

## 第9回 テイラー展開の計算／ローラン級数

[教科書 3.4 章、4.1 章]

前回は、解析関数  $f(z)$  を点  $z = z_0$  の周りで近似的に表すテイラー級数を学んだ。今後の内容を学ぶ上で重要になるので、次の話題に進む前にテイラー級数の計算法を復習しておく。

次に、テイラー級数に負べきの項を付け加えて得られるローラン級数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} = \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

を導入する。ローラン展開の特徴は、 $z = z_0$  で発散する項  $\frac{1}{(z-z_0)^n}$  が展開式に含まれていることである。この負べきの部分を使って、点  $z = z_0$  の近傍で関数が特異である（解析的でない）場合でも、点  $z = z_0$  を中心とする円環領域で関数  $f(z)$  を級数として表せるようになる。

次回以降、ローラン級数の表式に基づいて複素積分を大幅に単純化する留数積分の方法を学ぶが、今回の内容はその準備にあたる。

### 9.1 テイラー級数の計算法

解析関数  $f(z)$  の点  $z = z_0$  周りでのテイラー級数は、式 (111):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z-z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z-z_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(z_0)(z-z_0)^3 + \cdots \quad (120)$$

で与えられる。前回説明した通り、関数の (収束する) 級数展開は一意に定まるため、どのような方法で計算したとしても同じ級数の表式が得られる。主な計算方法を以下にまとめておく。

また、収束半径の求め方も付記する。展開の中心点  $z = z_0$  から最も近い特異点までの距離が収束半径となる。

#### ● 定義通り計算

原点  $z_0 = 0$  以外の点の周りで展開する場合は大概この方法で計算する。特に工夫することなく常に求められる。

例)  $\text{Ln } z$  を  $z_0 = i$  の周りで展開

$$\begin{aligned} \text{Ln } z &= \text{Ln } z_0 + (\text{Ln } z)' \Big|_{z=z_0} (z-z_0) + \frac{1}{2!} (\text{Ln } z)'' \Big|_{z=z_0} (z-z_0)^2 + \frac{1}{3!} (\text{Ln } z)''' \Big|_{z=z_0} (z-z_0)^3 + \cdots \\ &= \text{Ln } i - \frac{1}{z} \Big|_{z=i} (z-i) + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} \Big|_{z=i} (z-i)^2 - \frac{1}{3!} \frac{2}{z^3} \Big|_{z=i} (z-i)^3 + \cdots \\ &= \text{Ln } i - \frac{1}{i} (z-i) + \frac{1}{2!} \frac{1}{i^2} (z-i)^2 - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \frac{2}{i^3} (z-i)^3 + \cdots \\ &= \frac{\pi i}{2} + i(z-i) - \frac{1}{2} (z-i)^2 - \frac{i}{3} (z-i)^3 + \cdots \end{aligned}$$

ただし、 $f(z) \Big|_{z=z_0}$  は関数  $f(z)$  の  $z = z_0$  における値。 $\text{Ln } z$  は  $z = 0$  に特異点を持つため、上記の級数の収束半径は  $z_0 = i$  から  $z = 0$  までの距離である  $R = |i - 0| = 1$  となる。

● 代表例

代表的な関数の原点  $z_0 = 0$  についての展開形を以下にまとめる。ある程度見慣れておくとよい。どれも、それぞれの関数を  $z_0 = 0$  の周りで定義通りにテイラー展開すれば導出可能。<sup>11</sup>

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (\text{収束半径 } R = 1)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots \quad (\text{収束半径 } R = \infty)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots \quad (\text{収束半径 } R = \infty)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots \quad (\text{収束半径 } R = \infty)$$

$$\text{Ln}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 - \dots \quad (\text{収束半径 } R = 1)$$

収束半径は、特異点の位置から求めるのが簡単。 $\frac{1}{1-z}$  は  $z = 1$  に特異点が存在するため、展開の中心点である原点  $z_0 = 0$  からの収束半径は  $R = |1 - 0|$  となる。同様に、 $\text{Ln}(1+z)$  は  $z = -1$  に特異点があるため、収束半径は  $R = |-1 - 0| = 1$  となる。 $e^z, \cos z, \sin z$  は複素平面全体で解析的であり、したがって  $R = \infty$  となる。<sup>12</sup>

