マクスウェルの悪魔：量子情報と熱力学
～量子フィードバック制御下でのゆらぎの定理～

布能　謙

東京大学

共同研究者

渡辺優 (京都大学)
上田正仁 (東京大学)

K.F, Y. Watanabe, and M. Ueda PRE (2013)

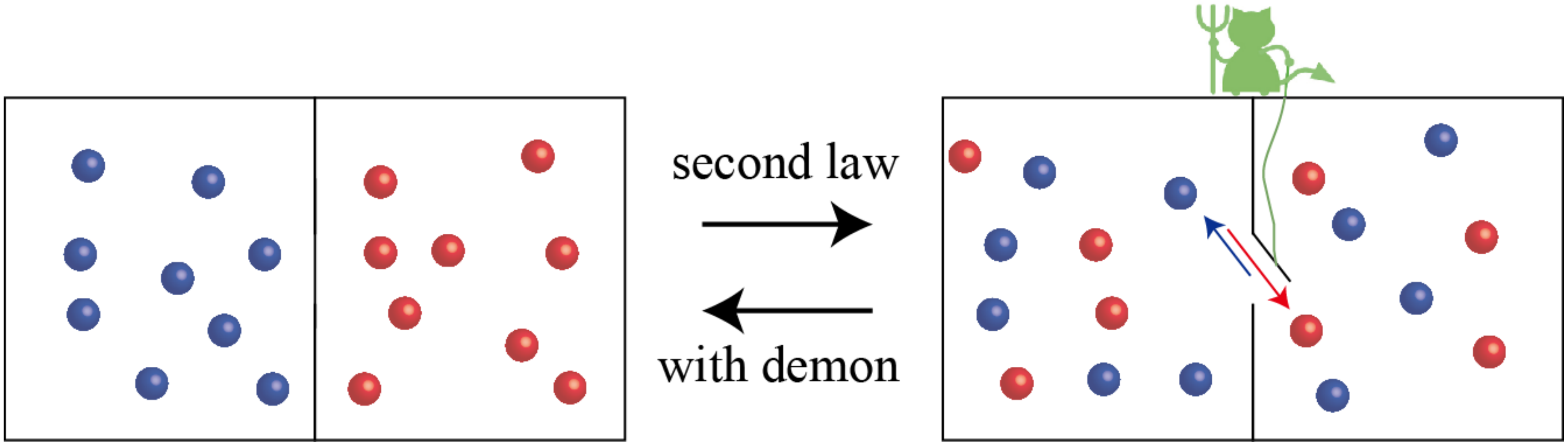
東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

基研研究会　量子情報物理学 2013/12/4-6

目次

- マクスウェルの悪魔に関するレビュー
- ゆらぎの定理、Jarzynski等式
- 量子系における測定とフィードバックの方法
- 量子フィードバック制御下でのゆらぎの定理
- まとめと今後の展望

マクスウェルの悪魔は情報を活用してエントロピーを減らせる

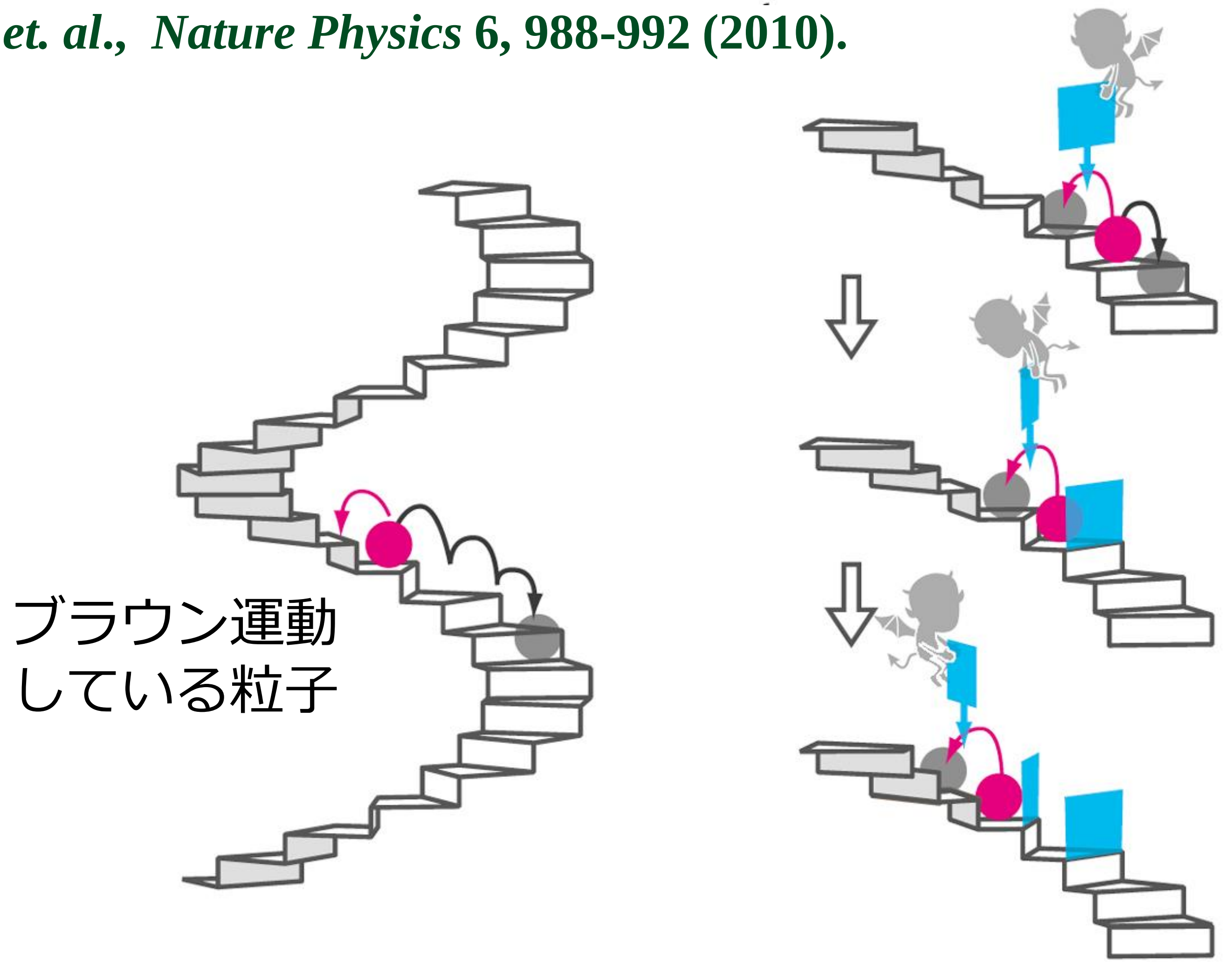


マクスウェルの悪魔とは、熱ゆらぎのレベルでミクロな物体（自由度）を操作できるフィードバックコントローラーの一種である

測定によって得た情報（粒子の速度）を基に**フィードバック**（しきりを通る粒子の仕分）を行うことで、エントロピーを減らすことができる

マクスウェルの悪魔の実現:実験の概念図

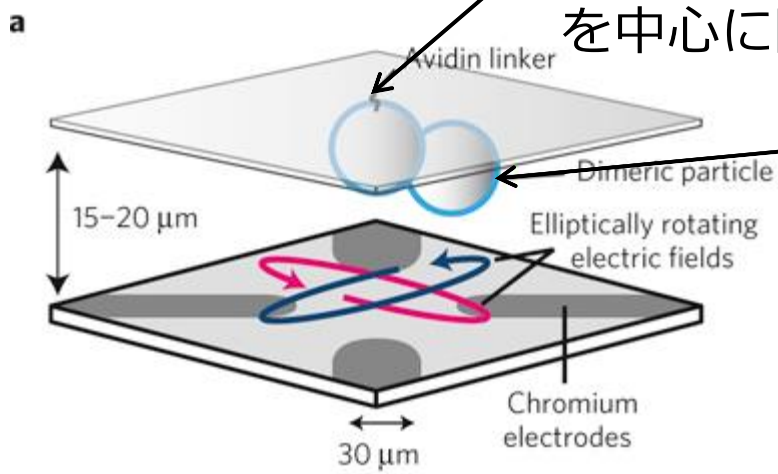
Toyabe, *et. al.*, *Nature Physics* 6, 988-992 (2010).



