量子情報理論の基礎
（と、物理への応用）

京都大学 基礎物理学研究所 特定准教授

中田 芳史

@名古屋大学 集中講義 9月13日～15日

講義の内容（予定）

1. **量子情報の基本**
   1. 量子状態、量子チャンネル、量子測定 についての復習etc…
   2. 量子状態の性質
   3. 量子状態の“ものさし”

一日目

2. **エンタングルメント**

二日目

3. **ノイズレスな量子通信の基礎プロトコル**
   1. 通信リソースを**単体で**用いたときに、できること・できないこと
   2. 通信リソースを**組み合わせた**ときに、できること・できないこと
   3. ノイズレスな量子通信の完全な特徴付け

講義の内容（予定）

二日目

4. **量子情報源の圧縮**
   I. 量子情報源とは？
   II. 量子情報源の圧縮定理

三日目

5. **ノイジーな量子通信路の量子通信容量（飛ばします）**
   I. 量子通信容量
   II. 量子通信容量の逆定理
   III. 量子通信容量の順定理
6. **量子通信の物理への応用（時間があれば）**
   I. Hayden-Preskillプロトコル

講義で取り扱わない内容（ごめんなさい）

- **量子計算や量子アルゴリズム、量子計算量**

  ➡ 西村先生、Le Gall先生（名古屋大学）

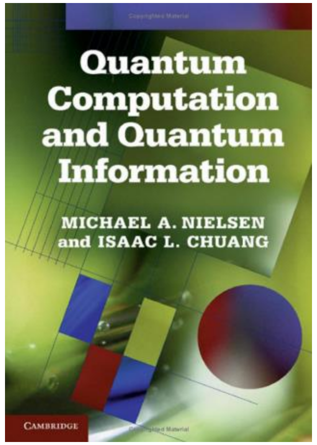
- **量子誤り訂正**（スタビライザー符号など狭義の意味） ➡ 自学してください。。。
- **量子基礎論（Bellの不等式など）** ➡ 谷村先生（名古屋大学）、木村先生（芝浦工大）
- **量子暗号** ➡ 量子鍵配送であれば、小芦先生（東京大学）

  最近、一部で流行っている量子暗号であれば、森前先生（京都大学）

- **量子多体系への量子情報的アプローチ**

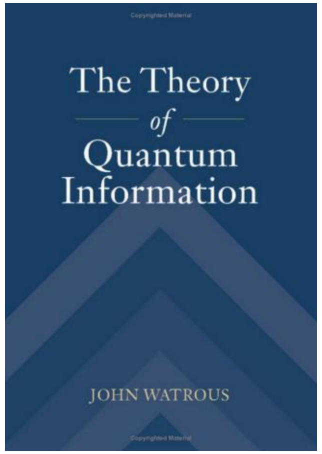
  ➡ 加藤先生（名古屋大学）、桑原さん（理研）

参考書



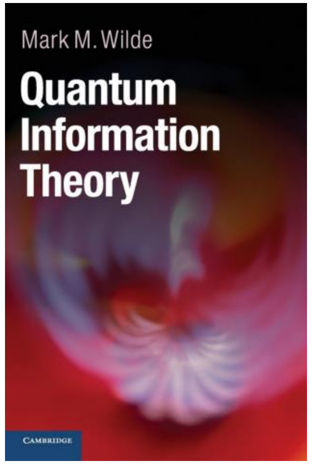
[Nielsen & Chuang]

初心者には読みやすいが
やや古い内容も。



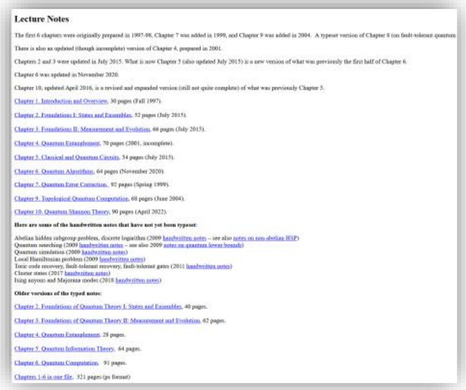
[Watrous: 彼のHPの講義録も]

表記がすごく特殊。
内容は一番よいかも。



[Wilde: arXiv:1106.1445]

情報理論を学ぶにはよい。


Lecture Notes

J. Preskill氏による講義録。
物理出身の人にはよいかも。

近々、朝倉書店より拙著「量子情報理論（仮題）」が出版予定。

（今月に脱稿する予定なので、今年末くらい？）

単位の評価

- レポート計5問　・・・　3問以上は解くこと。

本講義で用いる記法 1

- **ヒルベルト空間**$\mathcal{H}$=**内積が定義された**完備な**ベクトル空間。**
- **Diracのブラケット記法**

ケット・ベクトル $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$ $v_1, v_2, \ldots$は複素数で、(ほとんどの場合は)$|v_1|^2 + \cdots + |v_d|^2 = 1$

$\Downarrow$ **転置**かつ**複素共役＝エルミート共役**

ブラ・ベクトル $\langle v| = |v\rangle^\dagger = (\overline{v_1} \quad \overline{v_2} \quad \cdots \quad \overline{v_d})$

内積

- $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$ と $|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$ の内積は、 $\langle v|u\rangle = (\overline{v_1} \quad \overline{v_2} \quad \cdots \quad \overline{v_d})\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} = \overline{v_1}u_1 + \cdots + \overline{v_d}u_d$
- $\langle v|u\rangle = \overline{\langle u|v\rangle}$が成り立つ。

本講義で用いる記法１

- Diracのブラケット記法

$\boxed{\text{完全性関係式}}$

任意の正規直交基底：$\{|e_j\rangle\}_{j=1}^{d}$ に対して、$\sum_{j=1}^{d} |e_j\rangle\langle e_j| = I$ が成り立つ。

例：ベクトル$|v\rangle$を基底で展開する。

$$|v\rangle = I|v\rangle = \sum_j \left(|e_j\rangle\langle e_j|\right)|v\rangle = \sum_j \underbrace{\langle e_j|v\rangle}_{\text{展開係数}}|e_j\rangle$$

例：行列Mを基底で展開する。

$$M = IMI = \left(\sum_j |e_j\rangle\langle e_j|\right)M\left(\sum_k |e_k\rangle\langle e_k|\right) = \sum_{j,k} m_{jk}|e_j\rangle\langle e_k|$$

