\alpha}} = i\xi_{\dot{\alpha}A}\mathcal{M}'^{A}_{\alpha}, \tag{2.3.15}$$

$$\delta\mathcal{M}'^{A}_{\alpha} = -2i\Sigma^{AB}_{a}\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}_{B}[a'_{\alpha\dot{\alpha}},\chi_a], \tag{2.3.16}$$

$$\delta w_{\dot{\alpha}} = i\xi_{\dot{\alpha}A}\mu^{A}, \tag{2.3.17}$$

$$\delta\mu^{A} = -2i\Sigma^{AB}_{a}\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}_{B}(w_{\dot{\alpha}}\chi_a + \phi^0_a w_{\dot{\alpha}}), \tag{2.3.18}$$

$$\delta\chi_a = -\Sigma^{AB}_{a}\xi_{\dot{\alpha}A}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}_{B}, \tag{2.3.19}$$

$$\delta\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}_{A} = 2\overline{\Sigma}_{abA}{}^{B}[\chi_a,\chi_b]\overline{\xi}^{\dot{\alpha}}_{B} - i\vec{D}\cdot\vec{\tau}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\xi^{\dot{\beta}}_{A}, \tag{2.3.20}$$

$$\delta D = -\vec{\tau}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\Sigma^{AB}_{a}\overline{\xi}_{\dot{\alpha}B}[\overline{\psi}^{\dot{\beta}}_{A},\chi_a], \tag{2.3.21}$$

こういう対称性があります。これは後で説明する localization のときに使う式です。特に $\mathcal{N}=2$ の場合に関しては、 action はこういう風になります:

$$\begin{aligned}\widetilde{S} =& 4\pi^2\mathrm{tr}_k\Bigg\{|w_{\dot{\alpha}}\chi_a + \phi^0_a w_{\dot{\alpha}}|^2 - [\chi_a, a'_n]^2\\ &+ \frac{i}{2}\overline{\mu}^{A}(\mu_A\chi^\dagger + \phi^{0\dagger}\mu_A) + \frac{i}{2}\mathcal{M}'^{a}\mathcal{M}'_{A}\chi^\dagger + \frac{1}{4}\sum_{f=1}^{N_f}\kappa_f\widetilde{\kappa}_f(\chi - g^{-1}m_f)\Bigg\},\\ \chi =& \chi_1 - i\chi_2,\ \phi^0 = \phi^0_1 - i\phi^0_2.\end{aligned}$$

最後の項に出てきたのは flavor がある場合の effective な action を書いたのですが、これはちょっと書いてしまいました。今はこれはないものと思います。

さて、 ADHM 変数のなかで、特徴的な役割をはたす変数があります。それは $\mathrm{tr}\, a'$ の寄与で、

$$X_n = -k^{-1}\mathrm{tr}_k\, a'_n \tag{2.3.22}$$

これは instanton の中心を表します。super 変換で X_n につながっている

$$\xi^{A} = \frac{i}{4}\mathrm{tr}_k\,\mathcal{M}'^{A}, \tag{2.3.23}$$

これは supertranslation を表す変数です。instanton の measure の中で instanton の位置と超並進の部分だけを取り出してきます。それ以外を $\widetilde{\mathcal{M}}$ で表し、 centered instanton moduli space といいます。すなわち

$$\mathcal{M}_k = \widetilde{\mathcal{M}}_k \times \mathbb{R}^{4|2\mathcal{N}} \tag{2.3.24}$$

と分解する。その部分の対応する分配関数を

$$\widetilde{\mathcal{Z}}^{\mathcal{N},N_F}_{k} = \int_{\widetilde{\mathcal{M}}_k}\omega^{(\mathcal{N},N_F)}e^{-\widetilde{S}-\widetilde{S}_{\mathrm{L.M.}}} \tag{2.3.25}$$

と表します。

2.4 Prepotential and Centered Partition Function

それでこれから具体的に Yang-Mills 理論と (低エネルギー有効) 場の理論での計算との対応を見ていくことにします。今 $\mathcal{N}=2$ $SU(N)$ Yang-Mills 理論を考えて、その scalar field が期待値を持つという状況を考えます。低エネルギー有効理論は Cartan 部分、すなわち abelian な $\mathcal{N}=1$ の superfield

$$W_{\alpha u}=(A_{mu},\lambda_u),\Phi_u=(\phi_u,\psi_u)\ (u=1,\cdots,\mathrm{rank}\,G)$$

で記述され、$SU(N)$ ですので $U(1)$ の superfield が $\mathrm{rank}\,SU(N)=N-1$ 個あります。

$$S_{\mathrm{eff}}=\frac{1}{4\pi}\int d^4x\,\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\tau_{uv}(\Phi)W_u^{\alpha}W_{v\alpha}\bigg|_{\theta^2}+\Phi_{\mathrm{D}u}(\Phi)\Phi_u^{\dagger}\bigg|_{\theta^2\bar{\theta}^2}\right\} \tag{2.4.1}$$

ですね[10]。それで effective 理論はこの abelian な vector multiplet と chiral multiplet との相互作用を用いて表すことが出来て、ここに effective な coupling τ_{uv} とその dual な場 Φ_{D} が出てきます。それを決めているのが prepotential と呼ばれる関数 [11] です:

$$\Phi_{\mathrm{D}u}(\Phi)=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\Phi_u},\ \tau_{uv}(\Phi)=\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\Phi_u\partial\Phi_v}. \tag{2.4.2}$$

prepotential には 1-loop の効果から来る perturbation の項とあと instanton の寄与から来る項があります。

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\mathrm{pert}}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda^{k(2N-N_f)}\mathcal{F}_k \tag{2.4.3}$$

これからいろいろな物理量が計算できるのですが、今 anti-chiral な fermion の 4 点関数というのを有効理論から読み取ってみたい。それはどこから入ってくるかというと、まず λ というのは gauge multiplet の項ですから (2.4.1) 式の第一項に、$\overline{\lambda}$ も同じ項に入ってくる。第二項は fermion としては ψ と $\psi^{\dagger}$ しか入ってこない。$\tau_{uv}(\Phi)$ の中には ψ と $\psi^{\dagger}$ も入ってくるので、第一項から 4 点関数が出てきます。だから ψ を引きずり出してくるには、τ をさらにもう一回微分する。それで 2 個出してくるためには、τ を二回微分する。ですので、有効理論では prepotential の 4 階微分が 4 点の Green 関数を記述します。あと prepotential を微分するとバーがついてない λ の項が微分した項から引きずり出されます。それと今導入した $\overline{\lambda}$ が Wick の定理によって contraction します。contraction すると propagator が出てきます。おしまいに instanton の寄与、その特徴的な scale がここに表れてきます。すべての寄与をまとめると、

$$\begin{aligned}&\langle\overline{\lambda}_{u_1}^{\dot{\alpha}}(x_1)\overline{\lambda}_{u_2}^{\dot{\beta}}(x_2)\overline{\psi}_{u_3}^{\dot{\gamma}}(x_3)\overline{\psi}_{u_4}^{\dot{\delta}}(x_4)\rangle\\ &=\Lambda^{k(2N-N_f)}\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial^4\mathcal{F}_k}{\partial\phi_{u_1}^0\partial\phi_{u_2}^0\partial\phi_{u_3}^0\partial\phi_{u_4}^0}\\ &\quad\times\int d^4X\,\overline{S}^{\dot{\alpha}\alpha}(x_1,X)\overline{S}_{\alpha}^{\dot{\beta}}(x_2,X)\overline{S}^{\dot{\gamma}\gamma}(x_3,X)\overline{S}_{\gamma}^{\dot{\delta}}(x_4,X)\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

[10] この表式は超場による記述であり, $|_{\theta^2}$ は超場を Grassmann 数 θ で展開したときの θ^2 に比例する項を取り出すことを表す. $\int d^2\theta$ と同じ. $|_{\theta^2\bar{\theta}^2}$ も同様に $\int d^2\theta d^2\bar{\theta}$ を意味する.

[11] 編註: 詳細は 3.3.2 節を参照してください

ただし

$$\overline{S}(x,X)=\frac{1}{4\pi^2}\partial\!\!\!/ \frac{1}{(x-X)^2} \tag{2.4.5}$$

となります。これが有効理論から出てきた 4 点の Green 関数の計算です。だから prepotential を知るには、係数のこれを計算すればよい。一方でゲージ理論の立場からどう計算するかというと、これはもう素朴に path-integral から計算します。

$$\begin{aligned}
&\langle \overline{\lambda}^{\dot\alpha}_{u_1}(x_1)\overline{\lambda}^{\dot\beta}_{u_2}(x_2)\overline{\psi}^{\dot\gamma}_{u_3}(x_3)\overline{\psi}^{\dot\delta}_{u_4}(x_4)\rangle \\
&=\left(\frac{\mu}{g}\right)^{k(2N-N_f)} e^{2\pi i k\tau}\int_{\mathcal{M}_k}\omega^{(\mathcal{N}=2,N_f)}\, e^{-\widetilde{S}}\overline{\lambda}^{\dot\alpha}_{u_1}(x_1)\overline{\lambda}^{\dot\beta}_{u_2}(x_2)\overline{\psi}^{\dot\gamma}_{u_3}(x_3)\overline{\psi}^{\dot\delta}_{u_4}(x_4)
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

というわけです。この Green 関数を計算するわけですが、 massive mode に関しては積分できてしまっていて、あとは zero mode の積分をすればいい。$\omega^{\mathcal{N}=2,N_f}$ は instanton moduli の volume form で、$\widetilde{S}$ は instanton の effective action です。被積分関数には fermion の classical な zero mode に依存する部分が登場する。それは運動方程式を解いて具体的に構成します。

その zero mode dependence というのは、一番簡単なのは supersymmetry を使って、supersymmetric な zero mode のところと関係させるものです。これを具体的な supersymmetric な変換で使ってやると

$$\delta\overline{\lambda}_A=-ig^{1/2}\overline{\Sigma}_{aAB}\overline{D\!\!\!/}\phi^a\xi^B=-g^{1/2}\overline{D\!\!\!/}\phi^\dagger\xi_A \tag{2.4.7}$$

となって、ここに ξ^B という変換パラメタが出てきます。この式に scalar の微分 $\overline{D\!\!\!/}\phi^\dagger$ が出てくるのですが、$\phi^\dagger$ は方程式

$$D^2\phi^\dagger=-g\chi\widetilde{\chi} \tag{2.4.8}$$

を満たします。今ちょっと matter がある場合を考えていたので、matter のない場合は右辺は 0 ですが、ある境界条件として無限遠では $\phi^{0\dagger}$ という期待値を持つような方程式の解をとります。それは

$$\phi^\dagger=\overline{U}\begin{pmatrix}\phi^{0\dagger} & 0\\ 0 & \varphi^\dagger\mathbf{1}_2\end{pmatrix}U \tag{2.4.9}$$

という形になります。この式を上の定義式に代入します。$\varphi^\dagger$ というのはまた複雑な式ですが、

$$\varphi^\dagger=\mathbf{L}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\sum_{f=1}^{N_F}\kappa_f\widetilde{\kappa}_f+\overline{w}^{\dot\alpha}\phi^{0\dagger}w_{\dot\alpha}\right) \tag{2.4.10}$$

という風に、$\mathbf{L}^{-1}$ というまた何かの operator の inverse として出てくる。今知りたいのは長距離、互いに instanton が非常に離れた極限の場合でして、その漸近形というのは

$$(\overline{D\!\!\!/}\phi^\dagger)_{uu}=-\partial\!\!\!/\frac{1}{(x-X)^2}w_{u\dot\alpha}\left\{\phi^{0\dagger}_u\mathbf{1}_k+\mathbf{L}^{-1}\left(\overline{w}^{\dot\beta}\phi^{0\dagger}w_{\dot\beta}-\frac{1}{4}\sum_{f=1}^{N_F}\kappa_f\widetilde{\kappa}_f\right)\right\}\overline{w}^{\dot\alpha}_u \tag{2.4.11}$$

とかかれます。この表式を (2.4.7) 式に代入し、 effective action の表式と比較すると anti-chiral fermion の長距離での振る舞いが

$$\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}_u(x) = 2\sqrt{g}\overline{S}^{\dot{\alpha}\alpha}(x,X)\epsilon_{AB}\xi^A_\alpha \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \phi^0_u} + \cdots \tag{2.4.12}$$

と表されて、instanton の effective action を ϕ^0 で微分したものに propagator をかけたものというのが計算によってわかります。

それを (2.4.6) に代入しますと、effective action から ϕ^0 の微分を取り出してきて、あとは propagator をかけて、

$$\begin{aligned}
&\langle \overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{u_1}(x_1)\overline{\lambda}^{\dot{\beta}}_{u_2}(x_2)\overline{\psi}^{\dot{\gamma}}_{u_3}(x_3)\overline{\psi}^{\dot{\delta}}_{u_4}(x_4)\rangle \\
&= \frac{1}{4\pi^2}g^2\left(\frac{\mu}{g}\right)^{k(2N-N_f)} e^{2\pi i k\tau}\frac{\partial^4}{\partial\phi^0_{u_1}\partial\phi^0_{u_2}\partial\phi^0_{u_3}\partial\phi^0_{u_4}}\int_{\widetilde{\mathcal{M}}_k}\omega^{(\mathcal{N}=2,N_f)}\, e^{-\widetilde{S}} \\
&\quad \times \int d^4X\overline{S}^{\dot{\alpha}\alpha}(x_1,X)\overline{S}^{\dot{\beta}}_{\alpha}(x_2,X)\overline{S}^{\dot{\gamma}\gamma}(x_3,X)\overline{S}^{\dot{\delta}}_{\gamma}(x_4,X)
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

となります。この X というのは instanton moduli の変化を表す量で、あと fermionic な moduli の寄与を代入してやらなければいけないのですが、この ξ というのはこの中に含まれる。そうすると今考えている path-integral のうち、この部分と fermionic な partner 、supermoduli の方はここで除けましたので、それを取り除いた centered instanton moduli space というものがここに出てきます。それと prepotential 、有効理論から得られた式を関係づけますと、 4 階微分をして、低次の微分の方はちょっとこの議論ではどうなるか決定はされないのですが、他の operator[12]を考えると、低次の項も決定される場合もあります。今の場合では up to 4π で $\mathcal{F}_k$ と centered instanton partition function というのは同一視されます。すなわち

$$\mathcal{F}_k = g^{-k(2N-N_f)+2}\hat{\mathcal{Z}}^{(\mathcal{N}=2,N_f)}_k, \quad \Lambda^{2N-N_f}_{N_f} = \mu^{2N-N_f}e^{2\pi i\tau} \tag{2.4.14}$$

ですので microscopic な計算では、右辺を計算すれば、直接 prepotential の係数が決定できます。

（質） (2.4.12) 式を導入するときに長距離極限の近似をしたような気がするのですが、近似したということは (2.4.13) のところが = じゃなくて ≒ のような気がするのですが。

（答） ここでは揺らぎの項は高階微分の項なので、高階微分を切っただけなので、 2 derivative の所まではこれで OK です。あと g の高次の項が残りますが、運動方程式を g の摂動で、どんどん解いていかなければいけないんですけど、それはいま constraint instanton で一番低次の部分だけでよいのことがわかります。それもこういう情報しか含んでいないので、そこだけを見ます。

2.5 Example: one-instanton contribution in $\mathcal{N}=2$ $SU(N)$ theory

具体的に例を計算するのですが、ちょっとこれも詳しく説明していると時間がかかって仕方がないので、個人的な会話で要望があった $SU(N)$ で 1-instanton の場合に microscopic

[12] $\mathrm{tr}\phi^2$ 等

な立場からどう計算するかということを説明したいと思います。あとで Nekrasov の方法とかそういう方法と比べてみて、どういうことになっているかということを議論したいと思います。少し駆け足でやりましょう。いま 1-instanton なのでやはり instanton の index というのはありません。だから ADHM データは spinor の足だけを持ち、

$$a = \begin{pmatrix} w \\ a' \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

となります。w というのは $2 \times N$ 行列で、a' というのは 2×2 の spinor の足だけを持つ。instanton の effective action というのは trace を外したものになります。具体的に書くと、

$$\begin{aligned} \widetilde{S} = 4\pi^2 \Bigg\{ & |w_{u\dot{\alpha}}\chi + \phi^0 w_{u\dot{\alpha}}|^2 + \frac{i}{2}\overline{\mu}_u^A(\mu_{uA}\chi^* + \phi_u^{0*}\mu_{uA}) \\ & + \frac{1}{4}\sum_{f=1}^{N_f} \kappa_f \widetilde{\kappa}_f(\chi - m_f) \Bigg\} + \widetilde{S}_{\text{L.M.}}, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

$$\widetilde{S}_{\text{L.M.}} = -4i\pi^2 \left\{ \overline{\psi}_A^{\dot{\alpha}}(\overline{\mu}_u^A w_{u\dot{\alpha}} + \overline{w}_{u\dot{\alpha}}\mu_u^A + \vec{D} \cdot \vec{\tau}_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} w_u^{\dot{\beta}} w_{u\dot{\alpha}} \right\} \tag{2.5.3}$$

という形をしています[13]。

ちゃんと積分しましょう。はじめに μ という変数に注目しましょう。これは Grassmann の変数です。まずこの変数を積分しましょう。μ に関してまず平方完成します。μ に関してこういう並進を行います:

$$\mu_u^A \to \mu_u^A - \frac{2w_{u\dot{\alpha}}}{\alpha_u^*}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}A}, \ \ \overline{\mu}_u^A \to \overline{\mu}_u^A + \frac{2\overline{w}_{u\dot{\alpha}}}{\alpha_u^*}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}A}. \tag{2.5.4}$$

α_u というのは

$$\alpha_u = \chi + \phi_u^0, \ \alpha_u^* = \chi^* + \phi_u^{0*}$$

という量です。$w_{u\dot{\alpha}}$ は ADHM 変数で、ϕ^0 は scalar の真空期待値で、χ というのは補助場です。そうすると

$$\begin{aligned} \widetilde{S} =& 4\pi^2 \Bigg\{ |w_{u\dot{\alpha}}\chi + \phi^0 w_{u\dot{\alpha}}|^2 + \frac{i}{2}\left(\overline{\mu}_u^A + \frac{2\overline{w}_{u\dot{\alpha}}}{\alpha_u^*}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}A}\right)\left(\mu_{uA} - \frac{2w_{u\dot{\beta}}}{\alpha_u^*}\overline{\psi}_A^{\dot{\beta}}\right) \Bigg\} \\ & + 4\pi^2 \frac{i}{2}\left(- \frac{4\overline{w}_{u\dot{\alpha}}w_{u\dot{\beta}}}{\alpha_u^*}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}A}\overline{\psi}_A^{\dot{\beta}} \right) + \vec{D} \cdot \vec{\tau}_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \overline{w}_u^{\dot{\beta}} w_{u\dot{\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

となり、いま、 (2.5.4) の shift をしてやると、

$$\left(\overline{\mu}_u^A + \frac{2\overline{w}_{u\dot{\alpha}}}{\alpha_u^*}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}A}\right)\left(\mu_{uA} - \frac{2w_{u\dot{\beta}}}{\alpha_u^*}\overline{\psi}_A^{\dot{\beta}}\right) \tag{2.5.6}$$

が $\overline{\mu}_u^A \mu_{uA}$ だけになります。そうすると μ に関して、linear な部分は消えてしまいますので、普通に Grassmann の積分をすることが出来る。そこから

$$\prod_{u=1}^{N} (2\pi^2 \alpha_u^*)^2 \tag{2.5.7}$$

[13] (2.5.2) の 2 行目第一項は 質量 m_f の N_f 個の物質場を入れる場合生じる項.

という項が出てきます。

shift をして出てきたおつりの部分というのは $\overline{\psi}$ に関する bi-linear になりまして、(2.5.5) の二行目の第一項になります。あと linear constraint から出てくる ψ の項は、(2.5.6) に含めました。matter の方は独立に積分できて、

$$\int d^{N_F}\kappa d^{N_F}\widetilde{\kappa}\exp\Big(-\pi^2\sum_{f=1}^{N_F}\kappa_f\widetilde{\kappa}_f(\chi-m_f)\Big)=\pi^{2N_F}\prod_{f=1}^{N_F}(m_f-\chi) \tag{2.5.8}$$

という factor が出て来るだけなんで、次にやることは w という複素変数に関する積分です。w が出て来る項というのは 2 次なのでその Gauss 積分が出来ます。それをやるには、次の恒等式を使ってやります:

$$\begin{aligned}\int d^{2N}wd^{2N}\bar{w}\exp\left(-4\pi^2A_u\bar{w}_u^{\dot{\alpha}}w_{u\dot{\alpha}}+4i\pi^2\vec{B}_u\cdot\vec{\tau}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{w}_u^{\dot{\beta}}w_{u\dot{\alpha}}\right)&\\=(2\pi)^{-2N}\prod_{u=1}^{N}\frac{1}{A_u^2+\vec{B}_u^2}.&\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

いま、これは w と $\bar{w}$ の spinor の足の潰し方が 2 種類のタイプの quadratic な項がありまして、一つは直接潰すタイプの項、もうひとつは spinor の足が違って、 Pauli 行列が間に介在してベクトルの変換性にしてから係数がかかっているタイプです。

(2.5.5) に適用するには、A_u^2 を $|\alpha_u|^2$ として、$\vec{B}_u$ というのは $\vec{D}+\vec{\Xi}_u$ とすればよいです。ただし $\vec{\Xi}_u$ というのは $\overline{\psi}$ についての bi-linear

$$\vec{\Xi}_u=(\alpha_u^*)^{-1}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}^{A}\vec{\tau}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\overline{\psi}_A^{\dot{\beta}} \tag{2.5.10}$$

です。かなり細かいことをやってますが、結局こういう $w,\overline{w}$ で積分すると、

$$\hat{\mathcal{Z}}_k^{(\mathcal{N}=2,N_F)}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^2\chi d^3D\prod_{A=1}^{2}d^2\overline{\psi}_A\prod_{u=1}^{N}\frac{\alpha_u^{*2}}{|\alpha_u|^4+(\vec{D}+\vec{\Xi}_u)^2}\prod_{f=1}^{N_F}(m_f-\chi) \tag{2.5.11}$$

こういう積分になります。

次に $\psi_{\dot{\alpha}}^A$ についての積分を見てみます。これも Grassmann の変数なので積分できます。まず基本的な方程式で Ξ に依存する所だけを取り出してやります。いま ψ^A の添字の A は第 1 成分、第 2 成分あってそれぞれに関して 2 成分の spinor なので、 4 つの fermion があればそこで積分は終わってしまいます。ですから Ξ に依存した項で、

$$\int\prod_{A=1}^{2}d^2\overline{\psi}_A\Xi_u^c\Xi_v^d \tag{2.5.12}$$

という 2 個入ってくる項を取り出します。これは定義式に従って計算すると

$$=-8\frac{\delta^{cd}}{\alpha_u^*\alpha_v^*} \tag{2.5.13}$$

となります。ですのでいま F として、

$$F(\Xi)=\prod_{u=1}^{N}\frac{\alpha_u^{*2}}{|\alpha_u|^4+(\vec{D}+\vec{\Xi}_u)^2} \tag{2.5.14}$$

と積の形にとります。F から 2 つ Ξ を引っ張り出してきて、それであとの Ξ は 0 においてしまってもよろしい。すなわち Taylor 展開して 2 次の項を引っ張ってきます。そこの係数には積分したとき (2.5.13) のような係数がつく。まとめると、

$$\int \prod_{A=1}^{2} d^2\overline{\psi}_A F(\Xi) = -4 \sum_{u,v=1}^{N} \frac{1}{\alpha_u^* \alpha_v^*} \frac{\partial^2 F(\Xi)}{\partial \Xi_u^c \partial \Xi_v^c}\bigg|_{\Xi=0}. \tag{2.5.15}$$