測定で獲得した情報: 粒子がポテンシャルを上がったか下がったか
フィードバック: 粒子がポテンシャルを上がった場合に壁を挿入する

マクスウェルの悪魔の実現：実験のセットアップ

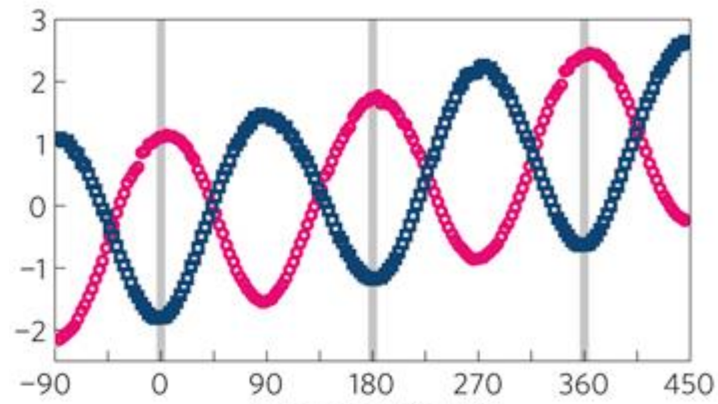
一点で結合、この点
を中心に回転する



この粒子が回転ブラ
ウン運動を行う

**赤と青で表されている
螺旋状に上っていく
二つのポテンシャルを
切り替えることができる**

ポテンシャルエネルギー



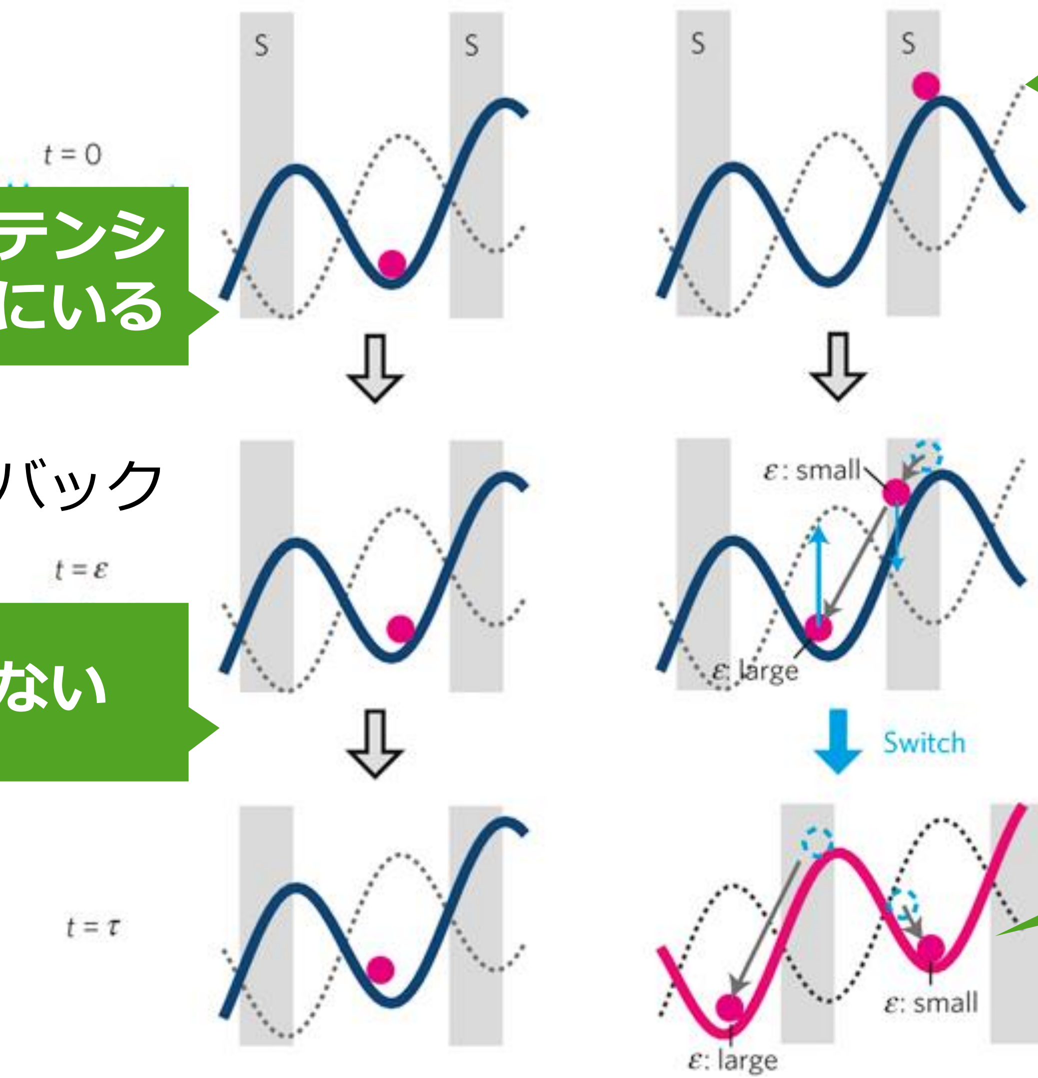
回転方向の角度

マクスウェルの悪魔の実現：測定とフィードバックの方法

測定

熱ゆらぎで粒子がポテンシャルの高い位置にいる

粒子がポテンシャルの谷にいる

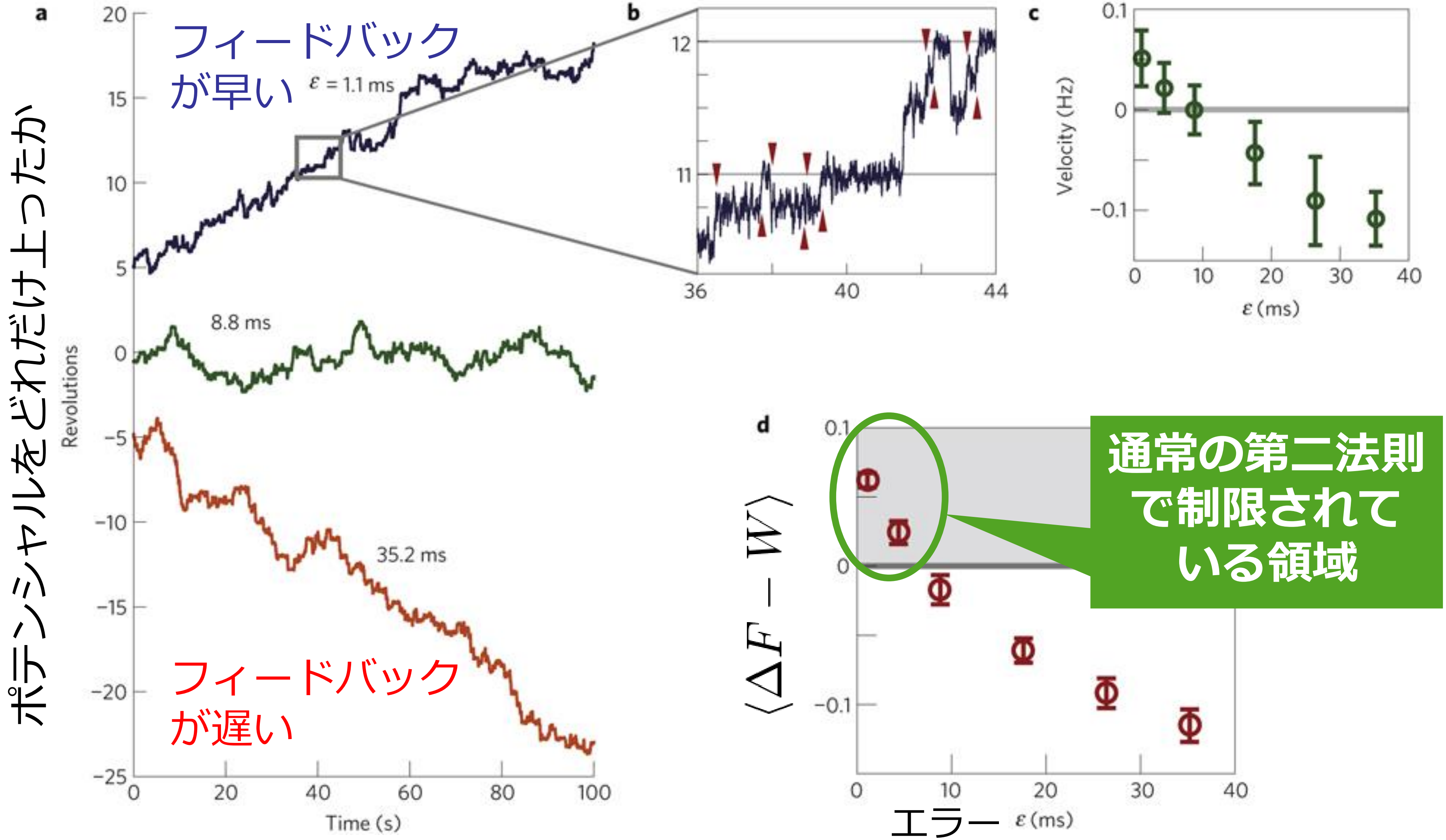


フィードバック

何もしない

ポテンシャルを反転することで、粒子がポテンシャルを半周期分上る

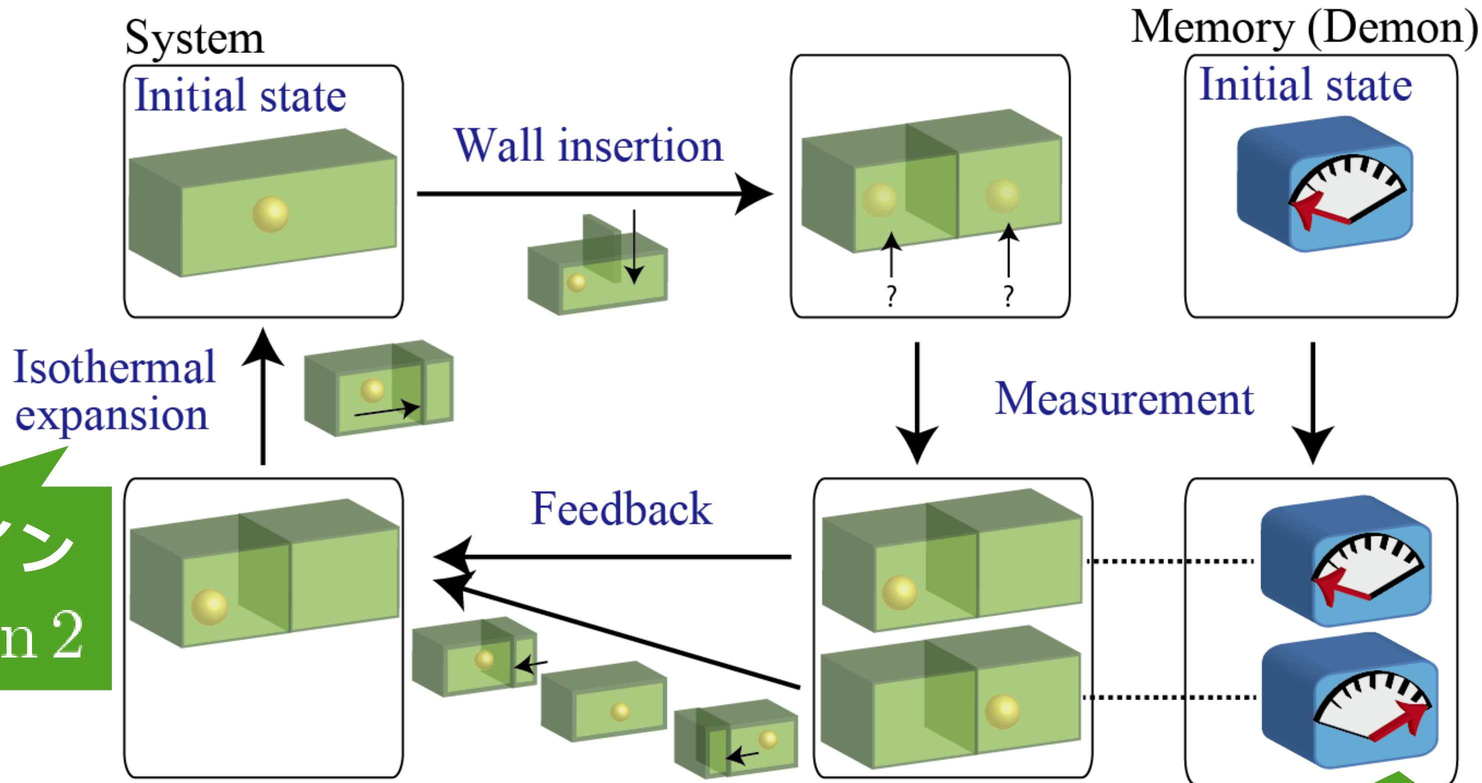
マクスウェルの悪魔の実現：実験結果



情報を活用して熱ゆらぎから自由エネルギーを獲得した

シラードエンジン：マクスウェルの悪魔の本質を抜き出したモデル

Szilard, *Z. Phys*. 53, 840-856 (1929).