ただし、$m_{jk} = \underbrace{\langle e_j|M|e_k\rangle}_{\text{展開係数}}$

本講義で用いる記法 1

テンソル積

サイズ$d_1 d_2$のベクトル

- $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{d_1} \end{pmatrix}$ と $|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{d_2} \end{pmatrix}$ のテンソル積は、 $|v\rangle \otimes |u\rangle = \begin{pmatrix} v_1|u\rangle \\ v_2|u\rangle \\ \vdots \\ v_{d_1}|u\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 u_1 \\ v_1 u_2 \\ \vdots \\ v_1 u_{d_2} \\ v_2 u_1 \\ v_2 u_2 \\ \vdots \\ v_2 u_{d_2} \\ \vdots \\ v_{d_1} u_1 \\ v_{d_1} u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{d_1} u_{d_2} \end{pmatrix}$

- ブラとケットのテンソル積 = 行列

$$|v\rangle \otimes \langle u| = |v\rangle\langle u| = \begin{pmatrix} v_1\langle u| \\ v_2\langle u| \\ \vdots \\ v_{d_1}\langle u| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1\overline{u_1} & \cdots & v_1\overline{u_{d_2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{d_1}\overline{u_1} & \cdots & v_{d_1}\overline{u_{d_2}} \end{pmatrix}$$

本講義で用いる記法 1

テンソル積

- 行列のテンソル積も同様。 $\underbrace{M}_{c_1 \times d_1} \otimes \underbrace{N}_{c_2 \times d_2} = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1d_1}N \\ m_{21}N & \dots & m_{2d_1}N \\ & \vdots & \\ m_{c_11}N & \dots & m_{c_1d_1}N \end{pmatrix}$ サイズ$c_1c_2 \times d_1d_2$の行列

- 行列のケットのテンソル積。 $\underbrace{M}_{c_1 \times d_1} \otimes \underbrace{|v\rangle}_{c_2 \times 1} = \begin{pmatrix} m_{11}|v\rangle & \dots & m_{1d}|v\rangle \\ m_{21}|v\rangle & \dots & m_{2d}|v\rangle \\ & \vdots & \\ m_{d1}|v\rangle & \dots & m_{dd}|v\rangle \end{pmatrix}$

  サイズ$c_1c_1 \times d_1$の行列

- 同様にして、$|v\rangle \otimes M$や、$\langle v| \otimes M$等も定義される。

本講義で用いる記法１

- **ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の行列全体の集合を、$\mathcal{B}(\mathcal{H})$と書く。**
  - **エルミート行列**とは、$\underline{M = M^\dagger}$を満たす行列。対角化可能で、固有値は実数。
  - **半正定値行列：**エルミート行列Mで固有値が全て0以上のもの。

    行列不等式：エルミート行列MとNが$M - N \geq 0$を満たすとき、$M \geq N$と書く。
  - （**直交**）**射影行列**とは、$\Pi^2 = \Pi$を満たすエルミート行列。対角化可能で、固有値は1 or 0。
  - **ユニタリ行列**とは、$U^\dagger U = UU^\dagger = I$を満たす行列。対角化可能で、固有値は$\underline{e^{i\theta}}$ $\underline{(\theta \in [0, 2\pi))}$。

エルミート行列	半正定値行列	射影行列	ユニタリ行列
$\begin{pmatrix} r_1 & r_3 e^{i\theta} \\ r_3 e^{-i\theta} & r_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$	$\Pi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathrm{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

本講義で用いる記法１

- **行列関数**
  - **対角化可能な行列**Mに対して、$f(M)$を以下のように定める。

$$\text{対角化：} M = \sum_j m_j |e_j\rangle\langle e_j| \quad \Rightarrow \quad f(M) = \sum_j f(m_j)|e_j\rangle\langle e_j|$$

例１：$f(x) = x^n$ (nは自然数) → $f(M) = M^n$ （通常の行列積）

例２：$f(x) = \sqrt{x}$ → $f(M) = \sqrt{M} = \sum_j \sqrt{m_j}\ |e_j\rangle\langle e_j|$

例３：$f(x) = \log x$ → $f(M) = \log M = \sum_j \log m_j\ |e_j\rangle\langle e_j|$

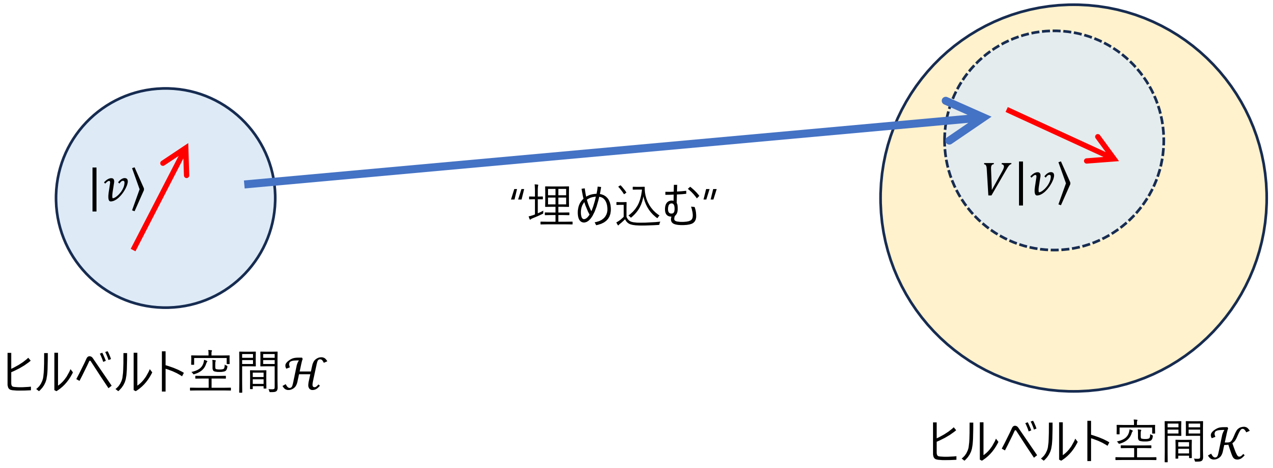
例４：$f(x) = |x|$ → $f(M) = |M| = \sum_j |m_j|\ |e_j\rangle\langle e_j| = \sum_j \sqrt{\overline{m_j} m_j}\ |e_j\rangle\langle e_j| = \sqrt{M^\dagger M}$

本講義で用いる記法 1

よく使う

- ヒルベルト空間$\mathcal{H}$から$\mathcal{K}$へ行列全体の集合を、$\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$と書く。
  - アイソメトリ（等長写像）とは、$V\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$で$V^\dagger V=I$を満たす行列で、dim$\mathcal{H}$ ≤dim$\mathcal{K}$のときに存在。

$$V^{\mathcal{H}\to\mathcal{K}}=\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1d_{\mathcal{H}}} \\ v_{21} & \cdots & v_{2d_{\mathcal{H}}} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{d_{\mathcal{K}}1} & \cdots & v_{d_{\mathcal{K}}d_{\mathcal{H}}} \end{pmatrix}$$



