チュートリアル講演

「エンタングルメントの定量理論」

広島大学大学院 総合科学研究科
石坂 智

Outline

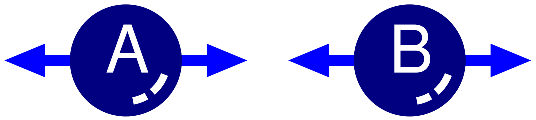
1. 基本的なコンセプト

エンタングルメントとは？

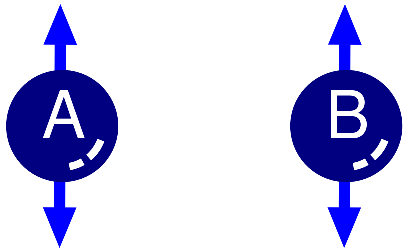
エンタングル状態

- 2 つの量子ビット (光子の偏光, 電子スピン, etc)

水平偏光　水平偏光



垂直偏光　垂直偏光



$$|0\rangle_A|0\rangle_B \qquad\qquad |1\rangle_A|1\rangle_B$$

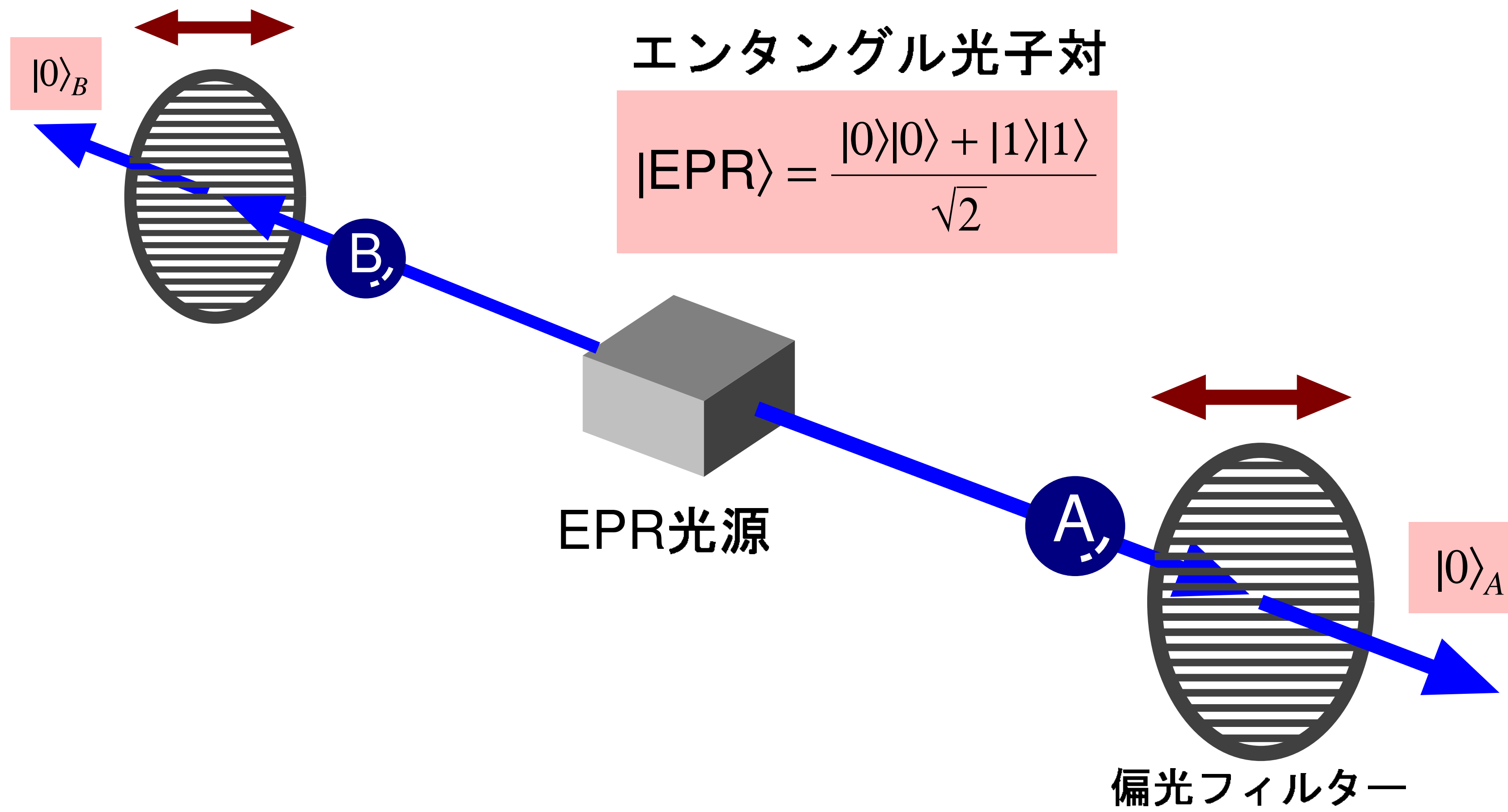
- 量子力学の重ね合わせの原理

$$|\mathsf{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_A|0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_A|1\rangle_B$$