仕事のゲイン
$W = kT \ln 2$

$$F = E - TS$$

自由エネルギーの獲得

フィードバックによるエントロピーの減少

1-bit 分のシステムの情報を獲得
$I = \ln 2$

情報理論からの準備

シャノンエントロピー

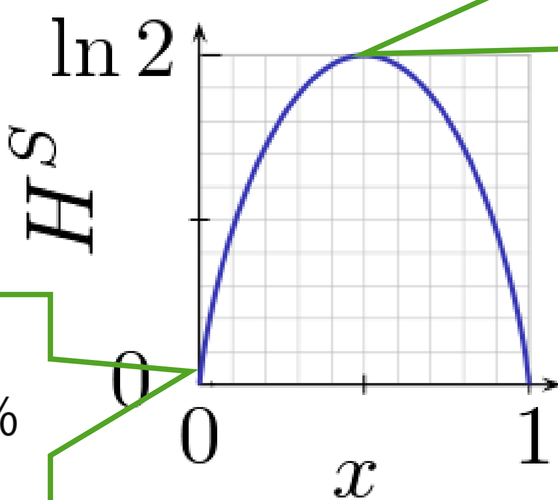
$$H^S := -\sum_k p^S(k) \ln p^S(k)$$

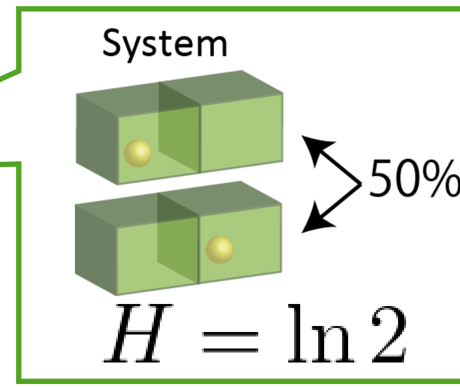
システムの不確かさを測る量

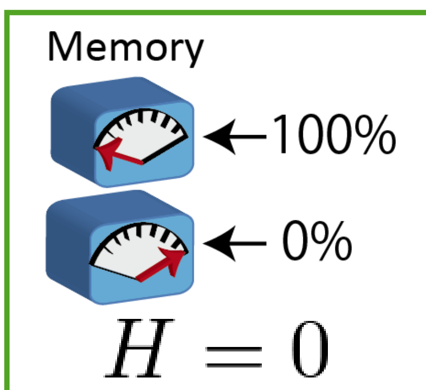
システムの状態がkである確率

状態が２通りの場合

$$p(0) = 1 - x$$
$$p(1) = x$$







情報理論からの準備

シャノンエントロピー

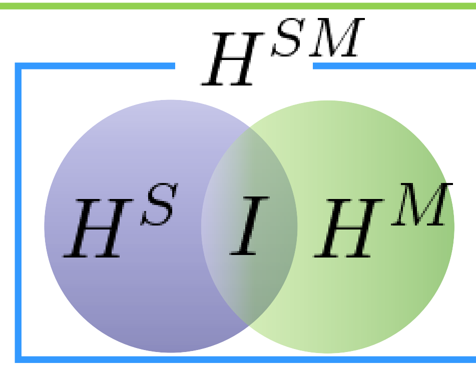
$$H^S := -\sum_k p^S(k) \ln p^S(k)$$

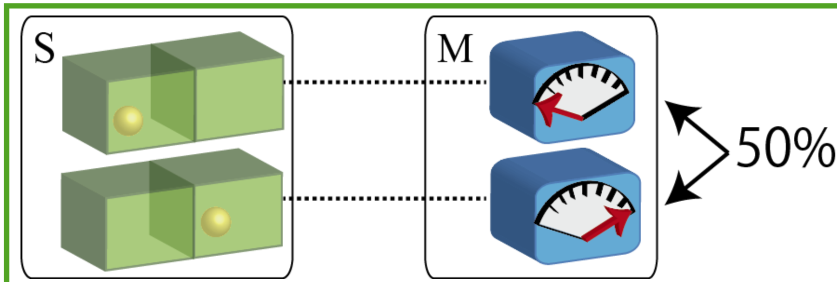
システムの不確かさを測る量

古典相互情報量

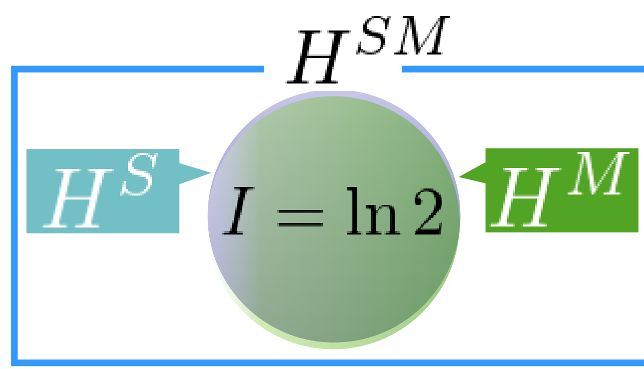
$$I := H^S + H^M - H^{SM}$$

SとMの相関を測る量

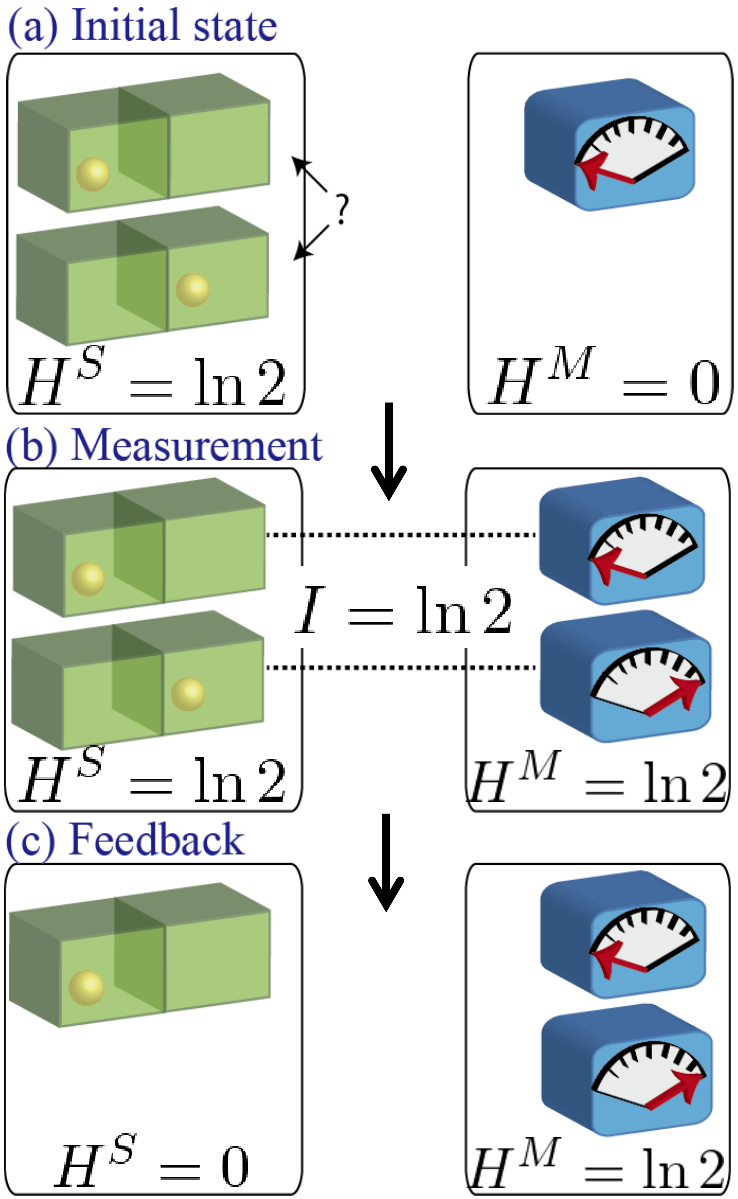




完全な相関



第二法則との整合性



全系のシャノンエントロピーは**常に一定**

$$H^{SM} = H^S + H^M - I$$

$$\Rightarrow \quad H^{SM}_{\mathrm{ini}} = \ln 2$$

$$\Rightarrow \quad H^{SM}_{\mathrm{mes}} = \ln 2$$

$$\Rightarrow \quad H^{SM}_{\mathrm{fb}} = \ln 2$$

目次

非平衡な過程で成り立つ等号関係

熱力学第二法則

カノニカル分布を仮定

$$\langle \sigma \rangle \geq 0 \quad \xrightarrow{\sigma = -\beta(W + \Delta F)} \quad \langle W \rangle \leq -\Delta F$$

σ：エントロピー生成 （熱力学的プロセスの非可逆性を測る量）

C. Jarzynski, PRL. 78, 2690 (1997).
G. E. Crooks, PRE. 60, 2721-2726 (1999).

ゆらぎの定理、Jarzynski等式

$$\langle \mathrm{e}^{-\sigma} \rangle = 1, \qquad \langle \mathrm{e}^{\beta(W+\Delta F)} \rangle = 1$$

非平衡な過程で成り立つ等号関係

熱力学第二法則

カノニカル分布を仮定

$$\langle\sigma\rangle \geq 0 \quad \xrightarrow{\sigma=-\beta(W+\Delta F)} \quad \langle W\rangle \leq -\Delta F$$

σ : エントロピー生成 （熱力学的プロセスの非可逆性を測る量）

第二法則の再導出

Jensen inequality $\langle \mathrm{e}^{-\sigma}\rangle \geq \mathrm{e}^{-\langle\sigma\rangle}$

ゆらぎの定理、Jarzynski等式

$$\langle \mathrm{e}^{-\sigma}\rangle = 1, \qquad \langle \mathrm{e}^{\beta(W+\Delta F)}\rangle = 1$$