これを上手い具合に評価することが出来て、実はこれは多分直接やるしかないと思うんですが、χ^* と呼ばれるもの、補助場の conjugate の方に関して 2 階微分したものに等しい。

$$\sum_{u,v=1}^{N} \frac{1}{\alpha_u^* \alpha_v^*} \frac{\partial^2 F(\Xi)}{\partial \Xi_u^c \partial \Xi_v^c}\bigg|_{\Xi=0} = \frac{1}{\vec{D}^2} \frac{\partial^2 F(\Xi=0)}{\partial \chi^{*2}}. \tag{2.5.16}$$

こういう等式が成り立ちます。これを使いますと、(2.5.11) 式は

$$\hat{\mathcal{Z}}_k^{(\mathcal{N}=2,N_F)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2\chi \int d^3 D \left(-\frac{4}{\vec{D}^2} \right) \frac{\partial^2 F(\Xi=0)}{\partial \chi^{*2}} \prod_{f=1}^{N_F} (m_f - \chi) \tag{2.5.17}$$

という積分になります。残っている補助場というのは χ と $\vec{D}$ です。

D 積分に関しては、$\Xi = 0$ においたものというのは

$$\int \frac{d^3 D}{\vec{D}^2} \prod_{u=1}^{N} \frac{\alpha_u^{*2}}{|\alpha_u|^4 + \vec{D}^2} \tag{2.5.18}$$

という形になります。これはかなり簡略化されてきて、今度は補助場に関する積分を行うことが出来ます。これは極座標に直して、角方向と動径方向に直します：

$$\begin{aligned} \int dD d\Omega_3 \prod_{u=1}^{N} \frac{\alpha_u^{*2}}{|\alpha_u|^4 + D^2} &= 4\pi \int_0^\infty dD \prod_{u=1}^{N} \frac{\alpha_u^{*2}}{|\alpha_u|^4 + D^2} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^\infty dD \prod_{u=1}^{N} \frac{\alpha_u^{*2}}{|\alpha_u|^4 + D^2}. \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

この D というのは 0 から ∞ ですけれも、出てきた関数というのは偶関数なので、積分区間を $-\infty$ から $+\infty$ までに拡大します。それで、それを複素関数の方法によって無限遠を回る半円を付け加えて、留数積分を行います。留数は、

$$D = \pm i |\alpha_u|^2 \tag{2.5.20}$$

という位置で出てきますが、いまきいてくる項はプラスの方なので、そこの留数を拾ってきます。すると

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\infty}^\infty dD \prod_{u=1}^{N} \frac{\alpha_u^{*2}}{|\alpha_u|^4 + D^2} &= 4\pi^2 i \sum_{u=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\prod_{v=1}^{N} \frac{\alpha_v^{*2}}{|\alpha_v|^4 + D^2}, D = i|\alpha_u|^2 \right) \\ &= 2\pi^2 \sum_{u=1}^{N} \frac{\alpha_u^*}{\alpha_u} \prod_{\substack{v=1 \\ (\neq u)}}^{N} \frac{\alpha_v^{*2}}{|\alpha_v|^4 - |\alpha_u|^4} \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

そうして出てきた式が、ついに到達した

$$\hat{\mathcal{Z}}_k^{(\mathcal{N}=2,N_F)} = -\pi^{-1}\int d^2\chi \frac{\partial^2}{\partial\chi^{*2}} f_1(\chi,\chi^*) f_2(\chi) \tag{2.5.22}$$

です。ただし

$$f_1(\chi,\chi^*) = \sum_{u=1}^{N} \frac{\alpha_u^*}{\alpha_u} \prod_{v\neq u}^{N} \frac{\alpha_v^{*2}}{|\alpha_v|^4 - |\alpha_u|^4}, \tag{2.5.23}$$

$$f_2(\chi) = \prod_{f=1}^{N_F} (m_f - \chi). \tag{2.5.24}$$

まだ χ に関する積分が残っています。それで戻りまして、f_2 というのは matter から来る項なので、これは matter がなしの場合は 1 とおいていい。しかもこれが入っていても χ^* が入っていないため、被積分関数は全微分ですので、Stokes の定理を使って変形することが出来ます。効いてくる項は積分が singular な部分、それは分母が 0 になる点で 2 種類ある。一つは $\alpha_u = 0$ になる点、あと分母の $|\alpha_v|^4 - |\alpha_u|^4$ が 0 になる項です。実は後者の差が 0 になる方は u と v が逆転すると符号が逆になって出て来るので、ここから出て来る singularity の方は和をとると cancel します。あと無限遠もありますので、出てきうる singularity というのは $\alpha_u = 0$、これは χ が $-\phi_u$ の真空期待値を持つ点で、あと無限遠の点です。

一つの singularity をとってそのまわりで極座標を取りまして、具体的に積分を書き下してやります。単に複素関数の公式ですが、特異点からのずれを $re^{i\theta}$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial\chi^*} = \frac{e^{i\theta}}{2r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.5.25}$$

です。反正則に関する座標を極座標で表したのが右辺の等式で、それを 2 つ掛け合わせましょう。これは少し書き直して、θ に関する微分が初めに出て来る項とあと動径の方向の微分、

$$\frac{\partial^2}{\partial\chi^{*2}} = \frac{e^{2i\theta}}{r}\partial_r(2 + r\partial_r) + \partial_\theta(\cdots) \tag{2.5.26}$$

こういうふうに書き直してやります。θ に関する微分の方はこの被積分関数が θ に関して一価なので、 0 から 2π まで積分してしまうと、これは周期性によって消えてしまいます。それで効いてくるのは第一項の方です。一回 r について積分してしまいますと、 一階微分が残って、あとは θ に関する積分が残ります：

$$\frac{1}{4\pi}\left(2 + r\frac{\partial}{\partial r}\right)\int_0^{2\pi} d\theta e^{2i\theta} f_1(r,\theta) f_2(re^{i\theta}). \tag{2.5.27}$$

ここでこの contour 積分をするんですが、極座標で表しますと、$\alpha_u = 0$ のまわりで展開しているので、

$$f_1(r,\theta) = \sum_{u=1}^{N} e^{-2i\theta} \prod_{v\neq u} \frac{\alpha_v^{*2}}{|\alpha_v|^4 - r^4}, \tag{2.5.28}$$

$$f_2(re^{i\theta}) = \prod_{f=1}^{N_F} (m_f + \phi_u^0 - re^{i\theta}). \tag{2.5.29}$$

$e^{i\theta}$ で被積分関数を分解して評価しますけれども、$e^{i\theta}$ のベキが無い項だけが角度積分で効いてきます。ですから (2.5.29) では $re^{i\theta}$ の項は落として構いません。また、被積分関数は $r \to 0$ で滑らかですから、$r\partial/\partial r$ の項も 0 になります。分子の α_v^2 と、分母は絶対値の四乗 $|\alpha_v|^4$ であることから、ϕ_u と ϕ_v の期待値の差の二乗のみが分母に残ります。結局 1-instanton の分配関数はこういう形になります。

$$\mathcal{F}_1 \equiv \hat{\mathcal{Z}}^{(\mathcal{N}=2,N_F)} = \sum_{u=1}^{N} \prod_{v\neq u} \frac{1}{(\phi_u^0 - \phi_v^0)^2} \prod_{f=1}^{N_F} (m_f + \phi_u^0) + S_1^{N_F} \tag{2.5.30}$$

あと $S_1^{N_F}$ は無限遠点からの寄与ですが、 flavor が 0 の場合はこれはありません。具体的には

$$S_1^{N_F} = -\begin{cases} 0 & N_F < 2N-2, \\ \alpha_1 & N_F = 2N-2, \\ \alpha_1 \sum_{f=1}^{N} m_f & N_F = 2N-1, \\ \alpha_1 \sum_{\substack{f,f'=1 \\ (f<f')}}^{N_F} m_f m_{f'} + \alpha_2 \sum_{u=1}^{N} (\phi_u^0)^2 & N_F = 2N. \end{cases} \tag{2.5.31}$$

こういうことを多重 instanton の場合にもいろいろやっていかなければいけません。それはいまの方法を具体的に実行するのは非常に難しい。

昔、我々がやった結果というのは、これを（ひとつ）別の parametrization で計算したんですが、任意のゲージ群 G でやりました [20]。

結果だけ書くと

$$G = A_r,\ \mathcal{F}_1(a) = \frac{\sum_{i=1}^{r+1} \Delta^r(a_1, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_{r+1})}{2\Delta^{r+1}(a_1, \cdots, a_{r+1})}, \tag{2.5.32}$$

$$G = B_r,\ \mathcal{F}_1(a) = \frac{2\sum_{i=1}^{r} Q^{r-1}(a_1, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_r)}{2Q^r(a_1, \cdots, a_r)}, \tag{2.5.33}$$

$$G = C_r,\ \mathcal{F}_1(a) = \frac{2^{r-2}}{\prod_{i=1}^{r} a_i^2}, \tag{2.5.34}$$

$$G = D_r,\ \mathcal{F}_1(a) = \frac{2\sum_{i=1}^{r} a_i^2 Q^{r-1}(a_1, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_r)}{Q^r(a_1, \cdots, a_r)}, \tag{2.5.35}$$

$$G = G_2,\ \mathcal{F}_1(a) = \frac{9}{\prod_{i=1}^{3} (a, \beta_i)^2}. \tag{2.5.36}$$

Δ^m は m 次の Vandermonde determinant です。

$$\Delta^m(a_1, \cdots, a_m) \equiv \prod_{k<l}^{m} (a_k - a_l)^2, \tag{2.5.37}$$

$$Q^m(a_1, \cdots, a_m) \equiv \prod_{k<l}^{m} (a_k^2 - a_l^2)^2. \tag{2.5.38}$$

それを古典群とあと例外群、F_4 とか E 型に関しても、定義はちょっと省略しますが、

$G = F_4$,

$$\mathcal{F}_1(a) = \frac{2^5\{(a_1^2-a_2^2)^2(a_3^2-a_4^2)^2+(a_1^2-a_3^2)^2(a_2^2-a_4^2)^2+(a_1^2-a_4^2)^2(a_2^2-a_3^2)^2\}}{\prod_{i<j}^4(a_i^2-a_j^2)^2} \tag{2.5.39}$$

$G = E_r$,

$$\mathcal{F}_1(a) = \frac{\sum_{\alpha\in\Delta_+(G)}\prod_{\alpha^0\in\Delta_+(G):(\alpha,\alpha^0)=0}(a,\alpha^0)^2\prod_{\alpha^1\in\Delta^1(\alpha)}(a,\alpha^1)(a,\alpha^1-\alpha)}{\prod_{\alpha\in\Delta_+(G)}(a,\alpha)^2} \tag{2.5.40}$$

こういう量を計算しました。これは具体的に E_6 と G_2 に関しては Seiberg-Witten からの計算とつき合わせて、表式が正しいということがわかりました。

（質） 例外群についても ADHM construction はあるんですか？

（答） ないと思います。

（質） じゃあどうやって 1-instanton 計算するんですか？

（答） これは直接、ADHM construction なしに具体的に moduli parameter を parametrize されるので。それは $SU(N)$ の 1-instanton の場合は位置とサイズとゲージの自由度で parametrize されます。一般の場合も $SU(2)$ の BPS instanton をそのゲージ群 G に埋め込む自由度で尽きていることがわかります。それで計算するとこういうふうになります。2-instanton の場合は分かりません。

Introduction for Day 2

前回ちょっと内容が多すぎましたので、ちょっと頭を切り替えて、今日は Seiberg-Witten 理論の解説から始めたいと思います。その後に、前回構成したインスタントンの measure を用いて 1 インスタントンの計算を具体的に議論していきたいと思います [14] 。あと、内容としては、それを Seiberg-Witten 理論の結果と比べて、どうなっているかを議論したいと思います。これは 1 インスタントンの計算で、moduli 空間上の積分がきちんと実行できる例なのですが、これを多重インスタントンに拡張しようとするといろいろと積分が面倒であるという問題が生じます。そこで、今日はどこまでいくかわからないのですが、それに必要な数学的準備と、具体的に Nekrasov のやった仕事を説明します。その前に、局所化という方法を Hollowood が応用しましたので、Hollowood がどういう計算をしたかということを紹介するということも今日の内容に入っています。局所化の話に関連しては、これは equivalent ではなくて equivariant ですが、equivariant cohomology の話をします。それに関連する定理として、局所化の定理を説明します。Berline-Vergne の定理というものがありまして、それをちょっと紹介しまして、それを具体的にインスタントンの計算に応用します。はじめに Hollowood が見つけた非可換 $U(1)$ インスタントンを用いた方法を紹介して、次にいわゆる一般の k インスタントンに関するインスタントンの分配関数と呼ばれるプレポテンシャルの形を計算した Nekrasov の公式と呼ばれるものについて説明します。時間の都合でどれかパスするかもしれません。

内容は以下の通りです:

- Seiberg-Witten 理論
- $SU(N)$ 1- インスタントンの計算
- Equivariant cohomology 、 Berline-Vergne の定理
- Hollowood のアプローチ（非可換 $U(1)$ インスタントン）
- Nekrasov の公式

[14] 編註: ノートの流れの構成上、 1 instanton での計算は 2.5 節 に掲載した。

3 Seiberg-Witten Theory

初めに、 Seiberg-Witten 理論と呼ばれるものがどういうものかということについて説明したいと思います。考えるのは $\mathcal{N}=2$ の超対称 Yang-Mills 理論です。物質場も入るかもしれないので、ゲージ理論と書いておきましょう。

3.1 超対称代数とその多重項

まず多重項を表にまとめました:

$\mathcal{N}=2$ Supersymmetric Gauge Theory

G : gauge 群

A^a_μ	ψ_q
λ^a $\qquad$ ψ^a	q $\qquad$ $\widetilde{q}^\dagger$
ϕ^a	$\psi^\dagger_{\widetilde{q}}$
$\mathcal{N}=2$ vector multiplet	$\mathcal{N}=2$ hypermultiplet
$a=1,\ldots,\mathrm{dim}G$	N_f flavors

G というのはゲージ群です。まず、その adjoint 表現に属する場があります。これは超対称性の構造によって多重項を成すわけですが、これはゲージ場からなる多重項です。これを $\mathcal{N}=2$ の vector multiplet といいます。ゲージ場 A_μ とそれに対応するフェルミオン λ と ψ がありまして、あとスカラー場 ϕ があります。ここで、a というのはゲージ群の足です。1 から $\dim G$ まで走ります。この $\mathcal{N}=2$ の vector multiplet を $N=1$ の supersymmetry の言葉で言うと、ゲージ場 A_μ とフェルミオン λ というのが 1 つの gauge multiplet を成して、ヒッグス場 ϕ とフェルミオン ψ がカイラル多重項という構造をしています。

これにはあと、 matter を加えることができまして、これを $\mathcal{N}=2$ のハイパー多重項といいます。これはゲージ群の基本表現に属することにします。q というのはスクオークです。スクオークは q、 $\widetilde{q}$ の 2 種類あって、その superpartner が ψ_q または $\psi^\dagger_{\widetilde{q}}$ です。理論には、漸近自由性が許す限りの数のフレーバーを何種類か加えることができます。

出発点として、$\mathcal{N}=2$ のラグランジアンを考えます:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\frac{-1}{4}F_{mn}F^{mn}-i\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}_i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}D_m\lambda^\alpha_i-(D_m\phi^\dagger)(D_m\phi)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}[\phi^\dagger,\phi]^2-\frac{i}{\sqrt{2}}\phi^\dagger\epsilon_{ij}[\lambda^{\alpha i},\lambda^j_\alpha]+\frac{i}{\sqrt{2}}\phi\epsilon^{ij}[\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}i},\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}_j]\right) \qquad (3.1.1)
\end{aligned}
$$

1 行目が運動項。 2 行目がポテンシャルです。ちょっと、前回と微妙に規格化条件が違っているかもしれませんが。あと、これに hypermultiplet の項がきます。これは $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持っています。

前回、 supersymmetry の場に対する変換性を書きましたが、それを代数の形でまとめると、これは 2 種類の supercharge によって生成されます。その supercharge をラベルするものが index A で、これはいま $\mathcal{N}=2$ なので $A=1,2$ を走ります。その成す代数はこのようになります:

$\mathcal{N}=2$ SUSY $\quad Q^A_\alpha$ **,** $Q_{\dot\alpha A}$ $\quad (A = 1、2)$

$$\begin{aligned}
\{Q^A_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha B}\} &= 2\delta^A_B \sigma^m_{\alpha\dot\alpha} P_m, && (3.1.2)\\
\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\} &= \epsilon^{AB}\epsilon_{\alpha\beta} Z, && (3.1.3)\\
\{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} &= \epsilon_{AB}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{Z}. && (3.1.4)
\end{aligned}$$

ただし $\quad Z$: **central charge** $\quad$ 他の演算子と交換する保存量

まず、Q と $\overline{Q}$ の反交換関係を見てみましょう。これは A とか B とかいう index を除けば $\mathcal{N}=1$ の代数で、2 回 super 変換を繰り返すと並進になるという、supersymmetry の基本的な関係式を表します。いま、 supercharge は 2 種類あるので、それぞれの super 変換に関して並進演算子が出てくるという式になっています。

これだけだと $\mathcal{N}=1$ が 2 つあるというだけの関係式ですが、non trivial な関係式は、この Q と Q 自身の反交換関係から現れます。$\overline{Q}$ のほうも同様です。ここで、新しい反交換関係からでてきた演算子 Z というのが生じます。この Z というのは、他の generator 、Q とか P とか Lorentz generator とは交換する演算子です。名前がついていまして central charge と呼ばれています。これは保存量です。

具体的に場に対する変換から Z の形を決めてみると、これはある $U(1)$ のカレントがあってそれに対する保存量として書けるわけですけれども、これは、電荷と磁荷に関する保存量であることがわかります。これを計算したのが Witten と Olive で [21]、具体的な式はこのようになっています。

$$Z = \langle\phi\rangle \left(Q_\mathrm{e} + iQ_\mathrm{m}\right) \tag{3.1.5}$$

いま、 Higgs 場がある方向に期待値を持つとします。その方向に関して Z は Higgs 場の期待値に比例して、あと、電荷と磁荷に比例します。この場合、Q_e と Q_m の具体的な式というのはこのようになっています:

$$\begin{aligned}
Q_\mathrm{e} &= \frac{1}{\langle\phi\rangle}\int d^3x\ \partial_i\left(\phi^a F^a_{0i}\right) && \text{electric charge,} && (3.1.6)\\
Q_\mathrm{m} &= \frac{1}{\langle\phi\rangle}\int d^3x\ \partial_i\left(\phi^a \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^a_{jk}\right) && \text{magnetic charge.} && (3.1.7)
\end{aligned}$$

Higgs 場の持つ期待値の方向に平行な電場を考えまして、これは F_{0i} として与えられますが、それに対する電荷がこの Q_e です。磁荷のほうはその dual です。

$\mathcal{N}=2$ の代数の表現を調べてみますと、この central charge に起因する特有の現象が起きるということがわかります。そこで、ちょっとそれを調べてみましょう。これを調べ

るのに、静止系で考えましょう。いま massive な表現を考えますと、静止系をとるのが便利です。すなわち、

$$P_\mu = (M, 0, 0, 0) \tag{3.1.8}$$

としましょう。ただし、P_μ は並進演算子、すなわち運動量です。M は質量です。いま、Minkowski のほうで考えています。

そうすると、代数を少し簡単に書くことができます。そのためには生成・消滅演算子の基底に移るのが便利です。いま Q_1 と Q_2 の次のような線形結合をとって、a_α とか b_α とかいうのを考えましょう:

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q^1_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta}(Q^{2\beta})^\dagger\right), \tag{3.1.9}$$

$$b_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q^1_\alpha - \epsilon_{\alpha\beta}(Q^{2\beta})^\dagger\right). \tag{3.1.10}$$

これは anti-commuting な operator で SUSY の交換関係を用いると、次のような反交換関係を満たすことがわかります:

$$\{a_\alpha, a_\beta\} = \{b_\alpha, b_\beta\} = \{a_\alpha, b_\beta\} = 0 \tag{3.1.11}$$

$$\{a_\alpha, a^\dagger_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}(2M + Z), \quad \{b_\alpha, b^\dagger_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}(2M - Z) \tag{3.1.12}$$

まず、a_α とか b_α 同士は互いに反交換。さらに、a_α と b_α も反交換します。非自明なのが a_α と $a^\dagger_\beta$、b_α と $b^\dagger_\beta$ です。その反交換関係が、質量と central charge に関係してきます。

この $\mathcal{N} = 2$ の代数の表現が unitarity を持っているという要請を課しますと、質量と central charge の間にある不等式が存在します。つまり、 2 種類の演算子によって生成される空間におけるノルムが正であることから、この $2M - Z$ とか $2M + Z$ とかいう項は正であることがわかります。Z は正か負の値をとり得ますので、その絶対値をとりまして、M は $\frac{1}{2}Z$ の絶対値で下から抑えられることがわかります。

$$\begin{cases} 2M + Z \geq 0 \\ 2M - Z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow M \geq \frac{1}{2}|Z| \tag{3.1.13}$$

これは、具体的に Z の式を代入しますと、こういう関係式になります。

$$M \geq \frac{1}{2}|\langle\phi\rangle|\sqrt{Q_e^2 + Q_m^2} \qquad \text{BPS 不等式} \tag{3.1.14}$$

これを BPS 不等式といいます [17, 18]。この BPS というのは前回出てきました BPST の BPS とは全く違う人です。Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield です。

こういう不等式が成り立つわけですが、不等号が真に成立する場合と等号が成立する場合で少し状況が違っていることがわかります。

まず、不等号が成立して等号が成りたたない場合は、理論の表現空間が 2 個の生成演算子で生成されます。生成される空間の次元というのは 2^4 です。どの演算子があるかないか、状態が占められているか占められていないかということで $2^4 = 16$ 次元あります。

ところが、等式が成り立つ場合はどちらかの演算子が死んで null になっていますので、残っている片方の演算子で空間が生成されます。なので、その空間は 2^2 で 4 次元あります。SUSY の次元に飛びがあるわけです。

BPS 不等式の等号が成り立つ状態は BPS 状態と呼ばれますが、この BPS 状態というのは量子補正を受けません。量子補正というのは、例えば Plank 定数とか coupling constant の展開において、coupling に関して連続関数的に変化すると思われますけれども、もしそういうのがあったとすると、このように表現の次元が飛んでしまうということはないからです。従って、 BPS 状態は量子補正を受けないという強い性質を持ちます。だから、BPS 状態というのは、場の理論において弱結合であろうが強結合であろうが保たれる性質です。この性質はあとで、Seiberg-Witten 理論で強結合状態の情報を引き出すときに使います。まとめると、

- $M > \frac{1}{2}|Z| \quad \dim = 2^4 = 16$
- $M = \frac{1}{2}|Z| \quad \dim = 2^2 = 4$ **BPS 状態**

  BPS 状態は量子補正を受けない。

あと、もうひとつ注意しておくことは R 対称性と呼ばれるものです。これ (のうちの $U(1)$ 部分) は supercharge の位相を変える変換です。supercharge は 2 種類ありますので、それをある unitary 行列 M を用いて

R 対称性 :

$$\begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{pmatrix} \to M \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{pmatrix}, \quad M \in U(2)_{\mathrm{R}} = SU(2)_{\mathrm{R}} \times U(1)_{\mathrm{R}} \tag{3.1.15}$$

という対称性があります。これは supercharge をとりなおしてみても理論は変わらないという対称性です。M は unitary 行列ですのでこれは、特殊 unitary の部分と $U(1)$ 部分に分かれます。

この $U(1)$ 部分を場に対する変換性で書くと、

$$U(1)_R \begin{cases} \phi & \longrightarrow e^{2i\alpha}\phi \\ \psi & \longrightarrow e^{i\alpha}\psi \\ \lambda & \longrightarrow e^{i\alpha}\lambda \\ v_\mu & \longrightarrow v_\mu \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{3.1.16}$$

