

"エンタングルメントエントロピーとホログラフィー" 初田さん

Rets Ryu-Takayanagi hep-th/0603001, 0605073

Nishioka-Takayanagi hep-th/0611035

Nishioka-Ryu-Takayanagi arXiv:0905.0932 (Review)

Fujita-YH-Takayanagi arXiv:1104.4907

- Plan
- 1 Introduction
  - 2 EE in 2D CFT
  - 3 Holographic EE
    - Pure AdS space
    - AdS soliton
  - 4 HEE of AdS wormhole

## 1 Introduction

EEとは?

- 2つの系のそれぞれの具合を測る指標
- EEから系の相構造が分かる。

EEの定義

系を2つに分ける  $\rightarrow A \cup B$

系の密度行列  $\rho_{total}$

$\rho_A \equiv \text{Tr}_B \rho_{total}$  ← Reduced density matrix

EE of A

$$S_A = -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A$$

具体例 2-2ビット系

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B)$$

$$\rho_A = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) (\langle\uparrow|_A + \langle\downarrow|_A) \rightarrow S_A = 0$$

(エンタングルしていない)

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B)$$

$$\rho_A = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A + |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow|_A)$$

$$S_A = \log 2 \neq 0 \quad (\text{エンタングルしている})$$

EEの性質

零温度

① AとBがエンタングルしていない  $\Leftrightarrow S_A = S_B = 0$

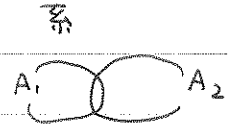
② 系が零温度  $S_A = S_B$

有限温度のとき 一般には  $S_A \neq S_B$

③ 2つの subsystem  $A_1, A_2$

$$S_{A_1} + S_{A_2} \geq S_{A_1 \cup A_2} + S_{A_1 \cap A_2}$$

(strong subadditivity)



2. EE in 2D CFT

2Dでは EE を一般的に計算できる [Calabrese - Cardy, hep-th/0405152]  
CFT

$$(t_E, x) \in \mathbb{R}^2$$

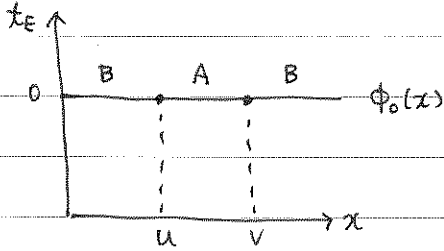
Ground state wavefunction

$$\Psi(\phi_0(x)) = \int_{\phi_{t_E=-\infty}}^{\phi_{t_E=0, x} = \phi_0(x)} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$$

Density matrix

$$[P_{\text{total}}]_{\phi_0, \phi'_0} = \Psi(\phi_0) \overline{\Psi}(\phi'_0)$$

$\equiv$   $t_E = \infty$  から  $t_E = 0$  までの  
経路積分



$$t_E = 0$$

$$A \equiv \{x \mid x \in [u, v)\}$$

$$x \in B \text{ 区 } \phi_0(x) = \phi'_0(x)$$

$$[P_A]_{\phi_+, \phi_-} = \frac{1}{Z_1} \int_{\phi_{t_E=-\infty}}^{\phi_{t_E=0}} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}$$

$$(\text{Tr}_A P_A = 1)$$

$$\times \prod_{x \in A} \delta(\phi(+0, x) = \phi_+(x))$$

$$\times \prod_{x \in A} \delta(\phi(-0, x) = \phi_-(x))$$

くりかた

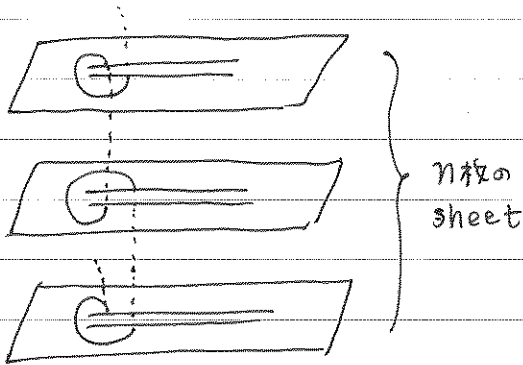
$$S_A = -\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} \text{Tr}_A P_A^n$$