・非平衡なプロセスでも成り立つ一般的な関係式

・ゆらぎの定理が成り立つためには、確率は小さいが
エントロピー生成が負になる経路が必要

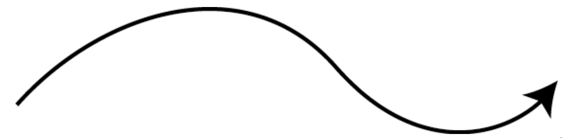
エントロピー生成とゆらぎの定理

エントロピー生成のもっとも一般的な定義

$$\sigma = \ln \frac{\mathcal{P}[\Gamma(t)]}{\mathcal{P}_r[\Gamma(t)]}$$

経路の確率密度

経路の参照確率密度



ある熱力学的プロセスによって時間発展する位相空間の点

ゆらぎの定理の証明

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}[\Gamma(t)]\mathcal{P}_r[\Gamma(t)] \\ &= \int \mathcal{D}[\Gamma(t)]\frac{\mathcal{P}_r[\Gamma(t)]}{\mathcal{P}[\Gamma(t)]}\mathcal{P}[\Gamma(t)] \\ &= \int \mathcal{D}[\Gamma(t)]\mathcal{P}[\Gamma(t)]\mathrm{e}^{-\sigma} \quad := \left\langle \mathrm{e}^{-\sigma} \right\rangle \end{aligned}$$

確率の和が1

数学的な等号関係だが、参照確率密度を適切にとると熱力学的に意味のある関係式になる

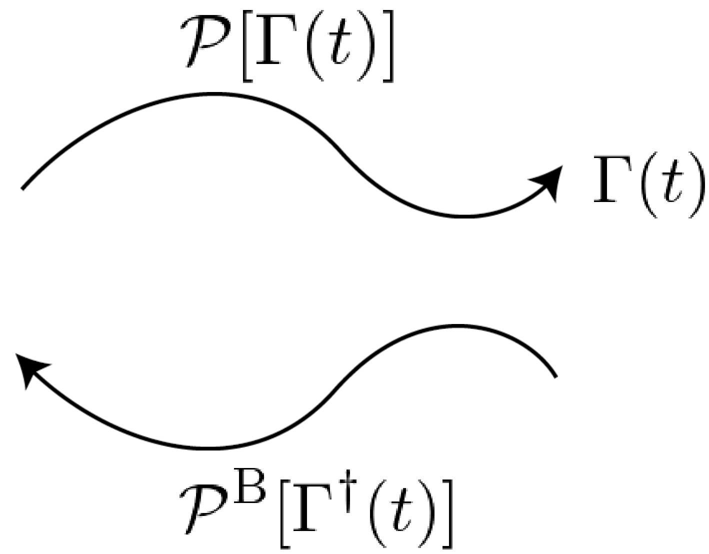
熱力学的操作の不可逆性の指標

1. 時間反転した操作(逆パス)を選ぶ

$$\mathcal{P}_r[\Gamma(t)] = \mathcal{P}^{\mathrm{B}}[\Gamma^{\dagger}(t)]$$

順パスと逆パスの比：熱力学的操作の非可逆性の指標

$$\sigma = \ln \frac{\mathcal{P}[\Gamma(t)]}{\mathcal{P}^{\mathrm{B}}[\Gamma^{\dagger}(t)]}$$



$$\langle \sigma \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{P}[\Gamma(t)] = \mathcal{P}^{\mathrm{B}}[\Gamma^{\dagger}(t)]$$

エントロピー生成が零のとき、またそのときに限り熱力学的操作は可逆

エントロピー生成：ハミルトニアンダイナミックスの場合

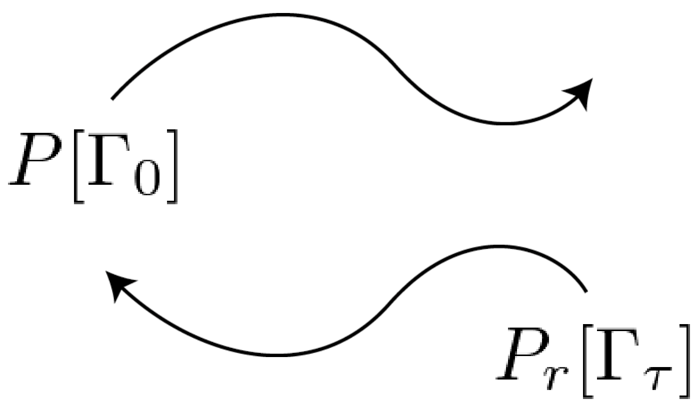
以下の例では**ハミルトニアンダイナミックスを仮定**

経路は位相空間のある一点のみに依存するので、その点での確率分布だけ分かればよい

$$\sigma = \ln \frac{\mathcal{P}[\Gamma(t)]}{\mathcal{P}_r[\Gamma(t)]} \longrightarrow \sigma = \ln \frac{P[\Gamma_0]}{P_r[\Gamma_\tau]}$$

初期状態の確率

参照確率



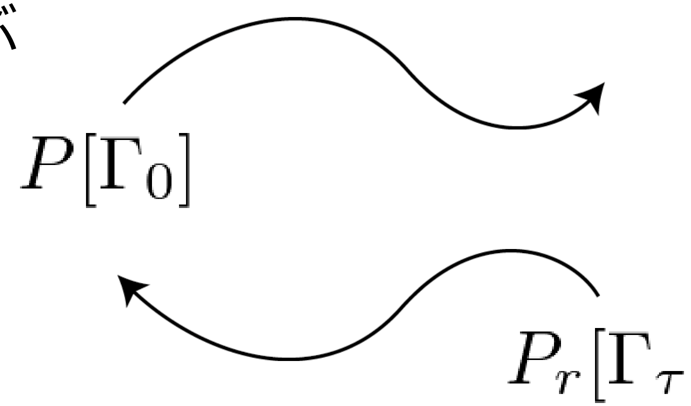
エントロピー生成：熱浴がある場合

2． **熱浴がある場合**：

位相空間の点をシステムと熱浴に分解　$\Gamma_0 = (\Gamma_0^S, \Gamma_0^B)$

・参照確率：システムの終状態の確率と熱浴が終状態でカノニカル分布となるように選ぶ

$$P_r[\Gamma_\tau] = P[\Gamma_\tau^S] \cdot \mathrm{e}^{-\beta(E^B[\Gamma_\tau^B] - F^B)}$$



・初期状態に対する仮定：相関がない＆熱浴がカノニカル分布

$$P[\Gamma_0] = P[\Gamma_0^S] \cdot \mathrm{e}^{-\beta(E^B[\Gamma_0^B] - F^B)}$$

$$\sigma := \ln \frac{P[\Gamma_0]}{P_r[\Gamma_\tau]} = \ln \frac{P^S[\Gamma_0]}{P^S[\Gamma_\tau]} - \beta(E^B[\Gamma_0^B] - E^B[\Gamma_\tau^B])$$

$$= \Delta S - \beta Q$$

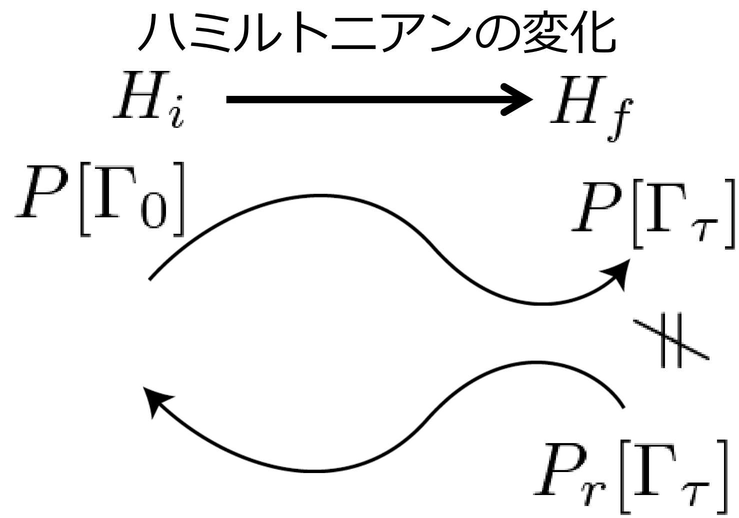
全系のエントロピー変化

ゆらぎの定理：$\left\langle \mathrm{e}^{-\Delta S_{\mathrm{tot}}} \right\rangle = 1$

エントロピー生成とJarzynski等式

3．システムの初期状態がカノニカル分布の場合

参照確率を位相空間の終状態の点に対応するカノニカル分布ととる



$$P_r[\Gamma_\tau] = \mathrm{e}^{-\beta(E_\mathrm{f}[\Gamma_\tau] - F_\mathrm{f})}$$

終状態が仮に熱平衡化したときに対応する自由エネルギー

$$\sigma := \ln \frac{P[\Gamma_0]}{P_r[\Gamma_\tau]} = -\beta(E_\mathrm{i}[\Gamma_0] - E_\mathrm{f}[\Gamma_\tau]) - \beta(F_\mathrm{f} - F_\mathrm{i})$$
$$= -\beta(W + \Delta F)$$

$\Longrightarrow$ Jarzynski等式 $\left\langle \mathrm{e}^{\beta(W+\Delta F)} \right\rangle = 1$

- 終状態は熱平衡状態とは限らない
- **仕事**は実際の非平衡なプロセスで定義、
  自由エネルギーは対応する平衡状態の値を使って定義

目次

- マクスウェルの悪魔に関するレビュー
- ゆらぎの定理、Jarzynski等式
- **量子系における測定とフィードバックの方法**
- 量子フィードバック制御下でのゆらぎの定理
- まとめと今後の展望