のようになります。場は superfield で表すと便利なのですが、R 対称性は superfield の super 座標の変換をひきおこしまして、対応する component の変換性はそれから導かれます。特に $U(1)_{\mathrm{R}}$ の対称性が後で大事になります。

3.2 真空構造の古典的な解析

これから、この $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の構造を調べていきますが、まず手始めに、この理論の真空、基底状態がどうなっているかを考えましょう。ゲージ群は $SU(2)$ としましょう。まず古典的にラグランジアンの立場で考えます。このとき、基底状態はスカラー場のポテンシャルが 0 である状態で決まります。すなわち、

理論の真空（基底状態）　$G = SU(2)$

$$\textbf{classical} \qquad V(\phi) = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}[\phi, \phi^\dagger]^2 = 0 \tag{3.2.1}$$

これは、たくさん解がありまして、いま、 Higgs 場を対角表示しておきますと、ある複素数で特徴付けられる一群の真空があるということがわかります。こういう場合、この理論は flat direction を持ちます。ポテンシャルをある方向にどこまで行ってもずっと真空の状態、そういう平坦な方向があるわけです。具体的には、

$$\phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad (a \in \mathbb{C}) \qquad \textbf{flat direction} \tag{3.2.2}$$

この真空状態を特徴付けたいのですが、ϕ という量自体はゲージ不変な量ではないので、ゲージ不変な量で真空を特徴付けたい。そこで、$\mathrm{Tr}\,\phi^2$ という量を考えます。これは真空を特徴付ける量で、ϕ と同等な量で、しかもゲージ不変です。いまの場合は、$\frac{1}{2}a^2$ で表されます。

$$u = \left\langle \mathrm{tr}\,\phi^2 \right\rangle = \frac{1}{2}a^2 \qquad (\phi : \text{Higgs field}) \tag{3.2.3}$$

そうすると、理論は u または a の値によって、真空が parametrize されるわけですが、その真空を parametrize する u というのを真空の moduli 空間のパラメータと呼びます。moduli 空間は複素数の平面になります。

これを見ますと、u が 0 でない場合と u が 0 の場合で古典的には少し状況が違います。$u \neq 0$ の場合は、 Higgs 場が期待値を持ちますので、Higgs mechanism によってゲージ場が mass を持つという現象が起きます。ただし、対角な部分 $SU(2)$ のうち $U(1)$ の部分は massless になっています。従って、$u \neq 0$ では $U(1)$ ゲージ群の multiplet が残ります。一方、$u = 0$ の場合は、ここでは Higgs の期待値が 0 なので、ここでは $SU(2)$ の対称性があります。あと、 R 対称性は壊れずに残ります。あとで、量子論の場合に、これはアノマリーによって破れるということがわかります。まとめると、

- $u \neq 0$ $SU(2) \to U(1)$
- $u = 0$ $SU(2)$
- $U(2)_{\mathrm{R}}$ symmetry (unbroken)

というわけです。

この真空を模式的に書きますと、図 2 のようになります。

u 複素平面において、その中で原点で $SU(2)$ が回復して、それ以外では $U(1)$ になっています。これが classical な真空です。

3.3　量子論的な解析

これが量子論に行くとどうなるか。量子論にいくと真空の構造はどうなるかということを議論したい。まず、ここで色々大事になるのは、理論にどのような対称性があるのかということです。

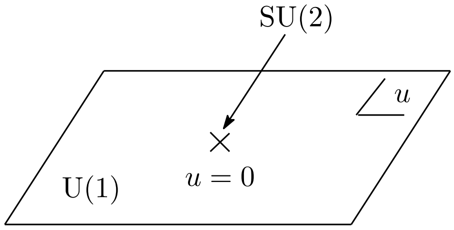

図 2: classical な真空の moduli space

3.3.1 対称性の構造

まず、ここで書きました R 対称性のうち、$SU(2)_{\mathrm{R}}$ のほうは壊れずに残ります。ただし、$U(1)_{\mathrm{R}}$ のほうはアノマリーによって破れます。それは、ゲージ群のカラーに依存しますが、いま、ゲージ群が $SU(N_c)$ の場合は $\mathbb{Z}_{4N_c}$ と呼ばれる離散群に破れます。これは、$SU(2)$ の場合だと $N_c = 2$ なので $\mathbb{Z}_8$ という対称性が残ります。まとめると、

Moduli space of vacua (quantum)

- $SU(2)_{\mathrm{R}}$ (unbroken)
- $U(1)_{\mathrm{R}} \to \mathbb{Z}_{4N_c} \qquad SU(N_c)$

これを、場の言葉で表してみましょう。いま、量子論を特徴付けたいパラメーターが Tr ϕ^2 なので、この破れた対称性がいま考えている moduli の parameter にどう作用するかを見たいわけです。Z_8 という演算子が ϕ にどう作用するかというと、いま、ω というのを 1 の 8 乗根としますと、ϕ に対しては、ω^2 という形で作用します。そうすると、u のほうは ϕ^2 ですので ω^4 という形で作用します。で、ω^4 というのは 1 の平方根ですので、u の符号を変えるという対称性が離散的な対称性として残ります。

$$\phi \longrightarrow \omega^2\phi \qquad u \longrightarrow \omega^4 u = -u \qquad (\omega^8 = 1) \tag{3.3.1}$$

ということです。[15]

さらにこれは量子論ですので、その理論を解きますと、QCD のスケールパラメータ Λ というのが理論の中に入ってきます。これは QCD を特徴付けるパラメーターです。さらに、Higgs 場の期待値がエネルギーの次元を持っていますので、理論のエネルギースケールを特徴付けるパラメータとして、QCD のスケールパラメータと Higgs 場の期待値という 2 種類のパラメーターがあります。この 2 種類のパラメータの値によって、理論の状況が決まってきます。

次元から勘定すると Λ^2 というのが u と同じ次元なので、u と Λ^2 を比べて、例えば u が十分大きい場合を考えましょう。この場合は、理論を特徴付けるパラメーターというのは Higgs のエネルギースケールで特徴づけられます。ここでは理論は weak coupling です。従って、昨日話した instanton 計算が有効な領域です。いま考えている $\mathcal{N} = 2$ の理論は漸近自由なので、ここでは coupling が小さいという性質を持っています。

[15] さらに Higgs 場 ϕ が期待値をもてば, この離散的対称性は $\mathbf{Z}_2$ まで破れる.

あと、u がもし QCD のスケールと比べて同じような状況になってくると、これは理論は強結合です。これは直ちに摂動論では扱えない領域です。まとめると、energy scale Λ_{QCD}、 $u = \langle \mathrm{tr}\,\phi^2 \rangle$

- $u \gg \Lambda^2$ weak coupling (asymptotic free)
- $u \sim \Lambda^2$ strong coupling

となります。

質問：u というのはいま、任意の複素数ですよね。$u \geq \Lambda^2$ にでてくる u は厳密には $|u|$ のことですか？

答：そうですね。あと、Λ 自身も θ 項を加えると複素数になるので、両辺とも絶対値と考えてよさそうです。

3.3.2　$\mathcal{N}=2$ 低エネルギー有効理論

いま、こういう理論をどのように扱っていくか。特にわれわれは基底状態の付近での物理を知りたいので、Yang-Mills 理論を直接扱う必要はなくて、その低エネルギー有効理論というのを議論できればそれで十分です。低エネルギー有効理論というのは理論にある軽い粒子だけで成り立っているような理論です。Yang-Mills 理論の中にある massive な mode を積分してしまって、軽い mode だけで議論します。概念的には、

低エネルギー有効理論 ：

$$\int \mathcal{D}(\text{massive}) e^{-S_{YM}} \sim e^{-S_{eff}} \tag{3.3.2}$$

ということです。

軽い粒子、 massless 粒子の理論で有効理論を記述しています。いまの場合は、一般的な u では、ゲージ群の非対角項のゲージ場の multiplet は全て massive になってしまいますので、massless の部分というのは対角項、$U(1)$ の gauge multiplet のみが massless になります。だから、低エネルギー有効理論というのは、generic な u では $U(1)$ の $\mathcal{N}=2$ の vector multiplet で記述される、と思われます。multiplet の構造を思い出すと、$U(1)$ $\mathcal{N}=2$ vector multiplet

$$\begin{array}{ccc} & A_m & \\ \lambda & & \psi \\ & a & \end{array}$$

でした。これは massive な非対角項の項については積分してしまっているので、相互作用は複雑になって現れるはずです。前は、ゲージ場の index を書きましたが、いまは $U(1)$ しか残ってないので、1 種類の vector multiplet で理論が書き下されるはずです。

いま、$\mathcal{N}=2$ の対称性を要求しますと、そのようなラグランジアンというのは、ある任意性のある 1 つの関数に押し込めることができます。これをプレポテンシャルといいます。これは、$\mathcal{N}=2$ の superspace の言葉で書くと非常にきれいに書くことができます。

$\mathcal{N}=2$ superspace $(x_m,\theta^A,\overline{\theta}^A)$ を用意して、ベクトル多重項を含む超場は

$$\Psi=\phi+\cdots \tag{3.3.3}$$

これは 2 種類のグラスマンを持つような superspace の coordinate を導入したものですが、それを用いますと、この Ψ というのが一発で書けます。

で、$\mathcal{N}=2$ の対称性を保つようなラグランジアンというのは、

$$L_{eff}=\int d^2\theta^1 d^2\theta^2 \mathcal{F}(\Psi) \tag{3.3.4}$$

のようになります。$\mathcal{N}=2$ の superspace の F term と呼ばれるカイラルな coordinate に関する積分、カイラルな superspace のグラスマン座標による積分の形でかけるのですが、その形をある適当な任意関数にとっておきましょう。これが非常に一般的なラグランジアンです。

$\mathcal{N}=2$ の superspace というのはあまり用いられませんので、これを $\mathcal{N}=1$ の superspace の言葉で書きます。これは、 2 種類のうち 1 組の super 座標を積分してしまうということです。そうすると $\mathcal{N}=1$ の superspace での一般的な有効作用のラグランジアンがかけます:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{eff}} &= \frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\left[\int d^2\theta d^2\overline{\theta}\frac{\partial\mathcal{F}(A)}{\partial A}\overline{A}+\int d^2\theta\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{F}(A)}{\partial A^2}W^\alpha W_\alpha\right] \\ & A=(\phi,\psi) \\ & W_\alpha=(\lambda_\alpha,A_\mu) \\ & \mathcal{F}(A): \textbf{prepotential} \qquad A\text{ の正則関数} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

という形にかけるということがわかります。ここで、$\mathcal{F}$ というのは (3.3.4) で出てきた関数で、A というのは $\mathcal{N}=2$ の vector multiplet のうち、Higgs 場に対応する chiral multiplet です。W_α というのは vector に対応する multiplet です。

まず、$\mathcal{F}$ というのは A の正則関数です。というのは、 F term というのは、元々 chiral superfield Ψ の正則関数です。もし $\overline{\Psi}$ というのがあったとしても積分してしまうと 0 になってしまう、また Ψ と $\overline{\Psi}$ が混ざっていれば一般には消えないが、supersymmetric でなくなるので、$\mathcal{F}$ は Ψ の正則関数でなくてはならない。そういう性質からきています。

ここで、$\mathcal{F}$ の 1 階微分と $\mathcal{F}$ の 2 階微分に注目してみましょう。Higgs 場の期待値は、ϕ と書いたり a と書いたりします。

$$a_D=\frac{\partial\mathcal{F}(a)}{\partial a} \qquad \text{dual field of } a \tag{3.3.6}$$

$$\tau(a)=\frac{da_D}{da}=\frac{\partial^2\mathcal{F}(a)}{\partial a^2}=\frac{\theta_{\mathrm{eff}}}{2\pi}+i\frac{4\pi}{g_{\mathrm{eff}}^2} \qquad \text{effective coupling} \tag{3.3.7}$$

まず $\mathcal{F}$ の 1 階微分の項ですが、これは a の dual field です。あとで、 duality 変換を議論するときに dual という言葉が出てきますので、ここで先取りして使います。$\mathcal{F}$ の 2 階微

分は、理論の有効結合定数に関係します。(3.3.5) の 2 項目はゲージ場の運動項です。W_α の 2 乗の項というのはゲージ場の 2 乗ですから、$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ とかそういう項が出てくるのですが、その前にかかっている $\mathcal{F}$ の 2 階微分の項は結合定数を表します。それが、 Higgs 場の期待値によって決まります。実際 τ という量を実部と虚部に分けて parametrize すると、これが $U(1)$ の effective な coupling と $U(1)$ の effective な θ 項を induce します。

$\mathcal{F}$ というのを決めると、有効理論というのが決まる。この有効理論をどうやって決定するか。そういうことを閉じた形で示したのが Seiberg-Witten です。

3.3.3 弱結合領域の解析

いま、わかっているところは、a が非常に大きい場合ですね。わかっているところから始めましょう。a が大きい場合には理論は漸近自由で coupling が小さいので摂動論が使える。そういう領域で $\mathcal{F}$ がどうなるかということを決めていきましょう。

まず、tree level では、結合定数がある値として古典的に与えられます。そうすると、a の dual である a_D というのは a で 1 回積分すればいいことになります。これをもう 1 度積分すれば、プレポテンシャルの classical な項がわかります。すなわち

tree level

$$\tau(a) = \tau_{cl} \quad \Rightarrow \quad a_D = \tau_{cl} a \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{cl}(a) = \frac{1}{2}\tau_{cl} a^2. \tag{3.3.8}$$

少しこれでは簡単なので、次に量子補正を入れてみます。$\mathcal{N}=2$ の理論では摂動論の範囲内では 1-loop で exact であることが知られているので、1-loop だけの補正を考えればいいことがわかります。これは、非繰り込み定理と呼ばれています。ある a で特徴付けられるエネルギースケールでの有効結合定数を摂動論でどう計算するかということなんですが、そのために β 関数を計算します。β 関数というのはエネルギーのスケールの変化に対して結合定数がどう変化するかということを決める微分方程式です。いま、考えているスケールを E としましょう。結合定数の $\log E$ についての微分というのが β 関数です。

$$\beta\text{−function} : \frac{dg}{d\log E} = -\frac{b}{16\pi^2}g^3 \qquad \text{one-loop} \quad \text{exact} \tag{3.3.9}$$

1-loop では g^3 という項が出てきます。b というのは定数で、理論に現れるゲージ場とか matter の数によって決まってきます。$\mathcal{N}=2$ の場合は、 flavor の数を N_F、 color の数を N_C としますと、

$$b = 2N_c - 4N_f \tag{3.3.10}$$

で、これが正である限り理論は漸近自由です。

これを積分してみましょう。いま、エネルギースケールとして a で表されるスケールでの coupling を $g(a)$ としますと、

$$\frac{4\pi}{g(a)^2} = \frac{b}{2\pi}\log\frac{a}{\Lambda} \tag{3.3.11}$$

QCD の parameter Λ というのを用いてこのように書けることがわかります。これは積分してみればいい。で、いま Λ というのはあるスケール μ で evaluate してやると、こういう形になります。

$$\Lambda = \mu e^{-8\pi^2/(4g(\mu)^2)} \tag{3.3.12}$$

ここで、(3.3.11) に θ 項を加えて複素化すると、具体的には $\tau(a)$ は

$$\tau(a) = \frac{i}{\pi}\log\frac{a^2}{\Lambda^2} \tag{3.3.13}$$

となります。これが有効結合定数で、それを 1 回積分して a_D が求まります。さらにそれを積分するとプレポテンシャルが求まり、プレポテンシャルに対する 1-loop の寄与というのは

$$\Rightarrow \quad a_D = \frac{ia}{\pi}\log\frac{a^2}{\Lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_{1-loop}(a) = \frac{i}{2\pi}a^2\log\left(\frac{a^2}{\Lambda^2}\right) \tag{3.3.14}$$

という風になるということがわかります。

3.3.4 強結合領域の解析法

いままで、やってきたのは classical と 1-loop の量子補正の議論です。摂動論による量子補正はこれで終わりなのですが、実は、この項に関しては instanton 補正があるということが、Seiberg によって 1988 年に指摘されました [22]。プレポテンシャルの exact な形は、(3.3.14) に instanton 補正が加わったものになります。この形は、どういう形で表現されるかというと、

$$\mathcal{F}(a) = \frac{1}{2}\tau_0 a^2 + \frac{i}{2\pi}a^2\log\left(\frac{a^2}{\Lambda^2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_k\left(\frac{\Lambda}{a}\right)^{4k}a^2. \tag{3.3.15}$$

問題は最後にある無限級数の項です。この項が非摂動効果による instanton 補正です。これは摂動論だけからは決まらない項なのですが、Seiberg-Witten は、量子論的な moduli space の構造を決めることによって、インスタントン補正を決定しました。

具体的には a とか a_D と呼ばれるものが、量子論的な moduli space のパラメーター u にどのように依るかを決定しました。これを逆解きして、u を a の関数としてあらわして、a_D の式に代入しますと、a_D は a の関数としてあらわせます。これを a について微分すれば $\mathcal{F}(a)$ が求まります。

$$(a(u), a_D(u)) \quad \Rightarrow \quad a_D(a) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(a) = \frac{\partial a_D}{\partial a}(a) \tag{3.3.16}$$

という風に進めて行くということです。これを一般の量子論でどのように決めていくかということなのですが、我々が知っているのは摂動論で β 関数を使って有効結合定数を計算する方法で、強結合領域では直ちには使えないわけです。

それを解くために Seiberg-Witten は、ある仮説をおいて、その下で、理論が完全に解けるということを示しました。

その仮定とは、まず特異点が強結合領域では現れるということです。有効理論というのは generic な点ではプレポテンシャルで記述されるのですが、それができない、 coupling が発散するような点がある。そういうのを特異点といいます。特異点が現れない点では、理論には discrete な対称性があるので、u に対してある正の値を持つところがあれば、それに対して Z_2 symmetry でマイナスのほうにもそれと同様な現象が起こります。従って、$u = \Lambda^2$ に特異点があれば、$u = -\Lambda^2$ にも特異点があります。このように特異点が 2 個あるということを Seiberg-Witten は仮定しました。これはどういうことかというと、有効理論がこの点の直上ではうまくいかない。ということは、理論の中に何か新しい massless 粒子があるわけです。そういうものを理論に取り入れていなかったために特異点が生じたのだ、ということをまず議論しました。すなわち、

- **仮定１**　　**singularities** $u = \pm\Lambda^2$　　$\tau \to 0$ ($g_{eff}^2 \to \infty$)
  effective theory is ill-defined $\Rightarrow$ **new** massless field

さらに、この新しい massless 場が何かということに関してもう 1 つ仮定をします。

この理論では $\mathcal{N} = 2$ の超対称性が成り立っているので、mass と central charge Z の間にこのような BPS 不等式が成り立っています。Z というのは理論にある $U(1)$ 電荷と磁荷で与えられます。いま、具体的に Z というのを表しますと、a と a_D の線形結合で書かれます。n_e というのは電荷が量子化されて現れる定数、n_m は磁荷のほうの定数です。これが有効理論における central charge の形なのですが、massless field が BPS 不等式を満たしているであろうから、この点では 0 でないといけない。だから a または a_D またはその線形結合が 0 でないといけない、ということが要請されます。で仮定として、 2 つ特異点があるのですが、片方の Λ^2 の点では monopole が massless になる。磁荷 1 と電荷 0 を持つような monopole が massless になると仮定しました。一方で、$-\Lambda^2$ と呼ばれる点では電荷と磁荷を両方持つようなそれが massless になると仮定しました。すなわち、

- **仮定２**　　$M \geq \frac{1}{2}|Z|$　,　$Z = n_e a + n_m a_D$,　massless field $Z = 0$
  - $u = \Lambda^2$　: monopole が massless　$(n_m、n_e) = (1、0)$
  - $u = -\Lambda^2$: dyon が massless　$(n_m、n_e) = (1、-1)$

で、こういう仮定をおくとこの有効理論が完全に解けるということを示したのが Seiberg-Witten です。この仮定の下で、強結合領域の解析をします。強結合領域では、基本的な場というのは monopole という場で、弱結合の理論で言うと、 nonlocal な相互作用になっています。monopole を弱結合の理論で扱うのは困難なので、monopole と弱く結合するようなゲージ場に変換して、その理論内で解析する。そういう変換を行います。そこで、dual 変換というのを考えます。これは電場と磁場を交換する変換です。で、 monopole というのは電場とは強く結合しているのですが、dual 変換した場である磁場とは弱く結合しているので、そこでは、摂動論が使えます。それをちょっと議論しましょう。

3.3.5 Duality 変換

ラグランジアンは

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{4g^2} F_{mn} F^{mn} + \frac{\theta}{32\pi^2} F_{mn} \widetilde{F}^{mn} \right) = \frac{1}{32\pi} \mathrm{Im} \int d^4x \ \tau \ (F + i\widetilde{F})^2 \quad (3.3.17)$$

です。いま、θ 項も入れて考えましょう。τ は複素化されたもので、θ 角と有効結合定数を複素に組んだものです。この理論の分配関数は、この action を用いて、

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_m e^{iS} = \int \mathcal{D}F \delta(\epsilon^{mnpq}\partial_n F_{pq}) e^{iS} \tag{3.3.18}$$

こういう path integral を考えましょう。これはゲージ場の積分を行ってもいいのですが、field strength に関する積分に直すこともできます。ただし、 field strength はビアンキ恒等式というのを満たしている。それを満たしているという条件を課すために、デルタ関数を導入する。これはデルタ関数ですが、これを action の上に格上げします。それは、ある補助場 A_D を用いて書き表せます。action の上に格上げすると、この拘束条件と補助場との結合項がでてきます。で、これを部分積分して少し書き直しますと、field strength またはその dual というのを導入してこのように書けます。

$$S' = \int d^4x (A_D)_m \epsilon^{mnpq}\partial_n F_{pq} = -\frac{1}{16\pi}\mathrm{Im}\int d^4x (F_D + i\widetilde{F}_D)(F + i\widetilde{F}) \tag{3.3.19}$$

で、$\mathcal{Z}$ というのは

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}F\mathcal{D}A_D e^{i(S+S')} = \int \mathcal{D}A_D e^{iS_D} \tag{3.3.20}$$

ただし

$$S_D = \frac{1}{32\pi}\mathrm{Im}\int d^4x \ \frac{-1}{\tau}(F_D + i\widetilde{F}_D)^2. \tag{3.3.21}$$

こういう形に補助場を導入したおかげで書けるのですが、S と S' というのは $\mathcal{F}$ に関しては 2 次までのものなのでガウス積分ができる。だから、$\mathcal{F}$ に関して積分することができる。こうして得られた結果は、A_D に依存する作用について A_D で path integral する形になります。これが dual 変換です。具体的には

$$\begin{array}{rcl} A & \Longrightarrow & A_D \quad , \qquad a \Longrightarrow -a_D \quad , \quad a_D \Longrightarrow a \\ \tau & \Longrightarrow & \tau_D = \dfrac{-1}{\tau} \end{array} \tag{3.3.22}$$

dual 変換は、具体的にはこういう形になります。特徴的なのは coupling です。coupling は τ が $-\frac{1}{\tau}$ に変わります。(強結合が弱結合に変換されるわけです。)

いまこの変換を、 monopole が massless になるとき、つまり $u = +\Lambda^2$ で適用します。すると、 dual $U(1)$ 場プラス新たな massless 場として monopole hypermultiplet が出てきます。この β 関数というのは計算できまして、その有効結合定数と、それに対応する場が求まります。dual 変換によって a と a_D の役割が入れ替わるので、結合定数は a_D の関数として求めることができます。これは、 (3.3.14) において a が a_D に変わったような形になります。

$u = +\Lambda^2$: dual $U(1)$ + monopole (hypermultiplet)

$$\tau_D = -\frac{i}{\pi}\log a_D + \cdots , \tag{3.3.23}$$

$$a = \frac{i}{\pi}a_D \log a_D + \cdots \tag{3.3.24}$$

dyon のところでも、同様な計算ができて、dyon に weak に couple するような dual 変換をしてやればよい。各特異点付近での a と a_D の形がこのような考察で求まります:

- $u=\infty$

$$\begin{aligned} a_D(u) &\approx \frac{2ia}{\pi}\ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) \qquad (3.3.25)\\ a(u) &\approx \sqrt{2u} \qquad (3.3.26)\end{aligned}$$

- $u=\Lambda^2$

$$\begin{aligned} a_D(u) &\approx c_0(u-\Lambda^2)+\cdots \qquad (3.3.27)\\ a(u) &\approx a_0+\frac{i}{\pi}a_D\ln a_D+\cdots \qquad (3.3.28)\end{aligned}$$

- $u=-\Lambda^2$

$$\begin{aligned} a_D(u)-a(u) &\approx c_0(u+\Lambda^2)+\cdots \qquad (3.3.29)\\ a(u) &\approx a_0+\frac{i}{\pi}(a_D-a)\ln(a_D-a) \qquad (3.3.30)\end{aligned}$$

まず、u が無限大の時には、$a(u)$ というのはもともとのヒッグス場の定義式 $u=a^2/2$ から求まります。a_D は、(3.3.14) のところで計算した通りです。一方、$u=\Lambda^2$ では、a_D は $u=\Lambda^2$ 付近では消えることから形が定まります。あと、$-\Lambda^2$ では monopole が massless になるため、a_D-a が $u-\Lambda^2$ で消える形になります。a と a_D は、各特異点で以上のような振る舞いをします。

3.3.6 Seiberg-Witten 解

ここで、a とか a_D というのを u の関数として全領域で求めたいのですが、各特異点でこのような振る舞いを示すような a と a_D の組をどのようにして求めるか。この解を書いて前半の部分は終わりにしたいと思います。その解はある楕円曲線

$$\text{Riemann surface}: y^2=(x^2-\Lambda^4)(x-u) \qquad (3.3.31)$$

および、この楕円曲線上の meromorphic な 1 次形式

meromorphic differential (**SW differential**)

$$\lambda_{SW}=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\,\frac{x-u}{y}dx \qquad (3.3.32)$$

を用いて書かれます。この曲線を Seiberg-Witten 曲線といいます [16]。ここで、(3.3.31) で定義される複素曲線について考えましょう。これはリーマン面ですので、張り合わせで構成できます。ブランチカットは、$\pm\Lambda^2$ を結ぶものと、u と無限大を結ぶものの 2 つありまして、これに対して、2 つのサイクルを考えます。点線で書いているのは下のシートを

[16] リーマン面だが曲線とよばれるのは、複素数で勘定すると一変数だからである。一変数でパラメタ付けされるものは曲線と呼ばれる

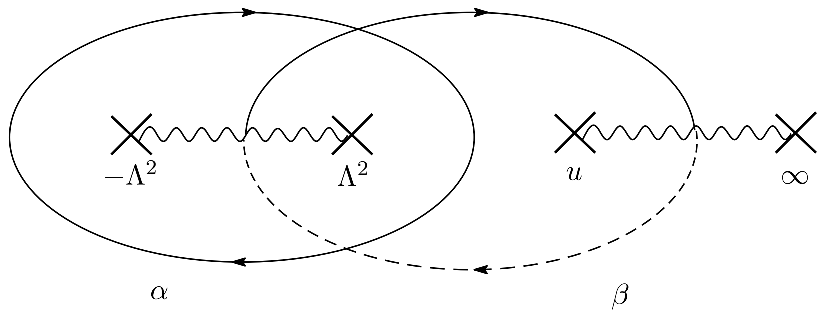

図 3: リーマン面

走っていることを意味します。これらを用いて a と a_D というのは

$$a_D(u) = \int_\beta \lambda_{SW} \tag{3.3.33}$$

$$a(u) = \int_\alpha \lambda_{SW} \tag{3.3.34}$$

と書かれます。これが厳密解です。

例えば、u というのを Λ^2 に近づけると、この β というサイクルが縮んでいきます。で、それが縮んで 1 点になるので、β による積分というのが 0 になります。同様のことが、dyon についてもいえる。u というのを $-\Lambda^2$ に近づけると $a_D - a$ というコンビネーションが 0 になることがわかって dyon が massless になるということがわかります。あと、この付近での局所的な振る舞いが、この meromorphic differential から再現できる。

で、これを一般のゲージ群とかに拡張することができまして、それからプレポテンシャルを計算することができる。しかし、これは非常に間接的な方法で、しかも Seiberg-Witten の仮説という、はじめから Λ というものを持ってくるような仮説を用いているので、それをゲージ群の microscopic なインスタントン計算の立場から Seiberg-Witten の結果をチェックすることは有意義なことです。または、インスタントン計算のことからプレポテンシャルの形がちゃんとわかれば、強結合領域で monopole が massless になるとか dyon が massless になるとかいう奇妙な現象が起きるということがわかる。インスタントン計算から Seiberg-Witten を通じてそういう現象が起こるということが補強されます。前半はこれで終わりまして、次はまた、インスタントン計算に戻って、プレポテンシャルがどのように計算されるかということを議論したいと思います。

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜 **休憩** 〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

さっき終わった後に u が $-\Lambda^2$ に近づくときになぜ dyon が massless になるのかという議論があったので説明したいと思います。このリーマン面の任意のサイクルは、2 つのサイクル α と β と呼ばれるものによって生成されます。これは一般には α と β の線形結合です:

$$\gamma = m\alpha + n\beta \qquad m, n \in \mathbf{Z} \tag{3.3.35}$$

m と n は α 方向に何回回転し、β 方向に何回回転したかということを特徴付けます。逆向きに回転したものはマイナスの符号で、m と n という整数を用いて特徴付けられる。

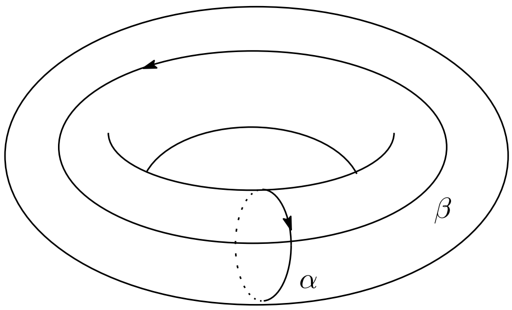

図 4: リーマン面のサイクル

dyon に関しては u を $-\Lambda^2$ に近づけると γ というサイクルが 0 になるのですが、そのサイクルはこの表現であらわすと、$\alpha-\beta$ という形に表せるので、ここで dyon が massless になるということがわかります。

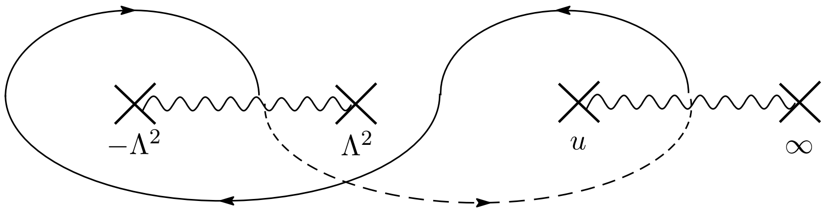

図 5: $\alpha-\beta$ に対応するサイクル

3.4 ADE singularity and SW theory

一般のゲージ群でどうなるかを見てみましょう。一般のゲージ群での Seiberg-Witten curve というのはだいたいわかっています。$SU(2)$ では、

$$SU(2)\ :\ y^2=(x^2-u)^2-\Lambda^4 \tag{3.4.1}$$

のような形でしたが、$SU(N)$ では少しそれを拡張した hyperelliptic curve になります [23, 24]:

$$SU(N_c): y^2=(x^{N_c}-u_1x^{N_c-2}-\cdots-u_{N_c-1})^2-\Lambda^{2N_c}. \tag{3.4.2}$$

群 G の特性多項式というのを使って似たような形で一般化することができます [25, 26, 27]:

$$G\ (\text{古典群}): y^2=P_G^{\mathcal{R}_f}(x)^2-\Lambda^{2h^\vee}x^{2d-2h^\vee} \tag{3.4.3}$$

$$P_G^{\mathcal{R}_f}(x)=\prod_{i=1}^{d}(x-\lambda_i\cdot a)\quad :\text{群 } G \text{ の基本表現 } \mathcal{R}_f \text{ (degree } d\text{) の特性多項式}$$

$h^\vee$: the dual Coxeter number

古典群の場合は、これで OK です。しかし、例外群では必ずしもそういう構成はうまくいきません。いま、純粋に Seiberg-Witten curve という立場で、一般の Lie 群に関してど

のように構成したらいいかというのは、こういう戸田格子と呼ばれる可積分系を使って定義します。まあ、ストリング的な見方もありますが、可積分系的な見方で言うと、こういうもので定義します [28, 29]。

まず、与えられたゲージ群 G に対して戸田格子という力学系を与えます。それは、 Lax 形式で

$$A = \sum_{i=1}^{r} b_i H_i + a_i(E_{\alpha_i} + E_{-\alpha_i}) + za_0 E_{\alpha_0} + z^{-1} a_0 E_{-\alpha_0} \tag{3.4.4}$$

$$B = \sum_{i=1}^{r} b_i H_i + a_i(E_{\alpha_i} - E_{-\alpha_i}) + za_0 E_{\alpha_0} - z^{-1} a_0 E_{-\alpha_0} \tag{3.4.5}$$

及び

$$\frac{dA}{dt} = [A, B]$$

と与えられます。ここで H_i は G のカルタンの基底で、E_α はルート α に対する G の生成子です。そこで spectral curve $\Sigma_{G,R}$ を

$$P_G^R(x, u_1, \cdots, u_r, z) \equiv \det(x1_d - A) = 0. \qquad d = \dim R$$

と定めます。Martinec-Warner の提唱は、この spectral curve を Seiberg-Witten curve と identify する、すなわち

- $\Sigma = \Sigma_{G,R}$,
- $\lambda_{SW} = x\frac{dz}{z}$.

この Toda spectral curve と Seiberg-Witten curve という話を使って、計算する。古典群に関してはいいのですが、例外群になるととたんに複雑になります。hyperelliptic curve ではなく、もっと複雑にものになります。

まず ADE 型のゲージ群に対してまとめておくと

List of Toda spectral curves (I) : Simply-Laced Case ($h = h^\vee$)

- A_r ($A_r^{(1)}$:$\underline{r+1}$) $h = r + 1$ $\{1, 2, \cdots, r\}$

$$x^{r+1} - u_1 x^{r-1} - \cdots - u_r - \left(z + \frac{\mu^2}{z}\right) = 0$$

- D_r ($D_r^{(1)}$:$\underline{2r}$) $h = 2r - 2$ $\{1, 3, \cdots, 2r-3, r-1\}$

$$x^{2r} - u_1 x^{2r-2} - \cdots - u_{r-2} x^4 - u_r x^2 - u_{r-1}^2 - x^2\left(z + \frac{\mu^2}{z}\right) = 0$$

- E_6 ($E_6^{(1)}$:$\underline{27}$) (Lerche-Warner,[30]) $h = 12$ $\{1, 4, 5, 7, 8, 11\}$

$$\frac{1}{2}x^3\left(z + \frac{\mu^2}{z} + u_6\right)^2 - q_1(x)\left(z + \frac{\mu^2}{z} + u_6\right) + q_2(x) = 0$$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 270x^{15} + 342u_1x^{13} + 162u_1^2x^{11} - 252u_2x^{10} + (26u_1^3 + 18u_3)x^9 \\
&\quad -162u_1u_2x^8 + (6u_1u_3 - 27u_4)x^7 - (30u_1^2u_2 - 36u_5)x^6 + (27u_2^2 - 9u_1u_4)x^5 \\
&\quad -(3u_2u_3 - 6u_1u_5)x^4 - 3u_1u_2^2x^3 - 3u_2u_5x - u_2^3, \\
q_2 &= \frac{1}{2x^3}(q_1^2 - p_1^2p_2), \\
p_1 &= 78x^{10} + 60u_1x^8 + 14u_1^2x^6 - 33u_2x^5 + 2u_3x^4 - 5u_1u_2x^3 - u_4x^2 - u_5x - u_2^2, \\
p_2 &= 12x^{10} + 12u_1x^8 + 4u_1^2x^6 - 12u_2x^5 + u_3x^4 - 4u_1u_2x^3 - 2u_4x^2 + 4u_5x + u_2^2
\end{aligned}
\tag{3.4.6}
$$

- E_7 ($E_7^{(1)}$:$\underline{56}$) $\quad h = 18 \quad \{1,5,7,9,11,13,17\}$
  $P_{56}(x, u_1, \cdots, u_6, u_7 + z + \frac{\mu^2}{z}) = 0$

- E_8 ($E_8^{(1)}$:$\underline{248}$) $\quad h = 30 \quad \{1,7,11,13,17,19,23,29\}$
  $P_{248}(x, u_1, \cdots, u_7, u_8 + z + \frac{\mu^2}{z}) = 0$

For $G = ADE$

$$P_G^{\mathcal{R}}(x; u_1, \cdots, u_r + z + \frac{\mu^2}{z}) = 0$$

となります。いま書いたのは ADE タイプと呼ばれるもので、Dynkin 図がすべて一本線ですから simply-laced とも呼ばれます。

B 型とか C 型、SO とか Sp の場合、それから F_4 や G_2 の場合は、 hyper elliptic に近いのですが若干違います。それぞれ、関連する ADE 型の spectral curve で変数を特別にとったものになります。

List of spectral curves (II) : Non Simply-Laced Case ($h \neq h^\vee$)

- B_r ($A_{2r-1}^{(2)}$:$\underline{2r}$) $\quad h = 2r \quad h^\vee = 2r - 1 \quad \{1, 3, \cdots, 2r-1\}$

$$
\begin{aligned}
&P_{A_{2r-1}}^{2r}(x; u_1, u_3, \cdots, u_{2r-1}, u_2 = \cdots = u_{2r-4} = 0, u_{2r-2} = z + \frac{\mu^2}{z}) = 0 \\
&\quad \Longrightarrow x^{2r} - u_1x^{2r-2} - \cdots - u_{2r-1} - x\left(z + \frac{\mu^2}{z}\right) = 0
\end{aligned}
$$

- C_r ($D_{r+1}^{(2)}$:$\underline{2r+2}$) $\quad h = 2r \quad h^\vee = r + 1 \quad \{1, 3, \cdots, 2r-1\}$

$$
\begin{aligned}
&P_{D_{r+1}}^{2r}(x; u_1, \cdots, u_r = z - \frac{\mu^2}{z}, u_{r+1}) = 0 \\
&\Longrightarrow x^{2r+2} - u_1x^{2r} - \cdots - u_{r-1}x^4 - u_{r+1}x^2 - \left(z - \frac{\mu^2}{z}\right)^2 = 0
\end{aligned}
$$

- F_4 ($E_6^{(2)}$:$\underline{27}$) $\quad h = 12 \quad h^\vee = 9 \quad \{1, 5, 7, 11\}$

$$P_{E_6}^{27}(x; u_1, u_2 = 0, u_3, u_4, u_5 = -6\left(z + \frac{\mu^2}{z}\right), u_6) = 0$$

- G_2 ($D_4^{(3)}$:$\underline{8}$) $h = 6$ $h^\vee = 4$ $\{1, 5\}$

$$P^8_{D_4}(x; u_1 = 2u, u_2 = -u^2 - \left(z + \frac{\mu^2}{z}\right), u_3 = \sqrt{3}\left(z - \frac{\mu^2}{z}\right), u_4 = v + 2u\left(z + \frac{\mu^2}{z}\right)) = 0$$
$$\Longrightarrow 3\left(z - \frac{\mu^2}{z}\right)^2 - x^8 + 2ux^6 - \left[u^2 + \left(z + \frac{\mu^2}{z}\right)\right]x^4 + \left[v + 2u\left(z + \frac{\mu^2}{z}\right)\right]x^2 = 0.$$

これらの結果を、ほかの方法で導いたものと比較するいろいろな仕事がありますが、ここでは割愛します。

補足 例外群 (E, F, G) について、spectral curve に基づいた SW 曲線は超楕円曲線 [27, 26] に基づいたものとは違います。 実際この 2 つの SW 曲線は prepotential に対し 1 インスタントンで異なる寄与を示し、microscopic な計算 [20] と比べると spectral curve が正しい結果を与えることが G_2, E_6 については直接確認されています [31, 32]。

4 Multi-instanton Calculus and Localization Formula

時間の都合でかなり苦しいのですが、内容としては
4.1 同変コホモロジーと局所化の方法
4.2 Hollowood によるアプローチ
4.3 多重インスタントン計算と局所化公式、そして Nekrasov 公式
ということを議論します。まず、同変コホモロジーと局所化に関する数学の一定理を紹介して、非可換 $U(1)$ インスタントンを使った局所化の方法として Hollowood の計算などを議論したいと思います。

4.1 Equivariant cohomology and localization

まず参考文献を紹介します。とても数学的なものですがとっつ/きやすいものとして、シュプリンガーから出ている Berline-Getzler-Vergne [33] が内容としてはしっかりしています。物理のほうでは、経路積分に応用した [34] があります。これもかなり長いのですが、読みやすいので興味のあるひとは読んでみてください。

4.1.1 同変コホモロジー equivariant cohomology

いきなり数学的な定義式ばかりになってしまうのですが、いま考えたいのはある n 次元 C^∞ 多様体 M、これは ADHM の変数の空間です。そこにあるリー群 G が作用しているものを考えます。小文字の $\mathbf{g}$ で G のリー環を表します。そうすると g は座標に作用しているので、これを使って M 上の関数に群を作用させることが出来ます：

$$(g \cdot \varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x) \tag{4.1.1}$$

この無限小変換をとりまして、$X \in \mathbf{g}$ に対して M 上のベクトル場 X_M を定義することが出来ます：

$$(X_M\varphi)(x) = \left.\frac{d}{d\epsilon}\varphi(e^{-\epsilon X}x)\right|_{\epsilon=0} \tag{4.1.2}$$

いま考えたいものは、このようなベクトル場や微分形式です。ちょっと抽象的ですが、M 上の微分形式の空間を $A(M)$、その係数がリー環の元の関数であるようなものの集まりを $\mathbb{C}[\mathbf{g}] \otimes A(M)$ と書くことにします。$\mathbb{C}[\mathbf{g}]$ は g の複素数値多項式関数のなす代数です。さらに $\mathbb{C}[\mathbf{g}] \otimes A(M)$ の中で G の変換の下で不変となっているようなもの全体の集合 $A_G(M)$ を考えましょう。このリー群の作用の下で不変であるという条件を、

$$g_*\alpha(X) = \alpha(\mathrm{Ad}(g)X), \quad \text{for any } g \in G,\, X \in \mathbf{g} \tag{4.1.3}$$

と書きます。左辺は引き戻しですから M の g で写った違う点で α を評価している。右辺は、M の同じ点でベクトル X を g で回した値で α を評価しているわけですね。書き換えると、リー微分によって消える

$$\mathcal{L}_X\alpha(X) = 0 \tag{4.1.4}$$

と表すことができます。このような $A_G(M)$ の元である微分形式を同変微分形式 (equivariant differential form) と呼びます。これに対して $\mathbb{C}[\mathbf{g}]\otimes A(M)$ 上の同変外微分 (equivariant exterior differential) $d_{\mathbf{g}}$ が

$$d_{\mathbf{g}}\alpha(X) = d\alpha(X) - i(X)(\alpha(X)) \tag{4.1.5}$$

で定義されます。ここで $i(X)$ は縮約 contraction で、１形式に関しては内積を計算していて、微分形式の積に対してはそれぞれに関して graded に通り越して作用します：

$$\begin{aligned} i(X)\omega &= \omega(X), \quad \text{for } \omega\text{: 1-form} \\ i(X)(\omega\wedge\omega') &= i(X)\omega\wedge\omega' + (-1)^p\omega\wedge\omega', \quad \text{for}\omega\text{: } p\text{ -form , }\omega'\text{: } q\text{ -form.} \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

$i(X)$ は縮約を一つとりますので p -form $\to$ $(p-1)$ -form となります。$d_{\mathbf{g}}$ を二回繰り返しますと、リー微分の公式というのがありまして、

$$d_{\mathbf{g}}^2\alpha(X) = -\mathcal{L}(X)\alpha(X) \tag{4.1.7}$$

となります（$\mathcal{L}(X) = di(X)+i(X)d$）。したがって G 不変な微分形式 $A_G(M)$ では $d_{\mathbf{g}}^2 = 0$ となりますから、この微分形式上ではコホモロジーが定義できます。このコホモロジーのことを 同変コホモロジー *equivariant cohomology* といいます。

普通の微分形式のときと同じように、 $d_{\mathbf{g}}\alpha = 0$ なる $\alpha \in A_G(M)$ は同変閉形式 (equivariantly closed form) とよばれ、$\alpha = d_{\mathbf{g}}\beta$ と書くことが出来るものは同変完全形式 (equivariantly exact form) とよばれます。微分形式 $\alpha(X)$ を

$$\alpha(X) = \alpha_{[0]}(X) + \alpha_{[1]}(X) + \cdots \tag{4.1.8}$$

と i -form $\alpha_{[i]}(X)$ の和で書いたとき、もし $d_{\mathbf{g}}\alpha(X) = 0$ であるならば、

$$i(X)\alpha(X)_{[i]} = d\alpha(X)_{[i-2]} \tag{4.1.9}$$

となります。

M がコンパクトで向き付けられた多様体ならば、同変積分も通常と同様に定義されます：

$$\int_M \alpha(X) = \int_M \alpha(X)_{[n]} \tag{4.1.10}$$

もし α がある β によって $\alpha = d_{\mathbf{g}}\beta$ と書かれているならば、 top Form については

$$\alpha(X)_{[n]} = d\beta(X)_{[n-1]} \tag{4.1.11}$$

と普通の exact な形でかけますので、これを同変積分しますと

$$\int \alpha(X) = \int d_{\mathbf{g}}\beta(X) = 0 \tag{4.1.12}$$

という風に境界がなければ 0 になってしまう。つまり α の積分 $\int\alpha$ というのは同変コホモロジー類だけで決まってしまいます。

4.1.2 局所化 (localization)

次に議論するのは局所化についてです。いま考えている状況は、M という多様体があってこれにコンパクトリー群 G が作用している、そして M 上の metric $g(X,Y)$ が G の作用によって不変である、というものです。以下 $\alpha(X)$ を M 上の同変閉形式としましょう。いま、群の作用が考えられて、それによりベクトル場 X_M が考えられることは先ほど説明しました。このベクトル場の作用の下で不変な集合、 0 になるような M の点の集合を $M_0(X)$ とします。このような点ではベクトル場が singular になっている、作用が変になっている。しかしこのような点を除いて次が成り立ちます

Lemma (Poincaré の補題の Equivariant version) : 上の状況の下、各 $X \in \mathbf{g}$ に対し、$M_0(X)$ の外では $\alpha(X)_{[n]}$ は完全形式である。

Proof: $D_X\lambda = \alpha$ となる $M - M_0(X)$ 上の微分形式 λ を構成しよう（$D_X = d - i(X)$）。M は global に定義された $U(1)$ - 不変 metric を持つことを仮定する。metric

$$g = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{4.1.13}$$

が G - 不変 ということは、$\mathcal{L}_X g = 0$ すなわち X は Killing ベクトルだということです。

g: $TM \to T^*M$ によって 1 形式 β を定義しましょう。すなわち

$$\beta \equiv g(X, \cdot) = g_{\mu\nu}X^\nu dx^\mu. \tag{4.1.14}$$

すると、$0 = D_X^2\beta = -\mathcal{L}_X\beta$ だから $\mathcal{L}_X\beta = 0$ となり、β は同変 1 形式です。また、$D_X\beta = K_X + \Omega_X$。ここで

$$K_X = g_{\mu\nu}(x)X^\mu X^\nu, \quad \text{global に定義された } C^\infty \text{ 関数} \tag{4.1.15}$$

$$\Omega_X = d\beta = (\Omega_X)_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (\Omega_X)_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\nabla_\nu X^\lambda - g_{\nu\lambda}\nabla_\mu X^\lambda \tag{4.1.16}$$

