2005年 三者若手夏の学校 講義録
於:国立オリンピック記念青少年総合センター

素粒子論パート 弦理論

「超弦理論におけるD-braneとtachyon場」

講師:杉本茂樹 (基研)

2005年8月7日〜8日

講義録作成：筑波大学
波田野, 馬場, 中村, 片桐, 上田, 伊藤, 山本, 幸田

目 次

1 超弦理論のオーバービュー **2**
1.1 Introduction 2
1.2 大統一理論と超弦理論 6
1.3 Second Revolution (1994 ごろ〜) 11

2 Type II 超弦理論 **26**
2.1 bosonic string 26
2.1.1 点粒子 26
2.1.2 紐への拡張 28
2.1.3 運動方程式 31
2.1.4 Light-cone gauge 32
2.1.5 physical states 39
2.1.6 ふくしう 44
2.2 Superstring 45
2.2.1 超対称性 45
2.2.2 超弦理論 46
2.2.3 physical states 48

3 D-brane **51**
3.1 D-brane の D は 52
3.2 open string 54
3.3 重なった D-brane 57
3.4 D-brane 間に働く力 59

4 タキオニックな超弦理論 **66**
4.1 Tachyon potential 71

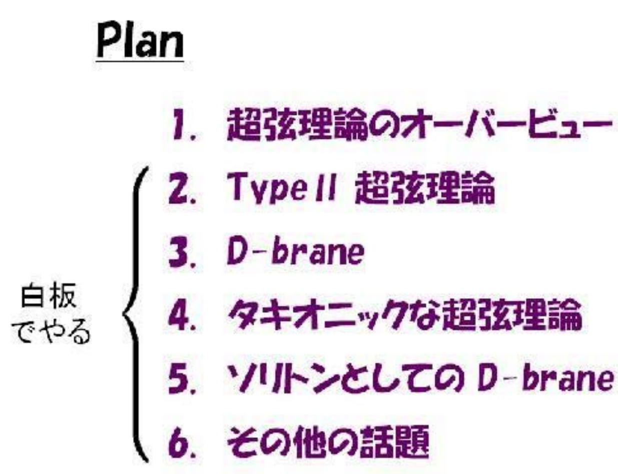
5 ソリトンとしての D-brane **74**
5.1 例 1:Type IIA 74
5.2 例 2:Type IIB 76
5.3 一般論 77

6 その他の話題 **82**

1　超弦理論のオーバービュー

1.1　Introduction

　それじゃどうも、ありがとうございます。宜しくお願いします。世話人の方から、弦理論 part で超弦理論における tachyon 場の話をしてくれと言われてしまって、その話をできるだけしたいと思います。



ええとまず、computer を使って、多分超弦理論とか弦理論の話を聞くのは初めてという方も随分おられると思うので、超弦理論って何なのか、どういう発展があったのかという overview をまずしたいと思います。で、その後でホワイトボードを使って、超弦理論の簡単な所から始めて、D-brane とは何なのか？あるいは今回のテーマである tachyonic な超弦理論とは何なのか？で、今回最後に理解して欲しいのは、D-brane を soliton として表すという、そういう話なんですけど、まあここまでいけたらいいと思ってます。

　じゃあ最初この overview をしたいと思います。まず、多分最初に言っておかなければならないのは、この超弦理論というのは恐るべき理論で、すごい理論なんですね。ただ、これがすごいということに気付くのにちょっと時間がかかるのが難点で、これがすごいとか面白いとか思えないとなかなか勉強する気にもなれないと思うので、この超弦理論がいかにすごいかというのをまず説明したいと思います。

　まず、弦理論って何なのか？これは割と深い問いなんですが、まず簡単に言うと、今の素粒子の標準模型では、素粒子ってのは点粒子だと思って扱われています。で、弦理論というのはそもそも何なのかと言うと、この点がよくよく見ると、小さい scale まで見ると実は紐状をしてるんだという、そういう仮説に基づく理論

です (図 1)。で、これでまずすぐに期待されることはですね、紐だと仮定すると、

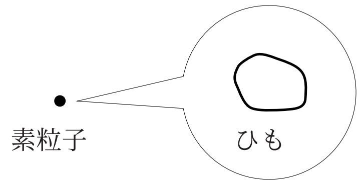


図 1: 良く見るとひも状

紐というのは色々な振動モードを持っていて、振動の仕方が色々ある。振動の仕方が色々あると、それが一見違った粒子のように見える。今現在の素粒子の標準模型では素粒子ってのは点だと思われていて、粒子毎に新たな自由度を手で入れる形になっています。だから新しい粒子が発見されたら新しい場を理論に手で加えなきゃいけない。それに対してこの紐理論というのは本当にただ 1 種類の紐だけを用意して、そのいろんな振動モードの違いでいろんな粒子を表すことが可能です。ということで quark とか lepton、光子、graviton とか、とにかくあらゆる粒子を 1 つの紐で表すことができるということを期待させます。

それで今日やるはずなんですけど、紐の量子化をしてみると、graviton を含んでいるということが割とすぐ示せます。それでこれは非常に重要な性質で、graviton を含んでいるということが多分この超弦理論が魅力的である非常に大きな理由の 1 つだと思います。で、この超弦理論っていろんな奇跡が起こるんですが、そのうちの典型的な恐ろしい性質として、発散の解消というのがあります。これをちょっ

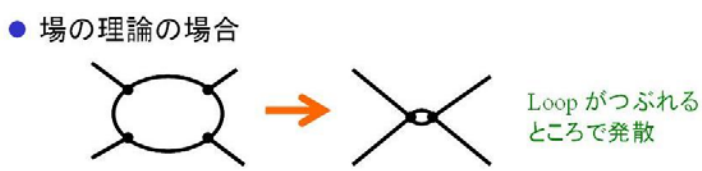


図 2: 場の理論の 1loop Feynman graph

と絵で、場の理論の場合どうだったかというのを見てみると、これ (図 2 左)、普通の典型的な 1 loop の Feynman graph ですが、Feynman graphって、loopがあるとその loop を回る momentum の積分があります。この momentum の積分を loop の長さに関する積分に置き換えることができて、それで絵的に表すことにすると、この loop の長さが 0 になるような、こういう pinch するようなところ (図 2 右) で実は発散が生じています。これに対して弦理論にするとどうなるかというと、点粒子がぐるっと回った絵を、こう紐がぐるっと回った絵にすると、こういう風に何かふくらんだような graph になります (図 3)。超弦理論で amplitude を計算するときは図 3 のような絵を描いて計算するんですが、それでこの中にある loop の部分、これを torus と言うんですが、この torus は平行四辺形を描いて、上と下、左

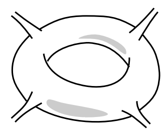


図 3: 1-loop の Feynman 図

と右を同一視した、こういうものだと思ってもできますね (図 4 右)。右の絵の点

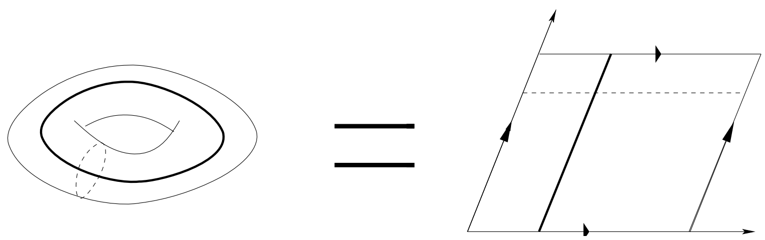


図 4: トーラスと平行四辺形

線と太線は、左の絵の点線と太線に対応しています。それでこの、危険な loop がつぶれるところというのは何に対応してるかというと、図 4 の左の絵の太く描いた線が非常に短くなっているところなので、この平行四辺形で言うと、この太く描いた線が非常に短くなったこういう絵に対応するところで危険な発散が生じそうですね (図 5 左)。図 5 の左で描いた平行四辺形と右で描いた平行四辺形は合同です。弦理論っていうのはこの合同な平行四辺形をこてっと倒すような、こういう

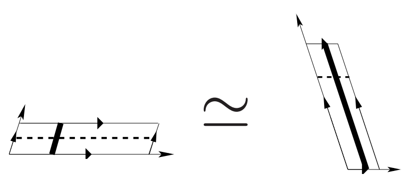


図 5: どちらも同じトーラス

変換で invariant になるように作られていて、図 5 の右図に移ってしまうとこの太く描いた line はもはやつぶれてないです。ということで、図 5 の右図で見るともはや危険な発散が生じないのは明らかです。で、まあこんな具合で発散が実は解消するという性質があります。で、これ、さっき重力を含んでいると言いました。それで、重力を含む理論で少なくとも摂動論的な計算をして発散が生じない理論は多分この弦理論だけですね、今のところ知られているのは。で、この弦理論というのはそういう意味で consistent な重力の量子論になる可能性を秘めています。

それで、今まであまり超を付けずに弦理論と言っていたんですが、超弦理論とは何かということです。この弦理論というのは理論が矛盾無く構成できるための非常にきつい条件が色々あるんですね。で、そのうちの 1 つで、これも驚くべき性

質ですが、紐の住める次元というのが制限されています。何次元でもいいわけじゃない。で、普通のこれまでの理論っていうのは、だいたい時空が 4 次元ということを手で仮定して理論を作るので、時空が何次元というのはもう input というか、説明しようがない。手で置くだけですね。それに対して弦理論というのは時空の次元が決まってしまうというすごい性質があって、この世がどうして 4 次元なのかということを説明してくれる可能性を秘めている。それも面白いところですが、僕等は 4 次元の時空に住んでるって事を知っているので、まあ 4 次元の Minkowski 時空を含むような時空で安定して住めるものは何かを調べることには興味があります。で、これは 1 つじゃなくて 5 つ知られています。それぞれ名前があって、Type

	Type I	Type IIA	Type IIB	Het $SO(32)$	Het $E_8 \times E_8$
ゲージ群	$O(32)$	$U(1)$	なし	$SO(32)$	$E_8 \times E_8$
ひも	open+closed	closed	closed	closed	closed
超対称性	N=1	N=2	N=2	N=1	N=1
時空の次元	10	10	10	10	10

I、Type IIA、Type IIB、Heterotic $SO(32)$、Heterotic $E_8 \times E_8$、5 種類の超弦理論が知られていて、それぞれ理論がちょっと違っていて、例えば gauge 群が $SO(32)$ だったり、無かったり、$E_8 \times E_8$ だったり色んな種類があります。紐の種類も open

図 6: open string と closed string

string と closed string というのがあって、これは図 6 で描いたように open string というのは端を持った string で、closed string というのは輪っかになった、輪ゴムみたいな string です。で、Type I は open と closed と両方入った理論で、他は closed string だけという感じです。で、超対称性と書いた対称性がある。これはあまり詳しくは言わないですが、大体何かというと、boson と fermion を入れ替えるような変換に対する対称性です。boson と fermion って一見全然違う、spin も違う、統計性も違う、そんなものを入れ替えて不変であろうはずが無いと思われるかも知れないですが、実際やってみると本当に不変になっている。そういう何か超対称性という対称性を持っている。これらの理論は全て超対称性を持っています。それでこの $\mathcal{N}=1$ とか $\mathcal{N}=2$ とか書いたのは、超対称性の数です。$\mathcal{N}=1$ っていうのは超対称性が 1 個、$\mathcal{N}=2$ っていうのはその倍だけある、そういう理論です。で、この 5 つの理論は全部時空の次元が 10 次元でしかうまく定義できない。10 次元を一部 compact 化することはできるんですが、まあ基本的に 10 次元です。で、超対

称性があることから超弦理論と呼ぶことになってるんですが、これも恐るべき予言でどれも時空が 10 次元であることを予言していて、あと、この世は超対称性という変な対称性を持っているということを超弦理論は予言するわけです。これはもちろんまだ見つかってないんですけど。

それでこの overview で話したいことは、まず introduction は終わって、大統一理論と超弦理論の関係をちょっと話したいと思います。これは次の小林さんの講義で詳しく話されると思うんで、もちろん詳しくはここではやりませんが、超弦理論が恐るべき理論だということが多分一番はっきりと分かると思うので。それでこれは大体 20 年前くらい、1984 年くらいからこういう関係が見つかってきて、string の firtst revolution と呼ばれる大発展がありました。で、ここで分かったことをちょっと話します。それでそのあと、second revolution と呼ばれる、1994 年か 5 年くらいからこれまたすごい発見が相次いだ時期がありまして、その発展をちょっとおさらいしたいと思います。

1.2 大統一理論と超弦理論

えぇと、それでは、大統一理論と超弦理論の関係ですが、今加速器実験とかで見つかってる素粒子をまとめますとこの表のようになります。quark と lepton が

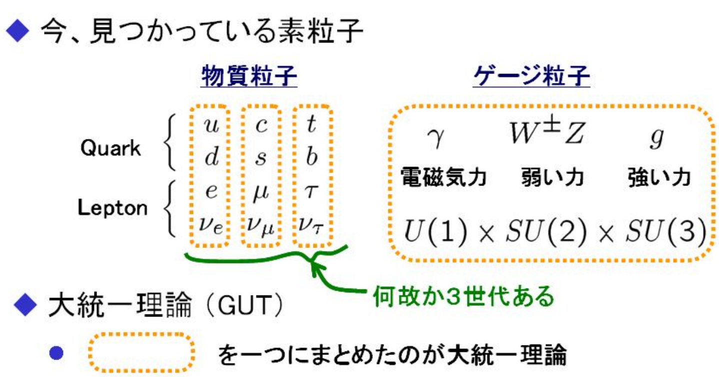


図 7: 見つかっている素粒子の表

あって、u, d, c, s, t, b と 6 つの quark があって、あと lepton も電子とか muon とか tauon とか neutrino とかこういう人達がいますが、これは物質を構成する物質粒子と呼ばれるもので、それに対して力を媒介する gauge 粒子と呼ばれる、まあよく知ってる photon だとか、W boson とか Z boson、あるいは強い力を担う gluon とか、まあそういう人達が知られています。で、これは素粒子論の最大のなぞの 1 つだと思うんですが、物質粒子はなぜか 3 世代ある。なぜかこういう構造を持っている。で、この大統一理論というのは何かというと、図 7 の点線で囲ったこいつらをひとまとめにしたものです。代表的なものをちょっとあげますと、gauge 群

ゲージ群	$SU(5)$	$SO(10)$	E_6
物質粒子	$(\psi_{10}, \psi_{5^*}, \psi_1) \times 3$	$\psi_{16} \times 3$	$\psi_{27} \times 3$

で言うと $SU(5)$ GUT とか、$SO(10)$ GUT、E_6 GUT とか呼ばれるものが代表的なもので、この物質粒子は $SU(5)$ では 1 つに統一されず、10 次元表現の場と言う意味で ψ_{10} と書きましたが、ψ_{5^*} は 5^* 表現の場です。10 と 5^* と 1 が 3 世代。あるいは $SO(10)$ にしてしまうと図 7 の点線で囲ったのが全部ひとまとめになって、この $SO(10)$ の 16 次元表現の場が 3 世代という形になってます。で、今日ちょっと注目したいのはこの E_6 GUT なんですけど、まあ基本的にはこの $SO(10)$ をちょっと拡張して、$SO(10)$ を含むもっと大きな群である E_6 があって、物質場の方は 27 次元表現が 3 世代。そういう構成になってます。gauge 群の方も $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ というのが 1 つの単純群に含まれてしまっているようなそういう理論です。

こういう美しい理論があるんですが、大統一理論を持ってしてもなかなか答えられない大問題がいくつかあります。まあ代表的なものは、なぜ物質粒子 3 世代と gauge 粒子という構造をしているのかというのは大統一理論で答えることはできないですね。手で置くしかない。で、もう 1 つ、これは本質的に重要なことですが、重力をいかにして統一するか。標準模型にしても大統一理論にしても重力を含んでないですね。だからものが下に落ちるということを説明できない。で、それをなんとか組み込む必要があって、しかもその組み込み方も 4 つの力が統一されるように組み込まれるんじゃないかという期待があるわけですが、これは今の大統一理論の枠組ではなかなか答えられない。

で、こういう問題に答えたいわけですけど、実は 5 つあった超弦理論のうちの 1 つである Heterotic の $E_8 \times E_8$ というのを考えると奇跡が起こります。まずいくつか観測事実を使いたいんですけど、観測事実より現実世界は 4 次元に見えるわけですね。ということは、全部で 10 次元であることはさっき言いましたので、残りの 6 次元は観測にかからないくらい非常に小さな scale であることがここから分かります。で、6 次元空間のいろんな取り方を考えて、色々調べてみると、この 6 次元空間の取り方で 4 次元世界に実現される超対称性の数だとか、出てくる matter の数だとか、そういうことが決まります。で、もう 1 つ観測事実から、この 4 次元で、僕等の世界で実現されうる超対称性っていうのは minimal な、$\mathcal{N} = 1$ supersymmetry と呼ばれる symmetry で、下手に compact 化してしまうと超対称性の数が多すぎて観測とすぐに矛盾します。色々な観測事実が示唆していることは、我々の世界は $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry を持っているということです。ただこれはもちろんまだ見つかっていなくて、これを見つけようという実験が計画されていて、多くの人は supersymmetry があると信じてやっているんですけど、まだこれは、はてなマークがついているんですが、とりあえずここではこういう事が示唆されているので、そうなるような状況を考えます。実はこれだけを課すと、4 次元で minimal な超対称性が実現されているということを要求すると、この 6 次元

多様体というのは、Calabi-Yau 多様体と呼ばれる多様体であることが分かります。小林さんの講義で出てくると思いますが、Calabi-Yau 多様体のある種の極限である orbifold というのが使われたりもしますが、とりあえず、6 次元の内部空間の構造がこれだけで制限されているくらいに思って下さい。それで、Calabi-Yau 多様体が何かというのは詳しくはもちろん話せないんですが、だいたい Holonomy 群というのが $SU(3)$ になる多様体だと思ってもらえれば十分だと思います。それで

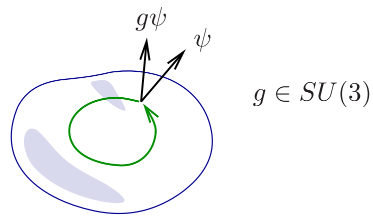


図 8: Holonomy 群が $SU(3)$ になる多様体

Holonomy 群というのは何かといいますと、図 8 のように何か多様体があったとして、この何かあるところに vector があったとして、それを 1 周ぐるっと平行移動させていって、どれだけずれるかというとこの $SU(3)$ の群がかかっただけずれている。ぐるっと回ったときのずれの度合が $SU(3)$ で決まっているという、まあそういうような多様体だと思ってください。で、この 2 つの観測事実を使うと、これだけでかなり自然に E_6 GUT が、あ、大統一理論の事を GUT というんですが、Grand Unified Theory の G と U と T、E_6 GUT が出てくるということをちょっとだけ、ラフに説明したいんですが。

まずこれを認めてください。理論の consistency の 1 つの条件で anomaly cancellation というのがあって、そこからこういう式が出ることが示せます。

$$\int_\Sigma \mathrm{Tr}\,(R \wedge R) = \int_\Sigma \mathrm{Tr}\,(F \wedge F) \tag{1}$$

で、ここで R と書いたのは $R = (R_{\mu\nu}{}^a{}_b)\,dx^\mu \wedge dx^\nu$ で多様体の curvature の 2-form で、F と書いたのは $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ でその上にのっている gauge 場の field strength です。で、この Σ って書いたのは、今 6 次元の多様体を考えているんですが、その 4 次元の部分多様体。で、どんな部分多様体をとってもこの式は成立しているという関係式が得られます。で、これは非常に恐ろしい式で、この左辺っていうのは何か多様体の曲がり具合を表すようなものですね。で、一般の Calabi-Yau 多様体は curvature が non-zero ですので、左辺が一般に non-zero。で左辺が non-zero ということは右辺も non-zero でないといけない。そうすると gauge 場が non-zero であるということを示しています。gauge 場が値を持ってしまうと gauge 対称性は破れてしまう。で、どれだけ破れるかというのが気になるわけですが、特にこの式 (1) が積分して一致すればいいんですが、積分する前の被積分関数が一致すればもちろん十分ですね。そういうわけでこの R、curvature がこの F という gauge 場の

field strength と等しくなるように選べば、(1) は常に満たされていますね。

$$R \sim F \tag{2}$$

で、これ、こうじゃなきゃいけないというところまでは言えないんですが、こうとるのはこの式の 1 つの自然な解になります。で、とりあえずこういうのをとってみよう。とってみると、さっき Calabi-Yau 多様体の Holonomy 群が $SU(3)$ だと言いましたが、そのことを実はこの curvature が知っていて、この curvatureってだいたい $SU(3)$ の部分に値をとるようになります。で、R と F が等しければ、gauge 場のほうも $SU(3)$ に値をとるようになります。で、破れずに残る gauge 対称性っていうのはその $SU(3)$ と可換な部分で、もともと E_8 という gauge 群があったとして、

$$E_8 \supset SU(3) \times E_6 \Rightarrow E_6 \tag{3}$$

それで $SU(3)$ がその Holonomy、この関係式 (2) によって値を持ったとすると、破れずに残るのは実は E_6 である。こういう風に何か E_6っていうのが出てきたわけです。で、さらにですね、なんか難しい index 定理を使うと、gauge 場だけでなくて物質場、27 次元表現の物質場がばっちり出てきて、しかもそれがこの多様体の Euler 数の半分の世代だけ出てくることが示せます。ちょっと結果だけなんですが、そういうことが示せます。これ、すごいことを言っていて、E_6 という gauge 群が出ただけでなくて物質場まで出て、それがなんか世代構造をもっている、世代がいくつかあるということがいえるわけです。これ、なんで 3 世代かという問には答えられないんですが、とにかく何世代か出てくるのが自然だということが理解できる。

ちょっと早かったので感動すべき point を並べてみると、まず Heterotic な超弦理論というのは、重力と gauge 場、両方があって初めて奇跡的に consistent になる。たとえば重力だけとか、例えば gauge 場だけとか、そういうのでは理論は consistent になりません。だから言ってみれば量子重力が gauge 場を要求したというような事が言えます。で、この弦理論というのはもともと大統一理論を作ろうと思って作られた理論ではないわけですね。で、作ろうと思って作ったんではないんですが、consistent な重力理論になってるということから突き詰めて調べてみると、何かあろうことか自然に GUT らしきものが出たと。しかも gauge 群は E_6 が出る。物質場まで出る。しかも世代があることが自然に理解できる。これはすごいことですね。で、今言ったことには 2 つ実験結果を使いました。時空が 4 次元であることと、超対称性が $\mathcal{N} = 1$ であることを使った。で、この 2 つの実験結果を使うと、かなり自然に E_6 というものが出てきたわけです。ということで時空の次元が 4 次元であることと、超対称性が $\mathcal{N} = 1$ であることと、大統一理論の gauge 群が E_6 であることは一見全く無関係な事実だと思われるんですが、その間に深遠な関係があるということを示しています。で、今この物質も gauge 場も graviton も、たった 1 つの弦から、紐から出てきている。1 つの弦の色々な振動モードを見てみると色んな粒子が出てくるように見えるというそういう構造になっていて、ある意味究

極の統一理論みたいなそういう構造をしている。すごい早口で言いましたが、自分で教科書を見ながら追って行くとですね、なにかジグソーパズルがぱしぱしはまって行くような感覚で、これが偶然とはなかなか思えない。これでもって多分多くの人は、この理論が究極の理論ではないかと言うようになりました。ただ、いいことばかりではなくて、問題点もあります。

多分今のところ最大の問題と言えるのは、真空の選び方の問題ですね。言えることはですね、少なくとも摂動論的には真空の選び方は無数にあります。例えばなぜこの 6 次元分だけ小さくなるのかとか理由があるわけじゃなくて、6 次元分小さくなる解もあれば、もっと例えば、何でもありですね、1 次元しか小さくならない解もあるし、2 次元しか小さくならない解とかほんとに色々あります。で、6 次元だということは認めたとして、6 次元で Calabi-Yau 多様体とそこまで限ったとしても、無数にあります。で、無数にあるんですが、その無数にある中で、実験とか観測と細部までばっちり合うのがあるかといわれると、それもまだないですね。で今、摂動論的にはと言ったんですが、真空の選び方が無数にあると言う

図 9: 真空の選び方

のは絵的に言うと、なんか potential がフラットな potential になっていて、どこにおいてもこの玉が転がらないで安定になる (図 9 左)。そういう状況です。で、この potential がフラットなのはもしかしたら摂動論的にやってるからいけないんであって、何か非摂動的な効果を考えれば、何らかの効果でこれがこういう風に立ち上がって、何か真空が 1 つ決まるんじゃないかと、そういう期待もされました (図 9 右)。ただこれは難しい問題で、そもそも弦理論っていうのは未だに非摂動的な定式化というのは完成していません。だから、そもそもこの非摂動的な効果を系統的に計算するというのは非常に難しい問題です。で、もう 1 つ問題は、これは問題とも言えないかも知れないですが、なんでこう、Hetero の $E_8 \times E_8$ だけが選ばれたのか。さっき 5 つ超弦理論があると言いましたが、何でこれが選ばれたのかというのも気になりますね。

1.3　Second Revolution (1994 ごろ〜)

まあこういった問題があることを踏まえて、次の大発展がありました。second revolution と呼ばれる大発展が。それをちょっと次に話したいと思います。まあ、second revolutionって、この頃になると僕もこの業界に入ってきたので多少知ってるんですが。keyword は、duality(双対性) と D-brane、それから M 理論。3 つの keyword に基づいて、すごい大発見が相次いだわけです。

まず、この keyword に沿って説明したいんですが、まずこの双対性 (duality) とは何かといいますと、見かけ上全く異なるような 2 つの理論が量子論的に等しくなるというそういう性質です。そういう性質を双対性と言います。ちょっと例をいくつか挙げたいんですが、まず第一の例は Type IIA という超弦理論と Type IIB という理論の T-duality です。これは割と昔から知られている duality です。どういうものかというと、Type IIA という超弦理論があって、それを半径 R の S^1 に compact 化したものを考えます。半径 R の S^1 を S^1_R と書きますが、一方 Type IIB の超弦理論をやっぱり S^1 に compact 化するんですが、半径を $1/R$ という S^1 に compact 化したものを考えます。

$$\text{Type IIA on } S^1_R \Leftrightarrow \text{Type IIB on } S^1_{1/R} \tag{4}$$

この 2 つって元々の超弦理論の種類も違うし、S^1 の半径も違うし、全く違う理論に見えますが、実はこの 2 つの理論というのは全く等価です。どんなふうにして等価になっているかというのを図 10 に描きました。図 10 の左は S^1 方向を円で描いた方向として、残りの 9 次元方向を横軸にした絵です。それでこの S^1 に compact 化