- **縦長の行列**で、$V^\dagger V=I$を満たすもの。
  （$VV^\dagger$ は一般的には射影行列）
- dim$\mathcal{H}$ =dim$\mathcal{K}$の場合はユニタリ

例 1 ：ケット・ベクトル $|v\rangle$

$(|v\rangle)^\dagger|v\rangle=\langle v|v\rangle=1$

例 2 ：ユニタリ行列

本講義で用いる記法２

- **本講義での約束１**：ベクトルや行列が定義されるヒルベルト空間を、**上付き添え字**で表す。
    - ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A$のケット・ベクトル：$|\psi\rangle^A, |\phi\rangle^A, etc \ldots$
    - ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A$上の行列：$M^A,\ \rho^A, U^A, V^A, etc \ldots$
    - ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A$から$\mathcal{H}^B$への行列：$V^{A\to B}, K^{A\to B}, etc \ldots$

- **本講義での約束２**：恒等行列Iは省略することが多い。

例１：$U^A|\psi\rangle^{AB} = (U^A \otimes I^B)|\psi\rangle^{AB}$,　$V^B|\psi\rangle^{AB} = (I^A \otimes V^B)|\psi\rangle^{AB}$

例２：$\langle v|^B M^A|u\rangle^{AB} = (I^A \otimes \langle v|^B)(M^A \otimes I^B)|u\rangle^{AB} = (M^A \otimes \langle v|^B)|u\rangle^{AB}$

例３：$\langle v|^B|u\rangle^{AB} = (I^A \otimes \langle v|^B)\,|u\rangle^{AB}$

本講義で用いる記法 2

とてもよく使う

- **行列のランク**・・・（対角化可能な行列の場合は）非ゼロの固有値の個数
- **行列のトレース**
  - d次元ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の行列Mのトレースは、$\mathrm{Tr}[M] = \sum_{j=0}^{d-1} \langle e_j | M | e_j \rangle$。ただし、$\{|e_j\rangle\}_j$は正規直交基底。
  - トレースは巡回性を持つ。$\mathrm{Tr}[M_1 M_2 M_3] = \mathrm{Tr}[M_3 M_1 M_2] = \mathrm{Tr}[M_2 M_3 M_1]$。例： $\mathrm{Tr}[|u\rangle\langle v|] = \langle v|u\rangle$
- **行列の部分トレース** (partial trace)
  - ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$上の行列$M^{AB}$の系$B$の**部分トレース$\mathrm{Tr_B}$**を、以下で定める。（$\mathrm{Tr}_A$も同様に定める）

$$\mathrm{Tr}_B\left[M^{AB}\right] = \sum_{j=0}^{d_B-1} \left(I^A \otimes \langle e_j|^B\right) M^{AB} \left(I^A \otimes |e_j\rangle^B\right)$$

← ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A$上の**縮約行列**。

$$M^{AB} = \sum_{i,j,k,\ell} m_{ik}^{j\ell} |e_i\rangle\langle e_j|^A \otimes |f_k\rangle\langle f_\ell|^B$$

➡

$$M^A := \mathrm{Tr}_B\left[M^{AB}\right] = \sum_{i,j,k,\ell} m_{ik}^{j\ell} |e_i\rangle\langle e_j|^A \mathrm{Tr}\left[|f_k\rangle\langle f_\ell|\right]$$

$$= \sum_{i,j}\left(\sum_k m_{ik}^{jk}\right)|e_i\rangle\langle e_j|^A$$

本講義で用いる記法 3

- 対応するヒルベルト空間が二次元であるような物理系を、**qubit**と呼ぶ。
- **Pauli行列**
  - 1-qubitの正規直交基底{|0⟩, |1⟩}が与えられたとき、Pauli-X、Pauli-Y、Pauli-Z行列を以下で定める。

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

追加で、恒等演算子もPauli行列と呼ぶことも。

$$\mathrm{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

あとで使う

Xの固有状態は、$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$で、$Z$の固有状態は$|0\rangle$と$|1\rangle$。

また、$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$、$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$

本講義で用いる記法 3

- 対応するヒルベルト空間が二次元であるような物理系を、**qubit**と呼ぶ。
- **Pauli行列**
  - 1-qubitの正規直交基底$\{|0\rangle, |1\rangle\}$が与えられたとき、Pauli-X、Pauli-Y、Pauli-Z行列を以下で定める。

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

追加で、恒等演算子もPauli行列と呼ぶことも。

$$\mathrm{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- n個のqubit上のPauli行列を$\boldsymbol{n}$**-qubit Pauli行列**と呼び、1-qubit Pauli行列のテンソル積で与えられる。

例：$X \otimes I \otimes Y \otimes \cdots \otimes Z$とか。$4^n$種類あることに注意。

本講義で用いる記法 3

- 対応するヒルベルト空間がd次元であるような物理系を、**qudit**と呼ぶ。
- **Heisenberg-Weyl行列**（Pauli行列のqudit版）
  - 1-quditの正規直交基底$\{|j\rangle\}_{j=0\ldots d-1}$が与えられたとき、$X_d$と$Z_d$を以下で定める。

あとで使う

$$X_d = \sum_{j=0}^{d-1} |j+1\rangle\langle j| \qquad Z_d = \sum_{j=0}^{d-1} \omega^j |j\rangle\langle j|$$

ただし、$\omega = e^{i\frac{2\pi}{d}}$

ただし、和はmod dとする。例：$|d\rangle = |0\rangle$。

講義の内容（予定）

1. **量子情報の基本**
   1. 量子状態、量子チャンネル、量子測定 についての復習etc…
   2. 量子状態の性質
   3. 量子状態の“ものさし”
2. **エンタングルメント**
3. **ノイズレスな量子通信の基礎プロトコル**
   1. 通信リソースを**単体**で用いたときに、できること・できないこと
   2. 通信リソースを**組み合わせた**ときに、できること・できないこと
   3. ノイズレスな量子通信の完全な特徴付け

一日目

二日目

1-I. 量子情報の基本

量子情報理論＝量子力学の公理に基づく、情報理論

量子力学の公理

公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、$\mathcal{H}$の単位ベクトル$|\psi\rangle$はその系の量子状態を与える。ただし、$|\psi\rangle$と$e^{i\theta}|\psi\rangle$は常に同一視する。

公理２：時間発展

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の任意のユニタリUに対して、量子状態$|\psi\rangle$を$U|\psi\rangle$に変換する物理過程が存在する。