です。K_X は M_0 以外では nonzero ですから、$D_X\beta$ は $M - M_0$ で可逆となる。ここで可逆とは

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

の意味です。そこで $\xi = \beta(D_X\beta)^{-1}$ とすると、

$$D_X\xi = 1, \quad \mathcal{L}_X\xi = 0. \tag{4.1.17}$$

α は閉形式であったことを思い出すと $\lambda = \xi\alpha$ とすることで、ほしい微分形式が得られました：

$$\alpha = 1 \cdot \alpha = (D_X\xi)\alpha = D_X(\xi\alpha) = D_X(\lambda). \tag{4.1.18}$$

証明終わり。

さて、次のような関数を考えることにします：

$$\mathcal{Z}(s) \equiv \int_M \alpha e^{-sD_X\beta}, \quad (s \geq 0) \tag{4.1.19}$$

ここで $\mathcal{Z}(s)$ が s の正則関数であることは仮定します。すると、

$s \to 0$: $Z(0) = \int_M \alpha$

$s \to \infty$: $Z(s)$ は $M_0 \subset M$ まわりで sharp な Gaussian peak を持つ

すると全ての $s \in \mathbf{R}^+$ に対して、$\alpha e^{-sD_X\beta}$ は α に equivariantly cohomologous となります。なぜなら、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{Z}(s) &= \int_M \alpha(D_X\beta)e^{-sD_X\beta} \\
&= -\int \left\{D_X(\alpha\beta e^{-sD_X\beta}) + \beta D_X(\alpha e^{-sD_X\beta})\right\} \\
&= s\int_M \beta\alpha D_X^2\beta e^{-sD_X\beta} = 0
\end{aligned}
\tag{4.1.20}
$$

ですから。従って、$\mathcal{Z}(s)$ は s によらないので

$$
\int_M \alpha = \lim_{s\to\infty}\int_M \alpha e^{-sD_X\beta} \tag{4.1.21}
$$

を得ます。

先ほど述べたとおり、閉形式は G の固定点の外では完全形式になっていました。これは積分が固定点の周りへ局所化することを示唆しています。実際に次の定理は、群の作用の零点が孤立している場合、積分は孤立点でのベクトル場の作用に関する固有値と、同変閉形式の関数部分の値だけできまってしまうことを言っています：

Theorem (Berline-Vergne の定理）: α は同変閉形式とし、$X \in \mathbf{g}$ は X_M が孤立した零点だけからなるようなものとする。このとき次が成立する：

$$
\int_M \alpha(M) = (-2\pi)^\ell \sum_{p\in M_0(X)} \frac{\alpha(X)_{[0]}(p)}{\det^{\frac{1}{2}} L_p} \tag{4.1.22}
$$

ここで $\ell = \dim M/2$ であり、L_p は p での接ベクトルに作用するリー微分である（$\mathcal{L}(X)\xi = [X_M, \xi]$）。

Proof: ある $p \in M_0$ を固定して考えましょう。G - 不変 metric と exponential map を用いると、p の周りで

$$
X_M = \lambda_1(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + \cdots + \lambda_\ell(x_n\partial_{n-1} - x_{n-1}\partial_n) \tag{4.1.23}
$$

となる局所座標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を選べます。すると $\det^{1/2} L_p = \lambda_1 \cdots \lambda_\ell$ です。そこで、1 形式 θ^p を、p の近傍で

$$
\theta^p = \lambda_1^{-1}(x_2dx_1 - x_1dx_2) + \cdots \lambda_\ell^{-1}(x_ndx_{n-1} - x_{n-1}dx_n) \tag{4.1.24}
$$

となるようなものとしますと、

$$
\mathcal{L}(X_M)\theta^p = 0 \tag{4.1.25}
$$

ただし

$$\theta^p(X_M)=\sum_{i=1}^n x_i^2=|x|^2. \tag{4.1.26}$$

従って、$M_0(X)$ の外（$|x|^2\neq 0$）では $D_X\theta^p$ は可逆となり、

$$\alpha(X)_{[n]}=d\left(\frac{\theta\wedge\alpha(X)}{D_X\theta}\right)_{[n-1]} \tag{4.1.27}$$

が成り立ちます。従って p の近傍 $B_\epsilon^p=\left\{x;|x|^2\leq\epsilon\right\}$、$S_\epsilon^p=\left\{x;|x|^2=\epsilon\right\}$ で

$$\begin{aligned}\int_M\alpha(X) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{M-\cup_p B_\epsilon^p}\alpha(X)\\ &= -\sum_{p\in M_0(X)}\int_{S_\epsilon^p}\frac{\theta\wedge\alpha(X)}{D_X\theta}\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

です。p 周りでリスケール $x\to\epsilon^{\frac{1}{2}}x$ を行うと $S_\epsilon\to\ S_1$ ですから、

$$\int_{S_\epsilon^p}\frac{\theta\wedge\alpha(X)}{D_X\theta} = \int_{S_1}\frac{\theta\wedge\alpha_\epsilon(X)}{D_X\theta} \tag{4.1.29}$$

$$\begin{aligned}\alpha_\epsilon(x,dx) &= \alpha(X)(\epsilon^{\frac{1}{2}}x,\epsilon^{\frac{1}{2}}dx)\\ &\to \alpha(X)_{[0]}(p)\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

となります。従って積分は、

$$\begin{aligned}-\int_{S_1}\frac{\theta}{D_X\theta} &= \int\theta(1-d\theta)^{-1}\\ &= \int\theta(d\theta)^{\ell-1}\\ &= \int_{B_1}(d\theta)^\ell=(-2)^\ell\ell!(\lambda_1\cdots\lambda_\ell)\int_{B_1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\\ &= \frac{\pi^\ell}{\ell!}(-2)^\ell\ell!(\lambda_1\cdots\lambda_\ell)\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

となります。証明終わり。

4.2 Hollowood's approach

この Berline-Vergne の定理をインスタントン計算に応用したい。 Hollowood や色々な人たちがモジュライ空間の measure をみて、局所化のテクニックが使えることに気がつきました。ただし本来は smooth でコンパクトな多様体上で群が作用している状況を考えていたのですが、根本的に困難な点はインスタントンモジュライ空間が非コンパクトで特異点をもつことです。この特異点はインスタントンのサイズが 0 に行くことで生じるものです（$\rho\to 0$)。例えば Euclid 空間では無限遠点を一つ加えることでコンパクト化したりしますが、これと類似のことをいまの場合にやってみます。無限遠点に相当するものとし

て、 point-like インスタントンというものを付け加えます。それはUhlenbeck コンパクト化とよばれて、

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{k,N} = \mathcal{M}_{k,N} \cup \mathcal{M}_{k-1,N} \times \mathbb{R}^4 \cup \mathcal{M}_{k-2,N} \times \mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^4) \cup \cdots \mathrm{Sym}^k(\mathbb{R}^4) \tag{4.2.1}$$

というものです。$\mathbb{R}^4$ は point-like インスタントンの位置で、$\mathrm{Sym}^i(\mathbb{R}^4)$ は $\mathbb{R}^4$ の対称積です。$\mathcal{M}_{k-i、N} \times \mathrm{Sym}^i(\mathbf{R}^4)$ は、k 個のインスタントンのうち i 個が point-like になったので、なめらかなインスタントン $k-i$ 個をあらわす moduli space $\mathcal{M}_{k-i、N}$ に、 i 個の point-like instanton の位置をしめす $\mathrm{Sym}^i\mathbb{R}^4$ を掛けてあるわけです。これでもまだモジュライ空間は smooth ではないので、少し ADHM 方程式を変形することを考えます:

$$\mathcal{M}_{k,N} \longrightarrow \mathcal{M}^{(\zeta)}_{k,N} \tag{4.2.2}$$

モジュライ空間の特異性を解消したいのですが、それはどうやるかというと次のような変形を考えます：

$$\tau^{c\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}(\overline{w}^{\dot{\beta}} w_{\dot{\alpha}} + \overline{a}'^{\dot{\beta}\alpha} a'_{\beta\dot{\alpha}}) = \zeta^c 1_k \tag{4.2.3}$$

$$\overline{\mu}^A w_{\dot{\alpha}} + \overline{w}_{\dot{\alpha}} \mu^A + [\mathcal{M}'^{\alpha A}, a'_{\alpha\dot{\alpha}}] = 0. \tag{4.2.4}$$

ここで $\zeta = 0$ なら (1.4.37) を再現します。これは唐突なアイデアというわけではなくいろんな所で、 Kronheimer- 中島 [35] や物理的にも時空を非可換時空としたばあいの非可換インスタントンとして知られていたものです [36]。非可換インスタントンは一般に $U(N)$ の場合は Hollowood たちによって計算されてまして [37]、若干の食い違いを除いて通常の可換の場合と同じで、実際結果は非可換パラメータには依存しません。そこで正則化の方法としてこのようなものを使うことができる。すなわち

$$\int_{\mathcal{M}_{k,N}} \omega e^{-\widetilde{S}} \Longrightarrow \int_{\mathcal{M}^{\zeta}_{k,N}} e^{-\widetilde{S}} \tag{4.2.5}$$

とする。ただし、

$$\widetilde{S} = S + S_{LM} \tag{4.2.6}$$

で、

$$S_{LM} = -4i\pi^2 \Big\{ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}}_A (\overline{\mu}^A_u w_{u\dot{\alpha}} + \overline{w}_{u\dot{\alpha}} \mu^A_u) + D^c \left(\tau^{c\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \overline{w}^{\dot{\beta}}_u w_{u\dot{\alpha}} - \zeta^c \right) \Big\} \tag{4.2.7}$$

は ADHM 条件をあらわす Lagrange multiplier の項でした。あとで局所化の方法を応用するところで重要になってくるのが Grassmann 座標 ψ^{iA} , $i = 1, \cdots, 2kN$ ($\dim\mathcal{M}_{k,N} = 4kN$）です。トポロジカルな理論ではこういうフェルミオンと微分形式を同一視するというのはよくある話で、 isomorphism （$A = \dot{\alpha}$）

$$\psi^{iA} \leftrightarrow h^{i\dot{\alpha}}, \quad \text{1-form} \tag{4.2.8}$$

があります（$h^{i\dot\alpha} = h^{i\dot\alpha}_\mu dX^\mu$）。これはモジュライ空間の接空間と関係しています。微分形式を多脚場であらわしましてフェルミオンで積分したのが

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{M}_{k,N}} \omega^{\mathcal{N}=2}\mathcal{F}(X^\mu,\psi^{iA}) &= \pi^{-2kN}\int_{\mathcal{M}_{k,N}}\left\{\wedge_{i=1}^{2kN}\wedge_{\dot\alpha=1}^{2} h^{i\dot\alpha}\right\} \\
&\quad \left\{\prod_{i=1}^{2kN}\prod_{A=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\psi^{iA}}\right\}\mathcal{F}(X,\psi^{iA}) \\
&= \pi^{-2kN}\int_{\mathcal{M}_{k,N}}\mathcal{F}(X^\mu,h^{i\dot\alpha}) \qquad (4.2.9)
\end{aligned}
$$

でして、この式をみると完全にボゾニックな ADHM constraints でフェルミオンにモジュライ空間上の多脚場を代入したもので書けています。インスタントン有効作用は

$$
\widetilde{S} = -\frac{1}{4}d_V(V^\dagger_\mu dX^\mu) \qquad (4.2.10)
$$

ただし

$$
d_V = d - 2i_V \qquad (4.2.11)
$$

と同変形式の形でかけている。$d_V^2 = 2\mathcal{L}_V$ だから、d_V は $SU(N)$ - 不変な微分形式のうえでベキ零になっている。すると、

$$
\hat{\mathcal{Z}}_k^{\mathcal{N}=2} = \pi^{-2kN}\int_{\mathcal{M}_{k,N}}\exp\left\{-\frac{1}{4}d_V(V^\dagger_\mu dX^\mu)\right\} \qquad (4.2.12)
$$

は局所化の方法で評価することができます。具体的には、

$$
\hat{\mathcal{Z}}_k^{\mathcal{N}=2}(\lambda) = \pi^{-2kN}\int_{\mathcal{M}_{k,N}}\exp\left\{-\lambda^{-1}d_V(V^\dagger_\mu dX^\mu)\right\} \qquad (4.2.13)
$$

とすると

$$
\frac{d\hat{\mathcal{Z}}_k^{\mathcal{N}=2}(\lambda)}{d\lambda} = 0 \qquad (4.2.14)
$$

であるから $\lambda \to 0$ の極限で考えればよく、積分はベクトル場 V_μ の critical points で dominate されます。

以上の話は BRS 形式というので書けまして、前に見てきた supersymmetry

$$
\delta = \xi_{\dot\alpha A}Q^{\dot\alpha A} \qquad (4.2.15)
$$

を BRS 変換で書くと、

$$
Q = \epsilon_{\dot\alpha A}Q^{\dot\alpha A} \qquad (4.2.16)
$$

として

$$
\begin{aligned}
Qa'_{\alpha\dot\alpha} &= i\epsilon_{\dot\alpha A}\mathcal{M}'^{A}_{\alpha}, \quad Q\mathcal{M}'^{A}_{\alpha} = -2\epsilon^{\dot\alpha A}[a'_{\alpha\dot\alpha},\chi] \\
Qw_{\dot\alpha} &= i\epsilon_{\dot\alpha A}\mu^A, \quad Q\mu^A = -2\epsilon^{\dot\alpha A}(w_{\dot\alpha}\chi + \phi^0 w_{\dot\alpha}) \\
Q\chi &= 0, \quad Q\chi^\dagger = 2i\delta^A_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha}_A, \\
Q\overline{\psi}^{\dot\alpha}_A &= \frac{1}{2}\delta^{\dot\alpha}_A[\chi^\dagger,\chi] - i\vec{D}\cdot\vec{\tau}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\delta^{\dot\beta}_A, \quad Q\vec{D} = \delta^A_{\dot\alpha}\vec{\tau}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}[\overline{\psi}^{\dot\beta}_A,\chi], \\
Q\kappa_f &= Q\widetilde{\kappa}_f = 0 \qquad (4.2.17)
\end{aligned}
$$

という変換性になります。Q は χ と ϕ で生成される無限小 $U(k)\times SU(N)$ 変換をのぞいてベキゼロになっています：

$$Q^2 w_{\dot\alpha} = 2i(w_{\dot\alpha}\chi + \phi^0 w_{\dot\alpha}) \tag{4.2.18}$$

すると、やはり同変な形で定式化することができまして、先ほどの $\widetilde{S}$ は

$$\widetilde{S} = Q\Xi + \Gamma \tag{4.2.19}$$

とかけます。ここで

$$\begin{aligned}\Xi &= 4\pi^2\,\mathrm{tr}_k\Big\{\frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha A}\overline{w}^{\dot\alpha}(\mu^A\chi^\dagger + \phi^{0\dagger}\mu^A) + \frac{1}{4}\epsilon_{\dot\alpha A}\overline{a}'^{\dot\alpha\alpha}[\mathcal{M}'^{\ A}_{\alpha}, \chi^\dagger] \\ &\quad + \delta^A_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\beta}_A(\overline{a}^{\dot\alpha}a_{\dot\beta} - \frac{1}{2}\vec{\zeta}\vec{\tau})\Big\} \qquad (4.2.20)\\ \Gamma &= -\pi^2\sum_{f=1}^{N_f}\mathrm{tr}_k\left((m_f-\chi)\kappa_f\widetilde{\kappa}_f\right) \qquad (4.2.21)\end{aligned}$$

$Q\Gamma = 0$ で、$\widetilde{S}$ と $\omega^{\mathcal{N}=2,N_f}$ も Q - 不変です。すると局所化を前のように行うことが出来ます。どういうことかというと、

$$\hat{\mathcal{Z}}_k^{(\mathcal{N}=2,N_f)}(\lambda) = \int_{\mathcal{M}_k}\omega^{(\mathcal{N}=2,N_f)}\exp\left(-\frac{1}{\lambda}Q\Xi - \Gamma\right) \tag{4.2.22}$$

と $\hat{\mathcal{Z}}(\lambda)$ を定義すると、

$$\frac{\partial\hat{\mathcal{Z}}_k^{(\mathcal{N}=2,N_f)}(\lambda)}{\partial\lambda} = \lambda^{-2}\int_{\mathcal{M}_k}\omega^{(\mathcal{N}=2,N_f)}Q\left(\Xi\exp\left(-\frac{1}{\lambda}Q\Xi - \Gamma\right)\right) = 0 \tag{4.2.23}$$

ですから λ を $\to\infty$ としてよいです。固定点の条件は何かといいますと、作用を極小にして、かつ次の条件を満たすことです：

$$w_{\dot\alpha}\chi_a + \phi^0_a w_{\dot\alpha} = 0, \quad [\chi_a, a'_n] = 0. \tag{4.2.24}$$

(ϕ^0_a) の対角的な基底では、一個目の式は

$$(\phi^0_a)_u w_{ui\dot\alpha} = -w_{uj\dot\alpha}(\chi_a)_{ji}, \tag{4.2.25}$$

となります。この解はどうなっているかといいますと、まず各固定点集合には partition

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_N, \quad k_i \geq 0 \tag{4.2.26}$$

が付随してまして、さらにこれらによりインスタントンのインデックス集合 $\{1,\cdots,k\}$ を

$$\begin{aligned}\{1,\cdots,k\} &= \{1,\cdots,k_1\}\cup\{k_1+1,\cdots,k_1+k_2\}\cdots \\ &\quad \cup\{k_1+\cdots+k_{N-1}+1,\cdots,k_1+\cdots+k_{N-1}+k_N\}\end{aligned}$$

と部分集合に分解します。すると u 番目のインデックス部分集合に対して、(ϕ_a^0) は $(\phi_a^0)_u$ に比例した単位行列になります。つまり、

$$\phi_a^0 = \begin{pmatrix} (\phi_a^0)_1 \mathbf{1}_{k_1} & & & & \\ & (\phi_a^0)_2 \mathbf{1}_{k_2} & & & \\ & & (\phi_a^0)_3 \mathbf{1}_{k_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\phi_a^0)_N \mathbf{1}_{k_N} \end{pmatrix} \tag{4.2.27}$$

v - 番目のブロックに対して固定点の解は、

$$\begin{aligned} (\chi_a)_{ij} &= -(\phi_a^0)_v \delta_{ij}, \\ w_{ui\dot{\alpha}} &\sim \delta_{uv}, \\ (a'_n)_{ij} &\sim \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

で与えられます。そこで、これらに ADHM constraints を課して解きますと、固定点の空間というのは非可換 $U(1)$ インスタントンと呼ばれるものの和に分解される。u 番目のブロックでは、非可換 $U(1)$ インスタントンの k_u インスタントンを導きます：

$$\vec{\tau}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \sum_{k_1+\cdots+k_{u-1}+1}^{k_1+\cdots+k_u} \overline{w}_{ui}^{\dot{\beta}} w_{ui\dot{\alpha}} - \vec{\zeta} = 0 \tag{4.2.29}$$

$\vec{\zeta} = 0$ の場合は、$w_{ui\dot{\alpha}} = 0$ と $a'_n = -\mathrm{diag}(X_1, \cdots, X_n)$ となって、解は point-like インスタントンになります。

各固定点で作用を評価してやって、その周りで Gauss 積分をしてやって具体的に 1 - インスタントン計算をやったのが

$$\widetilde{\mathcal{Z}}^{(\mathcal{N}=2,N_F)} = \sum_{v=1}^{N} \left\{ \prod_{u=1,u\neq v}^{N} \frac{1}{(\phi_v^0 - \phi_u^0)^2} \prod_{f=1}^{N_F} (m_f + \phi_v^0) \right\} \tag{4.2.30}$$

です。

4.3 Multi-instanton calculus and localization, Nekrasov's formula

この方法を多重インスタントンの場合に応用するのが Nekrasov の話で、それをやるのにはトポロジカル場の理論の説明をしなければならないのですが、ここでは結果だけ紹介します。局所化の方法で Berline-Vergne の定理を使って分配関数が計算されて、

$$Z(a;\epsilon) = \exp\left(\frac{\mathcal{F}^{inst}(a;\Lambda) + O(\epsilon)}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) \tag{4.3.1}$$

Nekrasov の場合は $U(1)$ 作用の積の固定点で記述され、この固定点を与える集合というのはある Young 図で統一的に記述されます。ゲージ群を $SU(N)$ としましょう。まず instanton

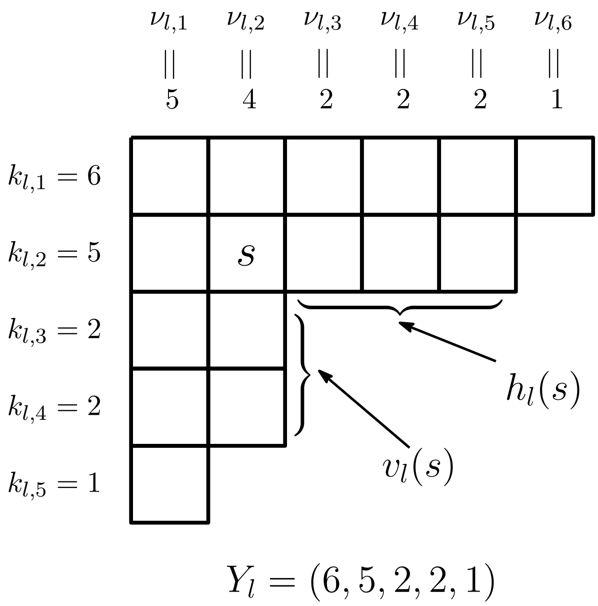

図 6: Young 図と partition の対応、h と v の定義。

数 k を $k = k_1 + \cdots + k_N$ と N 個の和へ partition しましょう。$\ell = 1, 2, \ldots, N$ として $k_\ell \geq 0$ とします。そうして、$k_\ell > 0$ であるすべての ℓ に対して k_ℓ の partition Y_ℓ を

$$k_\ell = k_{\ell,1} + \cdots + k_{\ell,\nu^{\ell,1}}, \quad k_{\ell,1} \geq \cdots \geq k_{\ell,\nu^{\ell,1}} > 0 \tag{4.3.2}$$

と与えます。その dual partition が

$$k_\ell = \nu^{\ell,1} + \cdots + \nu^{\ell,k_{\ell,1}}, \quad \nu^{\ell,1} \geq \cdots \geq \nu^{\ell,k_{\ell,1}} > 0 \tag{4.3.3}$$

だとしましょう。Y_ℓ は Young 図になりますね。図 6 を見てください。

一般の k インスタントンでの結果が次の公式です。固定点周りでの Lorentz 群 $SO(4)$ の maximal torus の作用の指標は、Young 図 $Y = (Y_1, \cdots, Y_N)$ で特徴づけられます [38]。ゲージ群 $SU(N)$ の maximal torus の寄与も考慮に入れると、固定点での接空間の指標は

$$\chi(a, \epsilon_1, \epsilon_2) \quad = \quad \sum_{\lambda,\mu=1}^{N} T_{a_\mu} T_{a_\lambda}^{-1} \left(\sum_{s \in Y_\lambda} T_1^{-h_\lambda(s)} T_2^{1+v_\mu(s)} + \sum_{s' \in Y_\mu} T_1^{1+h_\mu(s')} T_2^{-v_\mu(s')} \right)$$

となります。ただしゲージ回転を $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ で行い、Lorentz 回転を $\mathrm{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ だけ行ったとして、$T_{a_\lambda} = e^{ia_\lambda}$, $T_a = e^{i\epsilon_a}$ と略記しました。$T_{a_\mu} T_{a_\lambda}^{-1} T_1^{m_1} T_2^{m_2}$ なら、ウエイトが $a_\mu - a_\lambda + m_1\epsilon_1 + m_2\epsilon_2$ ということです。