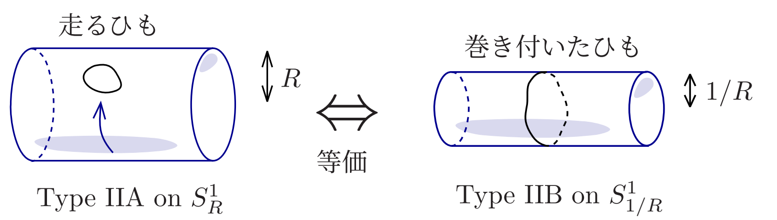


図 10: T-duality

すると、この S^1 方向にぐるぐる回る、S^1 方向に momentum を持つようなそういう stateがあります。実は図 10 右の Type IIB 側で見ると、半径 $1/R$ の S^1 に compact 化してるんですが、この S^1 にぐるっと巻き付いたような紐が考えられますね (図 10 右)。図 10 の左図の走る紐と右図の巻き付いた紐が実は対応しているという、図 10 の左図の S^1 方向の momentum と図 10 の右図の巻き付き数がちょうど対応しているという、そういう対応でもってこの 2 つの理論は等価だということが示せます。で、巻き付くとかいう性質っていかにも string ならではの性質ですよね。こういう一見全然違うものが 1 対 1 に対応して理論が全く等価であるということがちゃんと示せます。

で、2 つ目の例は Type IIB 理論の S-duality。これは何かというのをちょっと説明します。Type IIBっていう理論の中には、dilaton と呼ばれる scalar 場 ϕ があっ

て、e^ϕ と書いたこいつが coupling constant の役割を果たします。

$$g_s = e^\phi \tag{5}$$

この g_sっていうのが大きいか小さいかで相互作用が強いか弱いかが決まります。それで、この Type IIB 理論には graviton とか色んな粒子がありますが、そのなかで 2 階反対称 tensor 場っていうのが 2 つあります。$B_{\mu\nu}$ とか、$C_{\mu\nu}$ とかって言います。ここだけにちょっと着目することにして、そうすると、これらに対して g_s を $1/g_s$ にすると同時にこの $B_{\mu\nu}$ と $C_{\mu\nu}$ を入れ替える、そういう変換に対して理論が不変であるということが強く信じられています。

$$\left(\begin{array}{ccc} g_s & \rightarrow & 1/g_s \\ B_{\mu\nu} & \rightarrow & C_{\mu\nu} \\ C_{\mu\nu} & \rightarrow & B_{\mu\nu} \end{array} \right. \tag{6}$$

これまだ実は証明がないんですが色んな証拠があって、そういう対称性があるんじゃないかというふうに考えられています。これが S-duality です。これが本当だとするとすごいことを言っていて、この g_sっていうのがさっきも言ったように相互作用の強さを表していて、もし g_s が非常に小さくて相互作用がすごく弱くて、摂動論的がすごくいい近似になるような状況を考えておくと、これ S-duality を考えると今度は $1/g_s$ってめちゃくちゃでっかい訳ですね。だから相互作用が非常に弱い弱結合の理論と、相互作用が非常に強い強結合の理論がこれで等価になるということを予言するわけです。だから、相互作用が強くて解析が非常に困難な理論でも、この duality を信じると解析できるようになります。

まあこんな具合にしていろんな dualityが、S-duality とか T-dualityがあって、異なる超弦理論が繋がるようになります。今言ったのは Type IIA 理論と Type IIB 理論が T-dualityで結び付いていて、この Type IIB 理論には S-duality という duality があるということですが、同様のことは他の超弦理論でもあてはまって、Type I 理論と Heterotic の $SO(32)$ 理論が実は S-duality で結び付いているということが言われていて、それでこの Heterotic の $SO(32)$ と Heterotic の $E_8 \times E_8$ という 2 つの超弦理論が T-duality で結び付いている、そういうことが示されます。ま、こんな具合にして異なる超弦理論が双対性で全部繋がっています。

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Type IIA}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{T}"] & \boxed{\text{Type IIB}} \arrow[loop right, "\text{S}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Type I}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{S}"] & \boxed{\text{Het } SO(32)} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{T}"] & \boxed{\text{Het } E_8 \times E_8} \end{tikzcd}$$

次に 2 番目の keyword、D-brane について話をしたいんですが、また Type IIB 理論で考えたいと思います。弦理論って紐があるわけですが、その紐っていうのは実は $B_{\mu\nu}$ と書いた 2 階反対称 tensor に対する charge を持っていることが知られています。そうすると、さっき S-duality があるって言いましたが、S-dualityっ

てのはこの $B_{\mu\nu}$ と $C_{\mu\nu}$ を入れ替えるような操作で理論が不変であることを言ったわけですね。で、今 $B_{\mu\nu}$ に charge を持つ物体が紐であることを知っているとすると、この S-duality を信じると何か今度は $C_{\mu\nu}$ に charge を持つような紐状の物体が存在しなきゃいけないっていうのが言えますね。で、これが D1-brane と呼ばれる D-brane の最初の例です。で、実はさっきの T-duality っていうのを繰り返し使うと、この D1-brane だけじゃなくて、これは紐状だったんですが、今度は $1+p$ 次元に広がった物体、Dp-brane と呼びますが、何か広がりを持った物体も存在しなきゃいけないってことが示せます。

で、そういう物体があると予想されるわけですが、それをどうやって構成するのかっていうのを長い間誰も知らなかった。それに対して解答を与えたのが Polchinski で、95 年です。で、この 95 年辺りから D-brane の発見に伴って大発展が起こったんですが、この Polchinski が与えた答えっていうのが、D-brane っていうのは何か $1+p$ 次元の膜であって、壁であって、それで open string が端を持てるようなそういう性質を持つ壁である (図 11)。いいですかね。ええと、何か壁があって、open

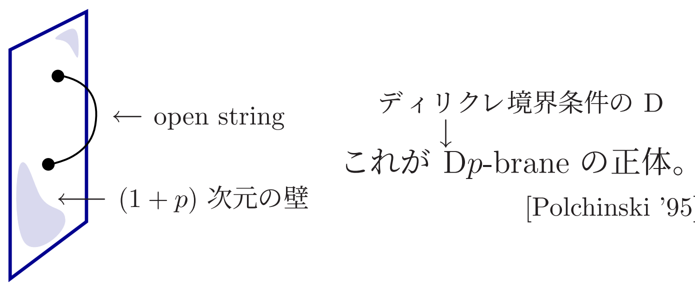


図 11: Dp-brane

string が壁に端を持てるという、そういうものです。これ一見なんか非常に人為的で変な気が多分初めて見たときはするかもしれないけど、実はこれが正しい答えなんですね。で、どういう D-brane があるかっていうのは超弦理論の種類によって違ってくるんですが、例えば Type I 理論は D1、D5、D9-brane しかなくて、Type IIA に関しては D0、D2、D4 . . . と、この数が偶数のもの、Type IIB に関してはこの数が奇数のものが存在できる。Hetero にはないんですけど、まあ、Type I、

Type I	D1, D5, D9
Type IIA	D0, D2, D4, D6, D8
Type IIB	D(−1), D1, D3, D5, D7, (D9)
Het $SO(32)$	なし
Het $E_8 \times E_8$	なし

Type IIA、Type IIB に関しては、何かそういう壁状の物体が存在するということが分かったわけです。で、弦理論というのは紐から構成された理論だったわけなんですが、調べてみると紐以外の物体も含まれていることが分かったわけです。

次に最後の、3つ目の keyword の M 理論というのを見るんですが、今度は Type IIA 理論を考えてみます。Type IIA 理論にもやっぱり graviton とか色んな場がい

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} g_{\mu\nu} & C_\mu & \phi \\ & \downarrow & \downarrow \\ & g_{\mu\,10} & g_{10\,10} \end{array}}_{g_{MN}} \quad \underbrace{\begin{array}{cc} B_{\mu\nu} & C_{\mu\nu\rho} \\ \downarrow & \\ C_{\mu\nu\,10} & \end{array}}_{C_{MNP}} \qquad \begin{array}{l} (\mu,\nu,\rho=0,\ldots,9) \\ \\ \\ (M,N,P=0,\ldots,9,10) \end{array}$$

るわけですけど、この 10 次元の理論の massless の boson だけを抜き出してみると、こういう人達、上段に書いたような 5 種類の field があります。まずこの $g_{\mu\nu}$っていうのは metric、graviton です。で、これ、C_μ と書いたのは何か gauge 場。で、ϕと書いたのは dilaton と呼ばれる scalar 場。$B_{\mu\nu}$っていうのはさっきの Type IIB にもありましたが 2 階反対称 tensor。で、それにくわえて $C_{\mu\nu\rho}$ というのが 3 階反対称 tensor。それで、$\mu\nu\rho$っていうのが 10 次元の足で、$0\sim 9$ まで走りますけど、ちょっとこの C_μっていうのを $g_{\mu\,10}$ と書いてみる。で、ϕ というのを $g_{10\,10}$ と書いてみる。それで $B_{\mu\nu}$っていうのを $C_{\mu\nu\,10}$ と書いてみることにします。そうすると、この $g_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\,10}$ と $g_{10\,10}$ を合わせると g_{MN}、この M と Nっていうのが $0\sim 10$ まで走ると思うと、何かぴったり収まる。同じように $C_{\mu\nu 10}$ と $C_{\mu\nu\rho}$ をあわせると、MNP がこう、$0\sim 10$ まで走るとすると、ぴったり収まります。ということは、この理論って 10 次元の理論だったんですが、何かこう 11 次元的な、11 次元の重力場と 11 次元の 3 階反対称 tensor と見なすことができるので、何か 11 次元の理論が背後に隠れているんじゃないかと示唆しています。で、この 11 次元の理論、何かはっきりした定義が与えられているわけではないですが、何かこれが示唆する 11 次元の理論が存在すると思われるので、これを M 理論というふうに呼んでいます。で、これは見かけ上は 10 次元なんですが、11 次元の理論が何か 1 次元だけ丸まって、それで 10 次元になっているというふうに想像できるんですが、そうするとこう、丸まっている方向、X^{10} と書いた 11 次元目の方向に momentum を持つ粒子が存在しているはずです。で、そんなものがその 10 次元の Type IIA の超弦理論にあるのかということを考えると、実はさっき言った D-brane の一種である D0-brane がまさにそれなんだということが言われました。

で、これは Witten が言ったことで、これによって一気に道が開けました。で、M 理論って、M って何だと思ったかも知れないですが、まあ色んな説があってですね、まず第一に membrane の M である。membrane て、日本語でいうと膜。で、実はこの M 理論っていうのは $1+2$ 次元の膜が存在することが知られています。紐理論っていうのが $1+1$ 次元ですよね。紐って空間的に 1 次元で、時間的にも 1 次元、だから $1+1$ 次元。で、それの 1 次元増やしたやつです。で、この $1+2$ 次元の膜が、X^{10} 方向、11 次元目の方向に巻き付いたものが、この弦理論の紐だという解釈がなされています。それであの、弦理論は紐から作られた理論だった

んで、M 理論っていうのはきっと膜の理論として定式化できるんじゃないかと期待されるんですが、実はこれは量子化にすごい難しい問題があって、これはまだちゃんとはできていないですね。で、まあそういう意味で、membrane の M かと思いきや他の説があって、mother の M と。ええとこれの意味はですね、M 理論ていうのは全ての超弦理論の母親というふうに言うことができる。どういう意味か

$$
\begin{array}{lcl}
 & \text{半径} \to 0 & \\
\text{M on } S^1 & \longrightarrow & \text{Type IIA} \\
\text{M on } S^1 \times S^1 & \longrightarrow & \text{Type IIB} \\
\text{M on } I & \longrightarrow & \text{Het } E_8 \times E_8 \\
\text{M on } I \times S^1 & \longrightarrow & \text{Het } SO(32) \\
\text{M on } S^1 \times I & \longrightarrow & \text{Type I}
\end{array}
$$

というと、さっき Type IIA の理論っていうのは M 理論、11 次元の理論を 1 次元 compact 化して 10 次元にしたものだと言いました。で、実は Type IIA だけじゃないんですね。実は Type IIBっていうのは、Type IIA と T-duality で結び付いていたことを思い出すと、これをもう 1 回 S^1 で compact 化して $S^1 \times S^1$ という、まあ torus で compact 化して、それでその半径を zero にした極限っていうのが実は Type IIB になることがわかります。これはさっきの T-duality を使うとすぐに分かるんですが、まあそんなもんかと思って下さい。それで、他の例えば Heterotic の $E_8 \times E_8$っていうのは何かというと、今度は M 理論を線分、$I = S^1/Z_2$ ですから線分ですね、端があるような、$[0, 1]$ みたいな、そういう線分で compact 化したものが実は Heterotic の $E_8 \times E_8$。で、同じようにこう、Heterotic の $SO(32)$っていうのは線分 $\times S^1$ で compact 化したもの。また、Type I だったら $S^1\times$ 線分。まあそういうふうにして 5 種類あった超弦理論が全部、M 理論をある種の compact 化をして半径 zero にする極限をとったものだというふうに見なすことができます。それで、全ての超弦理論を生み出す母親みたいなもの。でもそれだけじゃないんですね。

M 理論っていうのはなんか、miracle とか magic とか、あるいは mystery とかそういう言い方をされることがあります。でこれ、1 番驚くべき事はですね、超弦理論の間の双対性、S-duality とかの双対性が、M 理論を考えると自明になるということです。さっき言った例だと、Type IIB には S-duality があると言いました。

$$\text{Type IIB} \simeq \text{M on } S^1 \times S^1 \tag{7}$$

これが実は、Type IIBっていうのは M 理論を $S^1 \times S^1$ に compact 化したものだと理解すると、自明になるんですね。(7) 式の右辺には 2 つ S^1 があるので、この 2 つの S^1 を入れ替えるという操作がこの S-duality になります。でこれ、M 理論側で見ると ((7) 式の右辺)、S^1 と S^1 を入れ替えるだけなんで入れ替えたって同じ理論になるのは当り前ですね。でもこれ Type IIB 側では全く nontrivial な strong coupling と weak coupling を入れ替えるようなそういう恐ろしい duality になっています。で、同じように Type I と Heterotic の間に S-duality があるって言いました ((8) 式と (9) 式)。

$$\text{Type I} \;\simeq\; \text{M on } S^1 \times I \tag{8}$$

これ M 理論で見ると ((8) 式の右辺)、さっきの表現で言うと M 理論を $S^1\times$ 線分で compact 化したものと M 理論を線分 $\times S^1$ で compact 化したものと言いました。順序をわざとつけたんですが、(8) の右辺の S^1 と I を入れ替えることが S-duality に対応していることが言えます。入れ替えると

$$\text{Het } SO(32) \simeq \;\text{M on } I \times S^1 \tag{9}$$

となります。で (9) 式の右辺の M 理論で見ると、順序なんて関係ないので入れ替えたって同じ理論になるのは当然ですね。弦理論側では理論の構成の仕方が全然違うんだけど、それが S-duality で結び付く。まあこんな具合にして全く nontrivial だった双対性が M 理論にいくと自明になってしまうという驚くべき事が、魔法を見せられているような性質があるので、miracle とか言われます。

で、さらにもう 1 つ説があって、この M 理論っていうのは matrix model、行列理論っていうのを使って定式化されるんじゃないかという提案があって、M は matrix の M なんだという説もあります。でまあこれについてはちょっとまた後でやります。

で、最後これは冗談なんですが、M は W に似ている。で、W っていうのは Witten の initial です。で、M 理論ていう名前を最初に言い出したのは Witten ではないんですが、M 理論っていう 11 次元の理論が超弦理論の背後にあるんじゃないかという提案をしたのは Witten です。この Witten っていうのはすごい人で、いろんな大発見を昔からやっている人で、この弦理論の分野では leader のようなそういう存在で、まあある人が冗談で M 理論っていうのは Witten の名前をもじったんだと。そういうなんかいろんな説があるんですけど、まあどれでもいいというか、いろんな意味があって M 理論という名前が定着しています。

それで今分かったことをちょっと地図でまとめる。ええと、これは昔、second revolution の前の地図です (図 12)。Type IIA と Type IIB が T-duality で結び付いていて、Type IIB に S-duality がある。Type I と Heterotic には S-duality があって、Hetero の SO(32) と $E_8 \times E_8$ には T-duality がある。あ、ついでに 11 次元の超重力理論っていうのも付け加えておきました。それが今やこういうふうに陸続きになって、なにか背後に M 理論っていう理論があって、それのある極限をとるとこれらの超弦理論が実現されるという構造になっています (図 13)。11 次元の超重力理論っていうのは M 理論の low energy effective theory で、超対称性を持つ 11 次元の理論。これ、11 次元の超重力理論と 10 次元の超弦理論もなにか陸続きになっているということを示唆しています。

で、いろんな驚くべき事が分かったんですが、それをいくつか説明したいんですが、まずこれらの発見による場の理論への impact が非常に大きなものがありま

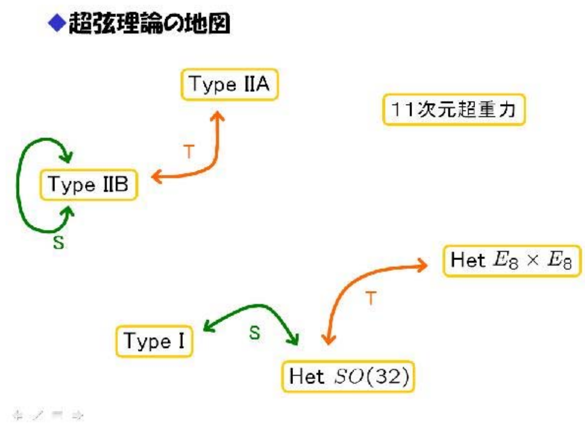


図 12: 超弦理論の地図 (second revolution 前)

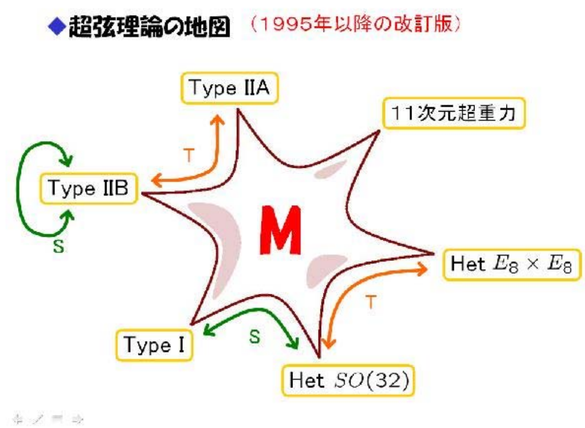


図 13: 超弦理論の地図 (1995 年以降の改訂版)

す。それは何だったかというと、Dp-braneっていうのがあると、この p に応じて $1+p$ 次元の膜があるわけです (図 14)。壁がある。で、その上に open string が乗れるとさっき言いました。実はこの open string の量子化をちゃんとやってやると、open string から出てくる mode として、まず gauge 場を含むということが言えます。そうすると、これって $p+1$ 次元の gauge 理論になるわけです。こんな具合にして $p+1$ 次元の gauge 理論が弦理論の中に実現される事が分かって、そうすると弦理論を使って gauge 理論を解析できるようになります。で、この関係を使って、弦理論、あるいは超重力理論、あるいは M 理論を使って、場の理論、gauge 理論の解析をしたり、逆にこの gauge 理論の方で知られている解析法がいろいろあるので、それを使って D-brane だとか超弦理論に関する非摂動的な解析をする事ができるようになりました。で、さっき、弦理論の非摂動的な解析をするのは非常

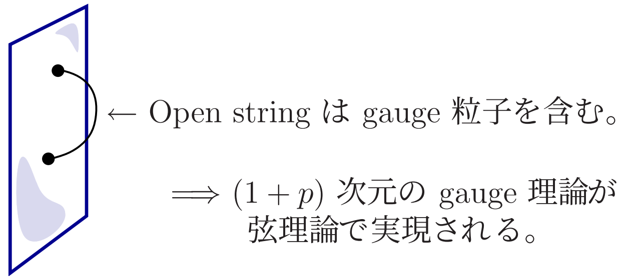


図 14: 超弦理論と gauge 理論の対応

に難しいと言いましたが、実はこういう道を辿って、そもそも弦理論には非摂動的な定式化がまだ完成されてないと言いましたが、図 14 のような関係を一旦知ってしまうと、gauge 理論の助けを借りて非摂動的な解析ができるようになります。そういう意味で弦理論にとっても非常に重要な事です。逆に超弦理論には色々な双対性があるので、それを応用して gauge 理論の方で全く知られてなかった性質が分かったり。例えば弦理論にある双対性を gauge 理論の方に応用したりということが出来るようになって、gauge 理論の方の理解もこれによって非常に進みます。で、いろんな keyword があるんですが、MQCD(M 理論を使った QCD) とか、string junction と呼ばれる string が三つ又になったようなやつとか、あるいは、多分何度も聞いたことがあるかも知れないですが AdS/CFT とか。基本的にはこういう duality です。

で、次に量子重力への impact はどういうのがあるかというと、D-brane があると、D-brane っていうのは重さを持った物体なので周りの時空が歪むんですね。そのどれだけ歪むかというのを調べてみると、ある場合には event horizon が生じて black hole ができます。 ちょっと絵的に言うと、壁だったものが時空が歪んで何

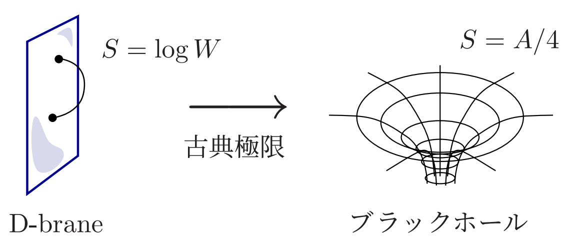


図 15: D-brane とブラックホール

か black hole みたいになります (図 15)。これを利用すると、black hole を弦理論を使って解析できるようになります。ちょっと面白いというか著しいことは、弦理論を使ってある種の black hole の entropy とか、Hawking radiation とかが微視的に計算できるようになります。ええと、弦理論を使って計算できるようになったと。その entropy とかってどういう風に計算されてたかというと、black hole の entropy って Bekenstein-Hawking の公式っていうのがあって、この black hole の horizon の

面積が entropy になるっていうそういう性質があったわけです。

$$S = A/4 \tag{10}$$

これが D-brane の立場で言うと、何か entropyっていうのは統計力学でやるように D-brane 上の状態数を勘定して log をとると出てくる。

$$S = \log W \tag{11}$$

この 2 つが実はぴったり一致します。これは宇宙だとか量子重力、black hole をやってる人達にもすごい impact があって、超弦理論もたまには役に立つなあと言われたりしました。

次に、さっき後で言うと言った行列理論、あるいは非可換な時空の話題を話します。ちょっと一例として Type IIA に存在した D0-braneっていうのを考えます。D0-braneってこう、空間的に 0 次元、時間方向に広がっていて、まあ時間軸を縦にとって時間方向に伸びた line が D0-brane (図 16)。で、この D0-brane の effective

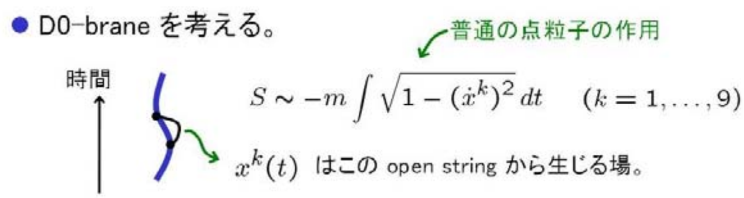


図 16: D0-brane

actionっていうのは大体普通の点粒子の action と同じで、大体こういう形になります。

$$S \sim -m \int \sqrt{1-(\dot{x}^k)^2} dt \quad (k = 1, \ldots, 9) \tag{12}$$

ここで xって書いたのは空間方向の座標を表してるわけですけど、この $x^k(t)$ と書いたこれに対応する自由度っていうのは実は、D0-brane に乗っかってる open string を量子化すると出てきます。この open string から scalar 場が出てくる。で、これ、D0-brane 1 個だと普通の点粒子なんですけど、D0-brane が N 個あるとどうなるか考えてみると (図 17)、これに乗ってる open stringって、どの D-brane に端を持つかでいろんな種類が考えられます。端の乗せ方には N 種類あって、open string には 2 つの端があるので、全部で N^2 種類の open string があります。そうすると何が起こるかというと、open string の自由度から $x^k(t)$っていうのが出てきたんですが、今度この $x^k(t)$っていうのは $N \times N$ 行列に拡張されます。だから何か、座標が行列になったわけですね。で、こういうような系を基礎に考えるのが行

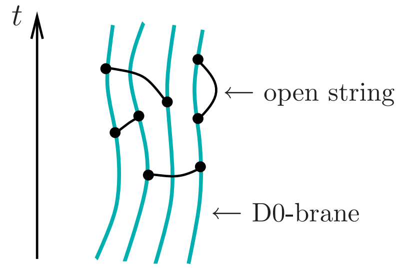


図 17: D0-brane が N 個ある場合

列理論で、BFSS とか IKKT とか。Banks-Fisher-Shenker-Susskind という人達が、M 理論がこの行列理論で定式化されるんじゃないかという提案をした、非常に有名な話です。IKKT というのは石橋、川合、北澤、土屋という日本人のグループで、Type IIB の string 理論が行列理論で表されるんじゃないかと、そういう提案をしたものです。それでこの行列理論が超弦理論とか M 理論の非摂動的な定式化の候補なんじゃないかと言われて、これも盛んに研究されています。それでここで、座標が行列になった訳ですけど、行列になってしまうともはやこの x^k っていうのは必ずしも可換ではない訳ですね。ということは何か座標が非可換であるような、可換で無いようなそういう多様体で時空が表されているというそういう可能性が出てきました。時空が非可換な多様体。これってすごく面白いのは、何か非可換な多様体を考えて、それで何か理論を作ろうと思ってやった訳じゃなくて、弦理論を考えているといつの間にか非可換な多様体っていう概念が自然に出てきたということが非常に面白い所で、僕等の住んでいるこの世界が非可換な多様体であるという、もしかしたらそういう可能性も超弦理論は示唆してるんじゃないかということが言えます。

最後になりますが、今回の講義のテーマは tachyonic な超弦理論のはずなんですけど、これもまた非常に面白いことで、これ、いろんな説明の仕方があるんですけど、今回示したいのは、超対称性を破るような D-braneっていうのを考えることができて、そうすると D9-braneっていうのを考えることができるようになって、これを加えると理論が拡張されるわけです。D9-braneって、9 と書いたのは $1+9$ 次元という意味で、$1+9$ 次元って 10 次元なので、超弦理論の 10 次元の時空を全て埋め尽くすようなそういう brane です。で、そういうのを加えてやると、理論はどうなるかというと、まず、gauge 対称性が非常に大きな対称性になります。というのと、tachyon 場と呼ばれる scalar 場が出てきます。さっき、D-braneが存在で

