

ブラックホール時空における軌道の 断熱的發展

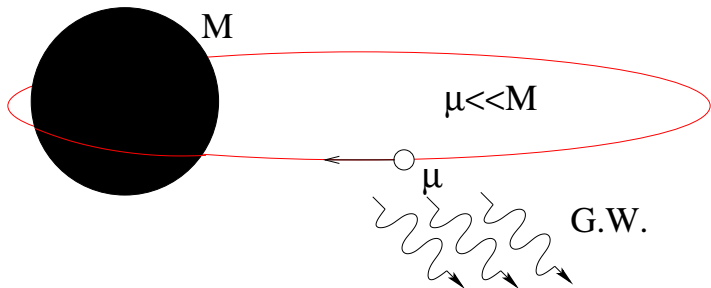
藤田 龍一

Instituto Superior Técnico, Portugal

共同研究者: 佐合紀親 (九州大学)

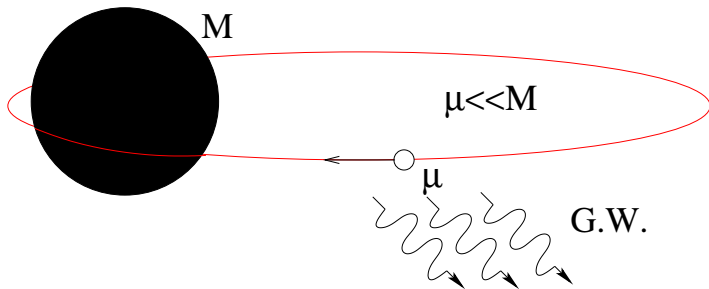
コンパクト連星合体からの重力波・電磁波放射とその周辺領域
京都大学基礎物理学研究所 2015年2月12日-2月14日

Extreme mass ratio inspirals (EMRIs)



- ブラックホールを周回する天体から放出される重力波
 - 宇宙重力波検出器eLISAの主要標的のひとつ
- ⇒ 高精度な理論波形を構築したい

Extreme mass ratio inspirals (EMRIs)



- テスト粒子 $O[(\mu/M)^0]$
 - Kerr時空の測地線は運動の定数で特徴づけられる (E, L_z, C)
- 質量比1次の補正 $O[(\mu/M)^1]$
 - $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{(0)} + h_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta} \sim \frac{\mu}{M}$
 - $\mu/M \ll 1$ だが v/c は $O(1)$ になり得る
 - 重力波輻射の反作用 $(\frac{dR}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{d\theta}{dt}) \Rightarrow (\frac{dE}{dt}, \frac{dL_z}{dt}, \frac{dC}{dt})$

重力波輻射の反作用の影響

- "運動の定数": $E = -u^\alpha \xi_\alpha^{(t)}$, $L_z = u^\alpha \xi_\alpha^{(\phi)}$ and $Q = K_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$
- $T_{\text{orbit}} \ll T_{\text{radiation}}$ [$T_{\text{orbit}} = O(M)$, $T_{\text{radiation}} = O(M^2/\mu)$]

★ Energy balance

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_t = - \sum_{\ell mn_r n_\theta} \left(\left| Z_{\ell mn_r n_\theta}^\infty \right|^2 + \alpha_{\ell mn_r n_\theta} \left| Z_{\ell mn_r n_\theta}^H \right|^2 \right),$$

$$\left\langle \frac{dL_z}{dt} \right\rangle_t = - \sum_{\ell mn_r n_\theta} \frac{m}{\omega} \left(\left| Z_{\ell mn_r n_\theta}^\infty \right|^2 + \alpha_{\ell mn_r n_\theta} \left| Z_{\ell mn_r n_\theta}^H \right|^2 \right),$$

$Z_{\ell mn_r n_\theta}^{\infty, H}$: asymptotic amplitudes, $\alpha_{\ell mn_r n_\theta} \propto \omega^3 (\omega - m q / (2r_+))$