公理３：量子測定

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$の次元をd、正規直交基底を$\{|e_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$とする。量子状態$|\psi\rangle$に対して、測定結果$j$を確率$p_j = |\langle e_j|\psi\rangle|^2$で出力し、量子状態を$|e_j\rangle$に変化させる物理過程（＝測定）が存在する。

公理４：複合系

複合量子系のヒルベルト空間は、各々のヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。

1-I. 量子情報の基本

公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、$\mathcal{H}$の単位ベクトル$|\psi\rangle$はその系の量子状態を与える。ただし、$|\psi\rangle$と$e^{i\theta}|\psi\rangle$は常に同一視する。

拡張公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$が付随し、量子状態は$\mathcal{H}$上の**密度行列**$\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$で表される。密度行列とは、$\rho \geq 0$, Tr[$\rho$]=1を満たす行列である。密度行列全体の集合を$\mathcal{S}(\mathcal{H})$と書く。また、ランクが1の密度行列で表される量子状態を純粋状態と呼び、しばしば$\mathcal{H}$上の単位ベクトルで書く。

1-qubit上の量子**純粋**状態 (pure state) $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathbb{C}^2$　(ただし、$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$)。

1-qubit上の量子**混合**状態 (mixed state) $\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \gamma \\ \bar{\gamma} & |\beta|^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$　($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$、$\gamma$ s.t. $\rho \geq 0$)

➡ 純粋状態$|\psi\rangle$の密度行列は、$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta} \\ \bar{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}$。**ランクが１の密度行列で表される。**

1-I. 量子情報の基本

なぜ密度行列が必要なのか？

公理１：量子状態
物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、$\mathcal{H}$の単位ベクトル$|\psi\rangle$はその系の量子状態を与える。ただし、$|\psi\rangle$と$e^{i\theta}|\psi\rangle$は常に同一視する。

+

公理４：複合系
複合量子系のヒルベルト空間は、各々のヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。

2-qubit**純粋**状態は $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$の単位ベクトル： $|\psi\rangle^{AB} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \alpha|00\rangle^{AB} + \beta|01\rangle^{AB} + \gamma|10\rangle^{AB} + \delta|11\rangle^{AB}$

- 例えば、$|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle^{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle^{AB}$

A B

1-I. 量子情報の基本

<u>なぜ密度行列が必要なのか？</u>

2-qubitの量子**純粋**状態 $|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle^{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle^{AB}$の系Aだけの量子状態がどう記述されるか？

➡ 「系Aの量子状態＝$|\Phi\rangle^{AB}$の密度行列の系Bを部分トレースした状態」になる。

系ABの純粋状態：$|\Phi\rangle\langle\Phi|^{AB} = \frac{1}{2}\left(|00\rangle^{AB} + |11\rangle^{AB}\right)\left(\langle 00|^{AB} + \langle 11|^{AB}\right)$

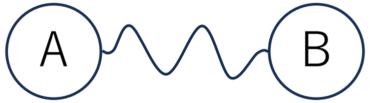
$\Big\downarrow \mathrm{Tr}_B$

系Aの量子状態

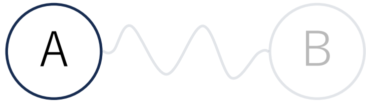
$$\left(I^A \otimes \langle 0|^B\right)|\Phi\rangle\langle\Phi|^{AB}\left(I^A \otimes |0\rangle^B\right) + \left(I^A \otimes \langle 1|^B\right)|\Phi\rangle\langle\Phi|^{AB}\left(I^A \otimes |1\rangle^B\right) = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0|^A + |1\rangle\langle 1|^A\right) = \frac{I^A}{2}$$

ランクが2なので純粋状態ではない！
＝単位ベクトルで書けない！

$|\Phi\rangle^{AB}$



$I^A/2$



1-I. 量子情報の基本

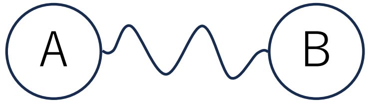
<u>なぜ密度行列が必要なのか？</u>

2-qubitの量子**純粋**状態 $|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle^{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle^{AB}$の系Aだけの量子状態がどう記述されるか？

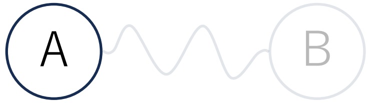
➡ 「系Aの量子状態＝$|\Phi\rangle^{AB}$の密度行列の系Bを部分トレースした状態」になる。

→ 量子系全てが手元にあれば**純粋状態**で十分だが、**部分系だけを見ると混合状態**で、密度行列が必要。

$|\Phi\rangle^{AB}$



$I^A/2$



1-I. 量子情報の基本

量子情報理論＝量子力学の公理に基づく、情報理論

量子力学の公理

公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、$\mathcal{H}$の単位ベクトル$|\psi\rangle$はその系の量子状態を与える。ただし、$|\psi\rangle$と$e^{i\theta}|\psi\rangle$は常に同一視する。

公理２：時間発展

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の任意のユニタリUに対して、量子状態$|\psi\rangle$を$U|\psi\rangle$に変換する物理過程が存在する。

公理３：量子測定

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$の次元をd、正規直交基底を$\{|e_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$とする。量子状態$|\psi\rangle$に対して、測定結果$j$を確率$p_j = |\langle e_j|\psi\rangle|^2$で出力し、量子状態を$|e_j\rangle$に変化させる物理過程（＝測定）が存在する。

公理４：複合系

複合量子系のヒルベルト空間は、各々のヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。

1-I. 量子情報の基本

量子情報理論＝量子力学の公理に基づく、情報理論

量子力学の公理

公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、その系の量子状態は**密度行列$\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\mathcal{H}})$**で記述される。

公理２：時間発展

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の任意のユニタリUに対して、量子状態$|\psi\rangle$を$U|\psi\rangle$に変換する物理過程が存在する。

公理３：量子測定

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$の次元をd、正規直交基底を$\{|e_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$とする。量子状態$|\psi\rangle$に対して、測定結果$j$を確率$p_j = |\langle e_j|\psi\rangle|^2$で出力し、量子状態を$|e_j\rangle$に変化させる物理過程（＝測定）が存在する。

公理４：複合系

複合量子系のヒルベルト空間は、各々のヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。

1-I. 量子情報の基本

量子情報理論＝量子力学の公理に基づく、情報理論

量子力学の公理

公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、その系の量子状態は**密度行列$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$**で記述される。

公理２：時間発展

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の任意のユニタリUに対して、量子状態$|\psi\rangle$を$U|\psi\rangle$に変換する物理過程が存在する。