	Type I	Type IIA	Type IIB
ゲージ群	$O(N+32)\times O(N)$	$U(N)\times U(1)$	$U(N)\times U(N)$
タキオン場	$(\square,\square)$	adjoint	$(\square,\square)$

きる超弦理論って Type I とか Type IIA、Type IIB と 3 種類あったんですが、この D9-braneっていうのを N 枚用意すると、この Type I の gauge 群って $O(32)$っ

てさっき書いてたんですが、それが $O(N+32)\times O(N)$ というふうに拡張されます。Type IIA は $U(1)$ って書いてたんですが、$U(N)\times U(1)$。Type IIB に対しては gauge 群が無いと言ったんですが、$U(N)\times U(N)$ という、こういう gauge 対称性に拡張されます。この N っていうのは何枚でもとれるんで、基本的に無限大までとれるんで、非常に大きな gauge 群が生じます。それにともなって、実は tachyon 場と呼ばれる scalar 場が現われます。tachyon 場って何かと言いますと、後でいいますが、基本的には図 18 のように不安定な停留点を持つような potential がある scalar 場を、tachyon 場と言います。だからまあ、標準模型とかで出て来る higgs 場

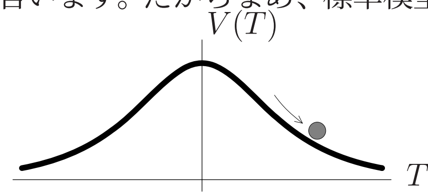


図 18: tachyon 場の potential

とかもここで言う tachyon 場の一種です。それで、重要だったことは、tachyon 場が potential の minimum に到達したところっていうのは、不安定モードが消えるところなんですが、ここでは超対称性が回復して、もともと D9-brane をつけ加える前の、新たな自由度を付け加える前の理論が、potential の minimum で実現されているということが分かります。ところがこの D9-brane を付け加える自由度があるということを一旦知ってしまうと、こんな potential の minimum だけを考えるっていうのは非常に何か、理論全体の内の非常に限られた一部分しか見ていないということが分かります。だからいまやこれを知ってしまうとこれ全体を考えるべきで、これを考えるといろんな事が分かってくるということを話したい。D-brane は手で加える壁ではなくて、この系で自然に構成される soliton として、このでっかい理論のなかに自然に組み込まれていることが言える。これを説明したいと思います。

もう 1 つ、宇宙論の人達とかがよく利用するんですが、この tachyon 場がころころ転がったり、山のてっぺんのあたりにいたりすると、実は inflation を引きおこす可能性があります。これは現実のこの宇宙と、例えば観測とぴったり合うようになっているかというと、そこまではまだちょっとできていないんですが、まあ 1 つの可能性として何か inflation を引き起こす種みたいなものが自然に含まれていたというのはそれはそれで面白いかもしれない。まあ今回の講義ではこの inflation の話はしないと思うんですけど、この事実をできれば話したいと思っています。これで overview は終わって、これから順番にやっていきたいと思います。

いいでしょうか。ちょっと早かったんですけど、ここまでで何か質問はありますか。

(質問) 先程、走る紐と巻き付いた紐という話があったと思うんですけど、そこで巻き付き数とかいう言葉が何かに対応してるっていう、それは . . . (回答)

何回巻き付くかっていう数がありますね。それを巻き付き数っていいます。これに対応するものは momentum です。どれだけ速く回っているかという。半径 R で compact 化すると、波動関数が一価であるためには momentumっていうのは量子化されて、整数 $/R$ みたいな形で量子化されます。で、その整数が丁度何回巻き付いたかっていう整数に一対一に対応し ます。そういう感じです。(質問) 分かりました。ありがとうございました。

(質問) すみません、もう 1 つ。先程、11 次元の時空が存在するんじゃないかという話がありましたが、いまいちなんでそんなものを考えられるのか分からないんですが。(回答) ピンとこないですか。この話はいいですか？足の数が、もともと 0 ~ 9 まで 10 次元分しか走らなかったのがこの 3 つをこう書き直すと、0 ~ 10 まで 11 次元分だけ走るようなそういう添字を持った tensor になります。この 2 つも同様で、11 次元分の足を持った 3 階反対称 tensor だと思うと、ぴったり収まります。これが多分最初の証拠です。もともと 10 次元の理論だったものが、何故か 11 次元の構造を持っているというのがまず、あったんですが。(質問) いや、なんでそういうふうにまとめるのかなとちょっと思ったんですが。(回答) これは趣味の問題です。でも、まずまと まるっていうのが非常に nontrivial ですよね。勝手に 10 次元の理論を作りなさいって言われた時に、よもやそれが 11 次元にまと まるとは普通は思わないじゃないですか。それがぴったりまと まったというのが 1 つすごいですよね。(質問) それは、ちゃんと勉強しないとそういうことは思いつかないですか？(回答) ど うやって思いついたか。よく見てみたらそうなっていた (笑)。実は色々な方向があると思うんですけど、11 次元の超重力理論っていうのは随分昔から知られていました。実は 11 次元の超重力理論っていうのは非常に綺麗な理論で、これ以上次元を上げちゃうと consistent な理論にならなくて、だいたいこれが maximum の次元の理論で、実はこの理論は free parameter がほとんどなくて非常に綺麗に書ける理論として知られていました。それで 10 次元の理論っていうのは、例えば Type IIB とか Type IIA、どれでもいいですけど、超弦理論に対応する low energy effective theory として、10 次元の超重力理論っていうのも知られています。それでこの Type IIA に関する超重力理論っていうのが実はこの 11 次元の理論を 1 次元 compact 化することで得られるというのは実はその当時から知られていました。それがこの超重力理論っていうのが実は Type IIA の超弦理論の low energy effective theory だったことを思い出すと、この 11 次元超重力理論に対応する何か背後に 11 次元理論というのがあって、それの effective theory がこれだと想像するのは、まあ自然と言えば自然です。まあでもこれは非常に non trivial なことで、未だに証明はないです。でも一旦信じ るとさっきみたいに非常にいいことがあるので、今やみんな信じてる、これは非常に nontrivial なことです。(質問) はい。わかりました、ど うもありがと うございました。

(質問) すみません、先程 matrix model の所で非可換時空ってお話があったんですけど、時空が非可換ってのはちょっとにわかには信じがたいような気がするんですが、これは時空全体で非可換性っていうのが成り立っているのか、それともある特定の部分で非可換なのかという、これはど うなんですか。(回答) 何とも言えないですね。これ、x^k って行列になったと言ったけれども、もし対角行列だったら別に非可換じゃない訳ですよね。どんな行列が実現されるのかというのは問題によって。(質問) 状況によって決まるものではないと言う？(回答) ど ういったらいいのかな。今のところ、摂動論的に解析する限りにおいては、どれかひとつにばっちり決まるわけではないですね。いろん

な取り方があって、ある場合には可換になるし、ある場合には非可換になります。(質問) たとえばなにか、brane のあるところでは非可換になって、あるところでは可換になるとかそういう関係があるのかなってちょっと思ったんですが、そういうのとかは解析できないんですか？状況によるということですか。(回答) 何とも言えないですね。(質問) わかりました。

(質問) (12) 式の $x^k(t)$ ってやつは図 15 の D0-brane の座標なんですか、それとも open string から生じる場なんですか？(回答) open string から生じる場です。場ですが、これ、座標として解釈できます。えっと、たとえば 1 本の時は問題ないですけど、場としてこういうのが出てきますけど、これが実は空間方向の座標を表しているということが言えます。これはちょっと考えてみればわかりますね。ちょっとここは認めたとします。そうすると行列になったときその解釈がどうなるのかというのが不思議だと思うかも知れないですが、これを対角化するとその固有値が、$N \times N$ 行列だから N 個出ますが、その N 個の固有値が N 個の D-brane の座標を表している。そういう関係になります。... 駄目 (笑)？(質問) いえ。open string から生じる場が時空の $x^k(t)$? $x^k(t)$ ってなんか時空って考えるんですよね。何かその対応がにわかには信じがたいんですが。(回答) 信じがたい。こっちはいいですか？D-brane をいろいろ動かす自由度がありそうだというのはなんとなく想像できます？その自由度っていうのは D-brane 上の場の理論のどこかの自由度に入っていると思うのが自然ですね。それが実は D-brane 上にある scalar 場の値に対応するというのが示せます。こっちはそれほど不思議じゃない気がしてもらえるかと (笑)。まあ、後で D-brane の話をちょっとするので、そのときにまた見てみて下さい。(質問) はい。

(質問) その $N \times N$ 行列っていうのは、座標は連続じゃないってことなんですか？トビトビじゃないですか？(回答) この x^k っていうのは、k 方向の座標で、これは連続的な値を取れるんだけど、この x^k っていうのが $N \times N$ 行列になる。(質問) トビトビではない？(回答) トビトビではないです。行列になっただけで、値は別に連続などんな値でも取れる。

(質問) あの、ちょっと素人っぽい質問なんですけど、紐の振動の仕方によって粒子の種類がいろいろ違うということは、粒子の種類なんていくらでも考えられそうな気がするんですが。(回答) いくらでもありますね。(質問) いくらでもあるんですか？(回答) ええ。無限個粒子が出てきます。ただ、mass を調べてみると、どんどん mass が高くなっていて、mass が zero のものだけを考えたら有限個しか無い。で、その、massive なやつの mass がどれくらいかというのは問題ですが、多くの model ではだいたい Planck scale くらいの mass を持っていると思われていて、ものすごく重いので、実験では見つからない。(質問) じゃあ、あることはあるんですね、無限個、いくらでも。(回答) ええ。(質問) そうなんですか、分かりました。

(質問) ええと、tachyon 場を考えるということなんですが、ここで質問するのは後でまた出るかも知れないんですが、tachyon を考えるっていうのは mass spectrum が負のものを考えるという感じだと思うんですけど、それを理論の中に取り込むっていうのは量子論として unitarity とかそういうのは、超弦理論全体として破ったりとかいうことはないんですか？(回答) この山のてっぺんで摂動論をやるともちろん破綻します。これは間違った真空の周りで展開するから破綻しているだけであって、ほんとは摂動論をやりたかったら potential の minimum の周りで展開しなきゃいけない。それは別に、potential の minimum

に来ると tachyon のない理論に戻るだけなんで、特に問題ない。普通の標準模型を思い出すと、higgs 場っていうのがあります。これは山のてっぺんでは tachyonic です。この山のてっぺんでもし、標準模型で摂動論をやったらそれはもちろん破綻します。potential の minimum のところで摂動論をやるんだったら全く問題ない。(質問) 摂動論をやって、現実的なものを引き出せればそれでまずはひとまず良しというそういう立場ですか？(回答) あ、理論として consistent かどうかということを考えたら、こういう不安定な停留点があるような scalar 場を考えたって別に理論が破綻してるわけじゃないというわけです。(質問) 分かりました。(回答) ただこの不安定点の周りで摂動論をやるのはちょっとやっぱり問題がある。(質問) 摂動論的にしない場合はどうなるんですか。(回答) 摂動論的に考えない場合は、後で強調したいんですけど、摂動論しか興味無い人にとっては potential の minimum だけを考えていればよくて、こんな自由度を付け加える必要はないですが、非摂動論的な事を解析しようと思ったら全体の情報が必要になって、そうするとさっき言ったように D-braneがこの系の soliton として表されたりするようになります。(質問) 分かりました。ありがとうございました。

(質問) D-braneっていうのがさっきの図 (18 ページ 図 15) で black hole になるって、mass を持ったりするって言われたんですけど、D-braneっていうのはそれ自体は紐理論でいう紐で構成できるものなんですか？最初に紐理論はあらゆる粒子を紐で書くっていうそういう理論だと説明されたんですけど、そうすると braneっていうのは何なんですか？(回答) braneっていうのは後でいうように soliton なんですね。(質問) soliton ていうのは孤立波っていうか、物質なんですか。それともそういう空間なんですか。(回答) どう言ったらいいんでしょうね。後で言うつもりなんですけど、何か理論を作ったときに、理論を作るために用意した場だけが出てくるわけじゃない。例えば QCD を考えたら、quark を使って理論を構成しますけど、現実に観測されるのは pion だとか陽子だとか中性子だとか、bound state ですね。ちょっと例えがよくないかも知れないですけど、理論を作るときに用意した場とは違うものがその理論の中に含まれていることはよくあることで、この場合も紐を基本として理論を構成したんですけど、紐以外のものが実はこの理論の中に含まれているということです。(質問) そうすると、さっきいろいろな紐理論がまとめられる時に braneっていうのが必要になるということですが、そうするとまとめるためには、紐理論 + 膜っていう、ある意味物質かどうか分からないですけどそういうものが必要になるということですか？(回答) 壁として導入する分には、何か壁を手で導入したような印象が確かにありますね。ただ、僕の好きな言い方は、tachyon を使った言い方なんですが、D9-braneって 10 次元的な brane で、D-braneっていうのが open string が端を持てる空間だと思うと、10 次元空間に open string を導入することができるということです。さっき D9-brane を加えると言いましたけど、別の言い方をすると、理論に open string を加えると言うこともできる。そういうふうに open string を加えて枠を拡張した理論を一旦考えてみると、こういうでっかい gauge 群を持つような理論になるんですが、この理論の中では、もはや D-brane を壁として手で導入する必要はなくて、この理論の中だけで実は D-braneが soliton として現われるということが分かります。(質問) ひとまずその壁っていうのは紐で構成されているものではないと考えていいですか？(回答) この話はできればやりたいと思っているので、そこでどういうのかというのを説明できると思っているので、ちょっと待ってもらえますか。(質問) 分かりました。

(質問) あと、全然関係ないですが、さっきの最後の、N^2 の種類があるっていうところの図があったんですけど (図 17)、そこで何か時間軸に垂直な形で紐が書かれてないんで、時間によって、ある一定の時間のときに紐が何か分裂して生じているようなそういう感じがするんですが、それは別に時間軸に垂直な平面に 1 つの紐が存在しなくていいんでしょうか。分からなかったんで。そうすると、D0 の 1 番上は同じところに、時間軸に brane があるんで、そうすると長さが持てないっていうかどうすればいいのか良く分からない。(回答) 全くその通りですね。絵が悪い。こう brane があったとして、どう絵を描くべきかっていったら、紐もやっぱり時間方向に伸びてるんですね。だから、むしろこう描くべきかな (注:図は省略)。こういうなんか膜がくっついてるような絵を想像してもらえば、ある time slice ではここが紐になっている。それが時間方向にずっと伸びている。本来こう描くべきところがちょっと、絵が悪い。(質問) 分かりました。ありがとうございました。

(質問) 先程の M 理論のところのトラペなんですけど、それですね、1 番下の 2 行の、x^{10} 方向に運動量を持つ粒子も存在するはずって、x^{10} 方向に string が回ってるんですか。(回答) あ、いろんな状況を考えられるけれども、例えば string がぐるぐる。(質問) x^{10} 方向に string が回ると、それは massive な string が出るだけの気がするんですが。(回答) ごめんなさい、間違えました。これ、11 次元の理論ではもはや string の理論では無くなっているんですね。ごめんなさい、この質問はいい質問で、まず 11 次元の理論は string の理論ではないので、string が回っているという言い方は少しまずかった。11 次元の理論で X^{10} 方向を S^1 に compact 化した理論が、string 理論だと思っていて、その 11 次元目の方向にぐるぐるまわるような modeっていうのは言われたように massive になります。その massive な粒子を探そうと思うと、実は D0-brane になっていて、この D0-braneっていうのも mass を持っています。それで mass も期待通りぴったりあっているということも確認できます。(質問) M 理論の基本的な object というのは何だと思えばいいんですか。(回答) それは誰も知らない難しい問題です。さっき言ったように、membrane だと思う人もいる。membrane を使ってこの M 理論を構成できるという人もいるし、別の人は matrix だと思っている人もいる。これはちゃんと誰もが納得するように示した人はまだいない。(質問) よく言うように p 次元の brane があると、それを S^1 に compact 化すると $p-1$ 次元の brane になるという話があるじゃないですか。それで考えると、D0-brane が出るなら M 理論の 2 次元、$1+1$ 次元的な object が、11 次元方向の S^1 に巻き付いて D0-brane になってるっていう感じがしたんですが、そういうわけでは無いんでしょうか。(回答) そういう考え方で出てくるのはこいつですね。M 理論には $1+2$ 次元の膜があると思っていて、それが x^{10} 方向に巻き付いたものっていうのは 1 次元減って、それは紐なんですね。この人、この紐が 11 次元では $1+2$ 次元の膜だったものが、10 次元の string 理論を構成する紐だという解釈がなされます。さっき言った、x^{10} の方向に回るモードっていうのは巻き付いた膜ではなくて、x^{10} 方向に momentum を持つようなそういうモード。それが 10 次元で

言うと D0-brane だと解釈された、そういう流れなんですね。(質問) $1+2$ 次元の object が 11 次元方向に運動量を持って回ってるということですか？(回答) ええと、もしこの M 理論がこの $1+2$ 次元の object でちゃんと定式化できればそういう事がいえるかもしれないですね。それは多分誰も答えられない。(質問) わかりました。

(休憩)

2 Type II 超弦理論

まず最初に bosonic string のほんとに簡単な部分の話をして、その後 superstring の話をやりたいと思います。というわけで bosonic string をやります。

2.1 bosonic string

2.1.1 点粒子

まず、点粒子のことをちょっと思い出しておきます。点粒子というのはこう縦軸に時間をおいて横軸に空間方向を描いたとすると、何かこういう絵が描けますね(図 19)。時間方向に伸びていて空間方向には何かこうふらふらしてるような。で、

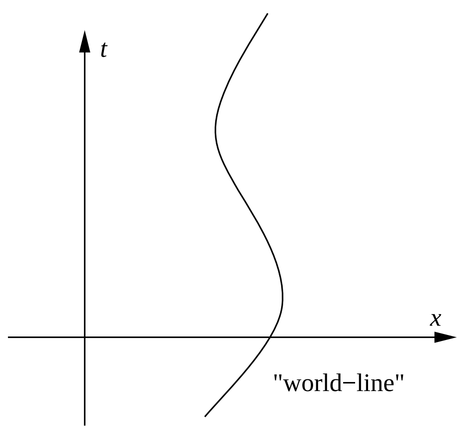


図 19: 点粒子の world-line

時間をあるところで切ってみるとこれが何か点に見えると。これはあんまり使わないけども、この時空の図でこう線を描いたときのこの line のことをよく world-line と言います。それで点粒子の action がどうだったのかを思い出すと、これ学部生のときにやったまあ大体こんなような、

$$S = \int dt \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \tag{13}$$

非相対論的な状況では (13) みたいなものでしたね。それで相対論的に拡張することも皆さん知っていますよね。どうだったかというと、(13) を

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2} \tag{14}$$

とすればよい。それでこのspeedが光速に比べて非常にゆっくりだったときにTaylor展開すれば、leading termが (13) になるという関係でしたね。それで $dt\sqrt{1-\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}$ の部分っていうのはまとめると $\sqrt{dt^2 - (d\vec{x})^2}$ と書けますね。それでこの人ってもっとカッコよく書くと、

$$\sqrt{-\eta_{MN} dx^M dx^N} \tag{15}$$

となります。この ηっていうのは時間方向を -1 にします。

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

それで全部で D 次元だとします。それでまあ x^M って書いたのは時間と空間を合わせた方向 $(t, \vec{x})$。それでよく line element を ds^2っていう書き方をすると、こういうのを用意しておくと便利で、絵で描くと、こうこの world-lineが伸びているとき

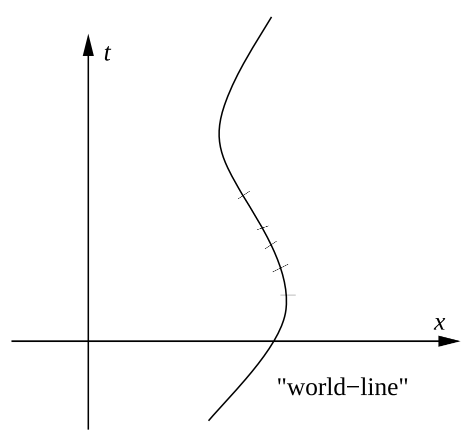


図 20: 点粒子の world-line 上に座標をおく

に、この world-line 上に何か適当な座標を割と勝手に手で置いておく (図 20)。で、この座標でこの line element を書いてやると、

$$ds^2 = \eta_{MN} dx^M dx^N = \eta_{MN} \frac{dx^M}{d\tau} \frac{dx^N}{d\tau} d\tau^2 \tag{17}$$

こうなることを思い出して、

$$h = \eta_{MN}\frac{dx^M}{d\tau}\frac{dx^N}{d\tau} \tag{18}$$

と書いておくと、(14) の actionがこの h を使って、

$$\Rightarrow S = -m\int d\tau\sqrt{-h} \tag{19}$$

と書けるというのをちょっと言っておきます。この h は induced metric と言います。

それでこの actionっていうのの特徴的なことは、この actionっていうのは world-lineの長さっていうのを仮定してて、大体この line elementっていうのはこの metric で測ったときの長さを表していたんですね。で、それを積分したもの。だから action は world-line 全体の長さに比例したものになっている。もう 1 つ特徴的なことは、この S の値は座標のとり方によらない。今座標 τ というのを導入しましたが、えーと、これのとり方によらないっていう性質があります。まあこれ自明ですよね。この $d\tau\sqrt{-h}$っていうのは $\sqrt{-\eta_{MN}dx^M dx^N}$ で、こっちの書き方をするともはや τ によっていないので座標のとり方によらない。それでこの座標によらないっていう事実をよく reparameterization invariance とか呼びます。

- $S \propto$ world-line の長さ
- S の値は、座標 τ のとり方によらない。

2.1.2 紐への拡張

それでこの点粒子を紐へ拡張したい。えーっとどうやるかというと、想像でき

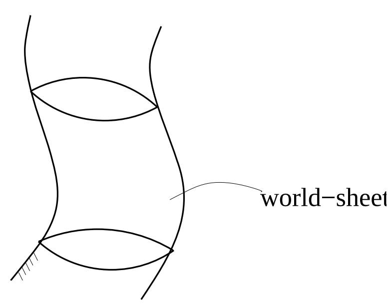


図 21: 紐の world-sheet

るように今 world-line の絵をここに描きましたが (図 19)、この絵をこう換える (図 21)。点だった所を紐に換えて、でそれをこう何か時間方向に伸ばしたような。こういう何か tube みたいな絵を描けばよいんですね。で、この tube みたいなやつを world-sheetっていう言い方をします。それで、今点粒子のときは τ という座標

を導入しましたが、それに対応してこの world-sheet の上の座標を導入します。横軸をよく σ と書いて縦軸を τ と書きます。であの、時々(τ, σ) を (σ^0, σ^1) というふうにも書きます。

それで、この world-sheet 上の induced metric はさっきも書いた ds^2 というやつで見ると

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{MN} dx^M dx^N \\ &= \underbrace{\eta_{MN} \frac{\partial x^M}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^N}{\partial \sigma^\beta}}_{\equiv h_{\alpha\beta}} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \end{aligned} \tag{20}$$

えっとこの x 座標っていうのは σ と τ の関数だと思って書き直すとこうなりますね ((20)2 行目)。でこの部分を、あ、それでごめんなさい。α と βっていうのは $0, 1$ を走るとして σ^α と書いたのは σ と τ のことです。

そいでさっきの真似をします。これ $\left(\eta_{MN} \frac{\partial x^M}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial x^N}{\partial \sigma^\beta}\right)$ を h と書きたくなって、これを $h_{\alpha\beta}$ と書きますね。それで、actionっていうのをこうだと

$$S_{NG} = -T \int d^2\sigma \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} \tag{21}$$

$$d^2\sigma = d\sigma^0 d\sigma^1 = d\tau d\sigma \tag{22}$$

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \tag{23}$$

$$\alpha' = l_s^2, \qquad l_s : \text{string length} \tag{24}$$

えっとこの $d^2\sigma$っていうのはもちろん $d\sigma^0 d\sigma^1$ の意味で、これは σ と τ の書き方で言うと $d\sigma d\tau$ のことです。で、この actionって実は日本人の名前がついていて、Nambu-Goto action と言います。実は string の最初の産みの親の 1 人は日本人なんですね。この Tっていうのは string tension と呼ばれてよく α' という言い方をします。あの、点粒子の時の mass に対応するものの紐版ですね。それでこの α' というのはよく l_s^2 と言いまして、実は長さの 2 乗の scale を持っているもので、l_s に長さの次元を持たせるように l_s^2 と書かせることもあって、この l_s は string length と呼ばれます。この string lengthっていうのが紐の典型的な長さの scale を与えるものです。

それであの横軸に σっていう座標をおいたんですが、今 closed string という端のない string をしばらく考えることにして、この σっていうのは 1 周してきた点を 2π として 0 と 2π は同一視することにします。

$$0 \leq \sigma \leq 2\pi, \qquad \sigma \sim \sigma + 2\pi \tag{25}$$

これぐらいでいいかな。それでこうやって (21) の action を書いたんですが、この action を書いた思想は何だったかというと、(19) の真似をして、さっき world-line

の長さに比例していたのが、今はこの Nambu-Goto では det になったことを反省してみればすぐ分かることですが、world-sheet の面積に比例しています。だからこの点粒子の非常に自然な拡張ですね。で、もう 1 つの特徴は点粒子のときと全く同じことで、Nambu-Goto action は reparameterization invariance を持っていて、座標 (τ, σ) のとり方によらないという重要な性質を持っています。

- $S_{NG} \propto$ world-sheet の面積
- S_{NG} は座標 (τ, σ) のとり方によらない

この (21) の action でやればいいんですけど、もっと賢いやり方があって、実はこの action と等価な action を作ることができます。補助場 $g_{\alpha\beta}$、これ添字の入れ替えで対称だとして、あと determinant も nonzero で実は負だとします。これあのちょうど world-sheet 上の metric に当たるような性質を持つものとしたいので、対称 tensor として determinant もこういうふうにとっておきます。

$$g_{\alpha\beta}\ （対称\quad \det(g_{\alpha\beta}) < 0)$$

これを使って実は書き直すことができて、

$$S_P = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \tag{26}$$

となります。ここで g と書いたのはこれからよく出てくるもので、

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) \tag{27}$$

の意味です。上付きの $g^{\alpha\beta}$っていうのは下付きの $g_{\alpha\beta}$ の逆行列ですね。ほんとに g を metric だと思ったらよく一般相対論で出てくる notation ですね。で、実はこの (26) の action と (21) の action は等価になります。それ、すぐにやりますが。それでこの S_Pっていうのは Polyakov action と呼ばれるものです。それでこの Polyakov action の特徴的なことを挙げると、$g_{\alpha\beta}$っていうのが何か metric のように振る舞うとして、(τ, σ) の座標変換で、不変になるようになっています。見てすぐわかりますね。足もつぶれてるし。これ $(\sqrt{-g})$ は determinant でこれは何か密度みたいですね。