- ★ dQ/dt の評価には重力波輻射の反作用力が必要だが、断熱近似の下で

$$\left\langle \frac{dQ}{dt} \right\rangle_t = \langle F(r, q) \rangle \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle + \langle G(r, q) \rangle \left\langle \frac{dL_z}{dt} \right\rangle$$

$$- 2 \sum_{\ell mn_r n_\theta} \frac{n_\theta \Omega_\theta}{\omega} \left(\left| Z_{\ell mn_r n_\theta}^\infty \right|^2 + \alpha_{\ell mn_r n_\theta} \left| Z_{\ell mn_r n_\theta}^H \right|^2 \right),$$

q : ブラックホールの自転角運動量

[Mino (2003), Sago et al. (2005)]

先行研究と本研究

	Sago et al. (2006)	Ganz et al. (2007)	本研究
PN order	2.5PN	2.5PN	4PN
離心率	$O(e^2)$	$O(e^2)$	$O(e^6)$
軌道傾斜角	$O(\theta_{\text{inc}})$	任意	任意
BH absorption	無視	無視	含む

nPNとはリーディングから $(v^2/c^2)^n$ の補正
4PNとはリーディングから (v^8/c^8) の補正

結果の一部: エネルギー流速の $O(v^5, e^6)$ 式

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = & \left(\frac{dE}{dt} \right)_N \left[1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 + \left\{ -\frac{1247}{336} - \frac{9181}{672} e^2 + \frac{809}{128} e^4 + \frac{8609}{5376} e^6 \right\} v^2 \right. \\
 & + \left\{ 4\pi - \frac{73}{12} qY + \left(\frac{1375}{48} \pi - \frac{823}{24} qY \right) e^2 + \left(\frac{3935}{192} \pi - \frac{949}{32} qY \right) e^4 + \left(\frac{10007}{9216} \pi - \frac{491}{192} qY \right) e^6 \right\} v^3 \\
 & + \left\{ -\frac{44711}{9072} + \frac{527}{96} q^2 Y^2 - \frac{329}{96} q^2 + \left(-\frac{172157}{2592} - \frac{4379}{192} q^2 + \frac{6533}{192} q^2 Y^2 \right) e^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left(-\frac{3823}{256} q^2 - \frac{2764345}{24192} + \frac{6753}{256} q^2 Y^2 \right) e^4 + \left(\frac{3743}{2304} - \frac{363}{512} q^2 + \frac{2855}{1536} q^2 Y^2 \right) e^6 \right\} v^4 \\
 & + \left\{ \frac{3665}{336} qY - \frac{8191}{672} \pi - \frac{9}{32} q^3 Y - \frac{15}{32} Y^3 q^3 \right. \\
 & \quad + \left(\frac{1759}{56} qY - \frac{44531}{336} \pi - \frac{135}{64} q^3 Y - \frac{225}{64} Y^3 q^3 - \frac{15}{8} qY \right) e^2 \\
 & \quad + \left(-\frac{111203}{1344} qY - \frac{4311389}{43008} \pi - \frac{405}{256} q^3 Y - \frac{675}{256} Y^3 q^3 - \frac{45}{32} qY \right) e^4 \\
 & \quad \left. + \left(-\frac{49685}{448} qY + \frac{15670391}{387072} \pi - \frac{45}{512} q^3 Y - \frac{75}{512} Y^3 q^3 - \frac{5}{64} qY \right) e^6 \right\} v^5 + \dots \Big],
 \end{aligned}$$

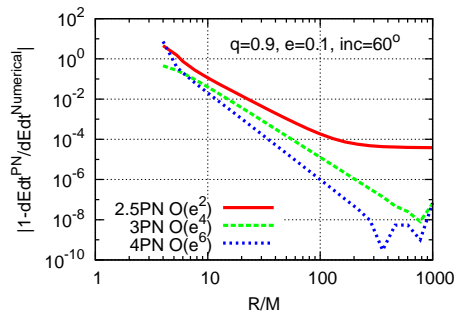
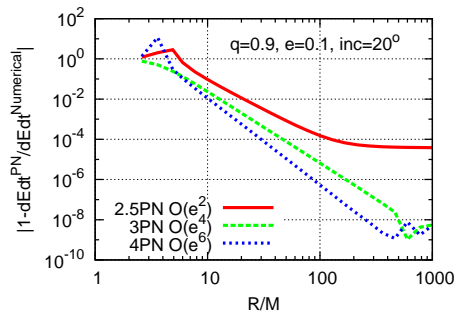
$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_N = \frac{32}{5} \left(\frac{\mu}{M} \right)^2 (1 - e^2)^{3/2} v^{10},$$