公理３：量子測定

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$の次元をd、正規直交基底を$\{|e_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$とする。量子状態$|\psi\rangle$に対して、測定結果$j$を確率$p_j = |\langle e_j|\psi\rangle|^2$で出力し、量子状態を$|e_j\rangle$に変化させる物理過程（＝測定）が存在する。

公理４：複合系

複合量子系のヒルベルト空間は、各々のヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。

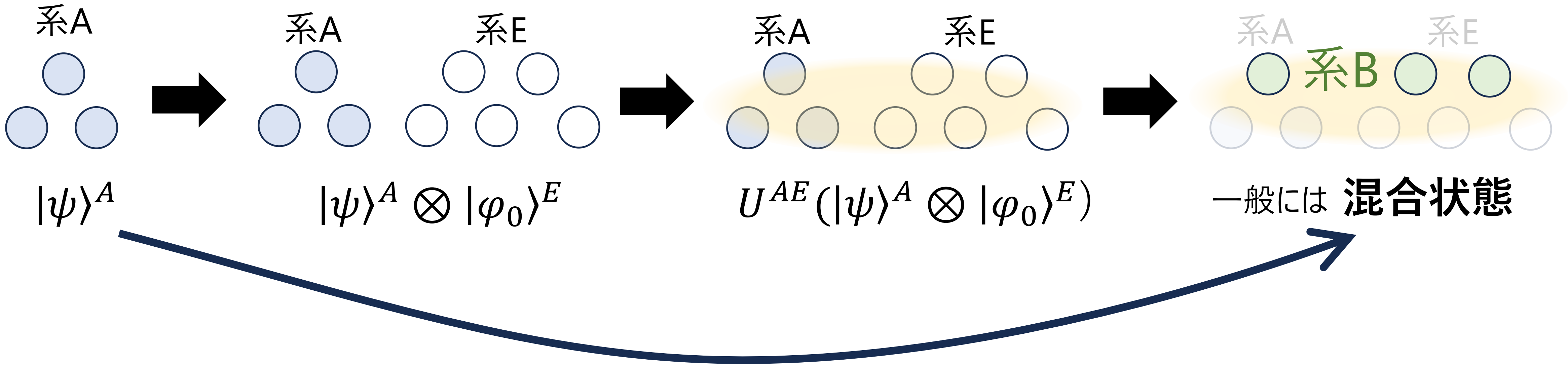
1-I. 量子情報の基本

公理２：時間発展

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の任意のユニタリUに対して、量子状態$|\psi\rangle$を$U|\psi\rangle$に変換する物理過程が存在する。

密度行列で表すと$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$なので、ユニタリ時間発展は$\rho \to U\rho U^\dagger$となる。

一般の時間発展



系Aから系Bへの時間発展は、一般にはユニタリではない。

1-I. 量子情報の基本

公理２：時間発展

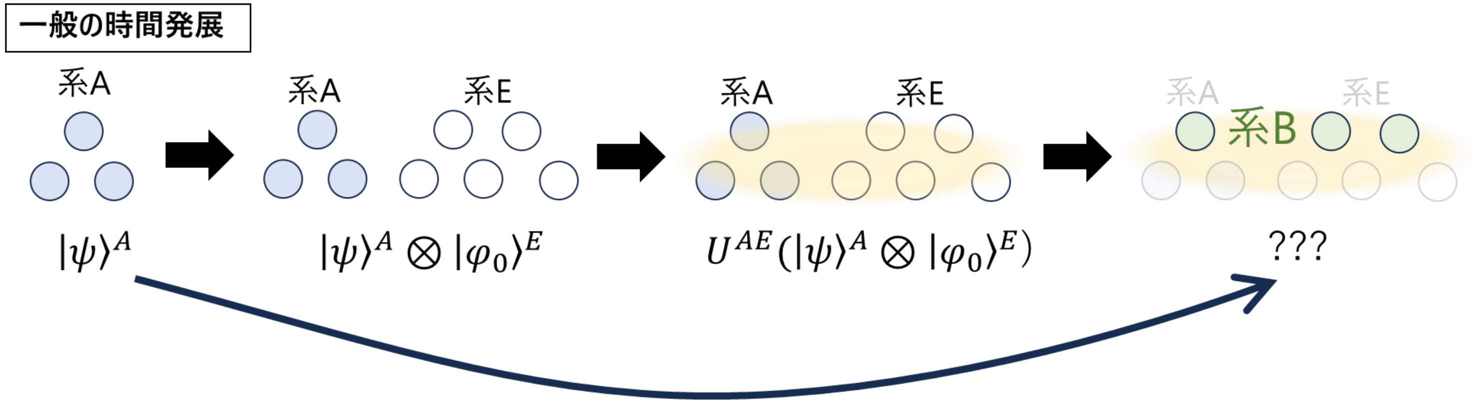
ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の任意のユニタリUに対して、量子状態$|\psi\rangle$を$U|\psi\rangle$に変換する物理過程が存在する。

拡張公理２：時間発展

物理系Aから物理系Bへの時間発展は、completely-positive & trace-preserving(CPTP)写像と呼ばれる$\mathcal{B}(\mathcal{H}^A)$から$\mathcal{B}(\mathcal{H}^B)$への写像で記述される。ここで、CPTP写像とは、以下の条件を満たす写像である。

CP性：任意の$O^{AE} \geq 0$に対して、$\mathcal{T}^{A\to B} \otimes \mathrm{id}^E(O^{AE}) \geq 0$,

TP性：任意のO^Aに対して、$\mathrm{Tr}[\mathcal{T}^{A\to B}(O^A)] = \mathrm{Tr}[O^A]$.



系Aから系Bへの時間発展は、一般にはユニタリではない。

1-I. 量子情報の基本

定理 [量子系の時間発展の三つの表現] 系Aから系Bへの写像$\mathcal{T}^{A\to B}$に対して、以下は全て同値。

1. 写像$\mathcal{T}^{A\to B}$がCPTP写像。
2. [Stinespring拡張] 系E上の状態$|\varphi_0\rangle^E$、ユニタリU^{AE}、複合系AEの分解BCが存在して、写像$\mathcal{T}^{A\to B}$を以下のように書ける。

$$\mathcal{T}^{A\to B}(\rho^A) = \mathrm{Tr}_C\left[\mathrm{U}^{AE}(\rho^A \otimes |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|^E)U^{AE\dagger}\right]$$
$$= \mathrm{Tr}_C\left[V^{A\to AE}\rho^A V^{A\to AE\dagger}\right]$$