もう 1 つこれこそ重要な性質なんですが、$g_{\alpha\beta}$っていうのを $g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \to e^{2w(\tau,\sigma)} g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$、これ w は、(τ, σ) によっていいんですが、$g^{\alpha\beta}$ を scalar 倍するという変換で不変。これも見てすぐ分かることですが。g は determinant をとっているので定数倍すると $e^{2w(\tau,\sigma)}$ の factor の 2 乗が出てきますね。それで squareroot をとっていますのでこの factor の 1 乗が出てきます。一方 (26) には逆行列 $g^{\alpha\beta}$ があるのでその 1 乗を cancel してくれるわけです。この変換のことを Weyl 変換と言います。

- $g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \to e^{2w(\tau,\sigma)} g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ の変換で不変 $\longrightarrow$Weyl 不変

これがこの action を考える上で本質的に重要な性質です。

2.1.3 運動方程式

それでこの Polyakov action が Nambu-Goto action と一緒だということをさらっと言いたいと思うのですが、そのために Polyakov action の運動方程式を、えーと、運動方程式をこれから EOM と書きますが、equation of motion です。この $g_{\alpha\beta}$ っていうのは補助場なのでこの人の運動方程式を解いて $g_{\alpha\beta}$ を消去してしまうことができて、消去すると (21) の action と等しくなるという道筋で行きたいんですけど。

Polyakov action で $g_{\alpha\beta}$ に関する変分をとってみる。ここで便利な公式があって、この $\sqrt{-g}$ というのの変分は

公式

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{28}$$

こんなふうに書けます。下付きの $g_{\alpha\beta}$ で変分してもいいんですが、上付きの $g^{\alpha\beta}$ で変分した式を書いておきます。まあどっちでやってもよいですが。この公式を使わせて貰って (26) の変分を計算してやるとこれもすぐに分かることで、この $\sqrt{-g}$ の中に入ってる determinant の g ともろに入ってる $g^{\alpha\beta}$ の両方で変分するのですが、どっちもこの $\sqrt{-g}$ の factor があるので、これでくくることができます。まずあらわに出てる $g^{\alpha\beta}$ で変分した項から $h_{\alpha\beta}$ が出てきますね。それで次に $\sqrt{-g}$ で変分した項からこの $\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}$ が出てきて、

$$\frac{\delta S_P}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\frac{T}{2}\sqrt{-g}\left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta})g_{\alpha\beta}\right) = 0 \tag{29}$$

まあこうなるかな。で運動方程式ってこれで変分して 0 になりなさいっていう条件ですね。

$$\Rightarrow h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta})g_{\alpha\beta} \tag{30}$$

これ両辺 det とって root とるとどうなるかというと、こっから $\sqrt{-\det h_{\alpha\beta}}$ というのを計算すると、$\frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta})$ の factor は det をとると 2 乗が出てきて、さらに root をとるとそのまま出てきて、

$$\sqrt{-\det h_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta})\sqrt{-g} \tag{31}$$

こうなりますかね。(31) の右辺はまさに (26) の中身で、この左辺はまさに (21) の Nambu-Goto action に入ってますね。だからこっからすぐに Nambu-Goto action と Polyakov action が、この g に関する運動方程式を使って、g を消去してやるとこれが等しいってことが示せる。

$$S_{NG} = S_P \tag{32}$$

で、ついでにあの、後で X^M に関する運動方程式も使うのでここで書いておきます。

$$\frac{\delta S_P}{\delta X_M} = T\partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^M) = 0 \tag{33}$$

ちょっと後で出てくるので、(29) を①と書いて (33) を②と書いておくことにしますか。まあ細かいことはいいや。

$$\begin{cases} ① \ \ h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(g^{\gamma\delta}h_{\gamma\delta})g_{\alpha\beta} = 0 \\ ② \ \ \partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^M) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

2.1.4 Light-cone gauge

それでこれからこの Polyakov action の方を主に使いたいのですが、この system を何とか量子化したい。その 1 番簡単な方法が light-cone gauge と呼ばれる gauge なんですが。えーと、もっと美しい方法は色々あるんですけど、ちょっと時間の都合で、そんなに美しくないけど 1 番簡単に手っとり早く答えに到達できる gauge として light-cone gauge というのを使います。

何かというとさっきのこの τ と σ の座標の reparameterization invariance 座標変換と、あららら、字が変だ。まあいいや。許して。座標変換とあと Weyl 変換というのがありますね。Weyl 変換を何か使ってこの action をできるだけ簡単な形にします。

$$\begin{cases} ⓐ X^+(\tau,\sigma) = \tau \\ ⓑ \partial_\sigma g_{\sigma\sigma} = 0 \\ ⓒ g = (\det g_{\alpha\beta}) = -1 \\ ⓓ \ g_{\tau\sigma}|_{\sigma=0} = 0, \qquad\qquad (g_{\tau\sigma} = g_{01}) \end{cases} \tag{35}$$

えっとまず $X^\pm$ というのを、ここらへんに書いておこう。

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1) \tag{36}$$

$X^\pm$ というのをこういう風にとることにして、その X^+ が本来 τ と σ に依存する場だったはずなんですが、これが τ である ((35)ⓐ)。えーとそれで。この $g_{\alpha\beta}$ と書いたこの場。この α,β って 0 と 1 を走る足ですが、分かりやすいように σ^1 方向は、τ,σ で言えば σ に対応する方向だったので、σ という添字を持っているものとします。わかってもらえますよね。これ、$\frac{\partial}{\partial\sigma^1}g_{11} = 0$ と書いてもいいんですが。それをちょっと簡単に書いたものです ((35)ⓑ)。で、3 番目として、こう g というのはもちろん $\det g_{\alpha\beta}$ のことですが、これが -1 になる ((35)ⓒ)。で、最後がえっと $g_{\alpha\beta}$ の $\tau\sigma$ 成分、これ 01 成分です。τ が 0 方向で σ が 1 方向ですね。これの $\sigma = 0$ が 0 と。こうなんか書いておきますか ((35)ⓓ)。(35) のⓐ∼ⓓのようにすることができる。これ簡単に、よいしょと示すことができる。これ Polchinski の教科書に書いてある議論なので見たことある人も多いと思いますが。

$\star$ gauge 固定

まず τ をⓐのようにとる。座標のとり方はどうとってもいいと言ったので、もう X^+ を τ とおいてしまう。

で、次にⓑ, ⓒのようにとりたいんですが、そのために f というのを

$$f(\tau,\sigma) \equiv \frac{g_{\sigma\sigma}}{\sqrt{-g}} \tag{37}$$

とおく。で、τ は固定してしまったのでそのままにして、σ を何か τ と σ の関数 σ' と、

$$(\tau,\sigma) \mapsto (\tau,\sigma'(\tau,\sigma)) \tag{38}$$

なる変換を考えます。この変換で、(37) の f がどういうふうに振る舞うかというのがすぐ分かって、これ f というのが、

$$f \mapsto f' = \frac{d\sigma}{d\sigma'} f \tag{39}$$

のように変換することが大体分かりますよね。σ の座標変換でえっと (37) の $g_{\sigma\sigma}$ から σ が 2 つあるので、σ の微分が 2 つ出てきて、det はその root をとっているのでその 1 個を cancel して 1 個しか残らない。そうすると (37) の f っていうのを何とか σ に依存しないようにしたいんですが。そうすればⓑが言える。f が σ に依らないようにするには、具体的にはこう σ' っていうのを何かこれ σ と τ に依存していいんですが、例えば

$$\sigma' = \frac{1}{k(\tau)} \int_0^{\sigma} d\tilde{\sigma} f(\tilde{\sigma},\tau) \tag{40}$$

何かこういうふうに選んでおけば (40) を σ 微分すると単に (40) の f が落ちてくるだけですね。で、(39) の微分は逆数なので (39) の f と cancel して、(39) の f' っていうのは単に (40) の $k(\tau)$ ですね。

$$f'(\tau,\sigma') = k(\tau) \tag{41}$$

まあ重要なことは、(41) は σ' によらない。

それでここまでいって、Weyl 変換の不変性を使う。(37) は分母と分子で同じ factor が出てくるので、(37) の f は Weyl 不変であると。一方 (37) の g っていうのは Weyl 変換で変換する。g というのは Weyl 変換すると

$$g \to e^{4w} g \tag{42}$$

となりますか。なのでこの w という Weyl 変換の自由度を使って、その g というのを -1 に固定できる。これでⓒと書いたこの条件は書けますね。それで、この f が Weyl 不変であるという事実と f の定義 (37) を組み合わせると、$g_{\sigma\sigma}$ が σ によらないというこのⓑの性質が言えたことになります。

あと何だろ、これか。最後にこのⓓですか。まだ σ の座標変換で、(38) の座標変換って σ で微分したものしか効いてないので σ に依存しないような座標変換はまだ使ってないですね。だからこの σ というのを σ 足す何か τ にしかよらない、σ 微分すると消えるような、

$$\sigma \mapsto \sigma' = \sigma + \alpha(\tau) \tag{43}$$

σをこうするような変換を考える。この座標変換では、$g_{\tau\sigma}$ってのは、

$$g_{\tau\sigma} = g_{\tau\sigma'} + g_{\sigma'\sigma'}\frac{d\alpha}{d\tau} \tag{44}$$

こういう変換をします。で、このさっきⓑで言ったことは、この人 ((44) の $g_{\sigma'\sigma'}$) が σによらないということを言ったので、これ合わせて (44) の第 2 項はσによらないんですが、で、σによらないので、なんか全体、(44) の $g_{\tau\sigma}$ をべったり 0 にすることはできないけども、$\sigma=0$での値を調節することはできますね。言いたかったのは (35) のⓓというのが実現できる。もう 1 回言いますと、(44) の α を適当に調節して (44) の $g_{\tau\sigma}$ を何とか 0 にしたいと思うわけですが、この人 ((44) の第 2 項)って σによらないので、$g_{\tau\sigma}$ を全部、あらゆるσの値で 0 にすることはできないんだけど、えっと、このⓓっていうのは $\sigma=0$だけの点を考えているので、$\sigma=0$での値をずらすっていうことは σ に依存しないこの関数 ((44) の第 2 項) を使ってできるわけですね。

で、これで説明終わり。(35) のⓐ,ⓑ,ⓒ,ⓓを全部満たすような gaugeがとれる。で、なんでこんな奇妙なことをするのかと思われるかもしれないですけど、おいおいわかってくると思うので、まあそういう条件があるんだと今は思って下さい。

えっと注意点ですが、(43) の α と書いたこの人。これって α の微分でしか入っていないので、この αが constant である場合ってのはまだ固定してない。これに関しては後で。後でどういう形で固定するか言います。

それで、今こういう条件を課したんですけど、特に $\det g_{\alpha\beta} = -1$っていう条件から、この metric の形がちょっと簡単になって、特に逆行列は実は、

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -g_{\sigma\sigma} & g_{\sigma\tau} \\ g_{\sigma\tau} & g_{\sigma\sigma}^{-1}(1-g_{\tau\sigma}^2) \end{pmatrix} \tag{45}$$

こうなります。

$\star$ 運動方程式

それで運動方程式がどうなるか、(34) の運動方程式がこの metric の light-cone gauge の条件を使うとどうなるかを見ていくと、これはちょっといいですね。この (34) の②の運動方程式を使うと、えっとそれで特にあの、この Mって添字なんでもよかったんですけど、今 light-cone gaugeでよく使われるプラス・マイナスっていう notation を見ると、例えば $M=+$ ととると、この $X^+ = \tau$だったので、②の式で X^Mっていうのを $+$にとると、τ 微分しか残らなくて、

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\tau}\right) = 0 \tag{46}$$

こうなりますね。それであのこの gっていうのは $\det g = -1$ になるように仕組んでしまったので、この式の $\sqrt{-g}$ はもう必要ないですね。で、結局これが言える。

$$\partial_\alpha g^{\alpha\tau} = 0 \tag{47}$$

で、(47)って丁寧に書くと、

$$\partial_\alpha g^{\alpha\tau} = \partial_\tau g^{\tau\tau} + \partial_\sigma g^{\sigma\tau} = 0 \tag{48}$$

となりますね。(45) の行列の形を使うと、

$$\Leftrightarrow \partial_\tau g_{\sigma\sigma} = \partial_\sigma g_{\sigma\tau} \tag{49}$$

結局こうなるかな。

それで $g_{\sigma\sigma}$ が σ に依存しないっていう (35) のⓑの性質を使うと、(49) を σ 微分してやると $g_{\sigma\tau}$ の σ に関する 2 階微分が 0 ということになりますね。

$$\partial_\sigma^2 g_{\sigma\tau} = 0 \tag{50}$$

それで $g_{\sigma\tau}$ の 2 階微分が 0 ということは、これって constant と σ に比例するこういう項が、

$$g_{\sigma\tau} \sim c_1 + c_2\sigma \tag{51}$$

こういう形がありえるということになりますが、σ に関する周期性がありますよね。σ が $\sigma + 2\pi$ で同一視されてる性質があったので、(51) がちゃんと周期的になってるか見ると、σ に比例する項はあっちゃいけないですね。一方、この $g_{\tau\sigma}$ というのは $\sigma = 0$ で 0 になってなさいという条件ⓓを課すと、この人 ((51) の第 1 項) はあっちゃいけないですね。だから結局これって $g_{\sigma\tau}$ は 0 だと。

$$\Rightarrow g_{\sigma\tau} = 0 \tag{52}$$

で、これを使うと (49) から、結局この $g_{\sigma\sigma}$ ってのは constant。

$$\Rightarrow g_{\sigma\sigma} : \text{constant} \tag{53}$$

(49) は、右辺が 0 だと、$g_{\sigma\sigma}$ は τ によらないって式になりますね。あと σ によらないってのはさっきやったⓑになりますけど。

まあこういう簡単化 (52,53) が分かる。それで、constant なので $g_{\sigma\sigma} = c^{-1}$ と書きます。c ってのは constant。そうすると、今これがすごい簡単な metric になって、

$$\begin{gathered} g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^{-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \\ c^{-1} = g_{\sigma\sigma} : \text{constant} \end{gathered} \tag{54}$$

となっています。

で、特に例えば運動方程式。(34) の②の運動方程式は、こういう簡単な式になりますね。

$$②' \ \partial_\tau^2 X^M - c^2 \partial_\sigma^2 X^M = 0 \tag{55}$$

これを ②$'$ と書きましょう。

一方この①と書いたもの。この式が、えっとどうなるかというと、

$$h_{\sigma\tau} = 0 \tag{56}$$

$$h_{\tau\tau} = \frac{1}{2}(-c^{-1}h_{\tau\tau} + ch_{\sigma\sigma})(-c) \tag{57}$$

$$h_{\sigma\sigma} = \frac{1}{2}(-c^{-1}h_{\tau\tau} + ch_{\sigma\sigma})c^{-1} \tag{58}$$

gって対角的だったので、非対角的要素は基本的に 0 ですね (56)。それとあと $\tau\tau$ 成分を見てやるとどうなるかというと、(54) の metric を入れてやれば OK ですが、えっと (57) のようになって、あと、$\sigma\sigma$ 成分も同様に (58) のようになります。こういう 3 つの式が立ちます。で、この式 (57) と式 (58) は実は等価であることがすぐ言えて、これはちょっと整理すると、

$$h_{\tau\tau} + c^2 h_{\sigma\sigma} = 0 \tag{59}$$

こういう式になりますね。で、(56) をちょっとじゃあⓘとして、(59) をⓘⓘとします。

$$\begin{cases} \text{ⓘ} \quad h_{\sigma\tau} = 0 \\ \text{ⓘⓘ} \quad h_{\tau\tau} + c^2 h_{\sigma\sigma} = 0 \end{cases} \tag{60}$$

それでこの h の形ですが、新しい座標 $X^{\pm}$ を導入したのでこれがどうなるかを書いておきますと、

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \eta_{MN} \\ &= -\partial_\alpha X^+ \partial_\beta X^- - \partial_\alpha X^- \partial_\beta X^+ + \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^i \end{aligned} \tag{61}$$

この i と書いたのは $2 \sim D-1$。で、この X^+っていうのは今や τ である。light-cone gauge なので τ になります。例えば第 2 項は、この β 微分がもし τ 微分であれば 1 になって σ 微分であれば落ちるという構造になってます。それでちょっと h の話に戻って

$$\begin{cases} h_{\sigma\tau} = -\partial_\sigma X^- + \partial_\sigma X^i \partial_\tau X^i \\ h_{\sigma\sigma} = (\partial_\sigma X^i)^2 \\ h_{\tau\tau} = -2\partial_\tau X^- + (\partial_\tau X^i)^2 \end{cases} \tag{62}$$

こういう、自分で代入してみればすぐ分かると思います。それでこの式を使ってまとめてやると、さっきここでⓘとⓘⓘって書いた式っていうのは、えっと非常に綺麗にまとまって、

$$\text{ⓘ}, \text{ⓘⓘ} \Leftrightarrow \partial_\pm X^- = (\partial_\pm X^i)^2 \tag{63}$$

となります。この $\partial_\pm$っていうのは

$$\partial_\pm \equiv \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm c\partial_\sigma) \tag{64}$$

と定義します。

ちなみに②の運動方程式も実は簡単で、②′か。

$$②' \Leftrightarrow \partial_+\partial_- X^M = 0 \tag{65}$$

だから①、②と書いた (34) の運動方程式は実はすごい簡単なこんな綺麗な 2 つの式 (63),(65) に帰着されてます。で、そうすると運動方程式を解くことはすごい簡単になって、まずこのどうしようかな。

えっとこの (65) の一般解。どうなるかと書きますと

$$X^M(\tau,\sigma) = x^M + \alpha' p^M c\tau + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \sum_{m\neq 0} \frac{1}{m}\left(\alpha_m^M e^{-im(c\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_m^M e^{-im(c\tau+\sigma)}\right) \tag{66}$$

となります。あの、いつのまにか X が大文字になってますね。あ、最初からやってたっけ? この大文字で書いた X^M は σ と τ の関数なのでそう思って下さい。この小文字で書いた x^M は constant で、σ にも τ にもよらないようなやつだと思って下さい。

で、この constant term があって、次はこの τ に比例する項、何でもいいですけど、実は後でこれ momentum だと解釈されるので p^M と書いておきます。で、momentum だと、X^M って座標なので長さの次元を持っていて欲しいので、次元を合わせるために α' って書いておいて、ここにこそっと c っていうのを入れておいて、c ってさっき metric に出てきた constant。まあこういう linear な term はもちろん運動方程式を変えなくて、それでそれを加えて一般解は (66) のようになります。

えっとこの α って書いたのと $\tilde{\alpha}$ と書いた、ちょっと薄くて見えないかな、後ろの方見えます？大丈夫ですか。これは単なる定数です。で、この定数がどんな値をとってもこれは解である。で、何かごちゃごちゃ入ってますが、$\frac{\alpha'}{2}$ とか i とか入ってるけど、何だろこれは、単に次元を合わせるために入れたと思って下さい。

それで何がいえるのかな。あと、これ X^M が real であるために、これ座標なので実 parameter で表します。

$$X^M : \text{real} \qquad \Rightarrow \alpha_m^\dagger = \alpha_{-m}, \quad \tilde{\alpha}_m^\dagger = \tilde{\alpha}_{-m} \tag{67}$$

この α_m とか $\tilde{\alpha}_m$ とかいうのはえっと $\dagger$ をとると、添字の符号が逆になるという、こういうものですね。それで (66) の i は (67) になるように、こそっとつけた。これだけでいいかな。それからこの $\frac{1}{m}$ は単なる convention だと思って下さい。(66) は解になってるのは一目瞭然だってのはいいですか。(65) は ∂_+ と ∂_- の両方がかかっているので、なんだろ。まあ分かりますか。τ と σ が $c\tau \pm \sigma$ って形で入ってますね、(66) の最後の 2 つの項って。$c\tau + \sigma$ に関する微分とか $c\tau - \sigma$ に関する微分とかっていうのはちょうどこの ∂_+ と ∂_- に対応していて、第 3 項は $-$ の方にだけ依存していて第 4 項は $+$ の方にだけ依存しているというので、$+$ と $-$ の両方で微分すると 0 になります。いいですか。これが解になってます。それであの exp になってるのは σ が 2π 周期になることを再現するようになってます。

ほんでですね、(63) からすぐに言えることは、p^- とか α_m^-、$\tilde{\alpha}_m^-$ は X^i の自由度で書ける。基本的に忘れてしまっていい。だから独立な自由度ってのは、結局この iっていう添字を持ったやつ α_m^i、$\tilde{\alpha}_m^i$、x^i と、ここは p^i と、あとはこの X^- の constant term はこの (63) の式では落ちてしまうので x^- と、あと cっていうのがまだ自由に選ばれていたので独立な自由度を持ってます。

で、次に量子化に向かって進んで行きたいので、正準運動量を求めておくと。これは action を、X^M の τ 微分を $\dot{X}^M$ で表すことにして、$\dot{X}^M$ で微分したもの。

$$\begin{aligned} P^M &= \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_M} \\ &= -T\sqrt{-g}g^{\tau\alpha}\partial_\alpha X^M \\ &= Tc^{-1}\partial_\tau X^M \end{aligned} \tag{68}$$

いいですか。さっき言ったように $\sqrt{-g} = 1$ でしたね。添字 α は τ の場合のみ残ってますので、$g^{\tau\tau} = -c^{-1}$ を使って消すと、(68) になります。

そうするとこの M というのを $+$ にとるとすぐ分かることは、$M = +$ のとき、$X^+ = \tau$ より、

$$P^+ = Tc^{-1} = \frac{1}{2\pi}p^+, \qquad \left(p^+ \equiv \frac{1}{\alpha' c}\right) \tag{69}$$

この $+$ の momentumっていうのは、$X^+ = \tau$ だったので Tc^{-1} となります。で、これ小文字の p^+ とします。あの $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ なので、p^+っていうのは $\frac{1}{\alpha' c}$ とおきます。

それで、この M が i の、iってのは $2 \sim D-1$ まで走る添字ですが、その成分だったときにどうなるかというと、これは (68) に書いた P^i に (66) のモード展開の式を代入してやると、えーっと、

$$\begin{aligned} P^i &= Tc^{-1}\partial_\tau X^i \\ &= \frac{1}{2\pi}p^i + \frac{1}{2\pi\sqrt{2\alpha'}}\sum_{m\neq 0}\left(\alpha_m^i e^{-im(c\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_m^i e^{-im(c\tau+\sigma)}\right) \end{aligned} \tag{70}$$

これが momentum ですね。それで momentum が一旦書けてしまうと、同時刻交換関係を設定して量子化するわけですね。普通の量子化の手続き。

$$[X^i(\tau,\sigma), P^j(\tau,\sigma')] = i\delta^{ij}\delta(\sigma-\sigma') \tag{71}$$

(66) と (70) を (71) に代入してすぐばらしてやれば、出てくる結果をここで書くと、x^i と p^j は共役になるような量で、

$$\Rightarrow [x^i, p^j] = i\delta^{ij} \tag{72}$$

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \tag{73}$$

$$[\tilde{\alpha}_m^i, \tilde{\alpha}_n^j] = m\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \tag{74}$$

となる。

さっき、独立な自由度として x^- と c があると言ったんですが、この c っていうのはもはや p^+ と関係付いていて、基本的に c で考えてもいいし、p^+ で考えてもいい。で、量子化するときには x^- と p^+ が partner となっていて、これ (72) で添字を $\pm$ にしたのと同じ形です。

$$[x^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i \tag{75}$$

で、結局これだけの交換関係が出てくるんです。

それで momentum のもう 1 つのかたわれ p^- ですが、えっと今ここで言ったのは、p^+ と p^i は独立な自由度ですが、p^- は X^i 達の oscillator で書ける。X^i に出てくる係数で書けると言ったわけですが、それは (63) を使って、具体的に (66) を (63) に代入して、p^- に当たる成分を求めてやればいいんですけど、ちょっと時間がないので答えだけ書くと、これは、

$$\Rightarrow p^- = \frac{1}{2p^+}\left((p^i)^2 + \frac{1}{\alpha'}\sum_{m\neq 0}\left(\tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m + \alpha^i_{-m}\alpha^i_m\right)\right) \tag{76}$$

こう書けます。えっとこれ、まあ (63) に代入してちょっと確かめて下さい。(66) を (63) に代入して p^- がどう表せるか。で、m^2 ってのは $-p_M p^M$ だったことを思い出すと、これって今の $+-$ を使って書くと、

$$m^2 = -p_M p^M = 2p^+p^- - (p^i)^2 \tag{77}$$

という形になってます。で、これで (76) を使うと、これって何かいかにも $2p^+$ をかけて $(p^i)^2$ を移項してやれば、

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{m\neq 0}\left(\tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m + \alpha^i_{-m}\alpha^i_m\right) \tag{78}$$

こうなります。

2.1.5 physical states

で、これで大体 operator はどういうものが登場するか、で、交換関係がどうなるかを言ったので、あとは state をどうやって構成するかというのは普通の場の理論の手続きに従ってやります。で、physical state はまず momentum の固有状態を、

$$|k\rangle \tag{79}$$

と持ってきます。それでこの交換関係

$$[\alpha^i_m, \alpha^j_n] = m\delta^{ij}\delta_{m+n,0} \tag{80}$$

をよく見ると、これって、調和振動子の a と $a^\dagger$ っていう operator を使ったこういう

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{81}$$

のを思い出すと、これって a の方が消滅演算子で $a^\dagger$ の方が生成演算子でしたね。この式によく似ている。(80) の右辺の係数 m が正だったら、normalization は operator の α に押しつけてやれば、この係数を 1 にするのは簡単ですね。α を $\sqrt{m}$ で割ってやればいいだけですね。だから m が正か負かってのが関係あって、m が正だったら α^i_m がちょうど消滅演算子で α^i_{-m} が生成演算子という役割をしていて、このことから、α_m の m が正のやつが消滅演算子で、α_{-m} の m が正のやつは生成演算子ということになります。

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_m, & m > 0 \quad \text{消滅演算子} \\ \alpha_{-m}, & m > 0 \quad \text{生成演算子} \end{cases} \tag{82}$$