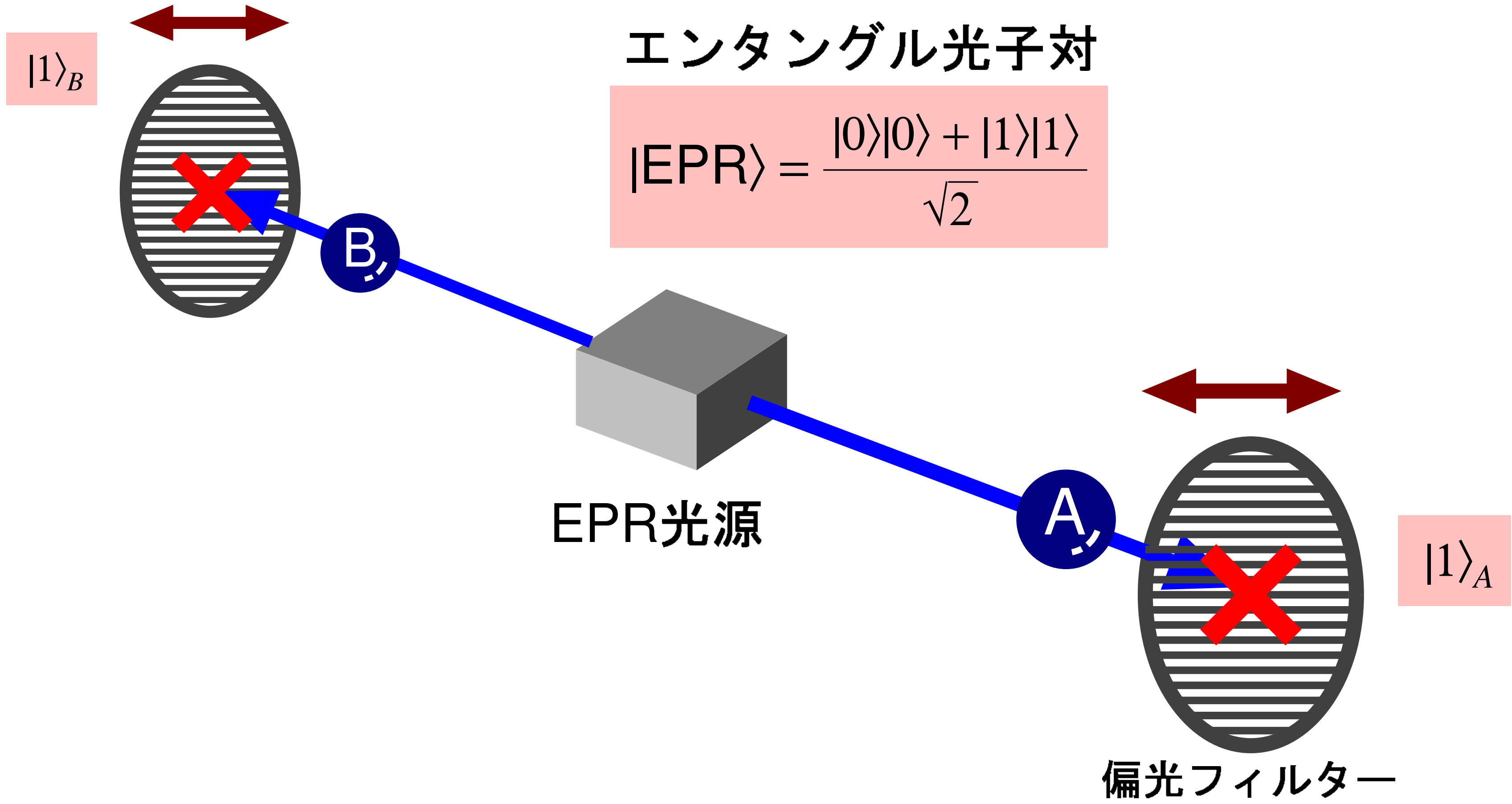
$\cdots$ **エンタングル状態**

(絡み合い状態, もつれ状態)