$\boxed{V^{A\to AE}\text{：Stinespringアイソメトリ}}$

3. [Choi-Kraus表現] 演算子の集合$\{K_j^{A\to B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^A,\mathcal{H}^B)\}_j$で、$\sum_j (K_j^{A\to B})^\dagger K_j^{A\to B} = I^A$を満たすものが存在して、写像$\mathcal{T}^{A\to B}$を以下のように書ける。

$$\mathcal{T}^{A\to B}(\rho^A) = \sum_j K_j^{A\to B}\rho^A(K_j^{A\to B})^\dagger$$

$\boxed{K_j^{A\to B}\text{：Kraus演算子}}$

1-I. 量子情報の基本

拡張公理２：時間発展

物理系Aから物理系Bへの時間発展は、completely-positive & trace-preserving(CPTP)写像と呼ばれる$\mathcal{B}(\mathcal{H}^A)$から$\mathcal{B}(\mathcal{H}^B)$への写像で記述される。ここで、CPTP写像とは、以下の条件を満たす写像である。

CP性：任意の$O^{AE} \geq 0$に対して、$\mathcal{T}^{A\to B} \otimes \mathrm{id}^E(O^{AE}) \geq 0$,

TP性：任意のO^Aに対して、$\mathrm{Tr}[\mathcal{T}^{A\to B}(O^A)] = \mathrm{Tr}[O^A]$.

ユニタリではない時間発展の例

- 1-qubitのPauliノイズ：1-qubitの量子状態$\rho \rightarrow p\rho + \frac{1-p}{3}(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z)$
- 1-qubitのamplitude dampingノイズ：

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{00} + p\,\rho_{11} & \sqrt{1-p}\,\rho_{01} \\ \sqrt{1-p}\rho_{10} & \rho_{11} - p\,\rho_{11} \end{pmatrix}$$

1-I. 量子情報の基本

量子情報理論＝量子力学の公理に基づく、情報理論

量子力学の公理

公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、その系の量子状態は**密度行列$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$**で記述される。

公理２：時間発展

量子系Aの量子状態ρ^Aの時間発展は、**CPTP写像（量子チャンネル）$\mathcal{T}^{A\to B}$**で記述される。

公理３：量子測定

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$の次元をd、正規直交基底を$\{|e_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$とする。量子状態$|\psi\rangle$に対して、測定結果$j$を確率$p_j = |\langle e_j|\psi\rangle|^2$で出力し、量子状態を$|e_j\rangle$に変化させる物理過程（＝測定）が存在する。

公理４：複合系

複合量子系のヒルベルト空間は、各々のヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。

1-I. 量子情報の基本

量子情報理論＝量子力学の公理に基づく、情報理論

量子力学の公理

公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、その系の量子状態は**密度行列$\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\mathcal{S}(\mathcal{H})}$**で記述される。

公理２：時間発展

量子系Aの量子状態ρ^Aの時間発展は、**CPTP写像（量子チャンネル）$\boldsymbol{\mathcal{T}^{A\to B}}$**で記述される。

公理３：量子測定

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$の次元をd、正規直交基底を$\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=0}^{d-1}$とする。量子状態$|\psi\rangle$に対して、測定結果$j$を確率$p_j = \left|\langle e_j|\psi\rangle\right|^2$で出力し、量子状態を$|e_j\rangle$に変化させる物理過程（＝測定）が存在する。

公理４：複合系

複合量子系のヒルベルト空間は、各々のヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。

1-I. 量子情報の基本

拡張公理３：量子測定

量子測定は、$\boldsymbol{M_j \geq 0}$と$\sum_j \boldsymbol{M_j = I}$を満たすPositive-Operator-Valued Measure (POVM) $\{\boldsymbol{M_j}\}_j$で記述され、量子状態ρを測定したときに測定結果jを得る確率は、$\mathrm{Tr}[M_j\rho]$で与えられる。

典型的な測定の例：射影測定

$\{|e_j\rangle\}_j$を正規直交基底とすると、$|e_j\rangle\langle e_j| \geq 0$で、$\sum_j |e_j\rangle\langle e_j| = I$なので、$\{\Pi_j = |e_j\rangle\langle e_j|\}_j$はPOVM。

- $\{\Pi_j = |e_j\rangle\langle e_j|\}_j$で$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$を測定すると･･･

測定結果jを得る確率： $\mathrm{Tr}[\Pi_j\rho] = \mathrm{Tr}[|e_j\rangle\langle e_j|\rho] = \langle e_j|\rho|e_j\rangle$

測定後の状態： $\dfrac{\Pi_j\rho\Pi_j}{\mathrm{Tr}[\Pi_j\rho\Pi_j]} = \dfrac{|e_j\rangle\langle e_j|\rho|e_j\rangle\langle e_j|}{\mathrm{Tr}[\Pi_j^2\rho]} = \dfrac{(\langle e_j|\rho|e_j\rangle)|e_j\rangle\langle e_j|}{\mathrm{Tr}[\Pi_j\rho]} = |e_j\rangle\langle e_j|$

1-I. 量子情報の基本

拡張公理３：量子測定

量子測定は、$\boldsymbol{M_j \geq 0}$と$\boldsymbol{\sum_j M_j = I}$を満たすPositive-Operator-Valued Measure (POVM) $\{\boldsymbol{M_j}\}_j$で記述され、量子状態ρを測定したときに測定結果jを得る確率は、$\mathrm{Tr}[M_j\rho]$で与えられる。

典型的な測定の例：射影測定

$\{|e_j\rangle\}_j$を正規直交基底とすると、$|e_j\rangle\langle e_j| \geq 0$で、$\sum_j |e_j\rangle\langle e_j| = I$なので、$\{\Pi_j = |\mathrm{e_j}\rangle\langle e_j|\}_j$はPOVM。

- 複合系ABの**量子状態**$\boldsymbol{\rho^{AB}}$の系Bだけを射影測定 $\{\Pi_j^B = |\mathrm{e_j}\rangle\langle e_j|^B\}_j$ で測定すると、

測定結果jを得る確率：$\mathrm{Tr}\left[\Pi_j^B \rho^{AB}\right] = \mathrm{Tr}\left[(I^A \otimes \Pi_j^B)\rho^{AB}\right]=\mathrm{Tr}\left[\Pi_j^B \rho^B\right]$

測定後の状態： $\rho_j^{AB} = \dfrac{\Pi_j^B \rho^{AB} \Pi_j^B}{\mathrm{Tr}\left[\Pi_j^B \rho^{AB} \Pi_j^B\right]}$

1-I. 量子情報の基本

拡張公理３：量子測定
量子測定は、$M_j \geq 0$と$\sum_j M_j = I$を満たすPositive-Operator-Valued Measure (POVM) $\{M_j\}_j$で記述され、量子状態ρを測定したときに測定結果jを得る確率は、$\mathrm{Tr}[M_j \rho]$で与えられる。