こういう関係があることを見出すと、これで真空状態を作ってやろうとすると、消滅演算子で消える状態が真空ですね。で、そういう状態を用意しておきます。

$$\begin{cases} \alpha_m \left|k\right\rangle = 0 \\ \tilde{\alpha}_m \left|k\right\rangle = 0 \end{cases} \qquad m > 0 \tag{83}$$

一旦こういう状態を用意しておいて、後は $\left|k\right\rangle$ に、あの、下の添字が負であるようなもの、$\alpha^i_{-m}, \tilde{\alpha}^i_{-m} (m > 0)$ をかけていくことで state を構成する。普通の調和振動子の時の作り方を思い出して頂ければ、その調和振動子が無限個いっぱいあるような系だと思って下さい。それで $\alpha^i_{-m}, \tilde{\alpha}^i_{-m}$ の m が正というのは生成演算子だと思って、そうすると無限個生成演算子があるわけだけれども、これをどんどんかけていくことで state を構成する。bosonic string の量子化だけは終わらなきゃいけないので、ちょっと急ぎます。それであの、ただし 1 つだけ条件をつけます。N って operator を次のように定義して、で、$\tilde{N}$ ってのも同様に今度は $\tilde{\alpha}$ を使って、

$$N \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^i_{-m}\alpha^i_m, \qquad \tilde{N} \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m \tag{84}$$

こう作ったものを用意します。ここで physical state に対する条件として、

$$(N - \tilde{N}) \left|\mathrm{phys}\right\rangle = 0 \tag{85}$$

こういう条件を課します。$\left|\mathrm{phys}\right\rangle$ は pysical state です。で、この式は level matching condition と呼ばれています。で、なんでこういう条件を課すかというのを言わないと納得してもらえないと思うので、ちょっと言います。

えーと、せつめい。実はこの $N - \tilde{N}$ というのは σ を constant shift する generator です。これさっきの交換関係 (80) を使ってやるとすぐに分かることは、この N と

αの交換関係をとってやると、$\tilde{N}$と$\tilde{\alpha}$の交換関係も同様ですが、次のようになる。

$$[N, \alpha^i_m] = -m\alpha^i_m \tag{86}$$
$$[\tilde{N}, \tilde{\alpha}^i_m] = -m\tilde{\alpha}^i_m \tag{87}$$

こうなります。これってすごく覚えやすくて、Nってのはα^i_mに書いてある添字mを-1倍して数えるoperatorという言い方ができます。で、この交換関係を知ってると、さっき出てきたXってやつ、X^iの展開式で、αとか$\tilde{\alpha}$とか書いた式(66)がありましたね。それをこの$N-\tilde{N}$というoperatorを使って回してやることを考えると。例えばこういう操作

$$e^{i\alpha(N-\tilde{N})}X^i(\tau,\sigma)e^{-i\alpha(N-\tilde{N})} = X^i(\tau,\sigma+\alpha) \tag{88}$$

をしてやると。実際、(86,87)の交換関係を使ってこれを調べてみると、σがαだけshiftしていることがわかります。

だからさっきちらっと注意したσをconstant shiftするsymmetryは、まだlight-cone gaugeをとった段階では固定されて無かったんですが、それをこの段階で固定しようと。stateに(85)の条件を課すことで固定しよう、ということです。まあもうちょっと物理的な言い方をすると、物理はσの原点のとり方によらないということを要請する、ことになってます。

これでstateの作り方は終わりにして、とにかくmomentumの固有状態で消滅operatorみたいなもので消える、そういう真空状態みたいな$|k\rangle$を持ってきて、それに$\alpha^i_{-m}, \tilde{\alpha}^i_{-n} (m, n > 0)$をかけなさい。ただしこの$\alpha$と$\tilde{\alpha}$の添字の数を足し上げると等しい数になりなさい、そういう条件を付けます。

あと具体例だけやって終わりにしますね。その、すごい形式的なことばっかりやって申し訳ないんですが、まあ1度は通らないといけないことなんで。

えっとそれで、あっ、もう1つ言わなきゃいけないことが。mass、これ、今日出てきたなかで一番深遠な式ですね。

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n\neq 0}\left(\tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n + \alpha^i_{-n}\alpha^i_n\right) \tag{89}$$

これって(84)のNと$\tilde{N}$によく似た形になっていますが、nが正の部分と負の部分、両方走ってます。で、これ、$\tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n$の添字が負の部分っていうのは$n$が正か負かで逆転します($\alpha^i_{-n}\alpha^i_n$についても同じ)が、この順番は交換関係を使って入れ替えることができます。それをやった式を書きますと、何かこうなる。

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{\alpha'}\sum_{n\neq 0}\left(\tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n + \alpha^i_{-n}\alpha^i_n\right) \\ &= \frac{2}{\alpha'}\left(\tilde{N} + N + (D-2)\sum_{n=1}^{\infty} n\right) \end{aligned} \tag{90}$$

いいですか。その順番を入れ替える、例えば $\alpha^i_{-n}\alpha^i_n$ の n が負になった場合、交換させて順番を入れ替えるとこう

$$[\alpha^i_n, \alpha^j_{-n}] = n\delta^{ij}$$

n というのが出てきて、この n に関する足し上げが出てきます。で、これ足し上げたら発散してますよね。見るからに発散しているんですが、ちょっとここでごまかしてインチキをして。

ζ 関数正則化と呼ばれているものがあって。えっと、ζ 関数って何だったかって言うと、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{91}$$

こういうものです。で、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1)$$

こうだと思います。この ζ 関数っていうのは s が、どこでだっけ？とにかく収束性がいいところではこの式として定義できるんですが、これ解析接続することができて、複素関数だと思って解析接続していくと実は $s = -1$ でも値を持つことが知られています。これ、岩波数学公式集を見ると実は $-\frac{1}{12}$。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12} \tag{92}$$

えー、どう思います？えっと。それでちょっとあー、どうしよう。まずちょっとcomment しなきゃいけないのは、string 理論はこういうインチキを使って作られている理論では決してなくて、ちゃんとした量子化の仕方があってちゃんとした議論があるんですが、これはなぜか正しい答えに到達する簡便法みたいなもので、これを使うととにかく正しい答えは出ます。で、これあんまり真剣に捉えないで、何で正のものを足して負になるのかとか、なんで有限になるのかとか、考え出すと切りがないので...

（質問）α に繰り込まれてるとかってことではないんですか。

そうです、繰り込みをするんです。発散を cancel させて、それでその値がどういう値のときに理論が consistent になるかを調べていくと、この値が出るんです。そういうことだと思って下さい。それを使うと、この $\sum n$ が $-\frac{1}{12}$ で。

で、実はちゃんとした議論をやってる時間はないんですが、この bosonic string では、$D = 26$ の時にのみちゃんとまともな理論になることが知られています。例えば途中で使った Weyl 変換に対する不変性が、anomaly を出さずに量子論的にも symmetry であるためにはこの条件が必要だという言い方もあったり、あとこの light-cone gauge の言い方であればよく言われるのは、一見 light-cone gaugeって

表 1: physical state の例

states	$(\text{mass})^2$				
$\lvert k\rangle$	$m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$	$\longrightarrow$	closed tachyon		
				massless	
$\alpha^i_{-1}\tilde{\alpha}^j_{-1}\lvert k\rangle$	$m^2 = 0$	$\longrightarrow$	ϕ	g_{ij}	B_{ij}
			trace	対称 traceless	反対称
			dilaton	graviton	反対称 tensor 場
$\alpha^i_{-2}\tilde{\alpha}^j_{-1}\tilde{\alpha}^k_{-1}\lvert k\rangle$ など	$m^2 > 0$	$\longrightarrow$	massive		

のは Lorentz symmetry が manifest に見えないような、そういう gauge をとったわけですけど、それは gauge のとり方であって、本当は Lorentz symmetry があるわけですね。その Lorentz symmetry がちゃんとこうほんとにあるかというのを量子化した段階で調べるということをしていて、それがちゃんと回復する次元ってのを調べてみるとちょうど $D = 26$ ということも言えます。これをちょっと使わせて下さい。これを使うと、$\sum n$ が $-\frac{1}{12}$ だというのも使って、さっきの level matching condition (85) から $N = \tilde{N}$ なので、mass squared (90)ってのは結局こうなります。

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-1) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N}-1) \tag{93}$$

あとちょっと、具体例をやりたいんですけれど。あと 5 分いいですかね。(92) を見たときに 2 通りの反応があって、なんて素敵な関係式だって言う人となんていい加減なものなんだって言う人と。まあ慣れてくるとすごい素敵な関係式に見えてきますから。

具体例だけやって今日はおしまいにします (表 1 参照)。どんな physical state があるのかというのを理解しておかなければいけないので、$(\text{mass})^2$っていうのを表 1 に書いておきます。まず真空として用意した momentum の固有状態 $\lvert k\rangle$ ですね。この固有状態は、さっきの mass の公式 (93) によると、N とか $\tilde{N}$ とかっていうのが 0 の state で、$\lvert k\rangle$ の mass squared は負なので、今 closed string を考えているので closed string tachyon。

それで生成演算子を $\lvert k\rangle$ にかけていくわけですけども、次に 1 番 mass が低くなるのは -1 の時です。[1]

$$\alpha^i_{-1}\tilde{\alpha}^j_{-1}\lvert k\rangle$$

Nってのは生成演算子の添字を勘定する operator なので、今これは $N = 1$。だから $N = 1$ を代入してやると mass squaredってのは、0、massless。それで massless なんだけれども、$\alpha^i_{-1}\tilde{\alpha}^j_{-1}\lvert k\rangle$ の i と jって足がいっぱい走るので、その i と j の足に関して対称な部分と反対称な部分と trace part に分けて書いて、ϕ を trace part、

[1] physical state なので (85) 式 level matching condition を満たす。

g_{ij} を対称で traceless、B_{ij} を反対称の部分とします。最初の overview で出てきた dilaton 場ってのは実は ϕ です。この g_{ij} ってのは graviton、重力場、metric になります。で、この B_{ij} って書いたのは今日の overview でも出てきた反対称 tensor 場。

あともっとどんどんばしばし operator をかけていけば、例えば、-2 というのを付けてもいいし -1 というのを 2 つつけてもいいし。だから

$$\alpha^i_{-2}\tilde{\alpha}^j_{-1}\tilde{\alpha}^k_{-1}|k\rangle$$

のような state を作ってもいいですね (表 1 の一番下の行)。などなど。これはもはや、この場合は $N=2$ ですね。$\tilde{\alpha}$ と α で、下付添字の数が等しくなるようにしなさい、ってのが level matching condition (85) でしたね。こいつらみんな massive になります。典型的にはこの $\frac{1}{\alpha'}$ という factor をつけて mass を求めます。今の例で 1 つ tachyon が出てきたんですけど、これ closed string tachyon って言います。実は closed string tachyon って未だに謎でして、この tachyon があることで理論が破綻するわけでは無いんだけど、正しい真空を見つけてそこで理論を展開する必要がある。その正しい真空がどこにあるかって未だに誰も、あの色々議論はあるんですけど、誰もが納得する答えってのはまだ得られてない。これはもう大問題で解決しなきゃいけないですが、今回僕が話したいのは open string、superstring における open string の tachyon の話でして、この closed string tachyon の難しい話はちょっとできないですが、まあそういう問題も起こっているということもちょっと触れておきます。

まぁ、ちょっと over しちゃいましたが。

(1 日目終了)
(2 日目)

2.1.6 ふくしう

昨日は話が進まなかったのでちょっと速くなると思いますが許して下さい。ちょっと昨日の復習をしますと、bosonic string で light-cone gauge というのをとりました。bosonic string の 2 次元の world-sheet の action は、

$$S=-\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^M\partial_\beta X_M \tag{94}$$

こんな感じでしたね。light-cone gauge というのは $X^+=\tau$ とおいて $g_{\alpha\beta}$ に対していろんな条件を置いたわけですね。結局最終的に独立な自由度として残ったのは X^i と書いたものだけで、基本的に物理的な自由度を考えるときには $X^\pm$ の自由度は忘れてよいということになりました。X^+ は τ だし、X^- のほうは X^i 達で書けるので、X^i だけでよい。i って書いたのは $\pm$ 以外のところで、$2\sim D-1$ を走る。

で、昨日出てきた X^i に関する運動方程式ですが、light-cone gauge で metric を fix して運動方程式を使ってやると、結局この X^i に対する運動方程式って、

$$(\partial_\tau^2 - c^2\partial_\sigma^2)X^i = 0 \tag{95}$$

こんな式になりました。昨日はこういう式を立てましたが、この $c\tau$ というのを τ と書き直すと、もうちょっと綺麗な式になって、まあ

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^i = 0 \tag{96}$$

こうなりますね。で、(96) の運動方程式を出すとき、最初、出発点を (94) の action にとったんですが、最終的に結局考えるべき自由度はこの X^i だけになったので、X^i に関する (96) の運動方程式を出すような action を書いておくと便利です。それがまあ

$$S = \frac{T}{2}\int d^2\sigma \left((\partial_\tau X^i)^2 - (\partial_\sigma X^i)^2\right) \tag{97}$$

これです。全体の normalization は運動方程式に影響無いですけど一応付けておきます。これで運動方程式を書き下して、その一般解を書き下して、そこで係数で出てくる α と書いたやつと $\tilde{\alpha}$ と書いたやつがあるんですが、これを operator だと思って量子化するわけです。そういうことを昨日やりました。で、今日、superstring に行くんですが、そのときにこれを覚えといて欲しいなと思います。

2.2 Superstring

2.2.1 超対称性

それでこれから superstring の話をしていくんですが、superstring の持っている超対称性っていうのは、world-sheet の超対称性と spacetime の超対称性と、2 つの概念があるんですけど、まずは world-sheet の supersymmetry を話します。

$\star$ 練習

超対称性とは何かということですが、これは昨日の午前中にちょっと言ったことですが、一言で言うなら boson と fermion を入れ替えるような対称性です。それでちょっと練習として、(97) の action で scalar 場が、2 次元の言葉で言うと X^i というのは scalar 場ですが、scalar 場が足が $2 \sim D-1$ まで走るだけ、まあいっぱいあるんですけど、1 個だけ考えた

$$S = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X \partial_\beta X \tag{98}$$

こういう簡単な action を考えましょう。ちょっと、まとめて書いちゃってます。

これは boson しかない system なんですけど、fermion を導入する。fermion として ψ と書きます。で、この ψ というのは、

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \tag{99}$$

という2成分があるんですね。これは2次元のMajorana spinorで、基本的にGrassmann oddな量で、えー、なんだろう、realなGrassmann数と思って下さい。それでこのfermionをどういうふうに入れたらいいかというと、普通のいつもやるγ行列を使って、

$$S = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X \partial_\beta X + i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi\right) \tag{100}$$

というふうに入れます。で、γ行列って、今、具体的に形を書いておくと、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \tag{101}$$

ということにしとけばいいです。

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta} \tag{102}$$

こういう反交換関係を満たします。えーと、それでいいかな？

それで、今何気なく書きましたが、(100) のactionは、次の微小変換

$$\begin{cases} \delta_\epsilon X = \bar{\epsilon}\psi \\ \delta_\epsilon \psi = -i\gamma^\alpha\epsilon\partial_\alpha X \end{cases} \tag{103}$$

で不変です。ϵって書いたのは成分で書くと、

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_- \\ \epsilon_+ \end{pmatrix} \tag{104}$$

で、やっぱりこれもMajorana spinorです。この微小変換で不変。何かこれって普通じゃないですよね。Xってbosonで、それを微小変換するとfermionの成分が出てくる。逆に、fermionの方を微小変換するとXってbosonが出てくる。そういうなんか普通は見ないような変換ですが、こんな変な変換で実際 (100) のactionは不変です。で、これはちょっと暇が無いので宿題。

宿題　　$\delta_\epsilon S = 0$を示せ。

で、こういう対称性、bosonとfermionを入れ替えるような対称性を、supersymmetryと言います。

2.2.2　超弦理論

それで超弦理論ですが、light-cone gaugeでやることにして、(97) のlight-coneのactionを$\eta_{\alpha\beta}$を使ってまとめて書いておくと、

$$S_{LC} = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^i \tag{105}$$

ですが、これをsuper化します。それをやるにはどうすればいいかというと(100)を見ればすぐに分かって、この X^i のpartnerとして ψ^i というのを導入して、

$$S_{LC} = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \left(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^i + i\bar{\psi}^i\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi^i\right) \tag{106}$$

とすればいい。ψ^i っていうのは、全部Majorana spinorですが、(100)に単に添字の i ($2 \sim D-1$ を走る)というのを付けただけ。

これは実はこう書くこともできます。昨日使ったnotationで、

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma) \tag{107}$$

というふうにすると、あと(101)の γ 行列の定義と、(99)の ψ の定義を思い出すと、実は、

$$S_{LC} = T\int d^2\sigma \left(2\partial_+ X^i \partial_- X^i + i(\psi^i_+\partial_-\psi^i_+ + \psi^i_-\partial_+\psi^i_-)\right) \tag{108}$$

こう書けます。これは具体的に行列を使って書き直してやればすぐ分かります。

(108)から運動方程式がすぐに読みとれて、この ψ^i_+ と ψ^i_- に関する運動方程式って、

$$\partial_\mp\psi^i_\pm = 0 \tag{109}$$

となります。ようするに、$\psi^i_\pm$ というのは、$\tau \pm \sigma$ にのみよる。

それで次にモード展開、(109)の一般解をちょっと出したいんですけど、その前に境界条件を設定する必要があります。えーと、superstringでは ψ^i_+ と ψ^i_- の両方に対して境界条件を課すんですけど、とりあえず ψ^i_+ だけを先に言います。ψ^i_+ に関して、これは τ と σ に依存する2次元の場でしたが、σ って 2π 進むとぐるっと回って元の場所に戻ります。で、このときに、普通に元に戻るやつとマイナスが付くやつと2つ考えます。

$$\psi^i_+(\tau, \sigma + 2\pi) = \begin{cases} +\psi^i_+(\tau,\sigma) & \text{Ramond sector (R)} \\ -\psi^i_+(\tau,\sigma) & \text{Neveu Schwarz sector (NS)} \end{cases} \tag{110}$$

fermionって360°ぐるっと回ると負号が出るっていう性質がありましたが、それを思い出すとマイナスを付ける余地があります。で、実は、superstringでは両方考えます。で、このプラスになるやつをRamond sectorと呼んで、このマイナスになるやつをNeveu-Schwarz sectorと言います。よく略すときはRamondをRって書いて、Neveu-SchwarzをNSと書きます。それで ψ^i_+ でやりましたが ψ^i_- も同様です。

そいで、これ2成分 ψ^i_+ と ψ^i_- があったので、それぞれ同じboundary conditionを課すのでなくて、色々な組合せを考えます。両方ともRでやる場合と、両方NS

でやる場合と、R-NS と、NS-R の 4 種類考えます。

ψ_+^i	ψ_-^i	
R	R	$\to$ R-R sector
NS	NS	$\to$ NS-NS sector
R	NS	$\to$ R-NS sector
NS	R	$\to$ NS-R sector

この R と R のやつをよく R-R sector と言って、次を NS-NS sector と言って、まあ後は同じですね。R-NS、NS-R sector。これで境界条件が定まったので、その境界条件と運動方程式を満たす一般解を出す。R の方は、

$$\begin{aligned} \mathrm{R}:\ \psi_-^{\mathrm{i}} &= l_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^i e^{-in(\tau-\sigma)} \\ \psi_+^i &= l_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_n^i e^{-in(\tau+\sigma)} \end{aligned} \tag{111}$$

です。これ normalization は単に convention だと思って下さい。あまり気にしなくてもいい。で、NS のときは、

$$\begin{aligned} \mathrm{NS}:\ \psi_-^i &= l_s \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} b_r^i e^{-ir(\tau-\sigma)} \\ \psi_+^i &= l_s \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} \tilde{b}_r^i e^{-ir(\tau+\sigma)} \end{aligned} \tag{112}$$

となります。label する添字が整数のときが n、半整数のときが r などの記号を使います。係数も記号を変えておきます、これ Green-Schwartz-Witten で使われている notation ですが。(111) のように、整数にしておけば周期的になって、(112) のように、整数 +1/2 にしておくと 2π 回ったときに負号が出るようにちょうどなります。

それで量子化はいつも通りやればよくて、交換関係をいつものように設定します。あ、これ fermion なので交換関係が反交換関係になりますが。

$$\{d_n^i, d_m^j\} = \delta^{ij}\delta_{n+m,0} \tag{113}$$

こういうやつです。あと、$\tilde{d}_n^i, b_r^i, \tilde{b}_r^i$ についても同様。

2.2.3 physical states

これで交換関係が分かったので、後は Fock space というか真空を作って、それにどんどん creation operator をかけていって、昨日やったように state を作ります。これ本当は具体的にやりたかったんですけど、時間の関係で結果だけ。いいですかね。もし気になる人がいたら後で質問して下さい。boson のときと同じようにやります。state を構成すると、どういう state が出てくるかということですが、ちょっと結果だけ言うことにしますと、

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & m^2<0 & & & m^2=0 & & \\
\text{NS-NS} & \to & T & & & \phi, B_{ij}, g_{ij} & & \\
\text{R-R} & \to & \text{いない} & \begin{array}{c} C \\ C_i \end{array} & \begin{array}{c} C_{ij} \\ C_{ijk} \end{array} & \begin{array}{c} C_{ijkl} \\ C_{ijklm} \end{array} & \begin{array}{c} C_{i_1\ldots i_6} \\ C_{i_1\ldots i_7} \end{array} & C_{i_1\ldots i_8}
\end{array}
$$

NS-NS sector から tachyon、つまり $m^2 < 0$ なやつと、あと massless なやつが出ます。で、R-R sector からは実は tachyon なんてなくて、massless なやつが実はいっぱいいます。両方、massive なやつも出ますが、全部忘れることにします。

NS-NS sector は、昨日 bosonic string で出たのと全く同じで、tachyon があって scalar 場があって、2 階反対称 tensor と対称 traceless です。これあの、昨日言ったかな？ ϕって、massless scalar なんですが、これを dilaton と呼んで、あとこの B_{ij}って、よく B 場って呼んだりするんですけど、正式名称があるのかどうかわかりませんけど、よく Kalb-Ramond field と呼んだりもします。で、この g_{ij} っていうのが graviton です。

で、この Cって書いたやつは全部反対称 tensor。足が無いやつから、足が 1 個 2 個 3 個 4 個 $\cdots$ といっぱい書きましたが、全部反対称 tensor です。これらはよく R-R 場と $\cdots$

あ、失礼しました。これを言わなきゃいけないですね。実は superstring というのは、Dが、全体の次元が 10 のときに consistent な理論になります。昨日も bosonic string で次元が 26 になると言ったんですが、それの super の場合で同じような議論をすると、実は 10 次元であることがわかります。これは今日はやる暇が無いので、まあ、そういうもんだと思って下さい。

で、次元が 10 なので反対称 tensor の足の数に限界があるわけです。10 個よりもたくさん足があったら、反対称にしたら添字は 10 個しかとれないので、0 になっちゃって限界があります。で、light-cone gauge をとっていると、この i という添字は 2 ∼ 9 まで 8 個しか走らないので足が 8 個まで。それでこういっぱい反対称 tensor 場があるんですが、全部が独立というわけではなくて、C_{ijkl} は selfdual で、C_{ij} と $C_{i_1\ldots i_6}$、C_{ijk} と C_{ijklm}、C_i と $C_{i_1\ldots i_7}$、C と $C_{i_1\ldots i_8}$、は実は一緒で、これは dual ですね。dual と言っている意味は、今 8 個足は走ると言いましたけど、そうするとこの light-cone gauge をとったこの system は、$SO(8)$ の symmetry が manifest になるようになります。この i という添字を回す $SO(8)$。で、この dual と言っている意味は、8 階反対称 tensor を持ってきて、

$$
\epsilon^{i_1\ldots i_8} C_{i_1\ldots i_n} \sim C^{i_{n+1}\ldots i_{n+8}} \tag{114}
$$

係数があるかもしれないけど、基本的に n 個足があるやつと $8-n$ 個足があるやつが独立な自由度ではなくて、こういう感じで結びついている。だから上の表は書き過ぎで半分くらい書けばよかったんですが、一応全部書いときました。

それで実はこれだけで話がすまなくて、えーと GSO projection というものを考えます。これあの詳しく説明できないんですけど、いっぱい書いたこれらの場と

いうのは、あ、今ごめんなさい boson の場だけを考えています。えーと、もちろん R-NS とか NS-R もあって、それらから fermion の場が出るんですが、これからあまり使わないので boson の場だけを考えてみます。それで、実はここで書いた場を全部含んだ理論というのは consistent でないということがわかります。consistent な理論を構成するためにはここで書いた場のうち、ちょっと荒っぽい言い方をするとこれらの state の半分を落とすような操作をすることになります[2]。えーとまっ、手で落とすんですけど、手で落として理論が consistent になるかどうかをチェックしておいて、それでちゃんとうまくいっている理論がいくつかあります。そのうちの 2 つが Type IIA と Type IIB と呼ばれるものになります。

それがどういう理論かといいますと、えと Type IIA というのは、NS-NS と R-R だけを書くと、ちょっと Type IIB も並べて書きましょう。

	NS-NS	R-R
Type IIA	ϕ, B_{ij}, g_{ij}	$C_i\ C_{ijk}\ \ldots$
Type IIB	ϕ, B_{ij}, g_{ij}	$C\ C_{ij}\ C_{ijkl}\ \ldots$

えーとこの NS-NS sector は実は Type IIA と Type IIB は一緒で、tachyon が消えるような projection をします。とすると、dilaton と $B_{\mu\nu}$,B 場と graviton があります。R-R のほうですが、足が偶数個あるやつと奇数個あるやつのどちらかをとります。それをどっちをとるかで Type IIA と Type IIB に分かれます。で、Type IIA の方は足が奇数個あるやつです。それに対して Type IIB は、足がないやつ、つまり scalar 場と 2 階反対称 tensor と 4 階と $\cdots$ を残し、状態を半分落とします。

実はこれ以外の落とし方もあって、それは Type 0 とかよく呼ばれる理論なんですけど、それは supersymmetry がない。supersymmetry が無くて tachyon が残るような理論になっていて、今 closed string を考えているんですけど、closed string tachyon が出るようになっている。それはそれで面白い理論で、いろいろ研究がなされているんですけど、superstring ほどは面白い物はないというか、superstring は本当にきれいな supersymmetry があって、きれいに議論が出来るので、こちらのほうがよく研究されています。で、今日も Type IIA、Type IIB の話をしていきたいと。えっとまぁいいや、こういう理論です。

それで今 boson の自由度しか書きませんでしたが、fermion も同様です。fermion も半分落とします。その落とし方は Type IIA と Type IIB でちょっと fermion の chirality が逆のものを落としているんで、その構造が違うんですけど、まぁ今回出てこないので、それはそれでいいとして。