エンタングル状態の基本的性質

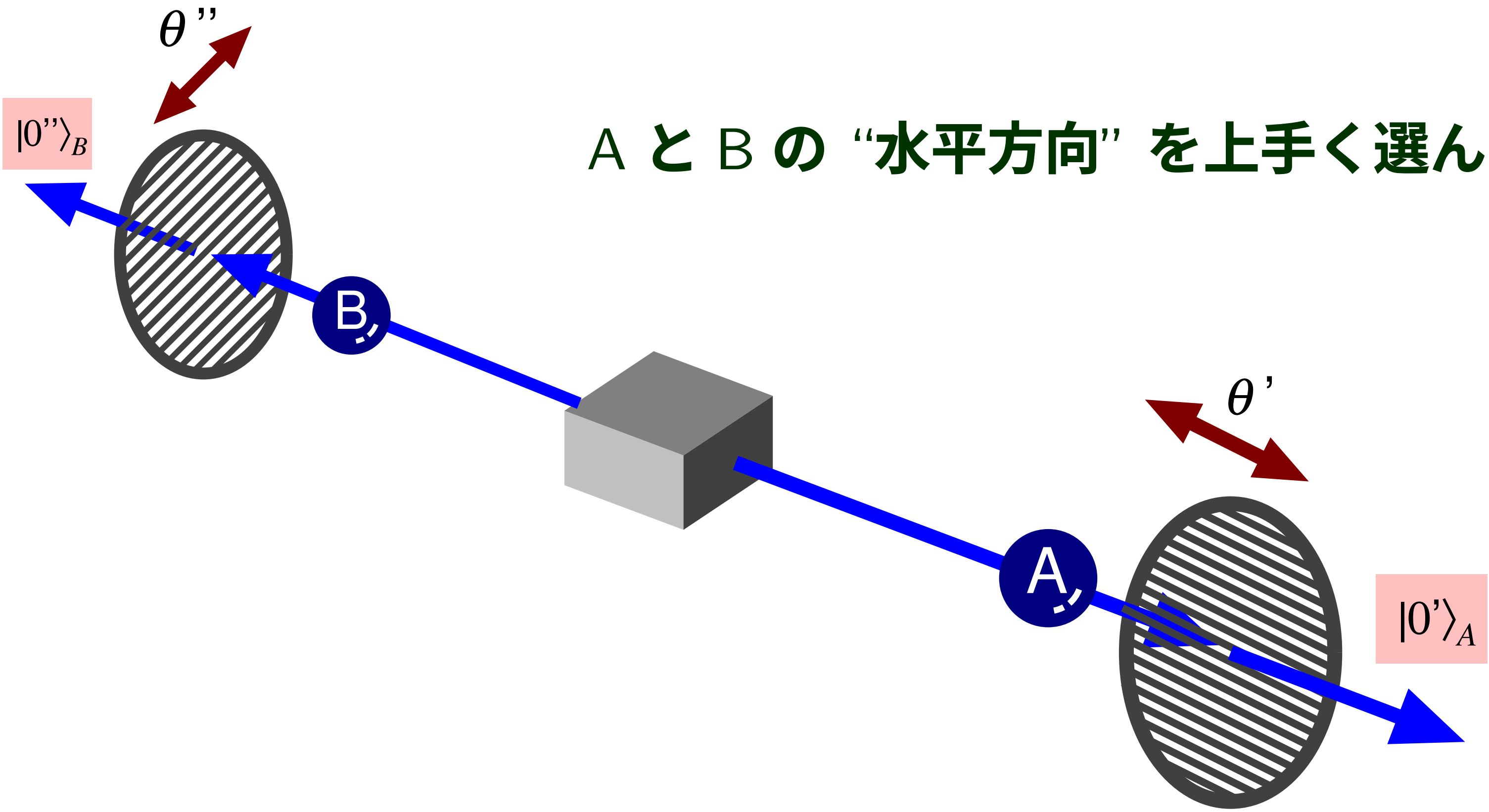


エンタングル状態の基本的性質



一般の量子状態

$$|\psi\rangle = c_1|0\rangle|0\rangle + c_2|0\rangle|1\rangle + c_3|1\rangle|0\rangle + c_4|1\rangle|1\rangle$$



A と B の "水平方向" を上手く選んでやる

$$|\psi\rangle = \sqrt{p}\,|0'\rangle_A|0''\rangle_B + \sqrt{1-p}\,|1'\rangle_A|1''\rangle_B$$ (Schmidt の分解定理)

$\{p, 1-p\}$ は縮約密度行列 $\sigma_A = \mathrm{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|$ の固有値

純粋状態のエンタングルメント量

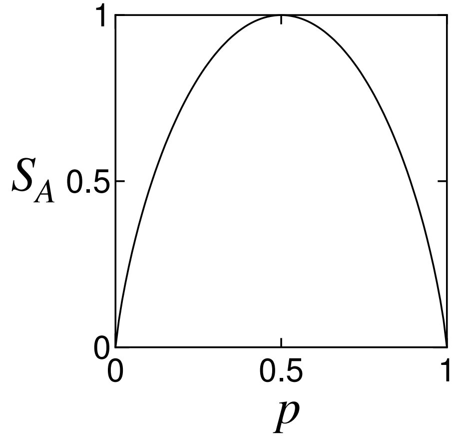
$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|0\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p}|1\rangle|1\rangle$$

$$= \begin{cases} \textbf{積状態}\ (|00\rangle, |11\rangle) & \text{for } p=0,\,1 \\ \textbf{エンタングル状態} & \text{otherwise} \end{cases}$$

- **エンタングルメント・エントロピー**

$$S_A = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } \textbf{積状態} \\ 1 & \text{for } |\mathrm{EPR}\rangle \end{cases}$$