双曲線関数  $\cosh z, \sinh z$  の展開形は、 $\cos z, \sin z$  の各項の符号をすべて + にしたもので与えられる。

$$\cosh z = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots, \quad \sinh z = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots \quad (R = \infty)$$

● 変数の置き換え

展開前の関数  $f(z)$  について変数を  $z \rightarrow w$  と置き換えてからテイラー展開したものは、 $f(z)$  をテイラー展開してから  $z \rightarrow w$  と置き換えたものと同じである。

例)

$$\frac{1}{1+iz^4} = \frac{1}{1-z} \Big|_{z \rightarrow -iz^4} = 1 + z + z^2 + \dots \Big|_{z \rightarrow -iz^4} = 1 - iz^4 - z^8 + \dots$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots \Big|_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}z} = \frac{\pi}{2}z - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2}z\right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{2}z\right)^5 + \dots$$

<sup>11</sup> 三角関数の展開形は、定義通りテイラー展開するほかに、オイラーの公式から得られる定義式

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \Rightarrow \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

に基づいて導出することもできる。 $e^z$  の展開式で  $z \rightarrow \pm iz$  と置き換えたものの和・差をとればよい。

<sup>12</sup> 係数の一般式  $a_n$  からコーシー・アダマールの公式  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  に基づいて収束半径を求めることも可能。

● 級数の和・積

関数の和  $f(z) + g(z)$  の級数展開は、収束半径内では級数の各項の和で与えられる。関数の積  $f(z)g(z)$  の級数展開は、一般には前回導入したコーシー積 (109) で与えられるが、場合によってはより単純に計算できる場合もある。<sup>13</sup>

例)

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2z} = 1 + z + z^2 + \dots + (1 + 2z + (2z)^2 + \dots) = 2 + 3z + 5z^2 + \dots$$

$$z^2 \sin(2z) = z^2 \left( z - \frac{1}{3!}(2z)^3 + \frac{1}{5!}(2z)^5 - \dots \right) = z^3 - \frac{4}{3!}z^5 + \frac{2^5}{5!}z^7 - \dots$$

● 級数の微分・積分

関数の微分  $f'(z)$ 、積分  $\int f(z)dz$  をテイラー展開したものは、収束半径の内部においては関数をテイラー展開してから微分・積分を取ったものと等しい。また、収束半径は微分・積分の前後で同じ値となる。

工夫をすれば、この性質を利用してテイラー展開を簡単化することもできる。

例) 関数  $\frac{1}{(1+z)^2}$  を原点  $z_0 = 0$  の周りでテイラー展開:

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{d}{dz} \left( -\frac{1}{1+z} \right) = -\frac{d}{dz} (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots) = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \dots \quad (R = 1)$$

● 応用

以上の方法を応用することで、やや複雑な関数の展開を簡単化できる場合がある。もちろん、定義通りテイラー展開を行って展開級数を求めることもできるので、好きな方法で計算すればよい。

－ 式変形との組み合わせ

以上で出てきた形に一見ならない関数についても、式変形で前処理することで展開を簡単化できる場合がある。

例)  $\frac{1}{2z+3}$  を原点  $z_0 = 0$  の周りでテイラー展開:

$$\frac{1}{2z+3} = \frac{1}{3(1-\frac{-2z}{3})} = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{-2z}{3} + \left( \frac{-2z}{3} \right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2}{3}z + \frac{4}{9}z^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{9}z + \frac{4}{27}z^3 + \dots$$

<sup>13</sup>級数の和の応用の一つとして、指数関数  $e^z$  の級数展開の和をとり双曲線関数の展開形を導出することもできる。

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots + \left( 1 + (-z) + \frac{1}{2}(-z)^2 + \frac{1}{3!}(-z)^3 + \frac{1}{4!}(-z)^4 + \dots \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots + \left( 1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots \right) \right] = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots \quad (R = \infty)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots - \left( 1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots \right) \right]$$

$$= z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \dots \quad (R = \infty)$$

関数  $\frac{1}{3+2z}$  は  $z = -\frac{3}{2}$  に特異点を持つことから、収束半径は展開の中心点  $z_0 = 0$  から  $z = -\frac{3}{2}$  までの距離  $R = \frac{3}{2}$  となる。