もう 1 つコメントしないといけないのは、さっきチラッといいましたが、この boson part と今は書いていない fermion part がちょうど partner になっていて、これはあの spacetime の意味の、10 次元時空の意味の supersymmetry を持っている理論になっています。えーと超対称性があると。さっき超弦理論を導入するとき、超対称な Lagrangean (108) を書きましたが、これは 2 次元の場の理論としての超

[2]今は省略している massive mode や fermion についても state を半分落とすような操作をする。

対称性を課した。2次元の場の X^i と ψ^i に関する入れ替えの対称性を課したんですが、今度は10次元の場ですね、10次元の場に対して boson と fermion を入れ替えるような対称性が実はあります。それで、しかもあの、graviton がいることで超対称性がある重力理論です。えとこれ超対称性がある重力理論を超重力理論と言います。まぁいいや。えーとこんなところで、はしょりましたが、Type II の超弦理論というのはこういう人たちが、こういう場があるような10次元の理論ってことさえ分かってもらえればよいと思います。詳しいことは家に帰ってから教科書を読んで下さい。

3 D-brane

それでいよいよ D-brane の話に移りますが、D-brane が脚光を浴びた理由は R-R charge を持つことなんですが、R-R 場って $C_{i_1 \ldots i_n}$ っていう反対称 tensor 場があったんですけど、これに charge を持っている物体っていうのはどんなものか、ちょっと考えてみます。

普通の4次元の点電荷のときどうだったかというのを思い出してみると、点電荷との interaction で大事なのは、

$$S_{int} \sim e \int A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} dt \tag{115}$$

縦方向を時間として、横方向を $\vec{x}$ として (図 22)、電荷、つまり荷電粒子というの

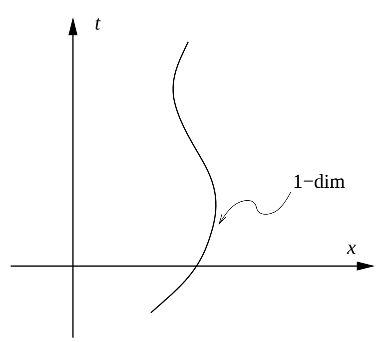


図 22: 点電荷と gauge 場の interaction

は、gauge 場とどう interact するかを思い出すとこういう形だった。これ学部生でやりましたね。ちょっと notation ですが、$A_\mu dx^\mu$ というのを A と書くことにするともうちょっときれいに書けて、(115) が、

$$e \int A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} dt = e \int_{1 \ \mathrm{dim}} A \tag{116}$$

こう書けます。dt はもう約分しちゃったと思って。

これの拡張を考える。いま足が1個しかないけども、今度は足がいっぱいある場が出てきます。これへの拡張版を考える。で、これlight-cone gaugeをとったので、足が$2 \sim 9$までしかなかったんだけど、ちょっとlight-cone gaugeじゃなくてcovariantに書こうと思ったら、$0 \sim 9$まで走る添字があったとして、$dx^{M_1} \wedge \cdots \wedge dx^{M_n}$というのを後ろに形式的につけといて、これを$C_n$

$$C_{M_1 \dots M_n} dx^{M_1} \wedge \cdots \wedge dx^{M_n} = C_n \tag{117}$$

と書くことにします。それで、このn階反対称tensorと自然に相互作用する、このn階反対称tensorに関するchargeを持つ物体とはどんなものかというのを考えると、(116)を自然に拡張しようと思ったら、

$$S_{int} = e \int_{n \ \mathrm{dim}} C_n \tag{118}$$

と書きたくなります。(116)はworld-line (図22)に関する積分ですから、この1次元多様体の積分でした。それに対してC_nっていうのは、n個dx^Mがあるので、n次元積分であるってことです。だからなんか、図22に対応する絵を描こうとしたら、n次元の膜があって、それが、$\cdots$ なんかこういう絵です (図23)。このn次元

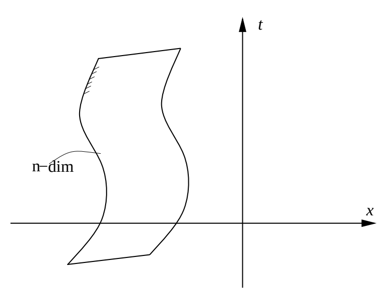


図 23: D-braneとn階反対称tensor場のinteraction

多様体がD-braneです。それで昨日出てきた言葉ですけど、$p+1$次元的な物体、$p+1$階反対称tensor C_{p+1}と自然にcoupleするC_{p+1}のchargeを持つ物体ですが、これをDp-braneと呼ぶ。昨日も言いましたが、このDp-braneのpっていうのは、この物体の空間方向の次元の数です。で、空間方向$+1$次元で全体を張っている。

3.1 D-braneのDは

それであのー、ここからがちょっと飛躍なんですけど、Polchinskiが与えたD-braneの解釈なんですが、えーと昨日もちょっといいましたけれど、D-braneのDとは何かというとですね。このDp-braneのstringの言葉での解釈は何かというと、Dp-braneというのはopen stringが端を持てる$p+1$次元の壁。昨日も何度もとり

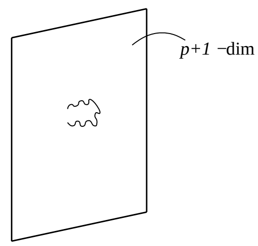


図 24: D-brane

入れた、$p+1$ 次元の壁があって、open string が壁に端を持っているこういう状況を考えます (図 24)。open string の端が住み着くような、こういう性質をもった壁を D-brane と呼ぼうと。えーと実はこれ詳しく見るとですね、こういう条件を課した膜を考えると、正しく R-R 場に対する n 階反対称 tensor、つまり、$p+1$ 階反対称 tensor に対する charge を持つことが Polchinski によって示されました。それが string の second revolution の大発展の引き金になったんですね。

それでどうしよっかな。D-brane 上にどういう場があるかということを考えよう。あそっか、その前にこれを言わないといけない。えっとこれ、Type IIA と Type IIB で R-R 場の足の数が偶数か奇数かというのが決まっています。それにともなって、Type IIA と Type IIB で存在できる Dp-brane というのは微妙に違います。えーとここでちょっと語弊があって、この D-brane というのは実は、この端を持てる壁という定義からいくと、R-R 場と couple しないような壁も作ることができます。そういうのも D-brane と呼ばれていて、non BPS D-brane という言い方をするんですけど、そういうのもある。それに対して、R-R charge を持つような D-brane を BPS D-brane と言いますが、それをまとめてみると Type IIA と Type IIB で違っています (表 2)。Type IIA は奇数階の反対称 tensor しかなかったので、p の値は足

IIA	D0	D2	D4	D6	D8	
IIB	D(-1)	D1	D3	D5	D7	D9

表 2: 存在できる BPS D-brane

の数引く 1 なので、偶数になる。で、Type IIB のほうは逆に奇数になる。これ -1 から始まります。-1って一見奇妙に思えるかもしれないけども、この壁が $p+1$ 次元だったので、$p=-1$ でも定義されていて、pが -1 だと 0 次元、時間にも空間にも広がってないようなそういう物体を考えることになります。それを D-instanton と呼びます。

えーとさっきちょろっと言いましたが、これ以外の次元を持つ D-brane も存在して、その人たちは R-R charge を持ってないのですが、open string が端を持つ壁として定義することができます。そういうのを non BPS D-brane と言って、実は

それは tachyon を含んでいます。今回話したい tachyon というのは non BPS に関する tachyon だったり、あと D-brane とその D-brane の向きを裏返したやつを重ねた系にも tachyon が出るので、それらの系に関する話をこれから後でやります。ここではこれだけとりあえず覚えておくことにすると。

3.2 open string

えっと、これらの Dp-brane 上の physical state としてどういう場が存在するかというのをまともにやりだすと大変なので、また結果だけになっちゃうんですが、まーどうやってやるか考え方は少なくとも理解して欲しいです。open string ってのをさぼって昨日今日やってないんですけど、open string っていうのは、closed string の量子化の仕方を知っていれば大体すぐできます。open string って端を持つ string です。open string って、縦方向が時間で、端を持った string が時間方向に伸びている、なんかそういう絵 (図 25) で表されます。

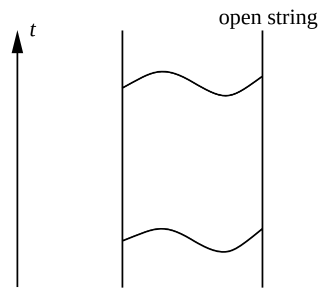


図 25: open string

それで昨日、closed string の量子化をやりましたが、X^M というのをなんかモード展開しましたね。えーとどうしよー、

$$X^M(\tau,\sigma) = x^M + \alpha' p^M \tau + i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \sum_{m\neq 0} \frac{1}{m}\left(\alpha_m^M e^{-im(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_m^M e^{-im(\tau+\sigma)}\right) \quad (119)$$

こんなの書きましたね。なんかこんな展開式を書きましたが、α_m^M の項って $\tau-\sigma$ にしかよらない part で、$\tilde{\alpha}_m^M$ の項は $\tau+\sigma$ にしかよらない part で、2 つの part がありました。で、$\tau-\sigma$ とか、$\tau+\sigma$ にしかよらないってことは、こっちが left mover で、こっちが right mover (図 26)。left と right ってどっちが右か左かっていつも混乱するんですが。closed string ってこう丸ですね。丸を時間方向にのばした。えーと left mover って、左側に進んでいくようなそういうふうな波。で、同じようにこう右向きに進むような波ってのもあります。closed string は丸いので右と左が独立で、独立の波がいくらでも書けます。

で、こっちの open string (図 25) になると、左向きに進んでいく波っていうのは端っこではねかえって右になります。left と right っていうのは、この端の境界条

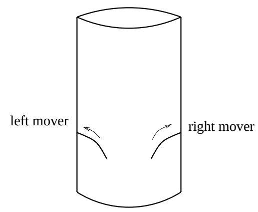


図 26: closed string

件で関係付きます。open string のときに σっていうのは、横方向を σ 方向にするのですが、$0 \leq \sigma \leq \pi$ ととって、$\sigma = 0, \pi$ で left と right が関係付く。そういうことがあるんですが細かい議論は省略することにして、とにかく (119) の α^M_m と $\tilde{\alpha}^M_m$ が関係付きます。で、あとさっき出てきた fermion の方の oscillator も、d^M_n と $\tilde{d}^M_n$、b^M_r と $\tilde{b}^M_r$ が関係付く。で、結局量子化するときには、$\tilde{\alpha}^M_m, \tilde{d}^M_n, \tilde{b}^M_r$ は忘れてよいということです。

で、これが closed string との違いで、closed string の自由度をなんか半分にしたような状況です。それとあと brane の、open string の端が brane 上にしか乗ってないという条件があると、この open string は 10 次元時空を自由に飛び回れるのではなくて、この brane 上にしか住めない。それにともなって open string の持っている momentum は、brane に沿った方向のみ。brane に垂直の方向の momentum を持つことができない。

それとあと mass の公式ですが、昨日 bosonic の closed string のときは、

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-1) \tag{120}$$

みたいな式がありました。これもちょっと結果だけになっちゃうんですが、open superstring の量子化をするときにどういうふうになるかというと、

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}(N+a) \tag{121}$$

こうなります。えー、今は superstring なので、Nって書いたのには fermion の寄与もあります。で、この N は α^M_{-m} の下に付いた m とかの添字の数字を数える operator だというふうに昨日言いましたけど、fermion の寄与についても同様に添字の数字を数えます。だとして、この N に加えて定数 a があります。昨日やったのは -1 という定数がありましたが、これは superstring のときもやっぱり定数があって、R-sector か NS-sector かによって値が違います。で、実は、

$$a = \begin{cases} 0 & (\mathrm{R}) \\ -1/2 & (\mathrm{NS}) \end{cases} \tag{122}$$

となります。本当はやりたかったんですけど、時間がないので結果だけ。

で、こういうことに注意して state を構成するんですけど、これから主に boson のほうだけを見るので、fermion はちょっと省略して NS-sector だけを考えます。あ、言い忘れてたな、R-sector やったほうがいいかな？ちょっとやれるかどうか考えながら書きますが、NS-sector をまず考えることにします。

さっき closed string の時は R-R とか R-NS とか色んな組み合わせがあったんですけど、open string の時はこの left と right が関係付いちゃって、えー、組み合わせがあるわけじゃなくて、NS か R か 2 種類。

で、NS-sector を考える事にすると、

$$
\begin{array}{ccl}
\text{states} & m^2 & \\
|0;k\rangle & m^2 = -\frac{1}{2\alpha'} & \to T\text{:tachyon} \\
b^i_{-1/2}\,|0;k\rangle & m^2 = 0 & \to A^i\text{:gauge 場} \\
b^I_{-1/2}\,|0;k\rangle & m^2 = 0 & \to \Phi^I\text{:scalar 場}
\end{array}
$$

state として出てくるものは、まず真空、momentum を持っている state があって、これは m^2 を書いてみると、この真空って何もかかってないのに対しては (121) の N が 0 になっていて、そうすると $m^2 = -\frac{1}{2\alpha'}$ になる。tachyon ですね。

次の state はえっと、$b^i_{-1/2}$ というのを使うでしょう。$b^i_{-1/2}$ を真空にかけたものです。ちょっと i という添字を付けときます。この state は massless です。さっき言ったように N ってのはかかってる operator の下付きの添字を読みとる operator なので、N のところに 1/2 を代入してやるとちょうど (122) の $-1/2$ と cancel し合って massless になります。で、ちょっとこの i という添字を brane に沿った方向で $2 \sim p$ まで走るとする。それに対し、I を $p+1 \sim 9$ まで走るとして、$b^I_{-1/2}$ をかけたもの、これもやっぱり massless です。あと creation operator をどんどんかけていけば色んな state が作れるんだけども、NS-sector に関しては残りは全部 massive ですね。無視します。

で、$|0;k\rangle$ って tachyon なんですが、$b^i_{-1/2}\,|0;k\rangle$ が何だろ、Dp-brane は $x^0 \sim x^p$ 方向に広がっているとして、この i ってのは Dp-brane に沿った方向に足を持っている。そうすると広がった方向の足を持っているってことは、$p+1$ 次元の空間の vector 場ですね[3]。これって massless gauge 場。一方 $b^I_{-1/2}\,|0;k\rangle$ は広がってない方向の足を持っているけれど、広がっている D-barane 上の Lorentz 変換では全然動かないので、これは scalar 場。

やっぱりこう次に、NS-sector をやったならば R-sector をやるべきなんですが、飛ばしましょう。R-sector、これやると実は fermion が出てきます。省略。これも時間あったらやりたかったんですけど。

それで実はこれだけでは駄目で、closed string の時にも言いましたけど、GSO projection というのを課します。で、この場合の GSO projection ってのはどういう projection をするのかっていうのをもうちょっと言っておきます。まず、真空に対

[3] 普通の場の理論と同様に 0, 1 方向の自由度は本当の自由度ではなく、light-cone gauge の場合は最初から現われない。

してはマイナスになって、b_r^M とは反可換になる、$(-1)^F$ という operator を用意します。

$$\begin{cases} (-1)^F |0;k\rangle = -|0;k\rangle \\ \{(-1)^F, b_r^M\} = 0 \end{cases} \tag{123}$$

それで projection operator を

$$P = \frac{1}{2}(1 + (-1)^F) \tag{124}$$

とおいて、

$$P|\mathrm{phys}\rangle = |\mathrm{phys}\rangle \tag{125}$$

となる state だけを残す。こういう操作をします。

そうするとこの P ってのは真空に作用すると、今、定義 (123) から、$(-1)^F$ はマイナスになるようになっていて、

$$P|0;k\rangle = 0 \tag{126}$$

だから tachyon は消える。

次に gauge 場 $b_{-1/2}^i|0;k\rangle$ に対して P という作用をする。これってこう言ったほうがいいかな。この人に $(-1)^F$ って operator をかけてやると、$(-1)^F$ は b_r^M と反可換という性質があるので、マイナスがついて $(-1)^F$ が右側によって、これが (123) の第 1 の式からマイナスになるので、マイナスとマイナスが打ち消しあって、プラスとなります。

$$\begin{aligned} (-1)^F b_{-1/2}^i |0;k\rangle &= -b_{-1/2}^i (-1)^F |0;k\rangle \\ &= b_{-1/2}^i |0;k\rangle \end{aligned} \tag{127}$$

こういう性質があるので、gauge 場に関しては P という projection operator をかけて、

$$P b_{-1/2}^i |0;k\rangle = b_{-1/2}^i |0;k\rangle \tag{128}$$

となります。あとこの scalar 場 $b_{-1/2}^I|0;k\rangle$、添字が大文字の I のほうも全く同じです。だから、A^i, Φ^I は残る。こんな具合にして physical な state を選び出す。これすごい人為的な操作に見えるかも知れないけど、こうやって初めて consistent な理論になります。

3.3 重なった D-brane

ちょっと幾つか重要な性質を見たいんですけど。今暗黙の内に D-brane が 1 枚の場合を考えていますが、N 枚重なったらどうなるか、そういうことを考える。D-brane の絵を描くと、重ねる絵を描くのが正しいんですけど、ちょっとずらした

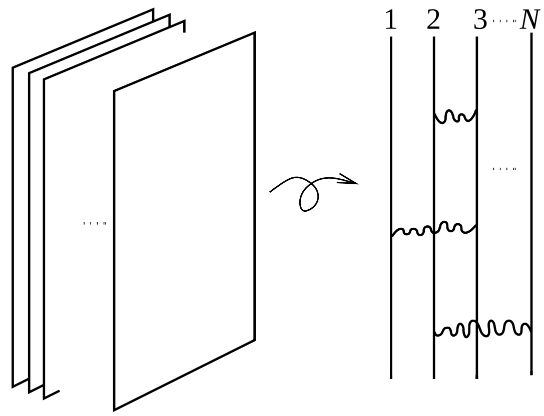


図 27: 重なった D-brane

ように描きます (図 27 左)。さらにちょっと横から見た絵を右側にこう描く (図 27 右)。これ絵で描くときにはちょっとずつ離して描いていますが、ぴったりくっついていることを想像して下さい。えっと、D-brane が N 枚あるので、それを区別するために番号をふっておきます。で、こうすると何が今までと違うかというと、この D-brane 上の open string がどこを出発してどこで終わるかというのを自由に色々とることができます。

で、そうすると open string はとにかく D-brane に端を持っていればいいので、どの D-brane に端を持っていてもいい。open string の端に D-brane の番号が対応しているので、端がどの D-brane に乗っかってるかっていうのを a, b という $1 \sim N$ まで走る記号であらわします。もう 1 回言うと、open string の端に、どの D-brane に乗っかってるかという label を付けます。それでさっき言ったように、open string を量子化すると gauge 場とか scalar 場が出てきます。今の場合、どの D-brane に端を持つかに対応して N^2 種類の open string がいますが[4]、それぞれの open string から 1 枚の D-brane の時と同じように gauge 場と scalar 場が出てきます。で、gauge 場と scalar 場が出てくるんですけど、この a と b という添字があったことに対応して、$(A^i)^a{}_b, (\Phi^I)^a{}_b$、こういうふうに何か、$N \times N$ 行列になる。で、gauge 場が $N \times N$ 行列になったってことは non-Abelian になった。実はこれ $U(N)$ gauge 理論になります。それで Dp-brane を考えると $p+1$ 次元の $U(N)$ gauge 理論が出る。これが非常に重要な性質です。こうやって non-Abelian の gauge 理論を string 理論の枠内に埋めることができます。

[4] ここで考えている string には、向きを入れ替えて (a と b を入れ替えて) 同じという条件はついていない。

3.4 D-brane 間に働く力

えっと D-brane が 2 枚あったときに、この間にどういう力が働くかというのを言いたいと思います。これもあまり詳しくはやれないと思いますが。またちょっと analogy ですが、QED とかで電子と電子があって、この間にどういう力が働くかっていうのは、どうやって分かったかというと、何かこの間を photon が飛ぶようなこういう Feynman graph を描いて (図 28)、この間の Coulomb 力ってのはこ

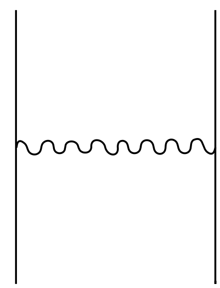


図 28: 点電荷間に働く力

の photon の exchange で理解できました。

これの対応物は D-brane の場合どうなるかというと、こうなりますね (図 29)。D-brane が 2 枚ちょっと離れた位置に置いてあるとします。同じ次元の D-brane と

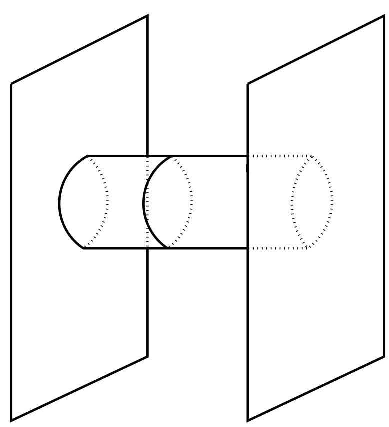


図 29: closed string の exchange

しましょう。Dp-brane と Dp-brane。で、これの対応物って、この間を飛ぶものっていったら closed string。昨日も出てきましたね。Feynman graph で線だったものが、string になると。途中でバサッと切った切口は、closed string。closed string の exchange でこの間に力が働く。

昨日言ったように closed string から出てくる場って、あ、昨日じゃないやさっき、どんな場が出てくるかって言いましたよね。closed string から出てくるのは、例え

ば dilaton ϕ とか、graviton g とか、そして R-R 場とか $\cdots$。だからこの間の重力相互作用がこういう graph (図 29) で出てきます。あと R-R 場に関する charge を持っているとかって言ったんですが、それもこの間を飛ぶ closed string の spectrum の中に R-R 場も含まれているので、R-R charge を持つってことは言える。

それをちょっと open string の立場で、どういうふうに計算されるか見たいんですけど。あ、string でいう Feynman graph ってのは、world-sheet が色々飛んだそういうモノが場の理論の Feynman graph に対応しています。closed string が飛ぶような graph を計算しなさい、って言われたときに、実は string 特有のことですが、これってこう closed string が exchange されてる絵 (図 29) だと思ってもいいけども、図 30 のように思ってもいいわけです。円筒の上に描いた線は open string

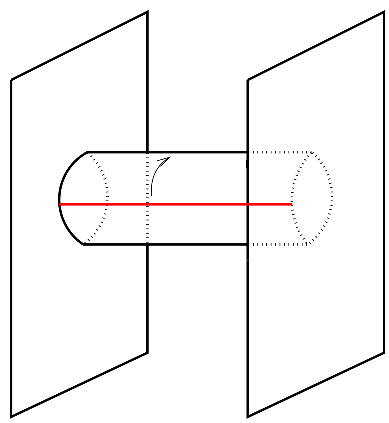


図 30: open string の 1-loop

です。で、open string がぐるっと 1 周回ってる、そういう絵だと思えばいいわけですね。何か open string の 1-loop diagram。これが昨日、研究会でもちょろっと出てきた open-closed duality の典型的な例です。こう closed string の tree level の graph を計算しようと思ったら、この open string の 1-loop を計算すればいいわけです。open string の言葉でも、closed string の言葉でも、同じ量を計算することができる。

で、そう思って、この open string の 1-loop を評価してみます。これ外線に何も飛んでないので 1-loop vacuum graph。例によって普通の場の理論との analogy を使います。えーっと、どうしよう。普通の場の理論で free part だけ見ることにして、interaction を無視した free な scalar 場の理論を考えます。

で、D 次元だと思って、こういう path integral をすることにして、

$$
\begin{aligned}
e^{-F} &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^D x \phi(\partial^2 - m^2)\phi} \\
&= \left(\det(\partial^2 - m^2)\right)^{-1/2}
\end{aligned}
\tag{129}
$$

これ path integral、形式的にやることができますよね。どこかいつも間違う。えっと符号とか、しょっちゅう間違えるので、間違ってたら適当に直して下さい。で、この exp の肩に乗った F の言葉で言うと、

$$F = \frac{1}{2}\log\ \det(\partial^2 - m^2) \tag{130}$$

です。これで、この log det ってのは Tr log に直せます。この微分の operator の trace ってのを momentum 表示で書くと、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \log(\partial^2 - m^2) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \langle k| \log(k^2 + m^2) |k\rangle \end{aligned} \tag{131}$$

こうなります。それで momentum 表示すると微分が k という数字に置き換わって、まあ $|k\rangle$ は左側に寄せることができて、それで $\langle k|k\rangle$ って、定数 V_D になりますね。

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_D \log(k^2 + m^2) \tag{132}$$

まあこうですか。ま、ちょっとどうせ normalization を見ないことにするんで、気にしなくていいですが。そうすると、この log の部分を書き直して、

$$= V_D \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{dt}{2t} e^{-(k^2+m^2)t} \tag{133}$$

このようにおきます。で、この k 積分を実行する。これ Gauss 積分ですね。結果を書くと、

$$= V_D \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{D/2} e^{-m^2 t} \tag{134}$$

まあこのような式が出ます。これ、普通の場の理論。

それで、open string の時にどうなるかというと、まあ、さっき gauge 場と scalar 場だけ見ましたが、massive mode が無限にいっぱいあるわけですね。それに対する寄与も全部足し上げなければいけない。で、そうすると何が変わるかというと、$e^{-m^2 t}$ の部分が何かあらゆる寄与の足し上げ、

$$f(t) \equiv \sum_{i:\mathrm{boson}} e^{-m_i^2 t} - \sum_{i:\mathrm{fermion}} e^{-m_i^2 t} \tag{135}$$

に置き換わる。今、場の理論の例で、mass が m の scalar 場が 1 個の場合を書きましたが、string 理論には massive mode を含めて無限個の場がいます。この無限個ある全部に対して足し上げなさい。で、fermion の方は、fermion の 1-loop って何かマイナスが付くって場の理論の方でありましたね。それでマイナスを付けて

fermion の方も全部寄与を足し上げなさいっていう、こういう考えです。(134) の $e^{-m^2 t}$ って factor が、(135) の $f(t)$ と書いたこれに置き替わる。で、$f(t)$ の計算なんですが、どうしよう。

えーっと 1 回やって見せたほうがいいんですけどね。えっとやりますかね。じゃあ頑張ってやろうか。ちょっと早口になりますが、もう疲れたっていう人は結果だけ待っていてもらえれば。

m^2 っていうのはどうなってたかっていうと、今まで brane がくっついている場合を考えていましたが、brane が離れている場合を考えましょう。で、D-brane が