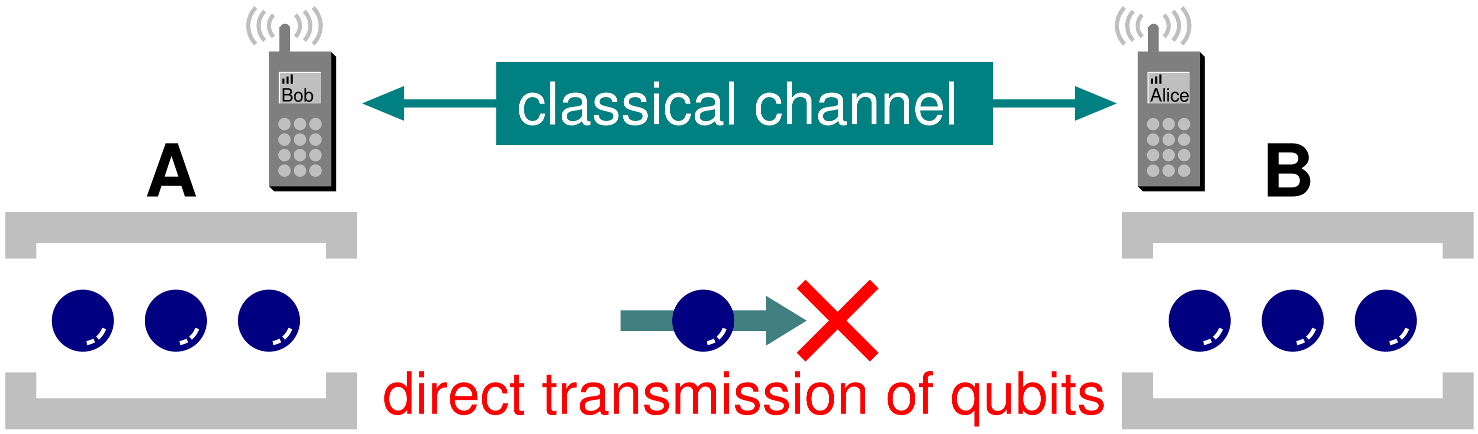
$$= -\mathrm{tr}\sigma_A \log_2 \sigma_A \qquad (\sigma_A = \mathrm{tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|)$$

c.f. Black-hole entropy [L. Bombelli, et.al., 1986]

2. 局所操作と古典通信 (LOCC)

エンタングルメントを操作する

局所操作と古典通信 (LOCC)