公式中の h, v は、もし箱 s が Young 図の i 番目の行と j 番目の列にあるのなら、

$$h_\lambda(s) \quad = \quad k_{\lambda,i} - j \tag{4.3.4}$$
$$v_\lambda(s) \quad = \quad \nu_{\lambda,j} - i \tag{4.3.5}$$

と定義します。ただし、$j > k_{\lambda,1}$ と $i > \nu_{\lambda,1}$ の時は $h = v = 0$ と定めます。図 6 を参照してください。

すると、分配関数は次で与えられます [13]：

$$
\begin{aligned}
(\det L)^{1/2}\Big|_{(Y_1,\cdots,Y_N)} \quad = \quad \prod_{\lambda,\mu=1}^{N} & \left(\prod_{s\in Y_\lambda} (a_{\mu\lambda} - \epsilon_1 h_\lambda(s) + \epsilon_2(1+v_\mu(s))) \right. \\
& \left. \prod_{s'\in Y_\mu} (a_{\mu\lambda} + \epsilon_1(1+h_\mu(s')) + \epsilon_2 v_\lambda(s')) \right)
\end{aligned}
$$

として、

$$
Z(a,\epsilon_1,\epsilon_2) = \sum_{Y_1,\cdots,Y_N} \frac{1}{(\det L)^{1/2}\Big|_{(Y_1,\cdots,Y_N)}} \tag{4.3.6}
$$

となる。

$SU(N), k=1$ の場合の例を具体的に書くと、$Y=(Y_1,\cdots,Y_N)$ は $Y=(\emptyset,\cdots,\Box,\cdots,\emptyset)$ しか選びようがないですから、$\Box$ が何番目にあるかについて足し上げて、

$$
\det L^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1\epsilon_2 \prod_{u\neq v}(a_u - a_v)(a_v - a_u + \epsilon) \tag{4.3.7}
$$

となります。

この公式は Young 図に関する和を含んでおり、これだけでは何を意味しているのかまだ不明の点もあります。そこで最近は topological string を使ってもう少しこういう和を足しあげる、ということが議論されており、これからの面白い話題です。また gravitational correction といったことが今後重要になってくると個人的には思われます。おしまいに、Seiberg-Witten の結果と比較する際にどうすればよいかだけ説明しておきますと、

$$
F_{\text{inst}}(a) = \lim_{\epsilon_{1,2}\to 0} \epsilon_1\epsilon_2 \log Z(a,\epsilon_1,\epsilon_2) \tag{4.3.8}
$$

が Seiberg-Witten の prepotential の instanton correction 部分になるべし、ということが物理的な議論で判っています。この F_{inst} は Young 図の足し上げの極限で定まっていますが、Seiberg-Witten の prepotential のほうは前の節で説明しましたように、curve とその上の differential の積分で定まっていましたから、一見非常に違うものです。それを具体的に示したのは Nekrasov-Okounkov [39] と中島 - 吉岡 [40] です。中島 - 吉岡のレクチャーノート [41] も一読に値すると思います。

A 公式のまとめ

本文や補遺で用いる公式をまとめておく。

A.1 スピノル解析

Dirac 行列 (Euclid 空間) $\sigma_n = \sigma_{n\alpha\dot\alpha} \equiv (i\vec\tau, 1)$, $\bar\sigma_n = \bar\sigma_n^{\dot\alpha\alpha} \equiv (-i\vec\tau, 1)$

$$
\sigma^n\bar\sigma^m + \sigma^m\bar\sigma^n = 2\delta^{mn}, \quad \bar\sigma^n\sigma^m + \bar\sigma^m\sigma^n = 2\delta^{mn} \tag{A.1.1}
$$

スピノル添字 $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$

$$\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}, \quad \psi^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}} \tag{A.1.2}$$

ここで $\varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1$, $\varepsilon^{21} = \varepsilon_{12} = -1$. $\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$.
ψ^{α} と $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ は Euclid 空間では独立なスピノル。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{n\beta\dot{\beta}} \\ \sigma_{n\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_n^{\dot{\beta}\beta} &= 2\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \\ \mathrm{tr}\sigma_n\bar{\sigma}_m &= 2\delta_{nm} \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

A.2 ADHM 関係

$$\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}}\Delta_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} f^{-1} \tag{A.2.1}$$

$$\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} b^{\alpha} = \bar{b}^{\alpha}\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} \tag{A.2.2}$$

$$\begin{aligned} \partial_n \bar{\Delta}_i^{\dot{\alpha}\lambda} &= \bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{b}^{\lambda}_{\alpha i} \\ \partial_n \Delta_{\dot{\alpha}} &= b^{\alpha}\sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} \end{aligned} \tag{A.2.3}$$

$$\begin{aligned} \partial_n f &= -f\partial_n(f^{-1})f \\ &= -f\partial_n\left(\frac{1}{2}\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}}\Delta_{\dot{\alpha}}\right) f \\ &= -f\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{b}_{\alpha}\Delta_{\dot{\alpha}} f = -f\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} b^{\alpha}\sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} f \end{aligned} \tag{A.2.4}$$

$$\partial_n\partial_n f = -4f\bar{b}_{\alpha}Pb^{\alpha}f \tag{A.2.5}$$

$$\partial_n P = -\Delta_{\dot{\alpha}} f\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{b}_{\alpha}P - Pb^{\alpha}\sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} f\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} \tag{A.2.6}$$

$$\partial_n\partial_n P = -4\left\{P, b^{\alpha}f\bar{b}_{\alpha}\right\} + 4\Delta_{\dot{\alpha}}\bar{b}_{\alpha}Pb^{\alpha}f\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} \tag{A.2.7}$$

$$D_n(\bar{U}JU) = -\bar{U}b^{\alpha}\sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} f\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}}JU + \bar{U}\partial_n JU - \bar{U}J\Delta_{\dot{\alpha}} f\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{b}_{\alpha}U \tag{A.2.8}$$

$$\begin{aligned} D_n^2(\bar{U}JU) = {} & \bar{U}\partial_n^2 JU - 2\bar{U}b^{\alpha}\sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} f\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}}\partial_n JU - 2\bar{U}\partial_n J\Delta_{\dot{\alpha}} f\bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{b}_{\alpha}U \\ & +4\bar{U}b^{\alpha}f\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}}J\Delta_{\dot{\alpha}} f\bar{b}_{\alpha}U - 4\bar{U}\left\{b^{\alpha}f\bar{b}_{\alpha}, J\right\}U \end{aligned} \tag{A.2.9}$$

B　Osborn の公式の証明

Osborn の公式 [16]

$$\mathrm{tr}_N F_{mn}^2 = -\frac{1}{g^2}(\partial_n \partial_n)^2 \mathrm{tr}_k \log f \tag{B.0.1}$$

を証明する。まず左辺は $F_{mn} = \frac{4}{g}\bar{U} b^\alpha (\sigma_{mn})_\alpha{}^\beta f \bar{b}_\beta U$ を用いると

$$\mathrm{tr}_N F_{mn}^2 = \frac{16}{g^2}\mathrm{tr}_N \left(\bar{U} b^\alpha (\sigma_{mn})_\alpha{}^\beta f \bar{b}_\beta U \bar{U} b^\gamma (\sigma_{mn})_\gamma{}^\delta f \bar{b}_\delta U\right) \tag{B.0.2}$$

と書ける。Dirac 行列についての恒等式

$$(\sigma_{mn})_\alpha{}^\beta (\sigma_{mn})_\gamma{}^\delta = -\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon^{\beta\gamma} - \delta_\alpha^\delta \delta_\gamma^\beta \tag{B.0.3}$$

と $P = U\bar{U}$ を用いると, (B.0.2) は

$$-\frac{16}{g^2}\mathrm{tr}\left(\bar{b}_\beta P b_\alpha f \bar{b}^\beta P b^\alpha f + \bar{b}_\beta P b^\beta f \bar{b}_\alpha P b^\alpha f\right) \tag{B.0.4}$$

となる。この式と (B.0.1) の右辺の計算とを比較する。

まず $\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} \Delta_{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} f^{-1}$ と $\partial_n f = -f \partial_n (f^{-1}) f$ より

$$\partial_n f = -f \partial_n \left(\frac{1}{2}\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} \Delta_{\dot{\alpha}}\right) f \tag{B.0.5}$$

を得る。$\partial_n \bar{\Delta}_i^{\dot{\alpha}\lambda} = \bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{b}_{\alpha i}^\lambda$ と $\partial \Delta_{\dot{\alpha}} = b^\alpha \sigma_{n\alpha\dot{\alpha}}$ なので

$$\partial_n f = -f \bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha} \bar{b}_\alpha \Delta_{\dot{\alpha}} f = -f \bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} b^\alpha \sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} f \tag{B.0.6}$$

を得る。ここで $\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} b_\alpha = \bar{b}_\alpha \Delta^{\dot{\alpha}}$ を用いた。もう一度 x_n で微分すると

$$\begin{aligned} \partial_n \partial_n f &= -\partial_n f \bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{b}_\alpha \Delta_{\dot{\alpha}} f - \bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{b}_\alpha b^\beta \sigma_{n\beta\dot{\alpha}} f - f \bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} \bar{b}_\alpha \Delta_{\dot{\alpha}} \partial_n f \\ &= -4 f \bar{b}_\alpha P b^\alpha f \end{aligned} \tag{B.0.7}$$

を得る。そこでまず

$$(\partial_n \partial_n)\mathrm{tr}_k \log f = \mathrm{tr}_k \left(f^{-1}\partial_n \partial_n f - f^{-1}\partial_n f f^{-1} \partial_n f\right) \tag{B.0.8}$$

を計算する。ここで (B.0.6) および (B.0.7) より

$$\begin{aligned} f^{-1}\partial_n \partial_n f &= -4 \bar{b}_\alpha P b^\alpha f \\ f^{-1}\partial_n f f^{-1}\partial_n f &= -\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} b^\alpha \sigma_{n\alpha\dot{\alpha}} (-f \bar{\sigma}_n^{\dot{\beta}\beta} \bar{b}_\beta \Delta_{\dot{\beta}} f) \\ &= 2\bar{\Delta}^{\dot{\alpha}} b^\alpha f b_\alpha \Delta_{\dot{\alpha}} f \end{aligned} \tag{B.0.9}$$

となるので, これを代入して $P = 1 + \Delta^{\dot{\alpha}} f \bar{\Delta}_{\dot{\alpha}}$ を使うと

$$(\partial_n \partial_n)\mathrm{tr}_k \log f = -2\mathrm{tr}_k (\bar{b}_\alpha P b^\alpha f + 2f) \tag{B.0.10}$$

を得る。もう一度 $\partial_n\partial_n$ を作用させると

$$(\partial_n\partial_n)^2\mathrm{tr}_k\log f \;=\; -2\mathrm{tr}_k(\bar{b}_\alpha\partial_n\partial_n Pb^\alpha f+2\bar{b}_\alpha\partial_n Pb^\alpha\partial_n f+\bar{b}_\alpha Pb^\alpha\partial_n\partial_n f+2\partial_n\partial_n f) \tag{B.0.11}$$

となる。

$$\begin{aligned}\partial_n P &= -\Delta_{\dot\alpha}f\bar\sigma_n^{\dot\alpha\alpha}\bar{b}_\alpha P-Pb^\alpha\sigma_{n\alpha\dot\alpha}f\bar\Delta^{\dot\alpha},\\ \partial_n\partial_n P &= -4\left\{P,b^\alpha fb_\alpha\right\}+4\Delta_{\dot\alpha}f\bar{b}_\alpha Pb^\alpha f\bar\Delta^{\dot\alpha}\end{aligned} \tag{B.0.12}$$

および (B.0.7) を代入すると

$$\begin{aligned}(\partial_n\partial_n)^2\mathrm{tr}_k\log f &= 8\mathrm{tr}_k\Big\{\bar{b}_\alpha\left\{P,b^\beta fb_\beta\right\}-\bar{b}_\alpha\Delta_{\dot\alpha}f\bar{b}_\beta Pb^\beta f\bar\Delta^{\dot\alpha}b^\alpha f\\ &\quad -\bar{b}_\alpha\Delta_{\dot\beta}f\bar{b}_\beta Pb^\alpha f\bar{b}^\beta\Delta^{\dot\beta}f-\bar{b}_\alpha Pb^\alpha f\bar{b}_\beta Pb^\beta f\\ &\quad +\bar{b}_\alpha Pb^\alpha f\bar{b}_\beta Pb^\beta f+2f\bar{b}_\alpha Pb^\alpha f\Big\}\end{aligned} \tag{B.0.13}$$

これと (B.0.4) を比較して公式を得る。

C　ハイパーケーラー商

この節では ADHM Moduli 空間のハイパーケーラー商構成に基づいて、インスタントン背景場におけるゼロモード積分の measure を構成する。ハイパーケーラー商構成についての基礎的な文献は [42] である。

C.1　ハイパーケーラー多様体

基礎的な定義から始める。M を複素多様体とする。M は実 $2n$ 次元であり、複素構造 I と呼ばれる、M の接バンドル TM から TM への線形写像で $I^2=-1$ および可積分条件を満たすものが存在する。$(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n)$ を局所座標とし、複素座標 $z_i=x_i+iy_i$, $\bar{z}_i=x_i-iy_i$ $(i=1,\cdots,n)$ を導入すれば、I は

$$\begin{aligned}I\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_i},\quad I\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\\ I\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right) &= i\frac{\partial}{\partial z_i},\quad I\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right)=-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\end{aligned} \tag{C.1.1}$$

と表される。

M 上の Hermite 計量 g は I で不変である。

$$g(IX,IY)=g(X,Y),\quad X,Y\in TM$$

これから $2-$ 形式 ω を

$$\omega(X,Y)=g(IX,Y)$$

で定義する。局所座標では

$$g = g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^{\bar{j}}, \quad \omega = g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$$

と書かれる。

ω が閉形式、つまり $d\omega = 0$ であるとき、M は Kähler 多様体と呼ばれる。このとき ω は Kähler 形式と呼ばれる。$g_{i\bar{j}}$ は Kähler ポテンシャル K を用いて $g_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} K$ と表される。

M が 3 個の独立な複素構造 $I^{(c)}$ を持ち、

$$I^{(c)} I^{(d)} = -\delta^{cd} + \epsilon^{cde} I^{(e)}$$

を満すとする。$I^{(c)}$ に対応する 2 形式 $\omega^{(c)}$ がそれぞれ Kähler 形式となるとき、M を Hyper-Kähler (ハイパーケーラー) 多様体という。M の次元は $4n$ となる。

例 $M = \mathbf{R}^4$　座標 $x_n (n = 1, 2, 3, 4)$ を

$$x_n = \frac{1}{2} x_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\sigma}_n^{\dot{\alpha}\alpha} = \frac{1}{2} \bar{x}^{\dot{\alpha}\alpha} \sigma_{n\dot{\alpha}\alpha}, \quad x_{\alpha\dot{\beta}} = x_m \sigma_{m\alpha\dot{\beta}} \tag{C.1.2}$$

と書いたとき

$$\begin{aligned} (I^c x)_{\alpha\dot{\alpha}} &= i x_{\alpha\dot{\beta}} \tau^{c\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \\ (I^c \bar{x})^{\dot{\alpha}\alpha} &= -i \tau^{c\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{x}^{\dot{\beta}\alpha} \end{aligned} \tag{C.1.3}$$

と定義すると $\mathbf{R}^4$ は hyper-Kähler 多様体である。

いま hyper-Kähler 多様体 M の次元を $4n$ とし、局所座標を $x^\mu (\mu = 1, \cdots, 4n)$ とする。接空間 TM を $Sp(n) \times SU(2)$ 添字 $i\dot{\alpha}$ $(i = 1, \cdots, n,\ \dot{\alpha} = 1, 2)$ で特徴づける。vielbein $h^\mu_{i\dot{\alpha}}$ を導入すると計量は

$$g = h^{i\dot{\alpha}}_\mu h^{j\dot{\beta}}_\nu \Omega_{ij} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} dx^\mu dx^\nu$$

と書くことができる。ここで Ω_{ij} は symplectic 行列である。複素構造 $I^{(c)}$ は添字 $\dot{\alpha}$ に作用し

$$(I^{(c)} \cdot h)^{i\dot{\alpha}}{}_\mu = -i (\tau^c)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} h^{i\dot{\beta}}{}_\mu \tag{C.1.4}$$

となる。Kähler 形式は

$$\vec{\omega} = i \Omega_{ij} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \vec{\tau}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}} h^{i\dot{\beta}}{}_\mu h^{j\dot{\gamma}}{}_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{C.1.5}$$

で与えられる。

C.2 商構成法

hyper-Kähler の場合も同様なので Kähler の場合を説明する。$\widetilde{M}$ を Kähler 多様体、Lie 群 G が $\widetilde{M}$ に isometry として作用しているとする。つまり G の作用は計量 $\tilde{g}$ と複素構造 $\tilde{I}$ を保つ。T^r $(r = 1, \cdots, \mathrm{dim}G)$ を G の Lie 代数 $\mathbf{g}$ の基底とする。各 T^r に対し、$\widetilde{M}$ 上の

ベクトル場 X_r が対応する。G が isometry として作用するということは X_r が正則 Killing ベクトル、つまり

$$\mathcal{L}_{X_r}\tilde{I} = \mathcal{L}_{X_r}\tilde{g} = 0 \tag{C.2.1}$$

を意味する。ここで $\mathcal{L} = di_X + i_X d$ は X 方向の Lie 微分を表す。i_X は内部積である。このとき $\tilde{\omega}$ も $\mathcal{L}_{X_r}$ で不変な事がわかる。

$$0 = \mathcal{L}_{X_r}\tilde{\omega} = i_{X_r}d\tilde{\omega} + di_{X_r}\tilde{\omega} = d(i_{X_r}\omega) \tag{C.2.2}$$

$H^1(\widetilde{M}, \mathbf{R}) = 0$ の場合、Hamiltonian 関数 μ^{X_r} が大域的に存在し、$d\mu^{X_r} = i_{X_r}\tilde{\omega}$ と書くことができる。μ^X が equivariant(同変的)、つまり $Y\mu^X = \mu^{[X,Y]}$ をみたすとき、μ^X を moment map という。

$$\mu = \sum_{r=1}^{\mathrm{dim}G} \mu^{X_r}T^r$$

で μ を定義する。μ は $\widetilde{M}$ から $\mathbf{g}^*$(Lie 代数 $\mathbf{g}$ の双対) への写像とみなすことができる。$0 \in \mathbf{g}^*$ の逆像 $N = \mu^{-1}(0)$ を level set とよぶ。$m \in \widetilde{M}$, $Y \in \mathbf{g}$ に対し $Y\mu^X(m) = \mu^{[Y,X]}(m) = 0$ なので N には G が作用する。

商空間 $M = N/G$ は次元 $2n - 2\mathrm{dim}G$ の Kähler 多様体となることを以下で説明する。$\widetilde{M}$ の部分集合 N の点における $\widetilde{M}$ の接ベクトルは、N の接空間 TN 方向と TN に垂直な方向に分解される。N は $\mathrm{dim}G$ 個の関数の零点で特徴づけられるため、法線ベクトルの数は $\mathrm{dim}G$ 個である。$X \in TN$ とすると $X\mu = 0$ を満足する。関係式

$$\tilde{g}(\tilde{I}X_r, X) = \tilde{\omega}(X_r, X) = \langle X, d\mu^{X_r}\rangle = \mu^{[X,X_r]} = 0 \tag{C.2.3}$$

に注意すると、$\tilde{I}X_r$ が法線ベクトルを張ることがわかる。

TN を N の接空間、V を X^r によって張られる TN の部分空間とする。

$$TN = H \oplus V$$

と分解したとき、H を horizontal space、V を vertical space という。M の接空間 TM は $H = TN/V$ と同一視できる。M の接ベクトル X に対し、H への horizontal lift X(同じ記号を用いる) が存在して

$$\tilde{g}(X, \tilde{I}X_r) = \tilde{g}(X, X_r) = 0 \tag{C.2.4}$$

ととれる。この lift によって M 上の計量を

$$g(X, Y) = \tilde{g}(X, Y) \tag{C.2.5}$$

で定める。M 上の複素構造 I は, $\widetilde{M}$ 上の複素構造から自然に導入される。

hyper-Kähler の場合各 $\tilde{I}^{(c)}$ に対し同様のことを行えばよい。

C.3 体積要素

Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ に Lie 群 G が isometry として作用しているときに作られる Kähler 商 $M = \mu^{-1}(0)/G$ の体積要素 ω_{vol} と, もとの Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ の標準的な体積要素 $\tilde{\omega}_{vol}$ との関係を考察する。

$\widetilde{M}$ の局所座標を $(x^1, \cdots, x^N)$ と計量を g とすると, 体積要素 $\tilde{\omega}_{vol}$ は

$$\tilde{\omega}_{vol} = \sqrt{G} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N \tag{C.3.1}$$

と書くことができる。ここで

$$\tilde{G} = \det \tilde{g}_{ij}, \quad \tilde{g}_{ij} = \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{C.3.2}$$

である。接空間 $T\widetilde{M}$ の直交分解

$$T\widetilde{M} = TN \oplus (TN)^{\perp} = TM \oplus V \oplus (TN)^{\perp}$$

を考える。M の局所座標を $(w^1, \cdots, w^n)$ $(n = N - 2\mathrm{dim}G)$ 計量を g、G の作用を生成するベクトル場 X_r とそのパラメータを t^r とする。$(TN)^{\perp}$ は $\tilde{I}X_r$ で生成される。対応する局所座標を s^r とする。すると体積要素 $\tilde{\omega}_{vol}$ は

$$\tilde{\omega}_{vol} = \omega_{vol} \wedge \sqrt{G_t} dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^{\mathrm{dim}G} \wedge \sqrt{G_s} ds^1 \wedge \cdots \wedge ds^{\mathrm{dim}G}$$

となる。ここで $\omega_{vol} = \sqrt{\det(g_{ij})} dw^1 \wedge \cdots \wedge dw^n$, $g_{ij} = \tilde{g}(\frac{\partial}{\partial w^i}, \frac{\partial}{\partial w^j})$, $G_t = \det \tilde{g}(X_r, X_s)$, $G_s = \det \tilde{g}(\tilde{I}X_r, \tilde{I}X_s)$ である。s^r の代わりに moment map μ^r を座標に選ぶことができる。体積要素 $\tilde{\omega}_{vol}$ は

$$\tilde{\omega}_{vol} = \omega_{vol} \wedge \sqrt{G_t} dt^1 \wedge \cdots dt^r \wedge \sqrt{G_\mu} d\mu^1 \wedge \cdots d\mu^r$$

となる。 ここで $G_\mu = \det \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial \mu^r}, \frac{\partial}{\partial \mu^s}\right)$ である。

$$\frac{\partial}{\partial \mu^r} = A_{rs} \tilde{I} X_s. \tag{C.3.3}$$

とおくと

$$\tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial \mu^r}, \frac{\partial}{\partial \mu^s}\right) = A_{rt} \tilde{g}(\tilde{I}X_t, \tilde{I}X_u) A_{us} \tag{C.3.4}$$

という関係がわかる。さらに

$$\frac{\partial}{\partial \mu^r} \mu^s = \delta^s_r = A_{ru} \tilde{I} X_u \mu^s \tag{C.3.5}$$

および

$$\tilde{I}X_u \mu^s \quad = \quad (\tilde{I}X_u)_i \frac{\partial \mu^s}{\partial x^i} = d\mu^s(\tilde{I}X_u) = \tilde{\omega}(X_s, \tilde{I}X_u) = \tilde{g}(\tilde{I}X_s, \tilde{I}X_u) \tag{C.3.6}$$