－ 部分分数分解の活用

分数関数の展開は、部分分数分解を使うことで簡単化できる場合がある。

$$\begin{aligned} \frac{-3z+2}{2z^2-3z+1} &= \dots = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2z} = 1+z+z^2+\dots + [1+2z+(2z)^2+\dots] \\ &= 2+3z+5z^2+\dots \end{aligned}$$

## 9.2 ローラン級数

テイラー級数は、展開点  $z = z_0$  とその近傍で解析的な関数を級数として表すものであった。関数が特異点を持つ場合に、それを取り囲むような領域で関数を展開することを可能とするローラン級数を今度は導入する。

### 9.2.1 定義と性質

**定義：ローラン級数**

関数  $f(z)$  が、 $z = z_0$  を中心とする2つの同心円  $C_1, C_2$  で囲まれる円環領域内で解析的であるとする。このとき、 $f(z)$  は

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \\ &= \dots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (121)$$

と展開される。また、ローラン級数の各係数は  $f(z)$  の一周積分で与えられる。

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^* \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (122)$$

ただし、 $C$  は上述の円環領域に含まれる単純閉曲線を反時計回りに回る積分経路。

● 簡単な例

関数  $\frac{1}{z} \cos z$  は、原点  $z = 0$  に特異点を持つ ( $|\frac{1}{z} \cos z| \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$ )。この関数を、特異点  $z = 0$  を中心としてローラン展開すると

$$\frac{1}{z} \cos z = \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}z + \frac{120^3}{z} - \dots \quad (123)$$

原点近傍で解析的な関数  $\cos z$  のテイラー展開の式と比べて、負べきの項  $\frac{1}{z}$  が現れているのが特徴。

● 基本的な性質

- － 正べきの項だけを含むテイラー展開に、負べきの項を付け加えた式になっている。

– 円環領域の内側に関数  $f(z)$  の特異点がある場合には負べきの項が発生する。

● 導出の概略

テイラー展開の場合と同様に、展開する関数  $f(z)$  をコーシーの積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1, \circlearrowleft} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^* - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2, \circlearrowright} \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^*$$

で表し、被積分関数に含まれる  $\frac{1}{z^* - z}$  を  $z = z_*$  の周りで級数展開することで、ローラン展開の表式 (121), (122) を導出することができる。詳細は教科書を参照のこと。

ローラン級数の係数の表式 (122) が成立することを認めれば、そこから特定の係数  $a_n, b_n$  を取り出すのは比較的簡単にできる。一周積分の性質

$$\oint_{C: z_0 \text{ を囲む経路}} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = 1) \\ 0 & (n \text{ が } 1 \text{ 以外の整数}) \end{cases} \quad (124)$$

に注意して、式 (121) の  $f(z)$  を一周積分  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^*$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \frac{1}{(z^* - z_0)^{n+1}} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z^* - z_0)^m + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z^* - z_0)^{-m+n+1}} + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'+n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (125)$$

式 (124) で示されるように、分数関数を一周積分して非ゼロになるのは分母のべきが 1 の場合 ( $\frac{1}{z-z_0}$ ) だけである。一つ目の被積分関数の分母に現れるべきが  $-m + n + 1 = 1$  となるのは  $m = n$  の場合だけである。また、二つ目の被積分関数のべきは  $m' + n + 1 \geq n + 2 > 1$  となり、一周積分するとすべて消えてしまう。したがって、式 (125) は

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}} dz^* = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z^* - z_0)^{-m+n+1}} + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'+n+1}} \right] = a_n$$

と、係数  $a_n$  だけが取り出される。同様に、式 (121) の  $f(z)$  を  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^*$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^* &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* (z^* - z_0)^{n-1} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z^* - z_0)^m + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z^* - z_0)^{-m-n+1}} + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'-n+1}} \right]. \end{aligned} \quad (126)$$

一つ目の被積分関数の分母のべきは  $-m - n + 1 \leq 0$  となる一方で、二つ目の被積分関数の分母のべき  $m' - n + 1$  は  $m' = n$  のときに 1 に等しくなる。したがって、式 (126) は