赤字部分が本研究で新たに導出された項

$0 \leq Y \leq 1$ ($Y = 1$: 赤道面軌道、 $Y = 0$: 極軌道).

数値計算との比較

★ $|1 - dEdt^{\text{PN}}/dEdt^{\text{Num}}|$ for $q = 0.9, e = 0.1, \theta_{\text{inc}} = 20^\circ$ and 60°

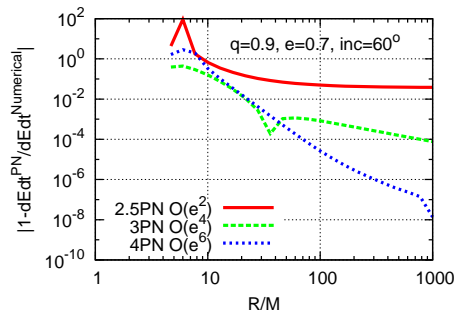
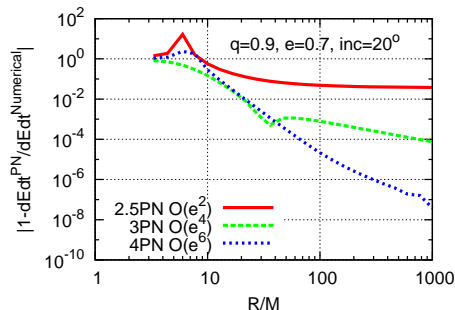


[数値計算 : RF et al. (2009)]

- ⇒ 収束領域はPNオーダーと e の次数が大きくなるとともに広がる
- ⇒ 相対誤差 $\lesssim 10^{-5}$ ($e = 0.1, R \gtrsim 50M, \theta_{\text{inc}}$ には依らず)

数値計算との比較

★ $|1 - dEdt^{\text{PN}}/dEdt^{\text{Num}}|$ for $q = 0.9, e = 0.7, \theta_{\text{inc}} = 20^\circ$ and 60°



[数値計算 : RF et al. (2009)]

- ⇒ 収束領域はPNオーダーと e の次数が大きくなるとともに広がる
- ⇒ 相対誤差 $\lesssim 10^{-5}$ ($e = 0.7, R \gtrsim 100M, \theta_{\text{inc}}$ には依らず)

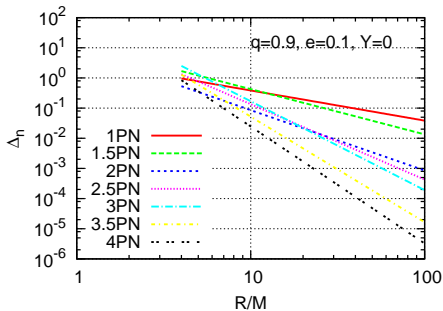
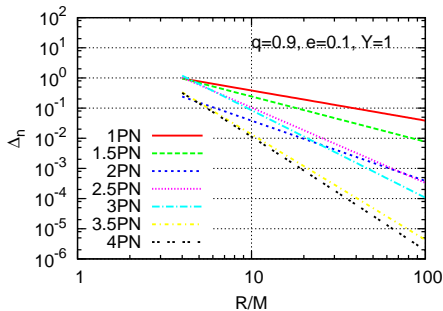
ポストニュートン展開の収束性