より,

$$L_{ab} = \tilde{g}(\tilde{I}X_a, \tilde{I}X_b) \tag{C.3.7}$$

と定義すれば L は A の逆行列となる。従って

$$G_\mu = (\det L)^{-2} \det L = (\det L)^{-1} \tag{C.3.8}$$

を得る。従って M の体積要素は

$$\omega = \int \tilde{\omega} \frac{(\mathrm{det}L)^{\frac{1}{2}}}{Vol_G(x)} \prod_{a=1}^{\mathrm{dim}G} \delta(\mu^r) \tag{C.3.9}$$

と書くことができる。ここで

$$Vol_G(x) = \int \sqrt{G_t} dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^r \tag{C.3.10}$$

行列表示による標準的な Lie 群の体積 Vol(G) を用いると $Vol_G(x) = |\mathrm{det}\mathbf{L}|^{\frac{1}{2}} \mathrm{Vol}(G)$ と表されるので

$$\int_M \omega = \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_{\widetilde{M}} \tilde{\omega} \prod_{a=1}^{\mathrm{dim}G} \delta(\mu^r) \tag{C.3.11}$$

となる。

hyper-Kähler の場合、μ の数が 3 倍に増えるので

$$\int_M \omega = \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)} \int_{\tilde{M}} \tilde{\omega}\, |\mathrm{det}\mathbf{L}| \prod_{r=1}^{\mathrm{dim}G} \prod_{c=1}^{3} \delta(\mu^{(c)X_r}) \tag{C.3.12}$$

の形になる。

C.4 ADHM Moduli 空間への応用

この公式を ADHM Moduli 空間に応用する。k-インスタンタントンのモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k,N}$ は、ADHM 条件を満す変数 $a_{\dot{\alpha}}$ を $U(k)$ でわったものである。このとき Mother Space は $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,N} = \mathbf{R}^{4k(k+N)}$ であり、その座標は

$$a_{\lambda j\dot{\alpha}} = a_{(u+j\alpha)j\dot{\alpha}} \quad = \begin{pmatrix} \omega_{uj\dot{\alpha}} \\ (a'_{\alpha\dot{\alpha}})_{ij} \end{pmatrix} \tag{C.4.1}$$

$$\bar{a}_j^{\dot{\alpha}\lambda} = \bar{a}_j^{\dot{\alpha}(u+i\alpha)} \quad = (\bar{\omega}_{ju}^{\dot{\alpha}}, \quad (\bar{a'}^{\dot{\alpha}\alpha})_{ji}) \tag{C.4.2}$$

である。ADHM 条件は

$$\begin{aligned} \tau^{c\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \bar{a}^{\dot{\beta}} a_{\dot{\alpha}} &= \tau^{c\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \left(\bar{w}_{ju}^{\dot{\beta}} w_{ui\dot{\alpha}} + (\bar{a}'^{\dot{\beta}\alpha})_{jk} (a'_{\alpha\dot{\alpha}})_{ki} \right) = 0 && \text{(C.4.3)} \\ (a'_n)^\dagger &= a'_n && \text{(C.4.4)} \end{aligned}$$

であり、計量は

$$\begin{aligned} \widetilde{g} &= 4\pi^2 (2d\bar{w}_{iu}^{\dot{\alpha}} dw_{ui\dot{\alpha}} + d(\bar{a'}^{\dot{\alpha}\alpha})_{ij} d(a'_{\alpha\dot{\alpha}})_{ji}) \\ &= 8\pi^2 \mathrm{tr}_k (d\bar{w}^{\dot{\alpha}} dw_{\dot{\alpha}} + da'_n da'_n) && \text{(C.4.5)} \end{aligned}$$

である。シンプレクティック基底

$$z^{i\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} \bar{w}_{iu}^{\dot{\alpha}} \\ (\bar{a}'^{\dot{\alpha}1})_{ij} \\ \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} w_{ui\dot{\beta}} \\ \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (a'_{1\dot{\beta}})_{ij} \end{pmatrix}, \quad \Omega_{ij} = 4\pi^2 \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1_{kN\times kN} & \\ & & & 1_{k^2\times k^2} \\ \hline -1_{kN\times kN} & & & \\ & -1_{k^2\times k^2} & & \end{array} \right) \tag{C.4.6}$$

をとる。前々節の記号では $i \sim \{iu, ij, ui, ij\}$ であり、$U(k)$ 作用は

$$
\begin{aligned}
w_{\dot\alpha} &\quad \to w_{\dot\alpha}\Xi \\
a'_n &\quad \to \Xi^\dagger a'_n \Xi
\end{aligned}
\tag{C.4.7}
$$

となる。$U(k)$ 作用の無限小版は

$$
X_r \;=\; iT^r_{ij}\bar w^{\dot\alpha}_{ju}\frac{\partial}{\partial \bar w^{\dot\alpha}_{iu}} - iT^r_{ji}w_{uj\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial w_{ui\dot\alpha}} + i[T^r, a'_n]_{ij}\frac{\partial}{\partial (a'_n)_{ij}} \tag{C.4.8}
$$

である。ここで T^r は $U(k)$ の基本表現での生成子である。

level set $\mathcal{N} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ は isomerty に附随する moment map が消えるという条件

$$
i\vec\mu^{X_r} = 4\pi^2 \vec\tau^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\mathrm{tr}_k(T^r \bar a^{\dot\alpha} a_{\dot\beta}) - \vec\zeta^r \tag{C.4.9}
$$

で特徴づけられる。ここでパラメータ $\vec\zeta = 0$ の場合が ADHM 条件に対応する。

商空間 $\mathcal{M}_k = \mathcal{N}/U(k)$ は level k インスタントンのモジュライ空間という。その次元は

$$
\mathrm{dim}\mathcal{M}_k = \mathrm{dim}\widetilde{\mathcal{M}} - 4\mathrm{dim}U(k) = 4k(k+N) - 4k^2 = 4kN \tag{C.4.10}
$$

である。体積要素は

$$
\int_{\mathcal{M}} \omega = \frac{C_k}{\mathrm{Vol}U(k)} \int d^{4k(N+k)}a\, |\mathrm{det}_{k^2}\mathbf{L}| \prod_{r=1}^{k^2}\prod_{c=1}^{3} \delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}_k(T^r \tau^{c\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\bar a^{\dot\alpha} a_{\dot\beta}) - \zeta^c\right) \tag{C.4.11}
$$

である。 ここで

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}_k T^r T^s &= \delta^{rs} && \text{(C.4.12)} \\
\mathrm{vol}U(k) &= \frac{2^k \pi^{\frac{k(k+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{k-1} i!} && \text{(C.4.13)} \\
C_k &= 2^{-\frac{k(k-1)}{2}}(2\pi)^{2kN} && \text{(C.4.14)}
\end{aligned}
$$

$k \times k$ エルミート行列 Ω に作用する演算子 $\mathbf{L}$ を

$$
\mathbf{L}\dot\Omega = \frac{1}{2}\{\bar w^{\dot\alpha} w_{\dot\alpha}, \Omega\} + [a'_n, [a'_n, \Omega]] \tag{C.4.15}
$$

で定義した。$\mathbf{L}$ は

$$
\tilde g(X_r, X_s) = \mathbf{L}_{rs} = 8\pi^2 \mathrm{tr}_k(T^r \mathbf{L} T^s) \tag{C.4.16}
$$

を満足する。この式は以下の様にして証明される。計量 (C.4.5) を用いると

$$
\begin{aligned}
\tilde g\left(\frac{\partial}{\partial \bar w^{\dot\alpha}_{iu}}, \frac{\partial}{\partial w_{vj\dot\beta}}\right) &= \frac{1}{2}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\delta_{ij}\delta_{uv} \\
\tilde g\left(\frac{\partial}{\partial (a'_n)_{ij}}, \frac{\partial}{\partial (a'_m)_{kl}}\right) &= \delta_{nm}\delta_{il}\delta_{jk}.
\end{aligned}
\tag{C.4.17}
$$

がわかる。これから

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(X_r, X_s) &= \frac{1}{2} i T^r_{ij} \bar{w}^{\dot{\alpha}}_{ju} (-i T^s_{kl} w_{vk\dot{\beta}}) \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}^{\dot{\alpha}}_{iu}}, \frac{\partial}{\partial w_{vl\dot{\beta}}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(-i T^r_{ji} w_{uj\dot{\alpha}})(i T^s_{kl} \bar{w}^{\dot{\beta}}_{lv}) \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial w_{ui\dot{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}^{\dot{\beta}}_{kv}}\right) \\
&\quad + i[T^r, a'_n]_{ij} i [T^s, a'_m]_{kl} \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial (a'_n)_{ij}}, \frac{\partial}{\partial (a'_m)_{kl}}\right) \\
&= \frac{1}{2} T^r_{ij} \bar{w}^{\dot{\alpha}}_{ju} w_{uk\dot{\alpha}} T^s_{ki} + \frac{1}{2} T^s_{il} \bar{w}^{\dot{\alpha}}_{lu} w_{uj\dot{\alpha}} T^r_{ji} - [T^r, a'_n]_{ij} [T^s, a'_n]_{ji} \\
&= \mathrm{tr}_k \left\{ \frac{1}{2} T^r \bar{w}^{\dot{\alpha}} w_{\dot{\alpha}} T^s + \frac{1}{2} T^s \bar{w}^{\dot{\alpha}} w_{\dot{\alpha}} T^r - [T^r, a'_n][T^s, a'_n] \right\} \\
&= \mathrm{tr}_k \left\{ \frac{1}{2} T^r \left\{ \bar{w}^{\dot{\alpha}} w_{\dot{\alpha}}, T^s \right\} + T^r [a'_n, [a'_n, T^s]] \right\} \qquad \text{(C.4.18)}
\end{aligned}$$

となる。

D　Nekrasov の公式の説明

この節では Nekrasov[13] による Instanton Moduli 空間上の Centered Partition Function の計算の概略について説明する。

D.1　位相的場の理論

4 次元 $N = 2$ 超対称理論は 8 個のスーパーチャージ Q^i_α, $Q^i_{\dot{\alpha}}$ をもつ。大局的な対称生は $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(2)_I$ であり、それぞれ左巻きスピノル $\alpha = 1, 2$, 右巻きスピノル $\dot{\alpha} = 1, 2$, 超対称の種類を区別する添字 $i = 1, 2$ に作用する。

ここでトポロジカルツイスト (**topological twist**[43]) と呼ばれる操作を行なう。これは $SU(2)_R \times SU(2)_I$ の対角部分群 $SU(2)_d$ をとり (つまり $SU(2)_R$ と $SU(2)_I$ を同一視する)、$SU(2)_L \times SU(2)_d$ を理論の新たなローレンツ群とみなすという考えである。その結果スーパーチャージは

$$\begin{aligned}
Q^i_\alpha &\to Q_{\alpha\dot{\alpha}} \sim Q_\mu \\
Q^i_{\dot{\alpha}} &\to Q_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sim Q, Q^+_{\mu\nu} \qquad \text{(D.1.1)}
\end{aligned}$$

と分解され、超場の成分は

$$\begin{aligned}
& A_\mu \to A_\mu \\
& \psi^i_\alpha \to \psi_\mu \\
& \psi^i_{\dot{\alpha}} \to \chi^+_{\mu\nu}, \chi \\
& \phi, \bar{\phi} \to \phi, \bar{\phi} \qquad \text{(D.1.2)}
\end{aligned}$$

さらに超空間のグラスマン座標は

$$
\begin{aligned}
\theta^i_\alpha &\to \theta_\mu \\
\bar\theta^i_{\dot\alpha} &\to \bar\theta^+_{\mu\nu}, \bar\theta
\end{aligned}
\tag{D.1.3}
$$

と分解される。

θ_μ は丁度1-form dx^μ に対応する。カイラル超場の θ_μ による展開 $\Phi = \phi+\theta_\mu\psi_\mu+\frac{1}{2}\theta_\mu\theta_\nu F_{\mu\nu}$ は微分形式を1つの場に集約したものになっている。さらに fermionic な対称性 Q は BSRT 対称性

$$
\begin{aligned}
QA_\mu &= \psi_\mu \\
Q\psi_\mu &= D_\mu\phi \\
Q\phi &= 0
\end{aligned}
\tag{D.1.4}
$$

に対応する。つまり Q は nilpotent $Q^2 = 0$ である。この理論の observable は BRST コホモロジーの元: $Q\psi = 0$, $\psi \sim \psi' + Q\chi$ で特徴づけられる。

例: $\phi(x)$ の多項式でゲージ不変なもの $\mathcal{O}^{(0)}_{P,x} = P(\phi(x))$ とその descendant を考える。例えば

$$
\mathcal{O}^{(0)} = \mathrm{Tr}\phi^2 \tag{D.1.5}
$$

とすると、Descent equation

$$
\delta\mathcal{O}^{(i)} = d\mathcal{O}^{(i-1)} \tag{D.1.6}
$$

から高次の $\mathcal{O}^{(i)}$ が決定される。具体的には

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}^{(1)} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\phi\psi) \\
\mathcal{O}^{(2)} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\psi\wedge\psi + \phi\wedge F\right) \\
\mathcal{O}^{(3)} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\psi\wedge F)
\end{aligned}
\tag{D.1.7}
$$

となる。 これから observable が

$$
\mathcal{O}^{(k)}_{\Sigma_k} = \int_{\Sigma_k} \mathcal{O}^{(k)} \tag{D.1.8}
$$

と求められる。 これは BRST 不変である。というのは

$$
\delta\int_{\Sigma_k} \mathcal{O}^{(k)} = \int_{\Sigma_k} d\mathcal{O}^{(k-1)} = 0 \tag{D.1.9}
$$

が成立するからである。超場形式では、これは

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\Phi^2 &= \mathrm{Tr}\left(\phi + \theta_\mu\psi_\mu + \frac{1}{2}\theta_\mu\theta_\nu F_{\mu\nu}\right)^2 \\
&= \mathrm{Tr}\left(\phi^2 + 2\theta_\mu\psi_\mu\phi + \theta_\mu\theta_\nu F_{\mu\nu}\phi + \theta_\mu\psi_\mu\theta_\nu\psi_\nu + \theta_\mu\theta_\nu F_{\mu\nu}\theta_\rho\psi_\rho + (\theta)^4 FF\right) \\
&= \mathcal{O}^{(0)} + \theta_\mu\mathcal{O}^{(1)}_\mu + \cdots
\end{aligned}
\tag{D.1.10}
$$

とまとめられる。

一般には observable は

$$\mathcal{O}^{(k)}_{P,\Sigma} = \int_{\Sigma} P(\Phi), \quad \Sigma\text{: } k\text{-cycle}$$

の形で与えられる。しかし $k > 0$ に対し Σ は $\mathbf{R}^4$ では trivial である。

D.2 Equivariant BRST Cohomology

前節で導入した k-cycleΣ_k 上の k-form$\alpha_{[k]}$ の積分の Poincaré dual による記述を考える。すなわちある closed な $(4-k)$-form $\omega_{[4-k]}$ が存在して

$$\int_{\Sigma_k} \alpha_{[k]} = \int_M \omega_{[4-k]} \wedge \alpha_{[k]} \tag{D.2.1}$$

と書くことができる。そこで closed k-form に対応する超場

$$\omega = \frac{1}{(4-k)!} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_k} \theta^{\mu_1} \cdots \theta^{\mu_k}$$

を導入すると、

$$\mathcal{O}^{\omega}_P = \int d^4x d^4\theta \omega(x,\theta) P(\Phi)$$

により $P(\Phi)$ の closed $(4-k)$-form の部分が残る。$\mathbf{R}^4$ 上ではどの closed k-form も exact なので、この observable はほとんど Q-exact となる。こうして $\mathbf{R}^4$ 上では Q-cohomology は自明になるのだが、Q を $\mathbf{R}^4$ に作用する $SO(4)$ 変換を用いて少し変更してやると $\mathbf{R}^4$ 上でも非自明な構造が導入される。

そこで **equivariant BRST operator**

$$\tilde{Q} = Q + E^a \Omega^a_{\mu\nu} x^\mu Q^\nu \tag{D.2.2}$$

を導入する。ここで $\Omega^a = \Omega^a_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu$ $(a = 1, 2, \cdots, 6)$ は $SO(4)$ 変換を生成するベクトル場である。E^a はパラメータ。このとき $\mathcal{O}^{(k)}_{\Sigma}$ は $\tilde{Q}$ 不変ではない。$\tilde{Q}$-cohomology の observable は $\mathbf{R}^4$ 上の $SO(4)$-equivariant form と呼ばれる。

$SO(4)$-equivariant form $\Omega(E)$ は $\mathbf{R}^4$ 上の inhomogeneous な微分形式、つまり

$$\Omega(E) = \Omega(E)_{[0]} + \cdots + \Omega(E)_{[4]} \tag{D.2.3}$$

と次数のそろっていない k 形式 $\Omega(E)_{[k]}$ の和で書くことができる。このとき $\Omega(E)$ が **equivariant form** であるとは

$$g^* \Omega(E) = \Omega(g^{-1} E g), \quad \text{for } g \in SO(4) \tag{D.2.4}$$

が満たされることを意味する。ここで $g^*\Omega$ は $SO(4)$ の $\mathbf{R}^4$ への作用を用いた引きもどしである。さらに **equivariant differential** $D = d + i_{V(E)}$ を定義する。ここで $V(E)$ は

E によって生成される無限小変換を表す $\mathbf{R}^4$ 上のベクトル場である。するともし $\Omega(E)$ が **equivariantly closed** (*i.e.* D-closed), ならば

$$\mathcal{O}_P^{\Omega(E)} = \int \Omega(E) \wedge P(\Phi) \tag{D.2.5}$$

は $\tilde{Q}$-closed となる。

Symplectic 形式 ω を

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \tag{D.2.6}$$

で導入する。これは $SO(4)$ の部分群 $U(2)$ の下で不変となる。これにより Kähler 構造が定義される。moment map: $\mu : \mathbf{R}^4 \to u(2)$ で

$$d\mu(E) = i_{V(E)}\omega \tag{D.2.7}$$

を満足するものが定義され、これから $\Omega(E) = \omega - \mu(E)$ は D-closed であることがわかる。$\mu(E)$ を構成する。例として

$$\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^2, \quad SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2) \supset U(1) \times U(1) \tag{D.2.8}$$

の分解を考え、$U(1) \times U(1)$ 作用

$$z_1 \equiv x_1 + ix_2 \to e^{i\epsilon_1}(x_1 + ix_2), \quad z_2 \equiv x_3 + ix_4 \to e^{i\epsilon_2}(x_3 + ix_4) \tag{D.2.9}$$

を考える。ベクトル場は

$$V(E) = \frac{1}{2}\epsilon_1(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) + \frac{1}{2}\epsilon_2(x_4\partial_3 - x_3\partial_4) \tag{D.2.10}$$

で与えられる。これより

$$\begin{aligned} i_{V(E)}\omega &= \epsilon_1(x_1dx_1 + x_2dx_2) + \epsilon_2(x_3dx_3 + x_4dx_4) \\ &= d(\epsilon_1(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon_2(x_3^2 + x_4^2)) \end{aligned} \tag{D.2.11}$$

となるので

$$H \equiv \mu(E) = \epsilon_1|z_1|^2 + \epsilon_2|z_2|^2 \tag{D.2.12}$$

となる。observable

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_P^{\Omega(E)} &= \int \Omega(E) \wedge \Phi^2 \\ &= \int (H - \omega)\Phi^2 \\ &= \int (\omega \wedge \mathrm{Tr}(\phi F + \frac{1}{2}\psi\psi)) - H\mathrm{Tr}(F \wedge F) \end{aligned} \tag{D.2.13}$$

と分配関数

$$Z(a, \epsilon) = \left\langle \exp\left(\frac{1}{(2\pi i)^2}\int (\omega \wedge \mathrm{Tr}(\phi F + \frac{1}{2}\psi\psi)) - H\mathrm{Tr}(F \wedge F)\right)\right\rangle_a \tag{D.2.14}$$

を考える。ここで $\langle A\rangle_a$ はスカラー場 ϕ の期待値 $\langle\phi\rangle = a$ のもとでの A の期待値を表す。この分配関数は、超場形式では

$$\mathcal{H}(x,\theta) = H + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu \tag{D.2.15}$$

と定義すると

$$Z(a,\epsilon) = \left\langle \exp\left(\frac{1}{(2\pi i)^2}\int d^4x d^4\theta \mathcal{H}(x,\theta)\Phi^2\right)\right\rangle_a \tag{D.2.16}$$

となる。

これを低エネルギー (infrared) 領域で評価すると低エネルギー有効理論はプレポテンシャルで特徴付けられる。H の導入は結合定数 g の変化

$$\frac{1}{g^2} \to \frac{1}{g^2} - H$$

に対応する。これは QCD スケールの変化

$$\Lambda \to \Lambda e^{-H} \tag{D.2.17}$$

に対応する。実際は H は定数ではなく超場 $\mathcal{H}(x,\theta)$ なので Seiberg-Witten プレポテンシャルは

$$\mathcal{F}(a;\Lambda e^{-\mathcal{H}(x,\theta)}) = \mathcal{F}(a;\Lambda e^{-H}) + \omega\Lambda\partial_\Lambda\mathcal{F}(a;\Lambda e^{-H}) + \frac{1}{2}\omega^2(\Lambda\partial_\Lambda)^2\mathcal{F}(a;\Lambda e^{-H}) \tag{D.2.18}$$

と展開される。最後の項が体積積分に寄与する。

ϵ_1,ϵ_2 が小さい極限を考える。原点付近をスケールアップする極限をとると、IR 領域では a が H の定数モードのみが効いてくると考えられる。$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}y_1$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}y_2$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}}y_3$ $x_4 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}}y_4$ とすると

$$dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4 = \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3\wedge dy_4$$

および $H = \sum_\mu (y_\mu)^2$ となるので

$$\begin{aligned}
\int \omega\wedge\omega(\Lambda\partial_\Lambda)^2\mathcal{F}(a;\Lambda e^{-H}) &= \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}\int d\Omega\frac{1}{2}dHH(\partial_H)^2\mathcal{F}(a;\Lambda e^{-H}) \\
&= \pi^2\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}\int dHH(\partial_H)^2\mathcal{F}(a;\Lambda e^{-H}) \\
&= \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}\mathcal{F}^{inst}(a;\Lambda)
\end{aligned} \tag{D.2.19}$$

と評価できる。従って

$$\begin{aligned}
Z(a;\epsilon) &= \exp\left(-\frac{1}{8\pi^2}\int\omega\wedge\omega(\Lambda\partial_\Lambda)^2\mathcal{F}(a;\Lambda e^{-H})\right) \\
&= \exp\left(\frac{\mathcal{F}^{inst}(a;\Lambda)+O(\epsilon)}{\epsilon_1\epsilon_2}\right)
\end{aligned} \tag{D.2.20}$$

を得る。

一方で microscopic な立場ではインスタントンの分配関数

$$Z = \int D\phi D\bar{\phi} D\vec{H} D\vec{\chi} D\eta D\Psi DBDIDJ e^{\tilde{S}} \tag{D.2.21}$$

の評価に帰着する。ここで

$$\begin{aligned}\tilde{S} = \tilde{Q}\mathrm{Tr}\Big(\vec{\chi}\vec{\mu}(B,I,J) + \Big\{\Psi_{B_1}[\bar{\phi}, B_1^\dagger] + \Psi_{B_2}[\bar{\phi}, B_2^\dagger] \\ + \Psi_I[\bar{\phi}, I^\dagger] - \Psi_J[\bar{\phi}, J^\dagger] + c.c.\Big\} + \eta[\phi, \bar{\phi}]\Big)\end{aligned} \tag{D.2.22}$$

かつ

$$\begin{aligned}\mu_c &= [B_1, B_2] + IJ \\ \mu_r &= [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J - \zeta_r \mathbf{1}\end{aligned} \tag{D.2.23}$$

である。この系もトポロジカルな理論で BRST 変換は

$$\begin{aligned}\tilde{Q}B_i &= \Psi_{B_i} \\ \tilde{Q}\Psi_{B_i} &= [\phi, B_i] + \epsilon_i B_i \\ \tilde{Q}I &= \Psi_I \\ \tilde{Q}\Psi_I &= \phi I - Ia \\ \tilde{Q}J &= \Psi_J \\ \tilde{Q}\Psi_J &= -J\phi + Ja - (\epsilon_1 + \epsilon_2)J \\ \tilde{Q}\chi_r &= H_r \\ \tilde{Q}H_r &= [\phi, \chi_r] \\ \tilde{Q}\chi_c &= H_c \\ \tilde{Q}H_c &= [\phi, \chi_c] + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\chi_c\end{aligned} \tag{D.2.24}$$

となる。

このインスタントン分配関数は局所化の公式を使って評価される。$U(k) \times \mathbf{T}^2$ 作用の固定点 action:

$$[B_a, \phi] = \epsilon_a B_a, \quad (a = 1, 2) \tag{D.2.25}$$

$$-\phi I + Ia = 0, \tag{D.2.26}$$

$$-aJ + J\phi = -(\epsilon_1 + \epsilon_2)J \tag{D.2.27}$$

で評価される。ϕ と a が対角化されるような基底では

$$\begin{aligned}(B_a)_{ij}\phi_J - \phi_i (B_a)_{ij} &= \epsilon_a (B_i)_{ij} \\ -\phi_i I_{i\ell} + a_\ell I_{i\ell} &= 0 \\ -a_\ell J_{\ell i} + J_{\ell i}\phi_i &= -\epsilon J_{\ell i},\end{aligned} \tag{D.2.28}$$

となる。ここで $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ である。非自明な解が存在するのは

$$\begin{aligned} &\phi_{ij} + \epsilon_a = 0 \\ &\phi_i - a_\ell = 0 \\ &\phi_i + \epsilon - a_\ell = 0 \end{aligned} \tag{D.2.29}$$

のいくつかが満たされるときである。ここで $\phi_{ij} \equiv \phi_i - \phi_j$.