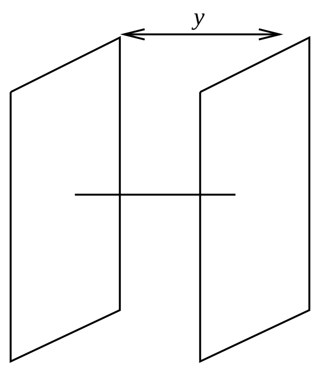


図 31: 離れた D-brane

あって、もう 1 個同じ D-brane があって、えっとこの間の距離を y とおく (図 31)。この y だけ離れていると、open string って伸びた open string になるわけですね。今まで伸びた効果をとり入れて無かったんですが、open string が伸びると、tension $\frac{1}{2\pi\alpha'}$ かける長さだけ energy を稼ぐ。えっとこういうことがあるので、mass がちょっと変更を受けて、

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}(N+a) + \left(\frac{y}{2\pi\alpha'}\right)^2 \tag{136}$$

になります。これ D-brane が離れてる場合。この N っていうのはさっき言ったように operator の下に付いてる添字を数える operator で、a っていうのはさっき言ったように 0 か $-\frac{1}{2}$、0 は R-sector。で、この R-sector が fermion で、NS-sector が boson。

$$a = \begin{cases} 0 & (R) \leftarrow \text{fermion} \\ -1/2 & (NS) \leftarrow \text{boson} \end{cases} \tag{137}$$

えっと、これ先に答えを書いてしまいます。ちょっと答えをばーっと書いてから

説明させて下さい。

$$f(t) = \underbrace{e^{-\left(\frac{y}{2\pi\alpha'}\right)^2 t}}_{\star} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \underbrace{e^{-n\frac{1}{\alpha'}t}}_{\alpha_{-n}\text{の寄与}}} \right)^8 \frac{1}{2} \Big[\underbrace{\underbrace{e^{\frac{1}{2\alpha'}t}}_{\spadesuit} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \underbrace{e^{-(n-\frac{1}{2})\frac{1}{\alpha'}t}}_{b_{-(n-1/2)}\text{の寄与}} \Big)^8}_{P\text{ の中の }1\text{ の部分}}$$

$$\underbrace{- \underbrace{e^{\frac{1}{2\alpha'}t}}_{\spadesuit} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \underbrace{e^{-(n-\frac{1}{2})\frac{1}{\alpha'}t}}_{b_{-(n-1/2)}\text{の寄与}} \Big)^8}_{P\text{ の中の }(-1)^F\text{ の部分}} - 16 \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \underbrace{e^{-n\frac{1}{\alpha'}t}}_{d_{-n}\text{の寄与}} \Big)^8 \Big] \tag{138}$$

これが答え。

えっとまずですね。何がどの寄与かというのをまず言うと、式に書いたように、まず α_{-n} の寄与があります。NS-sectorの $b_{-(n-\frac{1}{2})}$ の寄与は、GSO projectionによって2つの部分に分かれています。P の中の1の寄与と $(-1)^F$ の寄与。PっていうのはGSO projectionする時に定義したprojection operatorです。で、最後にR-sectorの d_{-n} の寄与があります。えっと $\spadesuit$ は (137) の定数 a の寄与で、$\star$ の部分は (136) の最後の項の寄与です。えっとどうでしょう？

えっとこれ、ちゃんと言うことにすると、(135) の足し上げをするときに、あらゆるstateを作ってこれのmassを測って足し上げなさい、ということです。それで、あらゆるstateを作るというのは、例えばNS-sectorのstateで見たら真空 $|0;k\rangle$ があって、これにまず αってのをいっぱいかけて、それから b 何とかってのをいっぱいかけるわけです。

$$\alpha_{-n_1} \ldots \alpha_{-n_k} b_{-r_1} \ldots b_{-r_l} |0;k\rangle \tag{139}$$

こういうstateをがーっといっぱい書き出して、それに関するmassを測って、この $e^{-m_i^2 t}$ の組み合わせを作って足し上げなさいと、そういう問題ですね。で、massは (136) の公式で与えられていて、この Nってのは下付きの添字を数えるoperatorでしたね。

$$N = n_1 + \cdots + n_k + r_1 + \cdots + r_l \tag{140}$$

そうすると m^2っていうのは $\frac{1}{\alpha'}$ があって、添字を足し上げて、それでNS-sectorだったら $a = -\frac{1}{2}$ を付け加えて、この $(\frac{y}{2\pi\alpha'})^2$ とか付け加えればmassは出てくる。それに関する足し上げを行いなさいっていう、そういう問題です。

で、まず $\star$ の部分は全体にfactorとしてかかります。で、この b の寄与と言った部分は、bって fermionic な operator なので、1個あるか無いかですね。この $b_{-(n-\frac{1}{2})}$ がかかったらmassがどれだけ変わるかというと $(n-\frac{1}{2})\frac{1}{\alpha'}$ だけ変わります。もしかかってなかったら1をとりなさい。それに関して n について1から無限大まで全部かけ算してやれば、1をとるか $e^{-(n-\frac{1}{2})\frac{1}{\alpha'}t}$ をとるか、どっちかをとるとり方を全部考えれば、あらゆるstateを作ることができます。で、ここ8乗があるのは i の添字が8個走るからです。今、2～9の8個を走るとしている。そのどの i の値をとるかで8乗がかかってきます。

それで、2 行目の最初の項を見ると、これは projection operator の中で $(-1)^F$ が入ってる部分と言いました。これが入ってると、この $(-1)^F$ は bって operator が 1 個あるごとにマイナス符号を付けなさいって operator だったので、$e^{-(n-\frac{1}{2})\frac{1}{\alpha'}t}$ の前にマイナスが付く。で、さらにこの項の全体にマイナスが付いてるのは、真空の状態が $(-1)^F$ って operator でマイナスになりなさいっていう条件を付けたからです。

それであと、これだ α_{-n} の寄与と言った $e^{-n\frac{1}{\alpha'}t}$。これ分母に入ってるんだけども、Taylor 展開してやると $1+e^{-n\frac{1}{\alpha'}t}+e^{-2n\frac{1}{\alpha'}t}+\dots$ っていう、これの全ての冪の足し上げになりますね。で、α_{-n}ってのは bosonic な operator なのでいくつかかっても消えない。1 個もかかってない状況から 1 個かかったやつ、2 個かかったやつと無限までいくつかかってもいいって operator です。$\frac{1}{1-e^{-n\frac{1}{\alpha'}t}}$ を Taylor 展開して冪級数にしたらそれが全部含まれている。それを 8 乗して、異なる n について足し上げた。ま、こういう感じです。

で、第 3 項は R-sector。R-sector の d_{-n}っていう operator が幾つかかってるか。かかってないやつと 1 個かかってるやつ、1 個かかってれば $n\frac{1}{\alpha'}$ だけ m^2 が増えます。まあそんな感じで (138) の式が出ます。

で、えっと、いいですかね。ちょっと早口で言ったので分かりにくかったかもしれないけど、まあ言いたかったのはとにかく具体的に書ける。boson、fermion 無限個あるので一見手に負えないかと思うかもしれないけど、この場合書くことができる。

それでこう書いてしまうとですね、実はこれってもっときれいに書けて、よく使われる notation なんですが、

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{y}{2\pi\alpha'}\right)^2 t}f_1(q)^{-8}\left(f_3(q)^8-f_4(q)^8-f_2(q)^8\right) \tag{141}$$

こういうふうに書けます。ここで、q と書いたのは $e^{-\frac{1}{2\alpha'}t}$ で、f_1,f_2,f_3,f_4 と書いたのはとりあえずこんな感じかな

$$f_1(q)=q^{\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \tag{142}$$

$$f_2(q)=\sqrt{2}q^{\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) \tag{143}$$

$$f_3(q)=q^{-\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}) \tag{144}$$

$$f_4(q)=q^{-\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) \tag{145}$$

こういう関数を使ってこう簡単な、簡単でないかな。まあこういうふうにかけます。それで実はですね、数学公式があって、$f_3(q)^8-f_4(q)^8-f_2(q)^8=0$ なんです。

これって色んな言い方ができるんですが、ここに書いてある式 (135) で、(boson の寄与) – (fermion の寄与) というのがあります。これ完全に 0 になるのは boson の寄与と fermion の寄与が cancel してくれるときです。で、これは supersymmetry があると、こういうことはよく起こります。実は言いませんでしたが、open string の方も今考えている D-brane の上の場の理論ってのは supersymmetric な場の理論になります。それで boson と fermion を入れ替える対称性があるので、boson と fermion の自由度は同じ数だけあります。で、その boson の寄与と fermion の寄与が符号が逆になって出てくるので、ちょうど cancel してくれます。そういう構造になってます。

またこれ別の言い方もできます。さっき open string の 1-loop は closed string の exchange と同じだと言いました。この間を飛ぶのは graviton とか R-R 場とかがいたわけですけども、重力等の引力と R-R 場の斥力が cancel しているという言い方もできますね。ちょっとこれ miss leading な言い方かも知れないけど、まあ大体大雑把な言い方で、closed string の交換の中で引力に働くものと斥力に働くものがあって、それがちょうど cancel して力が働かないんですね。

詳しい解析をすると、結局さっき (130) で F と書いたのは string ではどうなるかと結果を書くと、あのもう overall の定数は無視して書きますが、

$$F \propto \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\left(\frac{y}{2\pi\alpha'}\right)^2 t} f_1(q)^{-8} \times \Big(\overbrace{\underbrace{f_3(q)^8}_{\text{NS で } 1}}^{\text{NS}-\text{NS の exchange}} - \overbrace{\underbrace{f_4(q)^8}_{\text{NS で } (-1)^{\text{F}}}}^{\text{R}-\text{R の exchange}} - \overbrace{\underbrace{f_2(q)^8}_{\text{R}}}^{\text{NS}-\text{NS の exchange}} \Big) \tag{146}$$

こうなります。今出た $f(t)$ という結果 (141) を (134) の e^{-m^2t} の部分に代入すればいいです。今 D 次元の Dっていうのは場の理論の次元だということを言ったので、Dp-brane だったら $p+1$ 次元なので D は $p+1$ に変わります。後はまあ (141) を (134) に代入したものが (146) です。

ちょっともう 1 回思い出すと、(146) の第 1 項は NS-sector で 1 をとったやつ、P という operator の中で 1 をとったやつ。で、この第 2 項が NS-sector で $(-1)^F$ というのをとったやつ。それでこの R-sector の寄与はこいつ f_2 です。こういう構成だったんですが、実は closed string で見て詳しい解析をしますと、この第 1 項と第 3 項が NS-NS の closed string の exchange。で、第 2 項が実は R-R sector、R-R 場の exchange。こういう構造になってるのがわかります。これちょっと、やっぱり省略せざるを得ないんですが、これをちょっと後で使いたいと思います。

これで、だいたい 3 章の D-brane の話は終わって、いよいよ休憩してから tachyon の話をしたいと思います。ちょっとだけ休憩。

(休憩)

4 タキオニックな超弦理論

いよいよ、ようやくというか、今回の講義のテーマだと言いつつなかなかお話できなかった tachyon の話をします。これ色んな言い方があると思うんですが、僕の好きな言い方で言うと、Type II の超弦理論って昨日やったように基本的に closed string だけの理論なんですが、open string を加えて拡張することができます。

で、実は open string を加えるっていうのを D-brane の言葉で言うと、D-braneってその brane に端を持つような open string を導入することになるんで、D9-brane を加えることになります。全時空の次元は 10 次元で、D9-braneっていうのは $1+9$ 次元なので、これは全時空を埋め尽くすような brane です。Open string が端を持つ壁というのが D-brane の 1 つの定義なので、10 次元を埋め尽くす D-brane を考えれば、10 次元時空を自由に動けるような open string を導入したことになります。で、まあそういうものを考えてみましょう。

例えばまず、Type IIA から考えることにします。でもさっき 53 ページの表 2 で見せたように、Type IIA の場合、D9-braneっていうのは無かったです。あの表って R-R charge を持つような D-brane を表にしたんですが、D9-brane は無い。R-R charge を持たない D-brane をどうしたらいいか。でもとにかく、とりあえず open string を考えるってことはやってもよくて、R-R charge があるか無いかに限らず open stirng を考えてみよう。

まず、さっきやった open string の 1-loop vacuum amplitude (146) を思い出します。細かいところはもう使わないので気にしなくていいですが、

$$
\begin{aligned}
F \propto & \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{-5} f_1(q)^{-8} \\
& \times \Bigl(\underbrace{\overbrace{f_3(q)^8}^{\text{NS}-\text{NS の exchange}}}_{\text{NS で } 1} - \underbrace{\overbrace{f_4(q)^8}^{\text{R}-\text{R の exchange}}}_{\text{NS で } (-1)^{\mathrm{F}}} - \underbrace{\overbrace{f_2(q)^8}^{\text{NS}-\text{NS の exchange}}}_{\text{R}} \Bigr)
\end{aligned}
\tag{147}
$$

こういう式でしたね[5]。D9-brane は R-R charge を持っていないので (147) の第 2 項は無くなっていますから、今の状況では本当は、

$$
F \propto \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{-5} f_1(q)^{-8} \left(f_3(q)^8 - f_2(q)^8 \right) \tag{148}
$$

こうなりますね。で、これを open string の言葉で言うと、第 1 項が NS-sector で、GSO projection の projection operator (124) の 1 をとったもの。消えてしまっている第 2 項っていうのが NS-sector で、projection operator (124) の $(-1)^F$ という part をとったもの。で、第 3 項が R-sector でした。で、この R-R charge がないために第 2 項が無いってことは、open string の言葉で言うと、この projection の

[5] 式 (146) 等にあった $e^{-\left(\frac{y}{2\pi\alpha'}\right)^2 t}$ は、D9-brane の場合には brane 間の距離 y が zero なので、必要ない。また、D9-brane なので $p=9$ にしてある。

$(-1)^F$っていうのが無くなる効果を表す。だから、open stringの言葉でいうとGSO projectionが無いということです。さっきopen stringを勝手に手で付け加えて理論を拡張しようと言ったわけですが、このときのopen stringっていうのはGSO projectionをかけないようなstateが生き残る。そういうopen stringを考えるべきだということがここから分かるわけです。

そうするとどういうことが起こるかっていうと、さっきspectrum、つまりphysical stateを求めたときに、tachyonがいて、gauge場がいて、scalar場がいて、あとまあfermionもいて、massive modeもいたわけですが、ちょっとこの人達(fermion, massive mode)は見なかったです。それで、GSO projectionをかけたおかげでtachyonが消えていたんですが、今の場合GSO projectionが無くなってしまったのでtachyonが生き残ります。tachyonが生じる。また、今はD9-braneを考えているので、さっきA_iとΦ^Iの足が、iが$2\sim p$までで、Iが$p+1\sim 9$まで走ると言ったんですが、pを9だと思ってしまうとIはもうとる余地がないので、scalar場Φ^Iは実はいないです。今pが9をとってしまうと、$10\sim 9$なんてないので、これはもはや無くなってしまう。なので、tachyonがいてgauge場がいる、そういう系になります。A_iは10次元のgauge場。

spectrum

	T	$\rightarrow$ 生き残る
	A_i	$\rightarrow$10次元ゲージ場
	Φ^I	$\rightarrow$D9-braneを考えているので無い
$\oplus$	fermion (無視)	
	massive (無視)	

それで、さっきD-braneが何枚も重なったときどうなるかということを言いましたが、今、N枚のD9-braneを考えます。このR-R chargeを持たないD-braneをnon BPS D-braneという呼び方をしますが、N枚のnon BPS D9-braneを考えると、tachyonもgauge場も$N\times N$行列になって、さっきの言葉で言うと$U(N)$ gauge理論になります。これらの場は$U(N)$のadjoint表現に属すような場です。これは$U(N)$のadjoint表現という言い方をしてもいいし、tachyonがエルミート行列だという言い方をしてもいいです。gauge場もエルミート行列。N枚のD9-braneを入れると、そういうtachyonicなType IIA理論になります。で、このNって書いた枚数って何枚入れてもいいので、気前良く無限大にするのが気持ちいいですね。まあでもしばらくはこう、Nだと思ってやりましょう。

N枚の non BPS D9-brane $\rightarrow$ tachyonic な Type IIA
$T, A_i : N\times N$ 行列、$U(N)$ の adjoint 表現、$T^\dagger = T, A_i^\dagger = A_i$

それで同様に、今度はType IIBも考えてみるんですが、Type IIBにはR-R chargeを持つD9-braneがいました。今日書いた53ページの表2に書いてある。D9-braneがあるので、これを入れればいいじゃないかと一見思いますね。ところ

がこれだけ入れるわけにはいかない。矛盾を生じます。何故かというと、さっき、D-braneがあったらD-braneとR-R場のinteractionって次のような形をしているって言いました。

$$S_{int} \sim \int C_{10} \tag{149}$$

今、D9-braneとcoupleしているものはR-Rで言うと10-form、足が10個あるやつです。で、それを書くと

$$S_{int} \sim \int_{10\ \mathrm{dim}} C_{M_1 \dots M_{10}} dx^{M_1} \wedge \cdots \wedge dx^{M_{10}} \tag{150}$$

$$= \int_{10\ \mathrm{dim}} C_{0\,1\,2 \dots 9} d^{10}x \tag{151}$$

こうなりますよね。ちょっとごまかしましたね。light-cone gaugeをとるとこんなものは出てこないんです。というのは、このC_{10}っていうのは実は物理的自由度を持っていなくて、これに関するkinetic termを書こうとすると、これを微分すると足が足りないので0になって、field strengthを作れない。だから、そういう意味でこの人は物理的な自由度を持っていなかったので、light cone gaugeでは見えなかったんですが、まあとにかくDp-braneのpが奇数であるようなものが全部いると思うと、それにcoupleするものは分かるので、形式的にいくとこういうものを考えることができます。物理的自由度を持っていないんだけど、形式的にこういうものを導入することができる。こういう10個足がある反対称テンソルがあると思ってactionを書いてしまうと、これって足をあらわに書けば足が$M_1 \sim M_{10}$で、それで10次元で積分するという、(150)のような形になっていますね。でもCは反対称テンソルで、この添え字は$0 \sim 9$しか走らないので、(151)のように足は結局全部、$0 \sim 9$まで走るのと一緒ですね。それで積分は単に10次元積分です。

こういうinteraction termがあるはずです。で、こんなのがあってしまうと、さっき言ったように$C_{01 \dots 9}$はfield strengthが作れないのでkinetic termがない。kineteic termがなくてこういうinteraction termがあるときに$C_{01 \dots 9}$に関する運動方程式を求めてみると、これは変分して0になりなさいっていう条件ですが、実際変分したら1が出るので、なんか1が0になりなさいっていう条件になってしまいます。

$$\frac{\delta S}{\delta C_{10}} = 0 \longrightarrow 1 = 0 \tag{152}$$

矛盾ですね。

これは実は有名なconsistencyの要求で、このR-R場に対するR-R tadpoleのcancelationとかいうそういう条件なんですが、R-R 10-formに関するこういう1次のinteractionがあってしまうと、それは運動方程式の解が無くなってしまうので、矛盾する。これはopen stringの言葉で言うこともできます。closed stringの言葉で言うと、R-R 10-formとこういうcouplingがあるという言い方なんですが、

open string の言葉で言うと、実はこれは open string の anomaly が cancel するという条件になっています。open string を手で加えると、余計な fermion が生じて、これに関する 1 loop を計算すると実は anomaly が生じ ます。それと今の話が密接に結びついている。それは、ちょっとコメント。

とにかく D9-brane を加えただけでは理論を作る事ができない。それでど うするかというと、この D9 と逆の charge を持つもの、それを $\overline{\mathrm{D9}}$ と書いて anti D9-brane と呼んだりし ますが、これを導入する。逆の charge を持つって事は、さっきの interaction の形で言うと、(149) の符号を逆にしたものを同じ数だけ入れれば この項、tadpole は cancel して、さっきの矛盾は生じなくなります。で、そういうのを導入してやるとなにが起こるかというと、D9-brane があって 10 次元時空を埋めつくしているんだけど、それを無理に 図 32 のように縦線で書きますが、$\overline{\mathrm{D9}}$

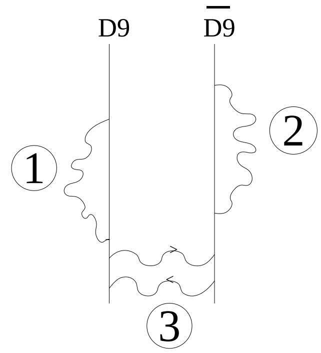


図 32: D9 $\overline{\mathrm{D9}}$ system

というのが同じ数だけあって、10 次元時空をどっちも埋め尽くしている。すると、この open string にいろんな種類があって、D9-brane に 2 つ端を持つような open string もあれば、$\overline{\mathrm{D9}}$ の方に 2 つ端を持つような open string もあるし、また、D9、$\overline{\mathrm{D9}}$ の間をつなぐ open string もある。

これを図 32 にあるように ①, ②, ③ と書いておく。① と ② の量子化は BPS の D-brane の時と同じで、これで出てくるのはまず gauge 場ですね。gauge 場が出るんですけども、① と ② の 2 種類あるので、gauge 場も 2 種類出てきます (A_i,$\tilde{A}_i$)。また、Dp-brane の量子化をして spectrum を求めたときは scalar 場もいたんですが、さっきの Type IIA のときと同じ理由で、D9-brane を考えているときには gauge 場の足が 9 まで走ると思うと、この scalar 場の出てくる余地はない。だから scalar 場はなくて、さらに boson の mass の低いところだけ見れば (fermion と massive mode を無視すれば)、10 次元の gauge 場 2 種類だけがある。

それで D9、$\overline{\mathrm{D9}}$ 両方に端を持つ ③ の open string ですが、この量子化から何が生じ るかを考えます。そのために、もう 1 回 (146) と同じ手法で ③ の open string の 1 loop vacuum amplitude を考えてやります。前の答えは (146) でしたが、今は違いが 1 つあって、R-R charge が D9 と $\overline{\mathrm{D9}}$ で逆符号になっている。そのため、

closed string の見方で見ると、実は第 2 項の R-R charge からの寄与がプラスになります。これが R-R charge が逆ということです。

$$F \propto \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{-5} f_1(q)^{-8}$$
$$\times \Big(\overbrace{\underbrace{f_3(q)^8}_{\text{NS で } 1}}^{\text{NS}-\text{NS の exchange}} + \overbrace{\underbrace{f_4(q)^8}_{\text{NS で } (-1)^{\text{F}}}}^{\text{R}-\text{R の exchange}} - \overbrace{\underbrace{f_2(q)^8}_{\text{R}}}^{\text{NS}-\text{NS の exchange}} \Big) \tag{153}$$

そうすると、これを open string の見方で見ると、第 1 項が NS-sector で projection operator の 1 をとったもので、問題の第 2 項が NS-sector で projection operator の $(-1)^F$ をとったものだったので、それを思い出すと、(146) の第 2 項の符号が逆になったということは、projection operator (124) の第 2 項の符号が逆になったということ。

$$P = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^F\right) \tag{154}$$

それが何を意味しているかっていうと、この open string の GSO projection が逆になった。projection operator が今まで 1+ ほにゃららだったんだけど、今度 R-R charge を逆にしたおかげで第 2 項にマイナスがついて、この $(-1)^F$ という operator をかけたときに -1 になる state が今度は生き残るようになります。

この GSO projection が逆になるという事実を使うとなにが出るかというと、前は tachyon があって、gauge 場があって、scalar 場があって、とか言ったんですが、さっきまで GSO projection で死んでいた tachyon が生き残って、逆に GSO projection で生き残っていた gauge 場や scalar 場が死ぬようになります。P の第 2 項が逆符号になったので。で、やっぱり tachyon が生じる。

ここでちょっとこの Type IIB の Type IIA との違いを言うと、今 D9 と $\overline{\text{D9}}$ と 2 種類あるので、open string って向きがあって、図 32 にあるように右向きと左向きと 2 種類あるので自由度が倍になって、tachyon は complex になります。さっきはエルミートだったんだけども今度は複素になる。で、さっきと同じように D9 と $\overline{\text{D9}}$ のペアを N ペア考えると、その gauge 場は $U(N) \times U(N)$ の gauge 場で、① の open string から A_i と書いた gauge 場と、② から $\tilde{A}_i$ と書いた gauge 場と、あと ③ から tachyon が生じるわけです。で、この A_i っていう gauge 場は 1 番目の $U(N)$ の adjoint 表現で、$\tilde{A}_i$ って書いた gauge 場は 2 番目の $U(N)$ の adjoint 表現に属している。それでこの tachyon ですが、tachyon は $N \times N$ になりますが、さっきこれが行列になったなり方を思い出していくと、足が 2 つこう $T^a_{\ b}$ のように生じるわけですね、open string の端になっているこの a と b という。で、今の場合はかたっぽの足が D9-brane で、もうかたっぽの足が $\overline{\text{D9}}$-brane です。両方の基本表現に関する足を持っている。そういうなんか bifundamental という表現。そういう tachyon が生じます。こういう理論です。

$$\text{D9-}\overline{\text{D9}} \times N \text{ ペア} \Longrightarrow \begin{array}{c|ccc} & U(N) & \times & U(N) \\ \hline A_i & \text{adj} & & 1 \\ \tilde{A}_i & 1 & & \text{adj} \\ T^a{}_b & \square & & \square \end{array}$$

さて、じゃあ、こういう理論を考えてみましょう。こういう tachyon が入っている、N を無茶苦茶でかくすると無茶苦茶でかい gauge symmetry があるような、そういう string の理論をこれから考えていこう。

4.1 Tachyon potential

それで、tachyon potential の形はだいたい分かっていて、これは詳しい解析をしないと分かんないんですが、ま、詳しい解析があって、IIA と IIB でそれぞれ

$$\text{IIA} \qquad V(t) \sim \mathrm{tr}\left(e^{-T^2}\right) \qquad (T^\dagger = T) \tag{155}$$

$$\text{IIB} \qquad V(t) \sim \mathrm{tr}\left(e^{-T^\dagger T}\right) \qquad (T : \text{complex}) \tag{156}$$

のような形をしていることが分かっています。overall の normalization とか、T^2 や $T^\dagger T$ の係数とかはさぼってますが、こんな感じ。で、さっきも注意したように、この IIA の方の tachyon はエルミートだったけども、IIB の方の tachyon は complex です。

それで、ちょっとまた注意します。tachyon の potential の形を書くとだいたい図 33 のような Gauss 的な形をしてますが、この potential の形って tachyon の再定