を計算する。

$$\text{Tr}_A P_A^n \leftarrow [P_A]_{\phi_{1+}, \phi_{1-}} [P_A]_{\phi_{2+}, \phi_{2-}} \cdots [P_A]_{\phi_{n+}, \phi_{n-}}$$

$$\phi_{i-} = \phi_{i+1+}$$

$$\text{Tr}_A P_A^n = \frac{z_n}{\bar{z}_1^n}$$



$$\text{Tr}_A P_A^n = \prod_{k=1}^{n-1} \langle \Phi_n^{+(k)}(u) \Phi_n^{-(k)}(v) \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\Delta_n^{(k)} = \bar{\Delta}_n^{(k)} = \frac{c}{24} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{|u-v| 2(\Delta_n + \bar{\Delta}_n)}$$

$$= |u-v|^{-\frac{c}{6} \left(n - \frac{1}{n}\right)}$$

$$S_A = - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} \text{Tr}_A P_A^n$$

$$= \frac{c}{3} \log \left( \frac{l}{a} \right)$$

$l \equiv |u-v|$   
 $a$ : UV cutoff.

◎ 高次元の場合, free な理論である EE を計算するのは難しい.

◎ ホログラフィーを利用すると高次元の場合は EE を予想するの出来る。

### 3. Holographic EE

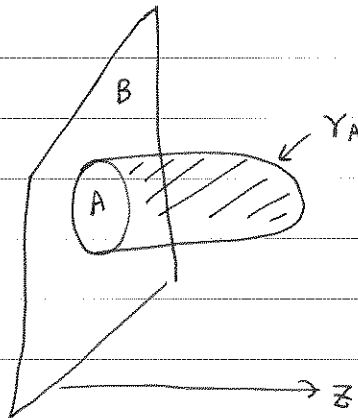
AdS/CFT 対応      AdS<sub>d+2</sub> 上の弦理論  $\Leftrightarrow$  境界上の (d+1)次元 CFT  
EE のホログラフィーに基づく計算

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4 G_N^{(d+2)}}$$

$$\frac{\partial S_A}{\partial A} = \frac{\partial A}{\partial A}$$

d-1次元

$\gamma_A$  は AdS 空間の  
極小曲面



134 ① Pure AdS<sub>3</sub>

$$ds^2_{\text{AdS}_3} = R^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx^2}{z^2}$$

$$A = \{x \mid -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}\}$$

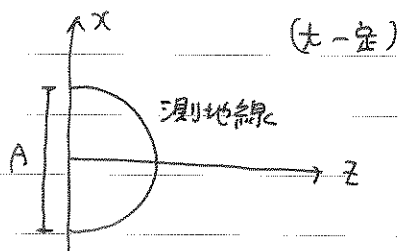
$$\gamma_A: x^2 + z^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$\text{length}(\gamma_A) = 2R \int_a^{l/2} dz \frac{\sqrt{1+x'(z)^2}}{z} = 2R \log\left(\frac{l}{a}\right) + O(a^2)$$

↑ cut off

$$S_A = \frac{\text{length}(\gamma_A)}{4G_N^{(3)}} = \frac{c}{3} \log\left(\frac{l}{a}\right)$$

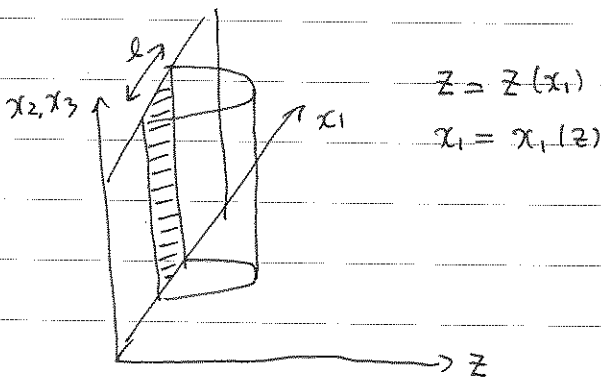
$$c = \frac{3R}{2G_N^{(3)}}$$



② Pure AdS<sub>5</sub>

$$ds^2_{\text{AdS}_5} = R^2 \frac{dz^2 - dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{z^2}$$