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* - z_0)^{n-1} f(z^*) dz^* = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz^* \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(z^* - z_0)^{-m-n+1}} + \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{b_{m'}}{(z^* - z_0)^{m'-n+1}} \right] = b_n \quad (127)$$

となり、係数  $b_n$  だけを取り出すことができる。

● ローラン級数の収束領域

ローラン展開の収束領域は、展開点  $z = z_0$  を中心とする円環上の領域のうち、特異点にぶつからない最大のもとなる。図 (16) を参照。

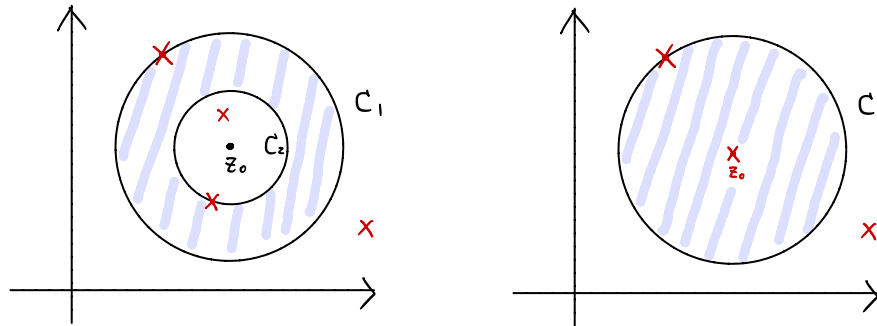


図 16: 左:  $z = z_0$  を中心とするローラン級数の収束領域。  $z = z_0$  を中心とする円環領域で、特異点にぶつからない最大のもが収束領域となる。右:  $z = z_0$  に特異点が存在する場合、ローラン級数の収束領域は  $z = z_0$  の周りの円形領域から中心点  $z = z_0$  を除いたものとなる。

9.2.2 ローラン級数の簡単な例

式 (123) のように、 $\frac{1}{(z-z_0)^n} \times (\text{解析関数})$  の形の関数を  $z = z_0$  の周りでローラン展開するとき、単に解析関数の部分のテイラー展開を  $(z - z_0)^n$  で割ればよい。

- 関数  $\frac{1}{z(1-z)}$  を原点  $z_0 = 0$  の周りでローラン展開するとき、 $\frac{1}{z} \times \frac{1}{1-z}$  と書き換えてから、 $\frac{1}{1-z}$  を原点  $z_0 = 0$  の周りでテイラー展開すればよい。

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

この級数の収束領域は、円形領域  $|z| < 1$  から原点  $z = 0$  を除いた領域である。

- 同じ関数  $\frac{1}{z(1-z)}$  を原点  $z_0 = 1$  の周りでローラン展開するとき、 $\frac{1}{z-1} \times (-\frac{1}{z})$  と書き換えてから、 $-\frac{1}{z}$  を  $z_0 = 1$  の周りでテイラー展開すればよい。<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z-1} \cdot \left(-\frac{1}{z}\right) \\ &= -\frac{1}{z-1} \left[ \frac{1}{z} \Big|_{z=1} + \left(\frac{1}{z}\right)' \Big|_{z=1} (z-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z}\right)'' \Big|_{z=1} (z-1)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z}\right)''' \Big|_{z=1} (z-1)^3 + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{z-1} \left[ \frac{1}{z} \Big|_{z=1} - \frac{1}{z^2} \Big|_{z=1} (z-1) + \frac{1}{2} \frac{2}{z^3} \Big|_{z=1} (z-1)^2 - \frac{1}{3!} \frac{3 \cdot 2}{z^4} \Big|_{z=1} (z-1)^3 + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{z-1} [1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots] \\ &= -\frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

この級数の収束領域は、円形領域  $|z - 1| < 1$  から点  $z = 1$  を除いた領域である。

<sup>14</sup>  $\frac{1}{z}$  の  $z = 1$  周りで展開は、変数の書き換えを行い、公式  $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$  を用いることで以下のように行うこともできる。計算法に慣れればこちらの方が楽。

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - [-(z-1)]} = 1 + [-(z-1)] + [-(z-1)]^2 + [-(z-1)]^3 + \dots = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots$$