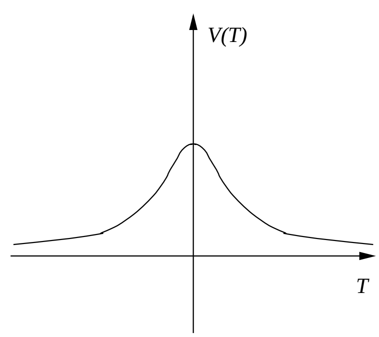


図 33: tachyon の potential

義によってどうとでも変えることができますね。例えば、図 33 って tachyon の無限大で potential は minimum になっていますね。これって、$\tilde{T} \equiv T/\sqrt{1+T^2}$ みたいに置いたりすれば、T が無限大になると $\tilde{T}$ はほとんど 1 ですね。1 か -1 かですか。tachyon の横軸を $\tilde{T}$ というのでとれば、-1 と 1 のところに potential minimum がある図 34 のような形にすることもできます。だから、minimum が無限遠方で

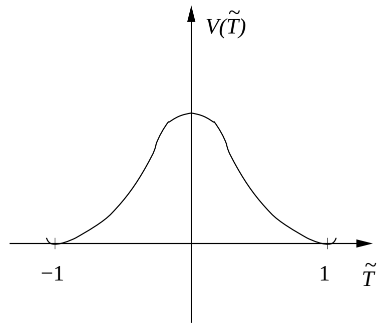


図 34: 再定義した tachyon の potential

あることはそんなに気にしなくてもいいはずです。いや、ほんとは気にすべきで、kinetic term も合わせてこの無限遠方での振舞いはどうなっているかっていうのは気になる事ですけど、今回の講義では potential のだいたいの形で話が済むことしか言わないことにするので、そんなに potential の詳細とか kinetic term の詳細は関係ないので、その辺はおおらかに見て下さい。

それで、これは昨日も何度か言いましたが、tachyon って m^2 が負であるような粒子がいたとしたら、光速を超えるスピードで走るとかいうそういう仮想的な粒子があると思って、それを tachyon と昔は言ったわけなんですけど、そんなやつがいると因果律が破れたりまともな理論が作れない。それはまずいんですけど、場の理論で m^2 が負であるような場がいたって、何の問題もないわけですね。標準理論で出てくる higgs 場も、まったく同じように m^2 の符号がマイナスであるような場であって、そういう場があるような場の理論で摂動論をやるとしたら、山のてっぺんで摂動論するのはやばいけれども、potential の minimum で摂動論する場合に関してはまったく問題はない。不安定モードがない。だから、この系もこういう tachyon が生じたわけだけども、potential の minimum を考えたらいいんじゃないかと思いますよね。それで、その potential の minimum でどういう理論になっているかというのを言ったのが Sen で、図 35 のように potential の minimum を★で

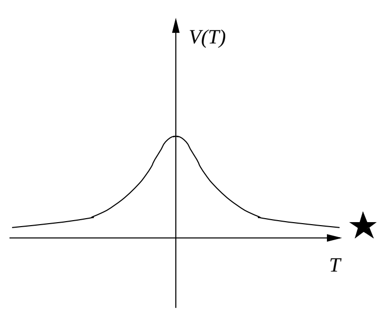


図 35: potential minimum

表しますが、彼が言うには、

> 「potential の minimum では open string の自由度は消えてなくなるだろう。closed string はいつでもいるので、そのとき closed string だけの理論になるだろう。」

そういうことを予想しました。これが唱えられた当時は Sen の conjecture と呼ばれて、この予想が正しそうだという証拠を色んな人が色んな議論をして挙げていました。で、これは今や、昨日も言いましたが、僕の認識では、このこと自体はもはや確立した事実です。

で、ここではちょっとそういうことが起こっていると信じて、そうだとするとなにが起こるかという議論をしたいと思います。で、この open string の自由度が消えるというフレーズですが、別の言い方もあって、今 non BPS な D9-brane とか、あと D9-$\overline{\text{D9}}$ ペアとかを IIA と IIB でそれぞれ導入したわけですが、これがなんか消滅するという、そういう言い方もできます。これは、R-R charge を持っていない brane だとか、プラスとマイナスで cancel しているような brane を考えたために、brane は全体として charge を持っていないので、全ての brane が消えて無くなっても charge の保存則には矛盾しない。

それで、こういうことが起こっているとすると、わざわざ tachyon を導入して理論を拡張したんだけど、結局 potential の minimum で tachyon とか open string の自由度が無くなっちゃうわけですから、そもそもそんな open string の自由度を導入する必要はなかったんではないかと思ってしまうかも知れませんが、そうじゃないんですね。もちろん摂動論だけに興味があるんだったらそれでいいです。open string を導入する必要はなかった。だから closed string だけで書かれた Type IIA とか Type IIB の理論は、摂動論としてはまったく問題なかった。でも非摂動的な効果を考えようと思ったら、全体の情報が実は必要になります。で、そのことをこれから言いたい。それから、それだけじゃなくって、例えば宇宙論を考えようと思ったら、Type II の string 理論に基づく宇宙論とか、あと、有限温度系とかも考えると同じような状況になるんですが、宇宙論を考えると、宇宙が始まったときから終わるまで空間的にあらゆる点で全部一様にこの potential の minimum に居続けなさい、っていうことを要請するのは非常に不自然なことで、むしろこの potential のどっか中腹にいて、それがころころ転がるような状況だとか、あるいはなんでしょう、温度が高くなってこの potential が持ち上がって中心付近にいるとか、そういう状況を考えたくなるのは非常に自然な事で、そういう意味でもこの tachyon の存在をやっぱり考えるべきです。で、この★は昔の人がやっていたかつての Type II string 理論。で、これからはこの全体を考えるべきだ、というのが主張です。それをこれからちょっと具体例を使って説明したいと思います。

ああ、こんな時間か。ええと、いよいよ最後のセクション。これが終わったら帰れますね。

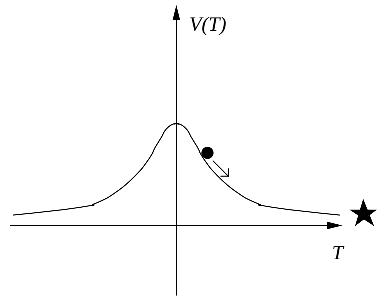


図 36: potential の中腹から転がる tachyon

5　ソリトンとしての D-brane

主張は、section 4 で考えた tachyon を含む超弦理論を考えると、D-brane は soliton として表される (ここで言う D-brane って次元の低い Dp-brane って意味ですが)。このことを理解してもらうことが今回の最終目標です。

これは多分、一般論の前に具体例を使って話すのが分かりやすいと思うので、簡単な例から。

5.1　例 1:Type IIA

Type IIA を考えて、それで、ま、ちょっと non BPS D9-brane が 1 枚ある状況を考えてみましょう。さっき気前よく N は無限大にすればいいとか言ったけど、1 つを除いて残りの全部の tachyon が condense して、つまり tachyon が potential の minimum にいて、non BPS D9-brane が 1 枚を除いて全部消滅している状況を考えていると思えばいい。で、まあとにかく D9-brane が 1 枚ある状況を考えて、そうするとさっき言ったように tachyon はエルミート行列だったんだけど、1 枚だったら 1×1 のエルミート行列で real。それで potential は (155) のようになっている (図 33)。真空って、$T = \pm\infty$ が真空ですね。$T = \pm\infty$ が potential の minimum。で、そうすると、よいしょ、この tachyon はもちろん 10 次元の場だから、10 次元の座標に依存しているわけですけど、これを例えば、x^9 に比例している、そういう状況を考えてみたらどうか。

$$T(x^0, x^1, \ldots, x^9) = ux^9 \tag{157}$$

ちょっと比例係数とかはどうでもいいとして、parameter で入れときます。この u と書いたのは単なる real parameter です。こういう状況を考えてみよう。こういう状況を考えると、横軸に x^9 をとって、縦軸は何でもいいんですが、じゃあ例えば $x^0 \sim x^8$ まで全部走るとします。 この図 37 は 10 次元時空の絵ですよね。tachyon が (157) のような configuration をとったとすると、この x^9 がすごく大きな所では、つまり $x^9 \to \infty$ では、tachyon がほとんど ∞。で、x^9 の値が $-\infty$ の付近で

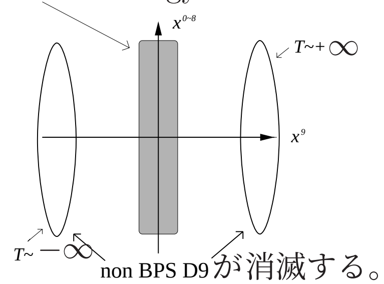


図 37: tachyon が x^9 に比例する場合

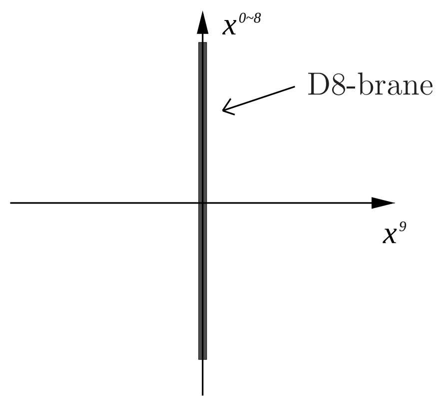


図 38: kink 解

は、tachyon の値は $-\infty$ になります。で、さっきの Sen の conjecture、「tachyon が potential の minimum に落ち着いたところでは、non BPS D9-brane は消滅している」という conjecture を使うと、この領域 $(x^9 \to \pm\infty)$ って、なんか non BPS D9 が消滅している領域です。それでこの原点付近、x^9 が 0 付近では、何か energy が残っている。この辺に集中している。そういう状況になっている。で、これ、uっていう parameter があったんですけど、これが無茶苦茶でっかい極限をとってみるとどうなるかというと、図 38 のようになりますね。この $x^9 = 0$ の辺りだけ何かこう、ぶわーっと energy が集中している部分があって、あとの残りは全部消滅しているという、そういう状況になります。で、これって何か $1+8$ 次元的な物体が残る。それで、string 理論で $1+8$ 次元的な物体は何があるかと思ったら、今日やった D-brane、D8-brane です。

いいでしょうか。もともと理論の formulation としてはこういう non BPS D-brane を導入して、それで open string を入れて理論を拡張したんですが、その理論では D8-braneっていう壁を手で置いたわけじゃないんですが、tachyon の (157) のような configuration をとってみると、自然にこう $1+8$ 次元的な物体が生じて、それは D8-brane と解釈する。じゃ、この u を無限大にとったのはなんか人為的な操作の

ように見えるかも知れないけど、実はこの $u \to \infty$っていうのがちゃんとした古典解になるということを示すこともできます。だから、古典解になるためにはこの limit をとるべきです。で、それをとってみると、x^9 が 0 付近に localize した $1+8$ 次元的な物体がある。ちなみに今の (157) のような解を kink 解と言います。

5.2 例 2:Type IIB

今度、Type IIB で考えてみます。Type IIB で、D9-$\overline{\text{D9}}$ のペアが 1 ペアです。まったく同様な手法なんですけど、今のちょっとした違いは、tachyon が complex scalar になります。それで potential は (156) に書いたように $e^{-|T|^2}$ の形です。そうすると真空は、この絶対値が無限大になれば potential の minimum ですね。真空のとり方がこう増えるわけです。さっき作った解を kink 解と呼びましたが、それに対して今度作るのは vortex 解と呼ばれるもので、vortex 解ってどういう形をしているかっていうと、u という parameter を入れて、

$$T(x) = u(x^8 + ix^9) \tag{158}$$

みたいな、今度は complex scalar なので i が入っていいわけです。x^8 と x^9 に依存するこういう解、こういう状況を考えてみましょう。で、さっきとまったく同じ議論をして、x^8、x^9 とそれ以外、こういう絵 (図 39) を描いてやると、この x^8 と

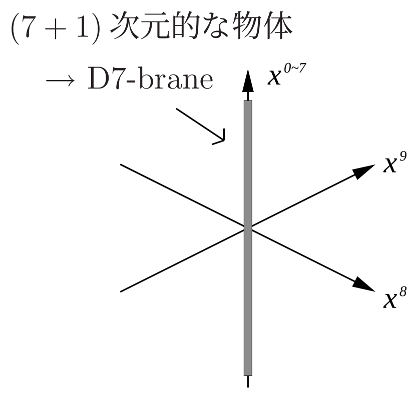


図 39: vortex 解

x^9 が 0 であるところの付近以外は D-brane が消滅しちゃうわけです。x^8 か x^9 が nonzero のところでは、uがでっかくなると真空に近付きます。真空では D-brane は消滅しているという Sen の conjecture を使ってやると、結局この原点付近以外の D-brane は全部消滅して、$x^8 = x^9 = 0$ になんか energy が集中する。で、これって、今度は $7+1$ 次元的です。だから、今度は D7-brane と解釈されます。

5.3 一般論

じゃあ、ここまで来たので一般論をやります。また場の理論との analogy をやっていきたいので、't Hooft-Polyakov monopoleっていう、4 次元の場の理論で知られているものがあって、4 次元の $SU(2)$ の gauge 理論を考えてみます。Higgs と言ってもいいですし、tachyon と言ってもいいですが、まあ Higgs 場 T と書きましょう。これは adjoint 表現に属するようなものを考えます。Lagrangian はまあ普通に書けばいいだけで、gauge 場の kinetic term と、tachyon の kinetic term と、あと potentialがあって、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}^2 + \mathrm{Tr}(D_\mu T)^2 - V(T) \tag{159}$$

こうなります。$D_\mu T$っていうのは普通の微分と、なんか adjoint 表現なので gauge 場とも couple しています。

$$D_\mu T = \partial_\mu T + [A_\mu, T] \tag{160}$$

ま、ここは使わないですが。それで potential の形ですが、まあさっきも言ったように形はあんまり関係ない気もするんですが、一応形を書いておくと、

$$V(T) = \lambda(\mathrm{Tr}T^2 - 2v^2)^2 \tag{161}$$

こういう図 40 のような、なんか double well 型の potential。この potential の min-

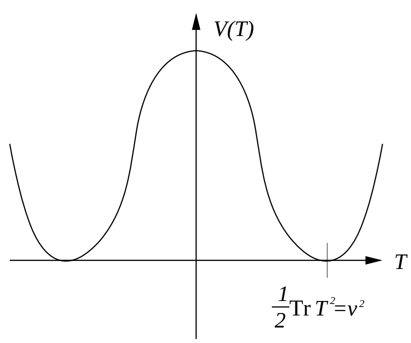


図 40: 4 次元 $SU(2)$ gauge theory の adjoint Higgs の potential

imum は、とりあえず $\frac{1}{2}\mathrm{tr}T^2 = v^2$ です。

それで真空は、これ adjoint 表現の Higgsってエルミート行列なので対角化できて、対角化した base で考えると、

$$\langle T\rangle = g\begin{pmatrix} v & \\ & -v \end{pmatrix} g^{-1}, \qquad g \in SU(2) \tag{162}$$

みたいなそういうもんですよね。adjoint 表現って $SU(2)$ で考えると traceless という条件もあるので、$v, -v$ になります。で、これ、$SU(2)$ の symmetry があるので、$SU(2)$ の元でこうぐるっと回すようなこういう自由度があるわけですね。こういう g をかけても依然として真空のままである。この真空をとると、この $SU(2)$っていう symmetry は $U(1)$ に破れる。

それでどういうことを考えるかというと、ちょっと時間方向には一様として、空間方向 $x^1 \sim x^3$ まで、空間方向の絵を描いて、なんか空間 3 次元で見て点状になるようなそういう物体を考えたい。で、この energy が発散しないで有限であるため

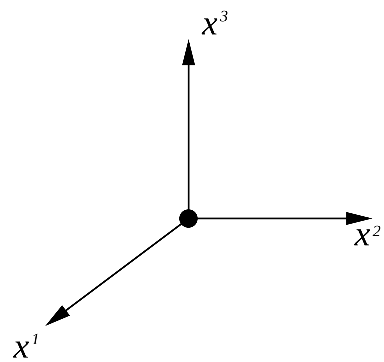


図 41: 空間方向で点状に見える物体

には、この tachyon、Higgs 場の値が、空間座標が無限大になった時に真空になって欲しい。

$$T \to g \begin{pmatrix} v & \\ & -v \end{pmatrix} g^{-1}, \qquad (|\vec{x}| \to \infty) \tag{163}$$

こういう形。もしこういう形に落ち着かないってことは、無限に遠くにいってもpotential energy があるってことになります。energy density が無限に続いているとそれは energy 発散するので、遠くのほうでは energy 0 になるような configuration を考えましょう。で、そういう配位を考えなさいという問題は、空間 3 次元の中の $|\vec{x}| \to \infty$ が張る球面 S^2 を考えればいい。この球面 S^2 を考えて、gっていう $SU(2)$ の元の無限遠での値 (S^2 上での値) だけに注目することにすると、gっていうのは、S^2 から $SU(2)$ への map を定義しますね。

この無限遠の S^2 での g の値を定めてやれば、tachyon の無限遠での振る舞いが決まる。ただし g のとり方は $SU(2)$ 全部が effective に効くわけではなくって、なんか対角行列があってそれを g にかけて、

$$g \to \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & \\ & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} g \tag{164}$$

g をこう置き換えてもその tachyon の値は変わらないわけですね。変わらない。この factor をかけるっていうのは、破れずに残った $U(1)$ part の自由度が残っている

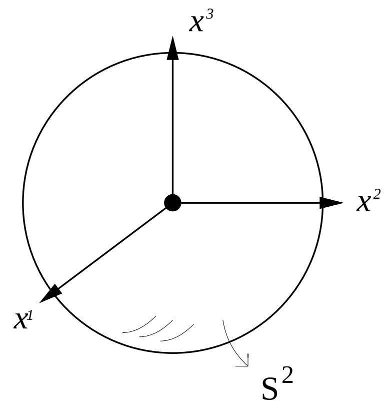


図 42: $|\vec{x}| \to \infty$ の張る S^2

ということです。そうすると、この $U(1)$ part は tachyon の値に効かないので、結局 tachyon の無限遠での振る舞いは S^2 から $SU(2)$ への map をなんか $U(1)$ で割ったような、

$$S^2 \to SU(2)/U(1) \tag{165}$$

これで定義される。連続変形で写りあうものは全部同一視することにすると、こういう map で分類されることになります。言い替えると、こういう map を連続変形で同一視することで分類することができる、ということになります。で、この S^2 からなんかある多様体への map で、連続変形で写りあうものを同一視したもの、そういう分類っていうのは実は数学の人は昔から知っていて、それが Π_2 と呼ばれる 2 次の homotopy 群。それで実は、この値を数学の人に聞くと答えを知っていて、$\mathbb{Z}$。

$$\Rightarrow \Pi_2\left(SU(2)/U(1)\right) \simeq \mathbb{Z} \tag{166}$$

$\mathbb{Z}$って整数ですね。だから、連続変形では決して写りあえないような配位が整数で label されるだけ無限にいっぱいあるってことを、これ言っている。で、この整数値っていうのは実は、運動方程式からちょっと見てやればいいんですが、磁荷に対応する monopole の charge ですね。't Hooft-Polyakov monopoleってのは、この Lagrangian から出てくる運動方程式の厳密解も知られていますが、ま、解を求めなくてもだいたいどんなものが出てくるかっていうのは、topological な分類はできるわけです。

で、この思想を今の系で使いたい。今の場合に応用するわけですけど、ちょっと時間無いので、Type IIBだけやって終わりましょう。Type IIBですが、D9-$\overline{\text{D9}}$が N ペアあるような、そういう系を考えます。そうするとさっき言ったように、$U(N)\times U(N)$ gauge 理論ですね。その tachyon 場っていうのは、これの bifundamental 表現に属するスカラー場であるということを言いました ($T:(\square,\square)$)。それでこの tachyon 場の真空期待値が nonzero になると、実はこの $U(N)\times U(N)$っていう対

称性が diagonal な $U(N)$ に破れます。tachyon がだいたい対角化して、

$$\langle T\rangle \sim u \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad u \to \infty \tag{167}$$

こういう状況を考える。tachyon が bifundamentalっていうことは、$U(N)\times U(N)$ の (g_1, g_2) という元があったとしたら、この tachyon は $T \to g_1 T g_2^{-1}$ みたいなこういう変換の仕方をします。で、もしこの tachyon の真空期待値が (167) のような値をとったとしたら、この g_1 と g_2 が関係付いて 2 つあった $U(N)$ が 1 つに落ちる。そういう状況になってます。$U(N)\times U(N) \to U(N)$。

で、さっきと同じようなことをするんですけど、今度 $x^0 \sim x^p$ 方向に関して一様だとして、$x^{p+1} \sim x^9$ までの方向の $9-p$ 次元で点状に見えるような物体を考えます。そうするとこの絵がどうなるかというと、どう描いたらいいんだろう？2 次元で描いちゃおうか (図 43)。この平面が $x^{p+1} \sim x^9$ を走る、そういう平面で描い

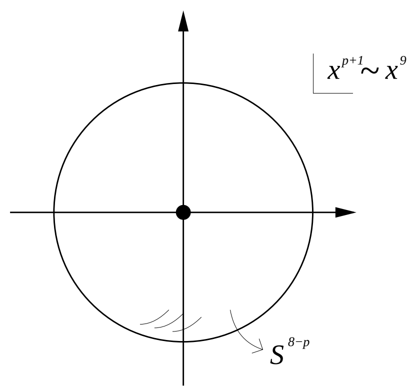


図 43: $9-p$ 次元で点状に見えるような物体

て、それで $x^{p+1} \sim x^9 \to 0$ の辺だけになんか energy が集中して、この無限遠方、中心から離れたところではなんか energy が 0 になって D-brane が消えてなくなっているような、そういう状況を考えてやる。そうするとこれって $x^{p+1} \sim x^9 \to \infty$ の球面を考えると、この球面っていうのは $8-p$ 次元ですね。で、前と全く同じことをやると、前の S^2 ってのが S^{8-p} になる。

前は全体で $SU(2)/U(1)$ になってましたが、$SU(2)$っていうのはもともとの gauge 群でしたね。今の場合、もともとの gauge 群は $U(N)\times U(N)$。また、前は破れずに残った部分が $U(1)$。で、今の場合破れずに残る部分はさっき言ったように $U(N)$ です。これらで分類される。だから tachyon の無限遠方での振舞いというのはこの S^{8-p} から $U(N)\times U(N)/U(N)$ という map を与えれば一意的に決まる。

$$\Rightarrow S^{8-p} \to U(N)\times U(N)/U(N) \tag{168}$$

そうすると、それに対応する数学的な記号を書くと、Π_2 の 2 ってのが S^2 の 2 だったわけで、今は Π_{8-p}。で、あと中身は一緒。$U(N) \times U(N)/U(N)$ というので分類される事になります。これってもうなんか約分してしまうと単に $\Pi_{8-p}(U(N))$ と等しくて、

$$\Pi_{8-p}\left(\frac{U(N) \times U(N)}{U(N)}\right) = \Pi_{8-p}(U(N)). \tag{169}$$

それでこの値、高次の homotopy 群の値っていうのは岩波数学辞典の付録に一覧表が載っていて、実は N が十分大きくなると、0 か $\mathbb{Z}$ です。N が十分大きくなると、この homotopy 群の値っていうのが一定になって、このとき p が even だったら 0、p が odd だったら整数という、こういうことが知られています。

$$\Pi_{8-p}(U(N)) \simeq \begin{cases} 0 & (p : \text{even}) \\ \mathbb{Z} & (p : \text{odd}) \end{cases} \qquad (N : \text{十分大きい}) \tag{170}$$

これ、数学辞典に載っています。で、ここから分かる事は、Type IIB では Dp-brane で p が odd なものが安定に存在するだろう、ということが分かるわけですが、これってまさに section 3 の 53 ページで言った表 2、書きましたよね、あの表で言った通りです。あー、だいぶ過ぎちゃった。えーと、ま、ちょっと、だいぶ時間過ぎちゃったので、だいたい言いたいことはこれなんですけど、今 Type IIB でやりましたが、Type IIA でもまったく同じようにできます。ただしそのときはこの even と odd が逆になります。で、section 3 で言ったような安定な、supersymmetry があるような、そういう D-brane の表がこういうすごい荒っぽい topological な議論で全く同じ様に再現できる。どういう D-brane が存在するかという section 3 でやったときの議論を思い出すと、今やった議論と全然違う議論だったことに気付くと思うんですが、見かけ上全然違う議論をして同じ答えを出したというのは、これも string ってうまくいっているなと思えるようなそんな一例になっていると思います。

ちょっと駆け足でコメントだけいくつかばーばっと言っちゃいますと、今、次元だけを見て Dp-brane だと言ったわけですが、次元だけの情報で Dp-brane と結論付けていいのかと思われるかも知れないんですが、これ、実は厳密に示すことができます。D-brane の boundary state というのを使って、本当に厳密に D-brane が再現されるということは示すことができる。で、それ、僕ら、寺嶋君と浅川君と僕で、3 人組みで書いた論文がありまして、非常に簡単で綺麗でしかも厳密な議論があって、それでこの話を受けるときにできたらその話をやれたらいいなと思ったんですが、とてもじゃないけどちょっと時間なくてできなかったんですが。まあ、興味のある人は見てみてください[6]。本当に厳密に D-brane が再現できるということを、string の言葉で言うことができる。

それで、あと今日話せなかった、話したかったんですが話せなかったことの 1 つの話題で、この N がでっかいところの振る舞いっていうのが実はこれ、K という

[6] Tsuguhiko Asakawa, Shigeki Sugimoto and Seiji Terashima, "Exact Description of D-branes via Tachyon Condensation", arXiv:hep-th/0212188.

言葉を使って、わけ分からんと思うかも知れないけど、

$$\Pi_{8-p}(U(N)) = K(\mathbb{R}^{9-p}) \tag{171}$$

こう書き直すことができます。数学の方で K 理論という理論があるんです。K 理論という理論が数学の方で知られていて、D-brane というのは K 理論で分類されるということを Witten が 98 年かな、くらいに言いました。で、これ、非常に面白いんですけど、K 理論って物理の人にはなじみのそれほど深くない数学の理論だったのが、D-brane というものを通じて直接関係付くようになった。で、実は K 理論の定義自体が tachyon を含んでいて、なんでしょう、例えば僕なんかこの議論を知るまで K 理論なんてほとんど聞いた事ぐらいしかなかったんですが、この議論を知ったあとで K 理論の教科書を見てみると、物理の事がいっぱい書いてあるわけですね。tachyon のことがいっぱい書いてある。本当に物理と数学の非常に深遠な関係を見せる、そういう議論が実はあります。が、まあ残念ながら省略せざるを得ないでしょう。

6　その他の話題

で、あと、section 6 でその他の話題というのも言おうとしたんですが、まあしょうがないのでこのくらいで終わりにします。