局所化の公式によると k インスタントンの分配関数は

$$\hat{Z}_k^N = \sum_{p \in M_0} \frac{1}{(\mathrm{sdet} L_p)^{1/2}} \tag{D.2.30}$$

で与えられる。ここで M_0 は固定点の集合。$w_i(p)$ を点 p における接空間 $T\mathcal{M}_{N,k}$ への $G = U(1)^{N-1} \times U(1)^2$ 作用に対する各場のウエイトであるとすると

$$\frac{1}{\mathrm{sdet} L_p^{1/2}} = \frac{1}{\prod_i w_i(p)}, \quad \text{または} \quad \prod_i w_i(p) \tag{D.2.31}$$

で与えられる。但しボソンの寄与は分母、フェルミオンの寄与は分子となる。次節で具体的に固定点の周りのウェイトの評価を行い, Nekrasov の公式を導出する。

D.3　固定点の分類

この節の参考文献として [38] がある。変数 (B_1, B_2, I, J) は ADHM 拘束条件とその変分は fermionic な ADHM 条件

$$[\delta B_1, B_2] + [B_1, \delta B_2] + \delta I J + I \delta J = 0 \tag{D.3.1}$$

$$\sum_{a=1,2} [\delta B_a, B_a^\dagger] + \delta I I^\dagger - J^\dagger \delta J = 0 \tag{D.3.2}$$

を満足する。G 作用の下で

$$\begin{aligned} \delta(B_a)_{ij} &= (\phi_{ij} + \epsilon_a)(B_a)_{ij} \\ \delta I_{iu} &= (\phi_i + a_u) I_{iu} \\ \delta J_{ui} &= (-\phi_i - a_u + \epsilon) J_{ui} \end{aligned} \tag{D.3.3}$$

と変化する。固定点上で $\delta X (= wX)$ $(X = (B_a)_{ij},\, I_{iu},\, J_{ui})$ と表示すると因子 w がウェイトである。

$U(k) \times T^2$ 作用の下での固定点を分類する。

$U(1)$ の場合

始めに $N = 1$ の場合、つまり $U(1)$ ゲージ群の場合を考える。このとき a はベクトルではなく単なる数である。$a = a_1$ とおく。固定点の方程式 (D.2.25), (D.2.26), (D.2.27) は

$$[B_a, \phi] = \epsilon_a B_a, \quad (a = 1, 2) \tag{D.3.4}$$

$$-\phi I + a_1 I = 0 \tag{D.3.5}$$

$$-a_1 J + J\phi = -(\epsilon_1 + \epsilon_2) J. \tag{D.3.6}$$

となる。ここで ϕ, B_1, B_2 $k\times k$ 行列で I, $J^\dagger$ は k ベクトルである。二番目の方程式は I が ϕ の固有値 a_1 に対応する固有ベクトルであることを意味する。つまり

$$\phi I = a_1 I. \tag{D.3.7}$$

と見ることができる。すると

$$\begin{aligned} \phi(B_a I) &= ([\phi, B_a] + B_a\phi)\, I \\ &= (a_1 - \epsilon_a) B_a I \end{aligned} \tag{D.3.8}$$

が成り立つ。つまり $B_a I$ は固有値 $a_1-\epsilon_a$ を持つ。

I を (D.3.6) 式の左側から掛けると

$$-a_1 JI + J a_1 I = -\epsilon JI = 0 \tag{D.3.9}$$

を得る。従って

$$JI = 0 \tag{D.3.10}$$

が成り立つ。実は $J=0$ となる事がわかる。ADHM 条件は

$$\begin{aligned} &[B_1, B_2] + IJ = 0 \\ &[B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = \zeta \end{aligned} \tag{D.3.11}$$

であり、第一番目の方程式は B_1 と B_2 が交換し、

$$B_1^p B_2^q I \tag{D.3.12}$$

が B_1, B_2 の積の順番によらず一意に決まる事を意味する。ベクトル $B_1^p B_2^q I$ はウェイト $a_1 - \epsilon_1 p - \epsilon_2 q$ をもつ。$B_1^p B_2^q I$ $(p,q=0,1,2,\cdots)$ は $\mathbf{C}^k$ の基底を張る。しかし ϕ は有限次元の行列なので k 個の固有ベクトルをもつ。従って $B_1^p I$ は充分大きな p に対してゼロになる。同様な事が $B_1^p B_2 I$ 等に対しても成り立つ。そこで基底 $\{B_1^p B_2^q I\}$. に対してウェイト $a_1-\epsilon_1(p-1)-\epsilon_2(q-1)$ をもつ箱を対応させた図をえがくと、これは k の分割に対応する Young 図形となる。

$SU(N)$ の場合

$U(1)$ の場合の固定点の解析を $SU(N)$ または $U(N)$ の場合に拡張できる。固定点の方程式は

$$[B_a, \phi] = \epsilon_a B_a, \quad (a=1,2) \tag{D.3.13}$$

$$-\phi I + aI = 0 \tag{D.3.14}$$

$$-aJ + J\phi = -(\epsilon_1+\epsilon_2)J. \tag{D.3.15}$$

となる。ここで ϕ, B_1, B_2 は $k\times k$ 行列, I, $J^\dagger$ は $k\times N$ 行列, a は $N\times N$ 行列である。a を

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_N \end{pmatrix} \tag{D.3.16}$$

対角化し, I と J を

$$
\begin{aligned}
I &= (\mathbf{I}_1, \cdots \mathbf{I}_N) \\
J &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_N \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{D.3.17}
$$

と表す。ここで $\mathbf{I}_i$ and ${}^t\mathbf{J}_i$ は k-ベクトルである。すると式 (D.3.14) と (D.3.15 は

$$
\begin{aligned}
\phi \mathbf{I}_u &= a_u \mathbf{I}_u \\
\mathbf{J}_u \phi &= (a_u - \epsilon)\mathbf{J}_u
\end{aligned} \tag{D.3.18}
$$

となる。$U(1)$ のときの様に $\mathbf{J}_u = 0$ とする事ができる。従って B_1 と B_2 は可換で、$U(1)$ の場合と同様に基底 $\{B_1^p B_2^q \mathbf{I}_u\}$ に対し Young 図 Y_u を対応させることができる。各ベクトル $B_1^p B_2^q \mathbf{I}_u$ は固有値

$$
a_u - \epsilon_1(p-1) - \epsilon_2(q-1) \tag{D.3.19}
$$

を持ち、 これが $\mathbf{C}^k$ の基底を張るので

$$
k = k_1 + \cdots + k_N, \quad k_u = |Y_u| \tag{D.3.20}
$$

が成り立つ。

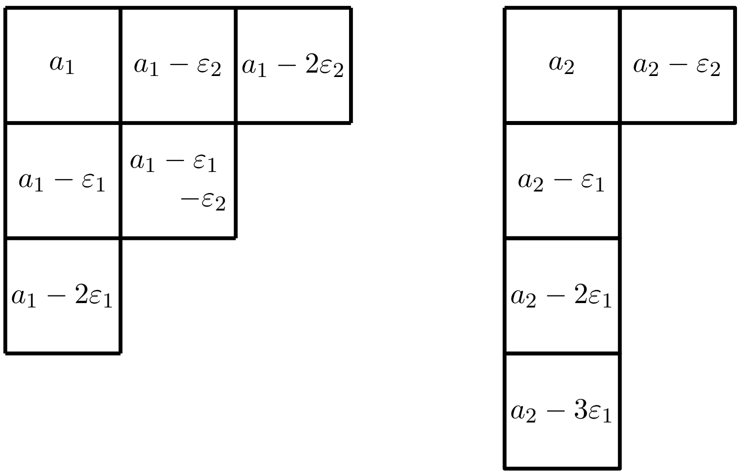

図 7: Young diagrams

D.4 分配関数の計算

この節の reference は [39, 40] 等。

$G = SU(N)$ に対し Young 図の列 $Y = (Y_1, \cdots, Y_N)$ に対応する固定点の回りのウェイトを計算する。各 Young 図 Y_α を図 8 の様に表す。ここで

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{\alpha,1} \geq \lambda_{\alpha,2} \geq \cdots \lambda_{\alpha,\lambda'_{\alpha,1}} \\
&\lambda'_{\alpha,1} \geq \lambda'_{\alpha,2} \cdots \geq \lambda'_{\alpha,\lambda_{\alpha,1}}
\end{aligned} \tag{D.4.1}
$$

である。$|Y_\alpha|$ は Young 図の箱の数であり、

$$|Y_\alpha| \quad = \quad \sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,1}} \lambda_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^{\lambda_{\alpha,1}} \lambda'_{\alpha,j} \tag{D.4.2}$$

が成り立つ。Y' を Y の双対な Young 図とする。さらに $l(Y) \equiv \lambda'_{\alpha,1}$ を Y の行の数とする

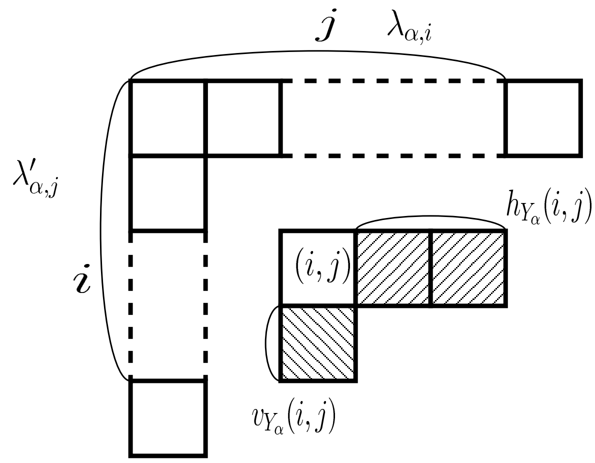

図 8: Young diagram Y_α

と、$l(Y') \equiv \lambda_{\alpha,1}$ は Y の列の数を表す。(i,j) でラベルされる箱に対し

$$\begin{aligned} h_{Y_\alpha}(i,j) &= \lambda_{\alpha,i} - j \\ v_{Y_\alpha}(i,j) &= \lambda'_{\alpha,j} - i \end{aligned} \tag{D.4.3}$$

を定義する。

$\mathbf{C}^k$ は部分空間 $V_\alpha = \{B_1^i, B_2^j \mathbf{I}_\alpha\}$ の直和

$$\mathbf{C}^k = \oplus_{\alpha=1}^N V_\alpha \tag{D.4.4}$$

で書かれる。$B_a,\ I,\ J$ をこの基底で表現する。各基底 $B_1^i, B_2^j \mathbf{I}_\alpha$ はウェイト $\phi_\alpha(i,j) = a_i - \epsilon_1(i-1) - \epsilon_2(j-1)$ をもっているので、これから (D.3.3) により $(\det L)^{1/2}$ を計算出来る。しかしこれを直接評価するよりも、各ウェイトに対し以下の多項式を計算した方が見通しがよい。つまり各ウェイトに対し $t_a = e^{\epsilon_a}$ $(a = 1, 2)$ の単項式

$$e^{\phi_\alpha(i,j)} = e^{a_\alpha} t_1^{-i+1} t_2^{-j+1} \tag{D.4.5}$$

を対応させる。すると Young 図 Y_α に対し生成関数

$$\chi_\alpha(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{\lambda_{\alpha,1}} \sum_{i=1}^{\lambda'_{\alpha,j}} t_1^{-i+1} t_2^{-j+1} \tag{D.4.6}$$

で定義する。すると B_a, I, J に対応するウェイトの寄与は

$$
\begin{aligned}
&e^{a_\beta - a_\alpha} t_1 \chi_\alpha(t_1^{-1}, t_2^{-1}) \chi_\beta(t_1, t_2) + e^{a_\beta - a_\alpha} t_2 \chi_\alpha(t_1^{-1}, t_2^{-1}) \chi_\beta(t_1, t_2) \\
&+ e^{a_\beta - a_\alpha} \chi_\beta(t_1, t_2) + e^{a_\beta - a_\alpha} t_1 t_2 \chi_\alpha(t_1^{-1}, t_2^{-1})
\end{aligned}
\tag{D.4.7}
$$

で表される。フェルミオン χ_r, χ_c の寄与は逆符合で効くので全生成関数 $N_{\alpha,\beta}(t_1, t_2)$ は

$$
\begin{aligned}
&N_{\alpha,\beta}(t_1, t_2) = \\
&\quad e^{a_\beta - a_\alpha} t_1 \chi_\alpha(t_1^{-1}, t_2^{-1}) \chi_\beta(t_1, t_2) + e^{a_\beta - a_\alpha} t_2 \chi_\alpha(t_1^{-1}, t_2^{-1}) \chi_\beta(t_1, t_2) \\
&\quad + e^{a_\beta - a_\alpha} \chi_\beta(t_1, t_2) + e^{a_\beta - a_\alpha} t_1 t_2 \chi_\alpha(t_1^{-1}, t_2^{-1}) - e^{a_\beta - a_\alpha} \chi_\alpha(t_1^{-1}, t_2^{-1}) \chi_\beta(t_1, t_2) \\
&\quad - e^{a_\beta - a_\alpha} t_1 t_2 \chi_\alpha(t_1^{-1}, t_2^{-1}) \chi_\beta(t_1, t_2)
\end{aligned}
\tag{D.4.8}
$$

となる。これをさらに計算すると

$$
N_{\alpha,\beta}(t_1, t_2) = e^{a_\beta - a_\alpha} \left\{ \sum_{s \in Y_\alpha} t_1^{-h_{Y_\alpha}(s)} t_2^{v_{Y_\beta}(s)+1} + \sum_{t \in Y_\beta} t_1^{h_{Y_\beta}(t)+1} t_2^{-v_{Y_\alpha}(t)} \right\}
\tag{D.4.9}
$$

を得る。各 Young 図からの寄与をまとめると

$$
\begin{aligned}
(\det L)^{1/2}\Big|_{(Y_1, \cdots, Y_N)} &= \prod_{\alpha,\beta=1}^{N} \left(\prod_{s \in Y_\alpha} (a_{\beta\alpha} - \epsilon_1 h_{Y_\beta}(s) + \epsilon_2 (1 + v_{Y_\alpha}(s))) \right. \\
&\qquad \left. \prod_{s' \in Y_\beta} (a_{\beta\alpha} + \epsilon_1 (1 + h_{Y_\alpha}(s')) - \epsilon_2 v_{Y_\beta}(s')) \right)
\end{aligned}
\tag{D.4.10}
$$

をえる。インスタントン分配関数は従って

$$
Z_k(a, \epsilon_1, \epsilon_2) = \sum_{\substack{Y_1, \cdots, Y_N \\ |Y_1| + \cdots + |Y_N| = k}} \frac{1}{(\det L)^{1/2}\Big|_{(Y_1, \cdots, Y_N)}}
\tag{D.4.11}
$$

で与えられる。これが Nekrasov の公式である。

参考文献

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts and Y. S. Tyupkin, “Pseudoparticle Solutions Of The Yang-Mills Equations,” Phys. Lett. B **59** (1975) 85.

[2] G. ’t Hooft, “Computation Of The Quantum Effects Due To A Four-Dimensional Pseudoparticle,” Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976) [Erratum-ibid. D **18**, 2199 (1978)].

[3] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld and Y. I. Manin, “Construction Of Instantons,” Phys. Lett. A **65**, 185 (1978).

[4] D. Amati, G. C. Rossi and G. Veneziano, “Instanton Effects In Supersymmetric Gauge Theories,” Nucl. Phys. B **249**, 1 (1985).

[5] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, "Instanton Effects In Supersymmetric Theories," Nucl. Phys. B **229**, 407 (1983).

[6] I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg, "Dynamical Supersymmetry Breaking In Supersymmetric QCD," Nucl. Phys. B **241**, 493 (1984).

[7] N. Seiberg and E. Witten, "Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory," Nucl. Phys. B **426**, 19 (1994) [Erratum-ibid. B **430**, 485 (1994)] [arXiv:hep-th/9407087].

[8] D. Finnell and P. Pouliot, "Instanton calculations versus exact results in four-dimensional SUSY gauge theories," Nucl. Phys. B **453**, 225 (1995) [arXiv:hep-th/9503115].

[9] K. Ito and N. Sasakura, "One-Instanton Calculations in $N = 2$ Supersymmetric $SU(N_c)$ Yang-Mills Theory," Phys. Lett. B **382**, 95 (1996) [arXiv:hep-th/9602073].

[10] N. Dorey, V. V. Khoze and M. P. Mattis, "Multi-Instanton Calculus in N=2 Supersymmetric Gauge Theory," Phys. Rev. D **54**, 2921 (1996) [arXiv:hep-th/9603136].

[11] T. J. Hollowood, V. V. Khoze, W. J. Lee and M. P. Mattis, "Breakdown of cluster decomposition in instanton calculations of the gluino condensate," Nucl. Phys. B **570**, 241 (2000) [arXiv:hep-th/9904116].

[12] T. J. Hollowood, "Calculating the prepotential by localization on the moduli space of instantons," JHEP **0203**, 038 (2002) [arXiv:hep-th/0201075].

[13] N. A. Nekrasov, "Seiberg-Witten prepotential from instanton counting," Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 831 (2004) [arXiv:hep-th/0206161].

[14] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and supergravity," Princeton University Press, 1992

[15] N. Dorey, T. J. Hollowood, V. V. Khoze and M. P. Mattis, "The calculus of many instantons," Phys. Rept. **371**, 231 (2002) [arXiv:hep-th/0206063].

[16] H. Osborn, "Semiclassical Functional Integrals For Selfdual Gauge Fields," Ann. Phys. **135** (1981) 373.

[17] E. B. Bogomolny, "Stability Of Classical Solutions," Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449 [Yad. Fiz. **24** (1976) 861].

[18] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, "An Exact Classical Solution For The 'T Hooft Monopole And The Julia-Zee Dyon," Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).

[19] I. Affleck, "On Constrained Instantons," Nucl. Phys. B **191**, 429 (1981).

[20] K. Ito and N. Sasakura, "Exact and microscopic one-instanton calculations in N = 2 supersymmetric Yang-Mills theories," Nucl. Phys. B **484** (1997) 141 [arXiv:hep-th/9608054].

[21] E. Witten and D. I. Olive, "Supersymmetry Algebras That Include Topological Charges," Phys. Lett. B **78** (1978) 97.

[22] N. Seiberg, "Supersymmetry And Nonperturbative Beta Functions," Phys. Lett. B **206**, 75 (1988).

[23] P. C. Argyres and A. E. Faraggi, "The vacuum structure and spectrum of N=2 supersymmetric SU(n) gauge theory," Phys. Rev. Lett. **74**, 3931 (1995) [arXiv:hep-th/9411057].

[24] A. Klemm, W. Lerche, S. Yankielowicz and S. Theisen, "Simple singularities and N=2 supersymmetric Yang-Mills theory," Phys. Lett. B **344**, 169 (1995) [arXiv:hep-th/9411048].

[25] U. H. Danielsson and B. Sundborg, "The Moduli space and monodromies of N=2 supersymmetric $SO(2r+1)$ Yang-Mills theory," Phys. Lett. B **358** (1995) 273 [arXiv:hep-th/9504102].

[26] M. Alishahiha, F. Ardalan and F. Mansouri, "The Moduli Space of the Supersymmetric G_2 Yang-Mills Theory," Phys. Lett. B **381** (1996) 446 [arXiv:hep-th/9512005].

[27] M. R. Abolhasani, M. Alishahiha and A. M. Ghezelbash, "The moduli space and monodromies of the N = 2 supersymmetric Yang-Mills theory with any Lie gauge groups," Nucl. Phys. B **480** (1996) 279 [arXiv:hep-th/9606043].

[28] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, "N=2 Supersymmetric QCD and Integrable Spin Chains: Rational Case $N_f < 2N_c$," Phys. Lett. B **380**, 75 (1996) [arXiv:hep-th/9603140].

[29] E. J. Martinec and N. P. Warner, "Integrable systems and supersymmetric gauge theory," Nucl. Phys. B **459** (1996) 97 [arXiv:hep-th/9509161].

[30] W. Lerche and N. P. Warner, "Exceptional SW geometry from ALE fibrations," Phys. Lett. B **423**, 79 (1998) [arXiv:hep-th/9608183].

[31] K. Ito, "Picard-Fuchs equations and prepotential in N = 2 supersymmetric G_2 Yang-Mills theory," Phys. Lett. **B406** (1997) 54, [arXiv:hep-th/9703180]

[32] K. Ito and S.-K. Yang, "A-D-E singularity and prepotentials in N = 2 supersymmetric Yang-Mills theory," Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 5373, [arXiv:hep-th/9712018]

[33] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, "Heat Kernels and Dirac Operators," 1992, Springer Verlag.

[34] R. J. Szabo, "Equivariant localization of path integrals," arXiv:hep-th/9608068.

[35] P. B. Kronheimer and H. Nakajima, "Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons," Math. Ann. **288** (1990) 263.

[36] N. Nekrasov and A. Schwarz, "Instantons on noncommutative $\mathbb{R}^4$ and (2,0) superconformal six dimensional theory," Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689 [arXiv:hep-th/9802068].

[37] T. J. Hollowood, V. V. Khoze and G. Travaglini, "Exact results in noncommutative N = 2 supersymmetric gauge theories," JHEP **0105**, 051 (2001) [arXiv:hep-th/0102045].

[38] H. Nakajima, "Lectures on Hilbert Scheme of Points on Surfaces," 1999, American Mathematical Society.

[39] N. Nekrasov and A. Okounkov, "Seiberg-Witten theory and random partitions," arXiv:hep-th/0306238.

[40] H. Nakajima and K. Yoshioka, "Instanton counting on blowup. I," arXiv:math.ag/0306198.

[41] H. Nakajima and K. Yoshioka, "Lectures on instanton counting," arXiv:math.ag/0311058.

[42] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Roček, "Hyperkahler Metrics and Supersymmetry," Commun. Math. Phys. **108** (1987) 535

[43] E. Witten, "Topological Quantum Field Theory," Commun. Math. Phys. **117** (1988) 353.