典型的な測定の例：射影測定

$\{|e_j\rangle\}_j$を正規直交基底とすると、$|e_j\rangle\langle e_j| \geq 0$で、$\sum_j |e_j\rangle\langle e_j| = I$なので、$\{\Pi_j = |e_j\rangle\langle e_j|\}_j$はPOVM。

よく使う

- 複合系ABの**純粋状態$|\psi\rangle\langle\psi|^{AB}$**の系Bだけを射影測定 $\{\Pi_j^B = |e_j\rangle\langle e_j|^B\}_j$ で測定すると、

測定結果jを得る確率：$\mathrm{Tr}\left[\Pi_j^B |\psi\rangle\langle\psi|^{AB}\right] = \mathrm{Tr}\left[(I^A \otimes \Pi_j^B)|\psi\rangle\langle\psi|^{AB}\right] = \langle\psi|(I \otimes \Pi_j)|\psi\rangle$

測定後の状態：$\dfrac{\Pi_j^B |\psi\rangle\langle\psi|^{AB} \Pi_j^B}{\mathrm{Tr}\left[\Pi_j^B |\psi\rangle\langle\psi|^{AB} \Pi_j^B\right]} = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|^{AB}$　　ただし、$|\psi_j\rangle^{AB} = \dfrac{\Pi_j^B |\psi\rangle^{AB}}{\sqrt{\langle\psi|^{AB} \Pi_j^B |\psi\rangle^{AB}}}$

ランクが１の状態＝純粋状態

1-I. 量子情報の基本

典型的な測定の例：射影測定

2-qubitの純粋状態$|\psi\rangle^{AB} = \alpha|00\rangle^{AB} + \beta|01\rangle^{AB} + \gamma|10\rangle^{AB} + \delta|11\rangle^{AB}$

$\langle 0|^B|\psi\rangle^{AB}$ のノルムの二乗。

例１：系Bを基底$\{ |0\rangle^B, |1\rangle^B \}$で射影測定する。

0を得る確率：$\langle\psi|(I \otimes |0\rangle\underline{\langle 0|)|\psi\rangle} = (\alpha\langle 0|^A + \gamma\langle 1|^A)\underline{(\alpha|0\rangle^A + \gamma|1\rangle^A)} = |\alpha|^2 + |\gamma|^2$

0を得たあとの量子状態：

$$|\psi_j\rangle^{AB} = \frac{|0\rangle\langle 0|^B|\psi\rangle^{AB}}{\sqrt{\langle\psi|^{AB}|0\rangle\langle 0|^B|\psi\rangle^{AB}}} = \frac{(\langle 0|^B|\psi\rangle^{AB}) \otimes |0\rangle^B}{\|\langle 0|^B|\psi\rangle^{AB}\|} = \frac{(\alpha|0\rangle^A + \gamma|1\rangle^A) \otimes |0\rangle^B}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\gamma|^2}}$$

測定結果が１の場合も同様に計算できる。

1-I. 量子情報の基本

典型的な測定の例：射影測定

2-qubitの純粋状態$|\psi\rangle^{AB} = \alpha|00\rangle^{AB} + \beta|01\rangle^{AB} + \gamma|10\rangle^{AB} + \delta|11\rangle^{AB}$

例２：系Bを基底$\{|+\rangle^B, |-\rangle^B\}$で射影測定する。

$$\langle -|^B|\psi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle^A - \beta|0\rangle^A + \gamma|1\rangle^A - \delta|1\rangle^A\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\alpha-\beta)|0\rangle^A + (\gamma-\delta)|1\rangle^A\right)$$

$-$を得る確率：$\left\|\langle -|^B|\psi\rangle^{AB}\right\|^2 = \dfrac{|\alpha-\beta|^2 + |\gamma-\delta|^2}{2}$

$-$を得たあとの量子状態：

$$|\psi_+\rangle^{AB} \propto \left(\langle -|^B|\psi\rangle^{AB}\right) \otimes |-\rangle^B \propto \left((\alpha-\beta)|0\rangle^A + (\gamma-\delta)|1\rangle^A\right) \otimes |-\rangle^B$$

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$$

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

測定結果が＋の場合も同様に計算できる。

1-I. 量子情報の基本

量子情報理論＝量子力学の公理に基づく、情報理論

量子力学の公理

公理１：量子状態

物理系にはヒルベルト空間$\mathcal{H}$ が付随し、その系の量子状態は**密度行列$\boldsymbol{\rho} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\mathcal{H}})$**で記述される。

公理２：時間発展

量子系Aの量子状態ρ^Aの時間発展は、**量子チャンネル$\boldsymbol{\mathcal{T}}^{\boldsymbol{A\to B}}$**で記述される。

公理３：量子測定

量子測定は、**$\boldsymbol{M_j \geq 0}$と$\boldsymbol{\sum_j M_j = I}$を満たすPositive-Operator-Valued Measure (POVM) $\boldsymbol{\{M_j\}_j}$**で記述され、量子状態ρを測定したときに測定結果jを得る確率は、$\mathrm{Tr}[M_j\rho]$で与えられる。

公理４：複合系

複合量子系のヒルベルト空間は、各々のヒルベルト空間のテンソル積で与えられる。

講義の内容（予定）

1. **量子情報の基本**
   I. 量子状態、量子チャンネル、量子測定 についての復習etc…
   II. 量子状態の性質
   III. 量子状態の“ものさし”

2. **ノイズレスな量子通信の基礎プロトコル**
   I. エンタングルメント配布、超高密度符号、量子テレポーテーション
   II. それらのプロトコルの最適性

一日目

二日目

3. **量子エントロピー**
   I. 種々のエントロピーとその基本的な性質
   II. 量子状態の識別可能性 2

1-II. 量子状態の性質

1. 純粋状態の**Schmidt分解**。
2. 混合状態の**純粋化**。
3. 状態のアンサンブルと密度行列の関係。

1-II. 量子状態の性質

1. 純粋状態の**Schmidt分解**。

複合系ABの純粋状態$|\psi\rangle^{AB}$は、ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A$の基底$\left\{|e_j\rangle^A\right\}_{j=1}^{d_A}$と$\mathcal{H}^B$の基底$\{|f_k\rangle^B\}_{k=1}^{d_B}$を用いて、

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{d_A}\sum_{k=1}^{d_B} c_{jk}|e_j\rangle^A \otimes |f_k\rangle^B$$