量子情報で使うエントロピー

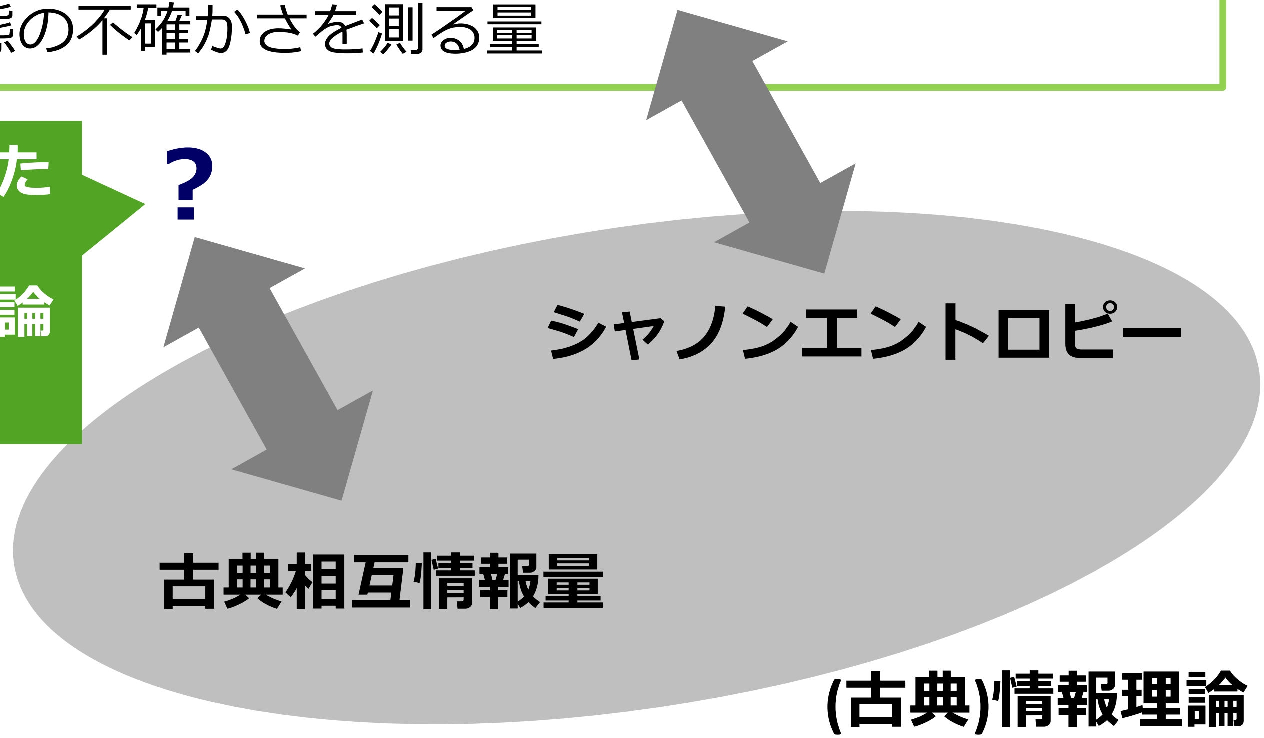
フォンノイマンエントロピー

$$S(\rho) := -\mathrm{Tr}[\rho \ln \rho]$$
$$= -\sum_k p_k \ln p_k$$

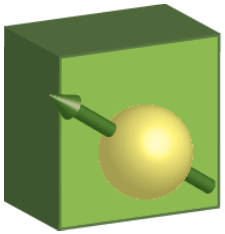
密度行列を対角化したときの対角成分

システムの状態の不確かさを測る量

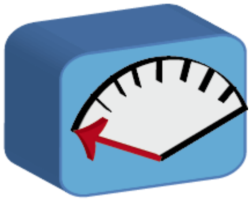
測定によって獲得した情報量を定量化するためには量子測定理論が必要



qubit系を例にした一般的な量子測定

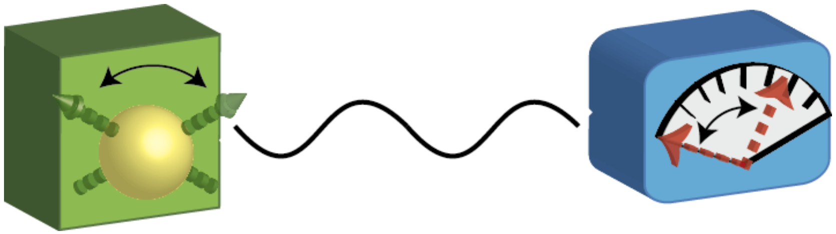


$$\rho^S = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$$



$$\rho^M = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

qubit系を例にした一般的な量子測定

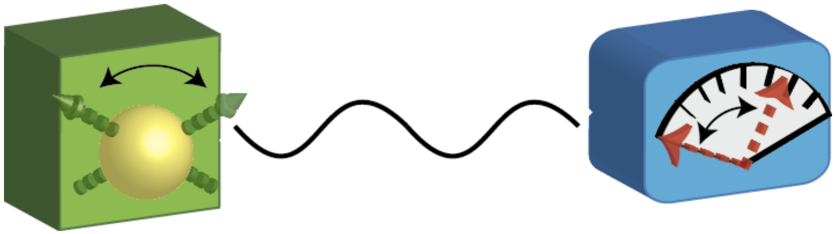


$$\rho^S = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \qquad \rho^M = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

システムとメモリー全体にユニタリー変換を作用させて、相関を作る

$$U^{SM} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_S \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_M + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_S \otimes (|\uparrow\rangle\langle\downarrow|_M + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_M)$$

qubit系を例にした一般的な量子測定



$$\rho^S = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \qquad \rho^M = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

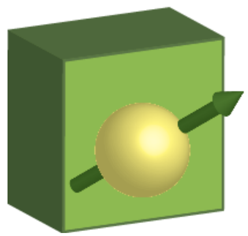
$$\downarrow$$

$$U^{SM}(\rho^S \otimes \rho^M)U^{\dagger SM} = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_S \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_M + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_S \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_M)$$

メモリーが↑(↓)ならシステムも↑(↓)：完全相関

qubit系を例にした一般的な量子測定

back action　measurement



$$\rho^S = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \qquad \rho^M = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

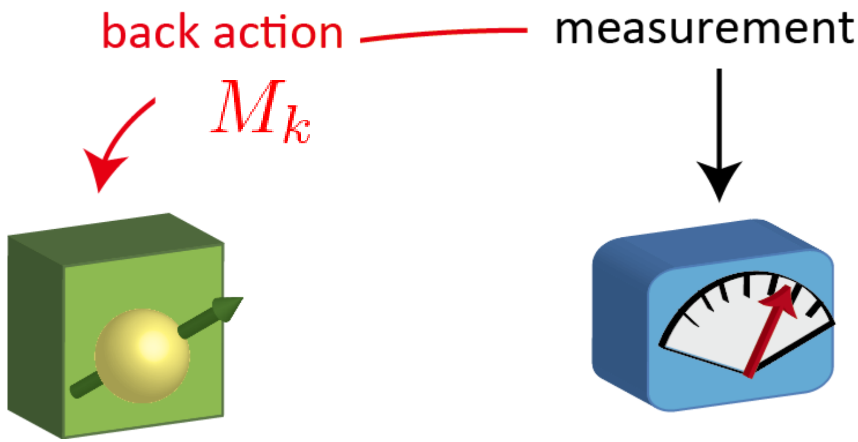
$$U^{SM}(\rho^S \otimes \rho^M)U^{\dagger SM} = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_S \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_M + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_S \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_M)$$

メモリーが↑(↓)ならシステムも↑(↓)：完全相関

メモリーに射影測定を行う。測定結果が↑なら、システムの状態は

$$\rho^S_\uparrow := p_\uparrow^{-1} \langle\uparrow|_M U^{SM}(\rho^S \otimes \rho^M)U^{\dagger SM} |\uparrow\rangle_M = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_S$$

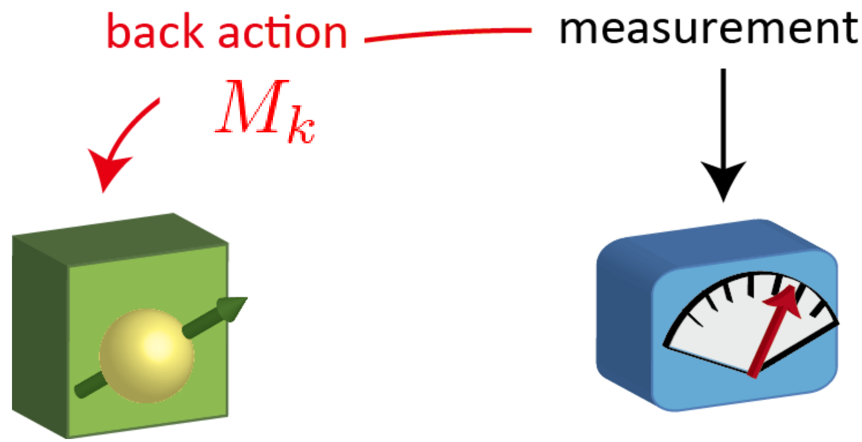
qubit系を例にした一般的な量子測定



システムとメモリーを弱く相関させるユニタリー変換だと…

$$
\begin{aligned}
U^{SM} &= \sqrt{\epsilon}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_S \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_M + \sqrt{1-\epsilon}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_S \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_M \\
&+ \sqrt{\epsilon}\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|_S \otimes (|\uparrow\rangle\langle\downarrow|_M + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_M) \\
&+ \sqrt{1-\epsilon}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|_S \otimes (|\uparrow\rangle\langle\downarrow|_M + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_M)
\end{aligned}
$$

qubit系を例にした一般的な量子測定



システムとメモリーを弱く相関させるユニタリー変換だと…

$$\rho_{\uparrow}^{S} := \langle\uparrow|_M \, U^{SM}(\rho^S \otimes \rho^M)U^{\dagger SM} \, |\uparrow\rangle_M$$

$$= \epsilon \, |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_S + (1-\epsilon) \, |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_S$$

適切なユニタリー変換によって射影測定に限らない一般的な測定を実現できる

$$\rho_k^S = \frac{M_k^S \rho^S M_k^{\dagger S}}{p_k} \qquad M_k^S = \langle k|_M \, U^{SM} \, |\uparrow\rangle_M$$

一般的な測定を表す測定演算子

測定によって獲得した情報量

Information gain

$$\langle I \rangle := S(\underbrace{\rho_{\mathrm{i}}^S}_{\text{測定前のシステムの状態}}) - \sum_k p_k S(\underbrace{\rho^S(k)}_{\text{測定後のシステムの状態}})$$

測定によって減少したシステムのエントロピー

例：初期状態　$\rho_{\mathrm{i}}^S = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$

1. 射影測定：$\rho_{\uparrow}^S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|, \quad \rho_{\downarrow}^S = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$

$$\langle I \rangle = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

測定によって状態が完全に分かる

2. 測定が恒等演算子で与えられる場合：$M_k^S = \hat{1}$

$$\langle I \rangle = \ln 2 - \ln 2 = 0$$

測定しても情報が何も得られない

具体例: qubit系の測定とフィードバック操作

(1) Maximally mixed state

$S(\rho) = \ln 2$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$$

(2) スピンの射影測定

$\langle I \rangle = \ln 2$

$$\rho_\downarrow = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \qquad \rho_\uparrow = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

(3) 測定結果に依存した
フィードバック

$$U_\downarrow = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \qquad U_\uparrow = 1$$