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \left(\frac{dE}{dt} \right)_N \left[\underbrace{1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4}_{\Delta_0} \right. \\
 &+ \underbrace{\left\{ -\frac{1247}{336} + \frac{809}{128} e^4 - \frac{9181}{672} e^2 + \frac{8609}{5376} e^6 \right\}}_{\Delta_2} v^2 \\
 &+ \left\{ 4\pi - \frac{73}{12} qY + \left(\frac{1375}{48} \pi - \frac{823}{24} qY \right) e^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{3935}{192} \pi - \frac{949}{32} qY \right) e^4 + \left(\frac{10007}{9216} \pi - \frac{491}{192} qY \right) e^6 \right\} v^3 + \dots \Big], \\
 &\equiv \left(\frac{dE}{dt} \right)_N \sum_{n=0}^8 \Delta_n(q, e, Y; R), \quad \text{where } R = M/v^2.
 \end{aligned}$$

ポストニュートン展開の収束性

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left(\frac{dE}{dt} \right)_N \sum_{n=0}^8 \Delta_n(q, e, Y; R).$$

★ $\Delta_n(R)$ for $q = 0.9, e = 0.1, Y = 1$ (equatorial) and 0 (polar)

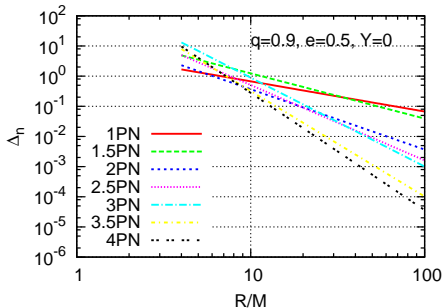
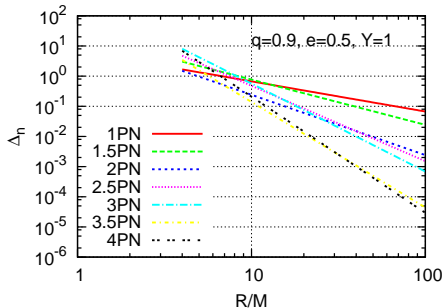


$$\Delta_{n+1} < \Delta_n \text{ for } e = 0.1 \text{ and } R \gtrsim 30M$$

ポストニュートン展開の収束性

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left(\frac{dE}{dt} \right)_N \sum_{n=0}^8 \Delta_n(q, e, Y; R).$$

★ $\Delta_n(R)$ for $q = 0.9, e = 0.5, Y = 1$ (equatorial) and 0 (polar)

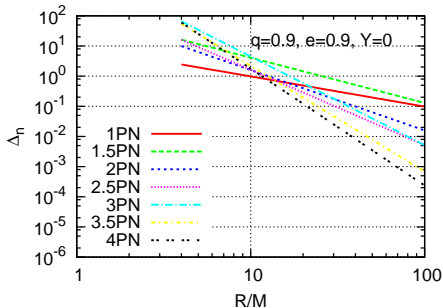
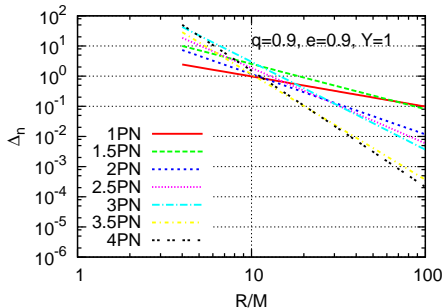


$$\Delta_{n+1} \lesssim \Delta_n \text{ for } e = 0.5 \text{ and } R \gtrsim 40M$$

ポストニュートン展開の収束性

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left(\frac{dE}{dt} \right)_N \sum_{n=0}^8 \Delta_n(q, e, Y; R).$$

★ $\Delta_n(R)$ for $q = 0.9, e = 0.9, Y = 1$ (equatorial) and 0 (polar)