とかける（当たり前）。

$|\psi\rangle^{AB}$のSchmidt基底

ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A$のうまい基底$\left\{|a_j\rangle^A\right\}_{j=1}^{d_A}$と$\mathcal{H}^B$のうまい基底$\{|b_k\rangle^B\}_{k=1}^{d_B}$を用いると、

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{\min\{d_A,d_B\}} \sqrt{\lambda_j}|a_j\rangle^A \otimes |b_j\rangle^B$$

$|\psi\rangle^{AB}$のSchmidt分解

と表せる。ただし、$\lambda_j \geq 0$で、$\sum_j \lambda_j = 1$。また、この表記は一意に定まる。

$|\psi\rangle^{AB}$のSchmidt係数

1-II. 量子状態の性質

1. 純粋状態の**Schmidt分解**。

ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A$のうまい基底$\left\{|a_j\rangle^A\right\}_{j=1}^{d_A}$と$\mathcal{H}^B$のうまい基底$\left\{|b_j\rangle^B\right\}_{j=1}^{d_B}$を用いると、

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{\min\{d_A,d_B\}} \sqrt{\lambda_j}|a_j\rangle^A \otimes |b_j\rangle^B$$

$|\psi\rangle^{AB}$のSchmidt分解

と表せる。ただし、$\lambda_j \geq 0$で、$\sum_j \lambda_j = 1$。また、この表記は一意に定まる。

例：$d_A = 2$で、$d_B = 1000$。

$$|\psi\rangle^{AB} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{2000} \end{pmatrix}$$

よくない基底。

$$|\psi\rangle^{AB} = \begin{pmatrix} \sqrt{p} \\ \sqrt{1-p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schmidt基底。

$\mathcal{H}^{AB}$は2000次元なのに、
実質的に$d_A = 2$次元ベクトル

1-II. 量子状態の性質

1. 純粋状態の**Schmidt分解**。

ヒルベルト空間$\mathcal{H}^A$のうまい基底$\left\{|a_j\rangle^A\right\}_{j=1}^{d_A}$と$\mathcal{H}^B$のうまい基底$\left\{|b_j\rangle^B\right\}_{j=1}^{d_B}$を用いると、

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{\min\{d_A,d_B\}} \sqrt{\lambda_j}|a_j\rangle^A \otimes |b_j\rangle^B$$

← **$|\psi\rangle^{AB}$のSchmidt分解**

と表せる。ただし、$\lambda_j \geq 0$で、$\sum_j \lambda_j = 1$。また、この表記は一意に定まる。

注意：Schmidt分解は、二体系ABの純粋状態に対してのみ存在する。
三体系ABCの純粋状態に対しては類似の分解はないし、混合状態に対しても類似の分解はない。

1-II. 量子状態の性質

1. 純粋状態の**Schmidt分解**。
2. 混合状態の**純粋化**。
3. 状態のアンサンブルと密度行列の関係。

$|\psi\rangle^{AB}$のSchmidt分解

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{\min\{d_A, d_B\}} \sqrt{\lambda_j} |a_j\rangle^A \otimes |b_j\rangle^B$$

1-II. 量子状態の性質

2.　混合状態の**純粋化**。

系A上の混合状態$\rho^A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^A)$ に対して、以下を満たす純粋状態$|\rho\rangle^{AR} \in \mathcal{H}^{AR}$を$\rho^A$の純粋化という。

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_R\left[|\rho\rangle\langle\rho|^{AR}\right]$$

注意１：純粋化は必ず存在する。

対角化：$\rho^A = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|^A$ ➡ 純粋化：$|\rho\rangle^{AR} = \sum_j \sqrt{\lambda_j}|e_j\rangle^A \otimes |e_j\rangle^R$

注意２：純粋化は一意ではない。上の例では、$|\rho\rangle^{AR} = \sum_j \sqrt{\lambda_j}|e_j\rangle^A \otimes |f_j\rangle^R$ も純粋化。

$\rho^A \in \mathcal{S}(\mathcal{H}^A)$ の純粋化$|\rho_1\rangle^{AR_1}$と$|\rho_2\rangle^{AR_2}$があり、$\dim \mathcal{H}^{R_1} \leq \dim \mathcal{H}^{R_2}$のとき、アイソメトリ$V^{R_1\to R_2}$が存在し、

$$|\rho\rangle^{AR_2} = V^{R_1\to R_2}|\rho\rangle^{AR_1}$$

とかける。

使う

1-II. 量子状態の性質

1. 純粋状態の**Schmidt分解**。
2. 混合状態の**純粋化**。
3. 状態のアンサンブルと密度行列の関係。

$|\psi\rangle^{AB}$のSchmidt分解

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{\min\{d_A, d_B\}} \sqrt{\lambda_j} |a_j\rangle^A \otimes |b_j\rangle^B$$

ρ^Aの純粋化

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_R\left[|\rho\rangle\langle\rho|^{AR}\right]$$

1-II. 量子状態の性質

3.　状態のアンサンブルと密度行列の関係。

「確率p_jで、純粋状態$|\psi_j\rangle$に準備する」という操作によって、量子状態のアンサンブル$\{p_j, |\psi_j\rangle\}_j$が実現する。

➡ そのような量子系の量子状態は、$\rho \coloneqq \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$という密度行列で記述される。

同じ密度行列で記述される量子状態のアンサンブルを見分ける方法は存在しない。

例：1-qubitの系

確率1/2で$|0\rangle$、確率1/2で$|1\rangle$ ➡ $\dfrac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} = \dfrac{I}{2}$

確率1/2で$|+\rangle$、確率1/2で$|-\rangle$ ➡ $\dfrac{|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|}{2} = \dfrac{I}{2}$

確率1/3で$|0\rangle$、確率1/3で$|1\rangle$、確率1/6で$|+\rangle$、確率1/6で$|-\rangle$ ➡ $\dfrac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{3} + \dfrac{|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|}{6} = \dfrac{I}{2}$

全純粋状態からランダムに選ぶ ➡ $\int |\psi\rangle\langle\psi| d\psi = \dfrac{I}{2}$

密度行列は全て$I/2$。

これらを見分ける術は物理的に存在しない。

使う

1-II. 量子状態の性質

1. 純粋状態の**Schmidt分解**。
2. 混合状態の**純粋化**。
3. 状態のアンサンブルと密度行列の関係。

$|\psi\rangle^{AB}$のSchmidt分解

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{\min\{d_A, d_B\}} \sqrt{\lambda_j} |a_j\rangle^A \otimes |b_j\rangle^B$$

ρ^Aの純粋化

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_R\left[|\rho\rangle\langle\rho|^{AR}\right]$$

同じ密度行列で記述される量子状態のアンサンブルを
見分ける方法は存在しない。