$S(\rho') = 0$

$$\rho' = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

(4) 仕事の引き出し

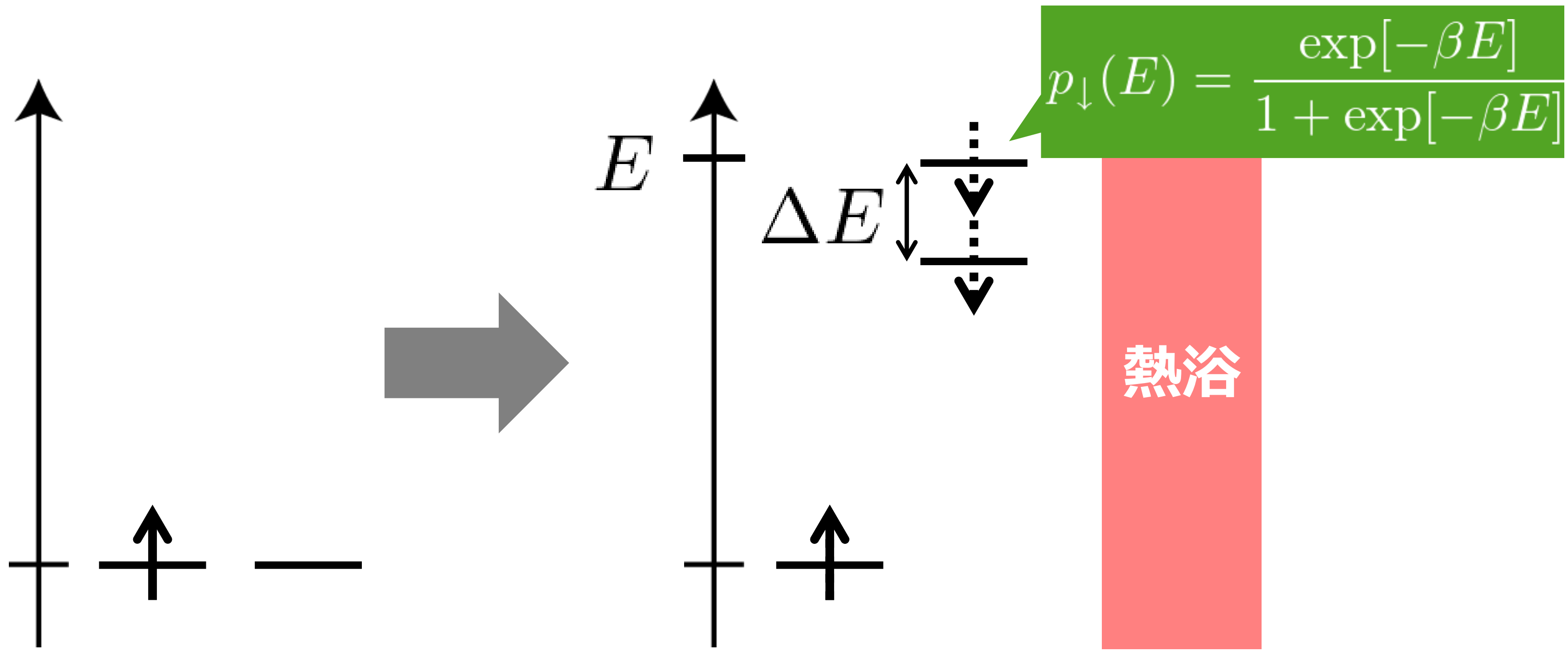
Work extraction

$$W = kT\langle I \rangle = kT \ln 2$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$$

仕事を取り出すプロトコル

仮定：熱浴と相互作用しているとき、システムはカノニカル分布になる



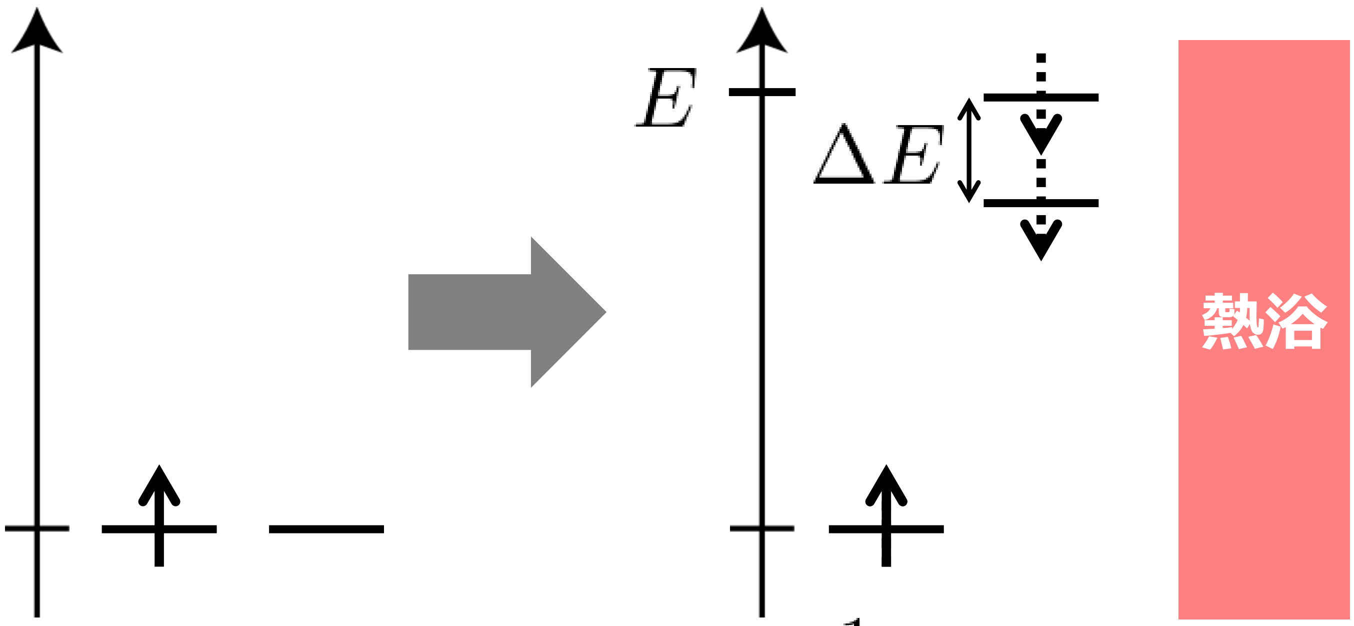
$$\rho' = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \qquad \rho = \frac{1}{Z}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \mathrm{e}^{-\beta E}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$$

↓のエネルギー順位をEからΔEだけ下げたときに取り出せる仕事：

$$\Delta W = p_{\downarrow}(E)\Delta E$$

仕事を取り出すプロトコル

仮定：熱浴と相互作用しているとき、システムはカノニカル分布になる



$$\rho' = \left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right|$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|\right)$$

↓のエネルギー順位を無限から0まで下げたときに取り出せる仕事：

$$W = -\int_{\infty}^{0} p_{\downarrow}(E)\mathrm{d}E = k_{\mathrm{B}}T\ln 2$$

目次

- マクスウェルの悪魔に関するレビュー
- ゆらぎの定理、Jarzynski等式
- 量子系における測定とフィードバックの方法
- **量子フィードバック制御下でのゆらぎの定理**
- まとめと今後の展望

本研究の目的

非平衡プロセスでも物理量に等号関係を与える
古典：Crooks PRE (1999), Jarzynski PRL (1997)
量子：Tasaki (1999), Kurchan (2000)

second law

$$\langle W \rangle \le -\Delta F$$

$\longrightarrow$

fluctuation theorem (FT)

$$\langle \mathrm{e}^{\beta(W+\Delta F)} \rangle = 1$$

measurement
& feedback

?

generalized second law

$$\langle W \rangle \le -\Delta F + k_{\mathrm{B}} T \langle I \rangle$$

? $\longrightarrow$

FT under
measurement&feedback

$$\langle \mathrm{e}^{\beta(W+\Delta F)-I} \rangle = 1$$

獲得した情報量<I>の分だけ通常の
第二法則よりも仕事が取り出せる
古典：Szilard engine
量子：Sagawa and Ueda PRL (2008), (2009)

古典：Sagawa and Ueda
PRL (2010), (2012)

測定とフィードバック制御を含めた時の量子ゆらぎの定理を導出する

セットアップ：一般的な量子測定とフィードバック制御

K.F, Y. Watanabe, and M. Ueda PRE (2013)

1. 初期状態

$$\rho_{\rm i}^S \otimes \rho_0^M$$

2. 相関が作られた状態

$$U^{SM} \rho_{\rm i}^S \otimes \rho_0^M U^{\dagger SM}$$

3. 測定後の状態

$$\frac{1}{p_k} P_k^M U^{SM} \rho_{\rm i}^S \otimes \rho_0^M U^{\dagger SM} P_k^M$$

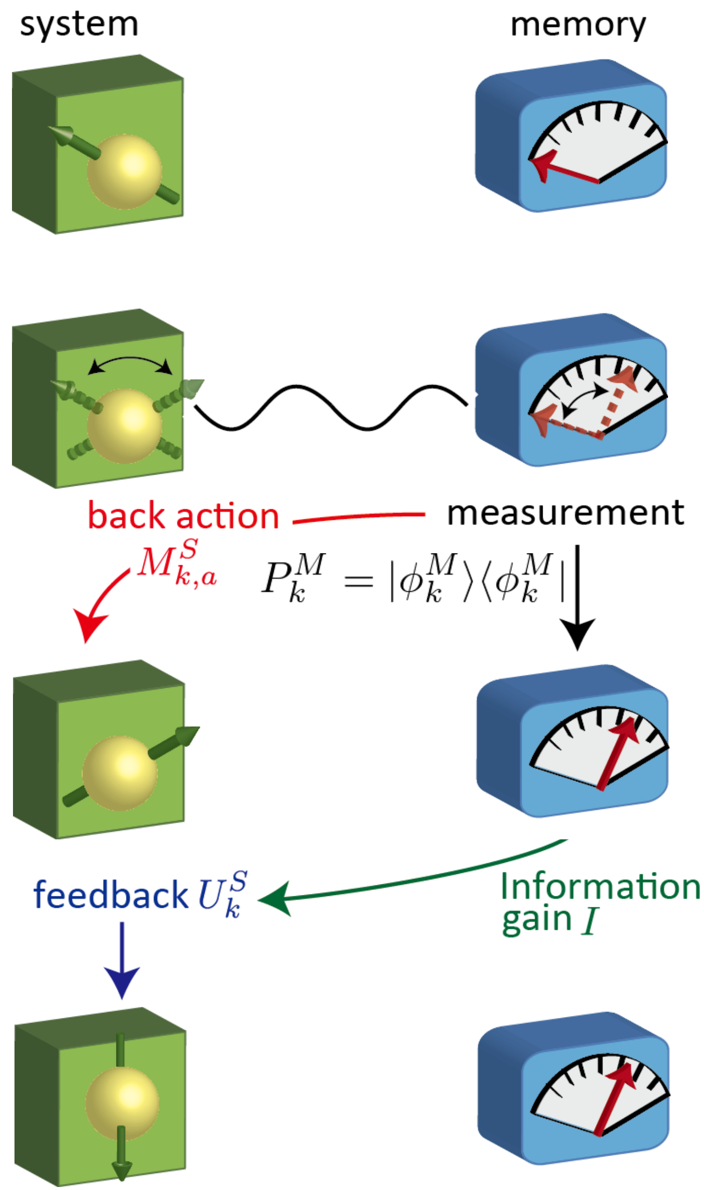
$$= \underbrace{\frac{1}{p_k} \sum_a M_{k,a}^S \rho_{\rm i}^S M_{k,a}^{\dagger S}}_{\rho^S(k)} \otimes |\phi_k^M\rangle\langle\phi_k^M|$$