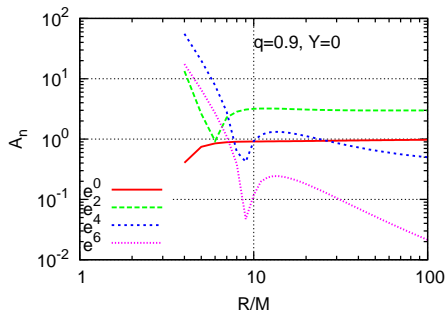
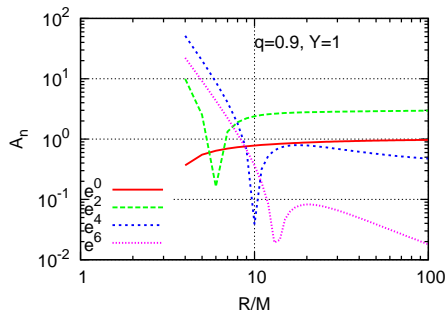


$$\Delta_{n+1} \lesssim \Delta_n \text{ for } e = 0.9 \text{ and } R \gtrsim 100M$$

離心率展開の収束性

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left(\frac{dE}{dt} \right)_N [A_0 e^0 + A_2 e^2 + A_4 e^4 + A_6 e^6].$$

★ $A_n(R)$ for $q = 0.9$, $Y = 1$ (equatorial) and 0 (polar)



$R \sim 100M$ でも収束性はあまり良くない
 $(A_2 > A_0 > A_4 > A_6 \text{ for } R \gtrsim 10M)$

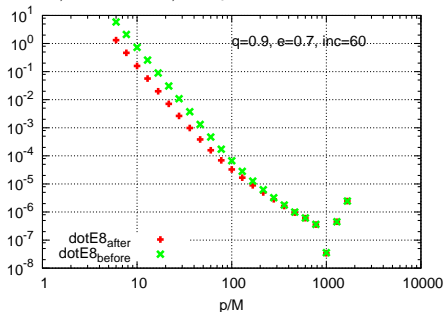
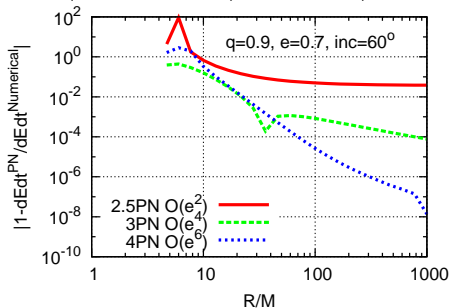
まとめ

- 重力波輻射の反作用力による軌道発展を $O(v^8, e^6)$ まで導出
 - ★ 数値計算との比較
 - 収束領域はPNオーダーと e の次数が大きくなるとともに広がる
 - 相対誤差 $\lesssim 10^{-5}$ for $e = 0.1$ and $R \gtrsim 50M$ when $q = 0.9$
 - 相対誤差 $\lesssim 10^{-5}$ for $e = 0.7$ and $R \gtrsim 100M$ when $q = 0.9$
 - ★ $q = 0.9$ の時のポストニュートン展開の収束領域
 - $R \gtrsim 30M$ when $e = 0.1$
 - $R \gtrsim 40M$ when $e = 0.5$
 - $R \gtrsim 100M$ when $e = 0.9$
 - ★ 離心率展開の収束性
 - $R \sim 100M$ でも収束性はあまり良くない
 - ($A_2 > A_0 > A_4 > A_6$ for $R \gtrsim 10M$)
- これから
 - ★ 更に高次のPN展開と離心率展開
 - ★ Resummation? (Pade, Factorized, Exponential,...)
 - ★ 離心率展開しない?
[Shibata (1994): 1.5PN for Kerr 赤道面]
[Arun et al. (2008): 3PN for non-spinning binary]

Exponential resummation

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{\infty} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_N \exp \left(\left\langle \frac{d\tilde{E}}{dt} \right\rangle_{\infty} \right), \quad [\text{Isoyama, RF, NS, Tagoshi, Tanaka(2013)}].$$

★ $|1 - dEdt^{\text{PN}}/dEdt^{\text{Num}}|$ for $q = 0.9, e = 0.7, \theta_{\text{inc}} = 60^\circ$



[Numerical results : RF et al. (2009)]

⇒ Region of convergence becomes larger using resummations