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| \leq \frac{l}{2}, |x_2| \leq \frac{L}{2}, |x_3| \leq \frac{L}{2}\} \quad l \ll L$$



$$\text{Area} = 2 \int dz dx_2 dx_3 R^3 \frac{\sqrt{1+x_1'(z)^2}}{z^3}$$

↳ minimize it

$$= 2R^3 L^2 \int_a^{z_*} dz \frac{\sqrt{1+x_1'^2}}{z^3}$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1'} \right) = 0 \quad \boxed{x_1(z) = \int_z^{z_*} dz \frac{z^3}{\sqrt{z_*^6 - z^6}}}$$

$$\int_0^{z_*} dz \frac{z^3}{\sqrt{z_*^6 - z^6}} = \frac{l}{2}$$

$$\text{Area} = R^3 \left(\frac{L}{a}\right)^2 - 2IR^3 \left(\frac{L}{z_*}\right)^2$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{6})}$$

$$S_A(l) = \frac{1}{4G_N^{(5)}} \left[ R^3 \left(\frac{L}{a}\right)^2 - 32I^3 R^3 \left(\frac{L}{l}\right)^2 \right]$$

a: cut off

③ AdS soliton

(confinement/deconfinement) phase transition を示す例

$$ds^2 = \frac{R^2}{r^2} \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2)$$

$$x \sim x + \frac{\pi R^2}{r_0}, \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4$$

$$A = \left\{ (x_1, x_2, x) \mid |x_1| \leq \frac{l}{2}, |x_2| \leq \frac{l}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\pi R^2}{r_0} \right\}$$

→ 対称性から  $r = r(x_1)$

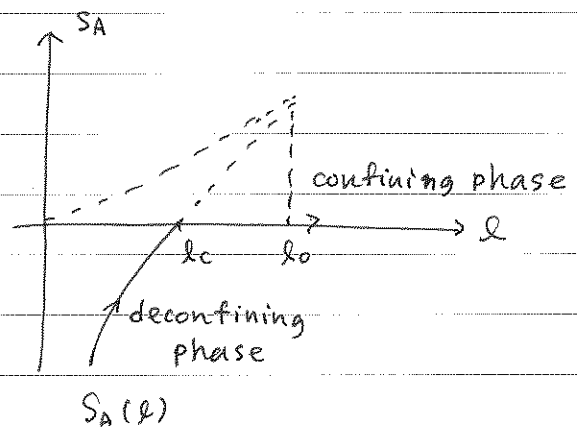
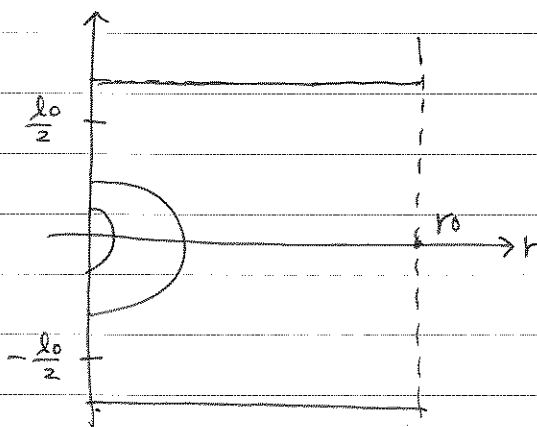
$$\frac{l}{2} = \int_{r_*}^{\infty} dr \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[ f(r) \left( \frac{r^6 f(r)}{r_*^6 f(r_*)} - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$S_A = \frac{\pi L R}{2 G_N^{(5)} r_0} \int_{r_*}^{r_0} \frac{r^4 \sqrt{f(r)}}{\sqrt{r^6 f(r) - r_*^6 f(r_*)}}$$

Remark  $l$  と  $r_*$  が "関係" する。

$l$  には upper bound が "存在" する。

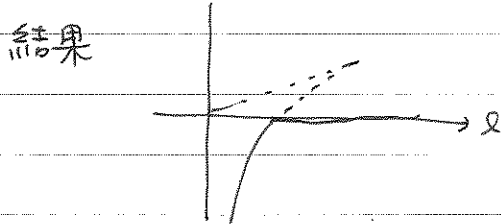
$$l \leq l_0 \approx 0.69 \frac{R^2}{r_0} \quad l > l_0 \text{ のときは}$$



④ HEE of AdS wormhole

(この意味) 2つ以上の boundary が bulk を通して  
つながっている空間を wormhole という。

$$ds^2 = \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{10}{3}} [\dots] \quad \dots \text{ AdS と flat 空間をつなげる解}$$



wormhole の asymptotic AdS 側の  
boundary に対し理論でも相転移