$\rho^S(k)$：測定後のシステムの状態

4. フィードバック後の状態

$$\underbrace{U_k^S}_{\mathrm{T}[\exp(-\mathrm{i}\int_0^\tau \hat{H}_k^S(t)\mathrm{d}t)]} \rho^S(k) U_k^{\dagger S} \otimes |\phi_k^M\rangle\langle\phi_k^M|$$

$\mathrm{T}[\exp(-\mathrm{i}\int_0^\tau \hat{H}_k^S(t)\mathrm{d}t)]$



量子状態の対角成分間の遷移

密度行列の変化

↓

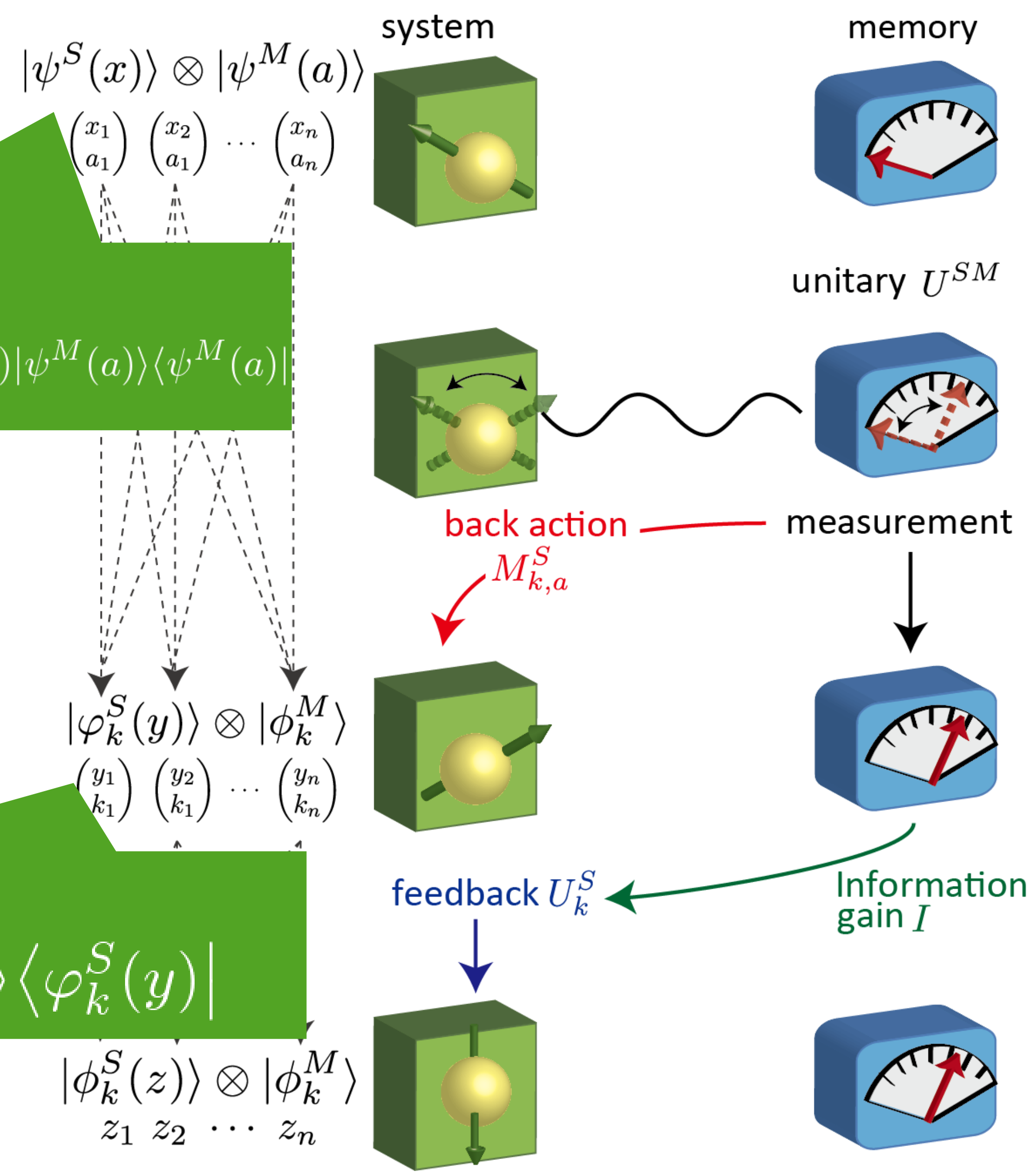
対角成分の遷移

初期状態

$$\rho_{\mathrm{i}}^{S} \otimes \rho_{0}^{M} = \sum_{x} p^{S}(x)|\psi^{S}(x)\rangle\langle\psi^{S}(x)| \otimes \sum_{a} p^{M}(a)|\psi^{M}(a)\rangle\langle\psi^{M}(a)|$$

測定後の状態

$$\rho^{S}(k) = \sum_{y} p(y|k)\,|\varphi_{k}^{S}(y)\rangle\langle\varphi_{k}^{S}(y)|$$



量子状態の対角成分間の遷移

密度行列の変化

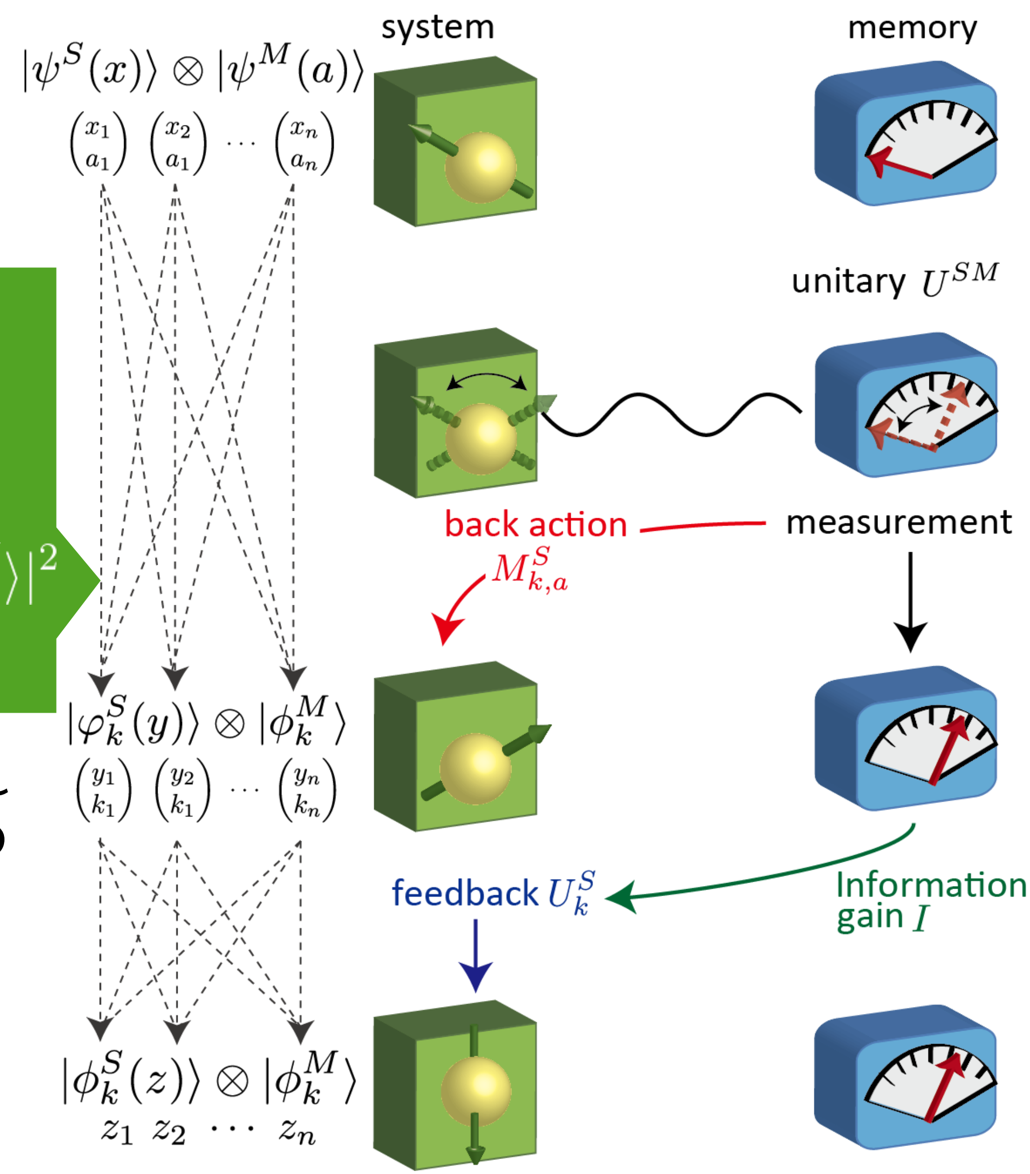
↓

対角成分の遷移

量子状態の遷移:
x,a,k,y,z で特徴づけられ、その遷移が起こる確率は

$$p(x,a,k,y,z)=p_{\mathrm{i}}^{S}(x)p_0^{M}(a)$$
$$\times|\langle\varphi_k^S(y)|\otimes\langle\phi_k^M|U^{SM}|\phi_k^S(z)\rangle\otimes|\phi_k^M\rangle|^2$$
$$\times|\langle\phi_k^S(z)|U_k^S|\varphi_k^S(y)\rangle|^2$$

物理量を x,a,k,y,z で表される遷移ごとに定義して、量子ゆらぎの定理を導く



各量子状態間の遷移に依存した物理量の定義

・システムの”エントロピー生成“

$$\sigma^S(x,k,z) := \ln p_{\mathrm{i}}^S(x) - \ln p_{\mathrm{r}}^S(z|k)$$

・ メモリーの“エントロピー生成”

$$\sigma^M(a,k) := \ln p_0^M(a) - \ln p_{\mathrm{r}}^M(k)$$

散逸だけでなく情報のやり取りによる効果も含んでいる

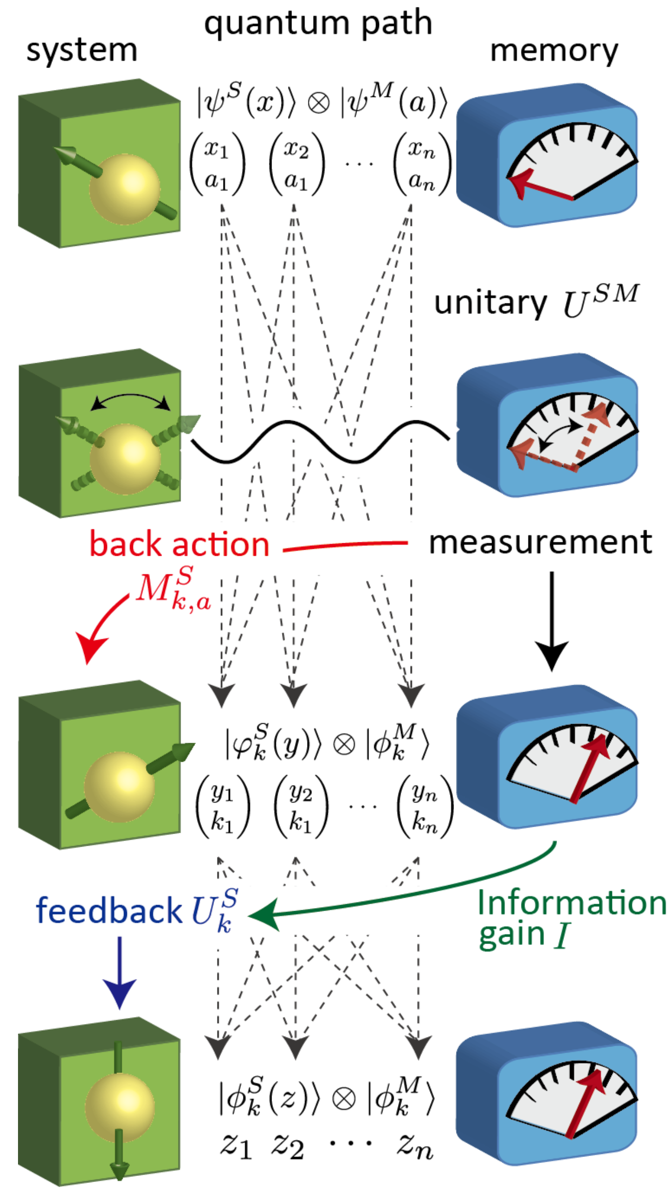
・獲得した情報量

$$I(x,k,y) := \ln p(\underline{y}|k) - \ln p_{\mathrm{i}}^S(x)$$

測定の反作用の効果

古典系:古典相互情報量

$$I = \ln p(\underline{x}|k) - \ln p_{\mathrm{i}}^S(x)$$



情報量を含めた量子ゆらぎの定理

$$\langle \mathrm{e}^{-\sigma^S - I} \rangle = 1 \xrightarrow{\text{first cumulant}} \langle \sigma^S \rangle \geq -\underline{\langle I \rangle}$$

$$\langle \mathrm{e}^{-\sigma^M + I} \rangle = 1 \qquad \langle \sigma^M \rangle \geq +\underline{\langle I \rangle}$$

逆符号で現れる

Information gain

$$\langle I \rangle := S(\underline{\rho_{\mathrm{i}}^S}) - \sum_k p_k S(\underline{\rho^S(k)})$$

測定前のシステムの状態

測定後**のシステムの状態**

測定によって減少したシステムのエントロピー

・システムのエントロピーを $\langle I \rangle$ だけ**減少**

↕

・メモリーのエントロピーが $\langle I \rangle$ だけ**増加**

Effect of the measurement back action

Information gain $\langle I \rangle := S(\rho_{\mathrm{i}}^S) - \sum_k p_k S(\rho^S(k))$

システムとメモリーの状態を具体的に選ぶと

- $\rho_0^M = |0\rangle\langle 0| \rightarrow \langle I \rangle \geq 0$
- $\rho_{\mathrm{i}}^S = |0\rangle\langle 0| \rightarrow \langle I \rangle \leq 0$
- $\rho_0^M = |0\rangle\langle 0|, \rho_{\mathrm{i}}^S = |0\rangle\langle 0| \rightarrow \langle I \rangle = 0$

Negative information gain
・量子測定の反作用の効果

古典的な場合：古典相互情報量

$$I = H(S) + H(M) - H(SM) \geq 0$$

測定の反作用が無いので、常に正の量

Jarzynski等式の導出のための仮定

仮定：初期状態とreference stateがカノニカル分布で与えられる

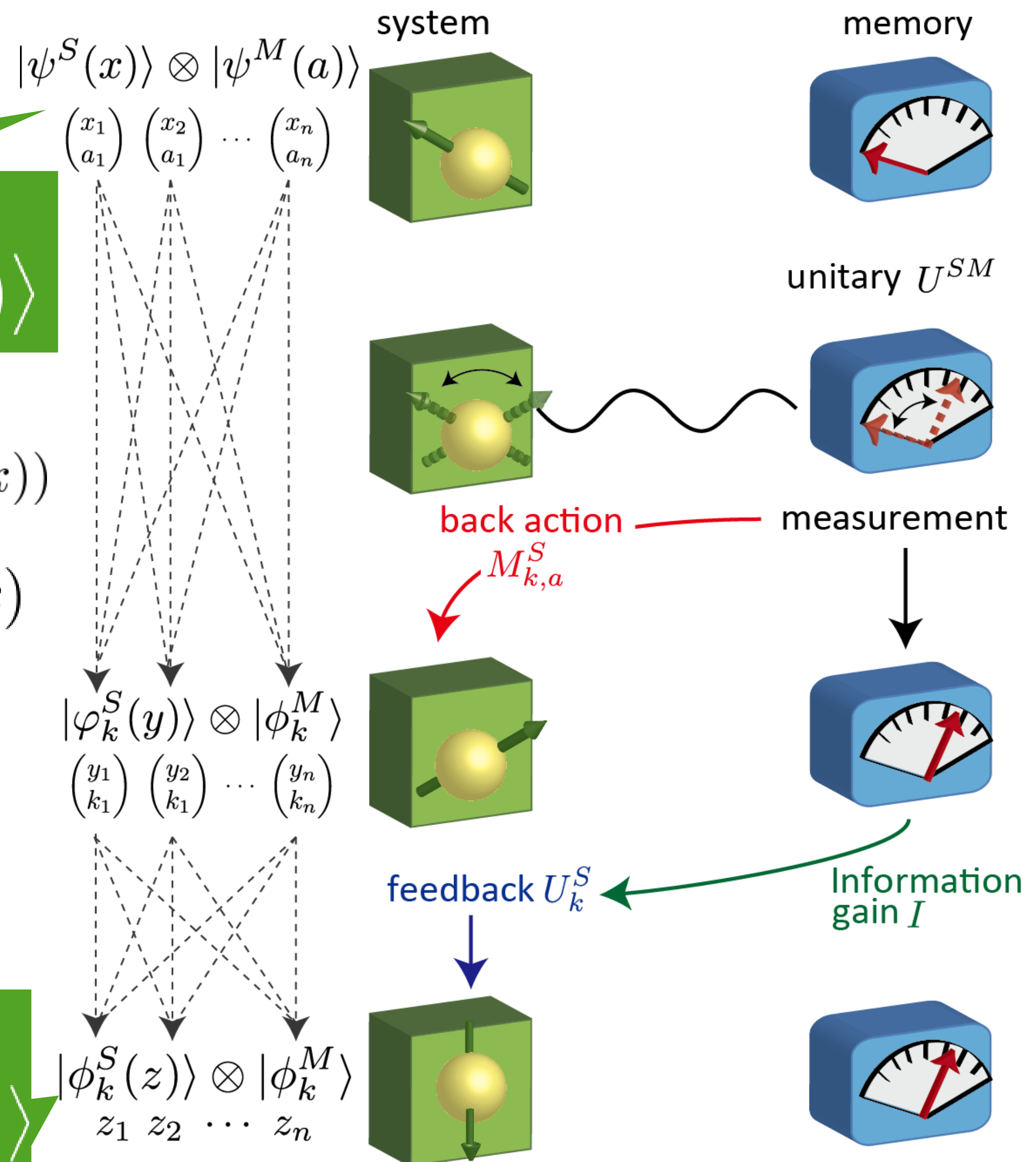
初期ハミルトニアンの固有状態

$$\hat{H}_{\mathrm{i}}^{S}\left|\psi^{S}(x)\right\rangle = E_{\mathrm{i}}^{S}(x)\left|\psi^{S}(x)\right\rangle$$

$$\sigma^{S}(x,k,z) = -\beta(W(x,k,z)+\Delta F(k))$$

$$W(x,k,z) = E_{\mathrm{i}}^{S}(x) - E_{\mathrm{f}}^{S}(z|k)$$

$$\Delta F(k) = -\beta \ln \mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}_{\mathrm{f},k}^{S}}] + \beta \ln \mathrm{Tr}[\mathrm{e}^{-\beta \hat{H}_{\mathrm{i}}^{S}}]$$



終ハミルトニアンの固有状態

$$\hat{H}_{\mathrm{f},k}^{S}\left|\phi_k^{S}(z)\right\rangle = E_{\mathrm{f}}^{S}(z|k)\left|\phi_k^{S}(z)\right\rangle$$

一般化されたJarzynski等式

量子フィードバック制御を含めたJarzynski等式

$$\left\langle \mathrm{e}^{\beta(W^S+\Delta F^S)-I} \right\rangle = 1$$

Jensenの不等式 $\langle \mathrm{e}^{x} \rangle \geq \mathrm{e}^{\langle x \rangle}$

一般化された第二法則を再導出する

$$\langle W^S \rangle \leq -\langle \Delta F^S \rangle + k_{\mathrm{B}} T \langle I \rangle$$

獲得した情報量の分だけ通常の第二法則を超えてシステムから仕事が取り出せる

Concluding remarks

1. 量子ゆらぎの定理をフィードバック制御されるシステムと測定結果を蓄えるメモリーの両方について導いた。
2. システムとメモリーの間でやり取りされる情報はInformation gainによってあらわされることを特定し、量子系特有の測定の反作用の効果を含んでいることを示した。

3. 将来の展望: ゆらぎの定理に量子系で重要なエンタングルメントの効果を取り入れることはできるか？