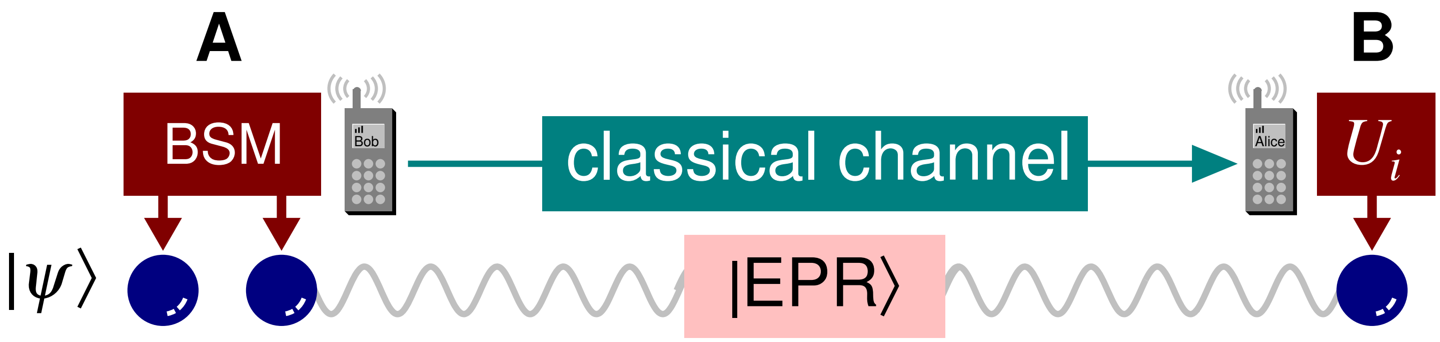


- A は A が保持している量子ビットに対してのみ、測定やユニタリー変換が行える (局所操作) $\leftrightarrow$ **大局操作**

- 測定の結果を古典通信で教え合い、次の操作を決めることはできるものとする

LOCC はエンタングルメントを新たに生成できない

量子テレポーテーション



- **量子テレポーテーションも** LOCC **プロトコル**

- LOCC **の考え方によりエンタングルメントの効能が明らかになる**

  $|\mathrm{EPR}\rangle$ **を使うと、**LOCC **で量子ビットの伝送ができる**

  $|\mathrm{EPR}\rangle$ = EPR-channel

- **エンタングルメントの定量化が可能になる**

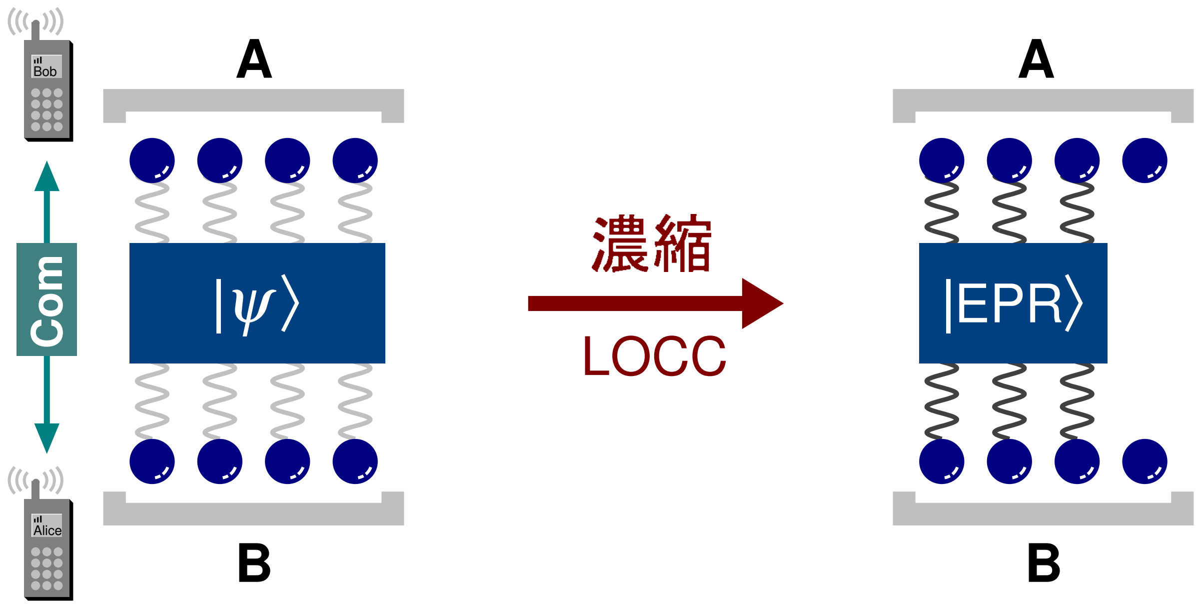
  ※情報理論 (通信・暗号) 的な考え方が多く入っている

3. エンタングルメントの定量化

その操作的な意味

エンタングルメントの操作

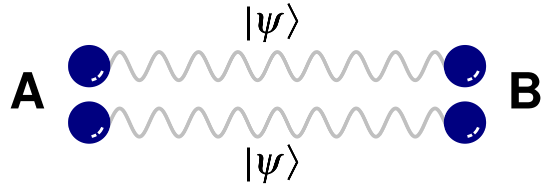
- LOCC はエンタングルメントを新たに生成できない
- LOCC でエンタングルメントの変換はできる



$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|0\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p}|1\rangle|1\rangle$$

$$|\text{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|1\rangle$$

エンタングルメント濃縮



$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle^{\otimes 2} &= \left(\sqrt{p}|0\rangle_A|0\rangle_B + \sqrt{1-p}|1\rangle_A|1\rangle_B\right)^{\otimes 2} \\
&= p|00\rangle_A|00\rangle_B + (1-p)|11\rangle_A|11\rangle_B \\
&\qquad + \sqrt{2p(1-p)}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_A|01\rangle_B + |10\rangle_A|10\rangle_B\right)
\end{aligned}
$$

- A は "$|1\rangle$" の状態の数 (k) を決める測定を行う (局所操作)

※個々の量子ビットの状態を完全に決定してはいけない

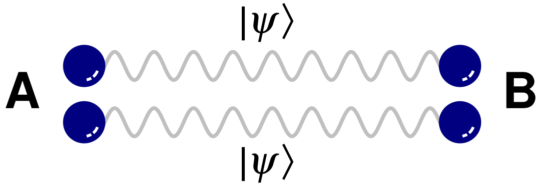
- $k=1$ の測定結果が出たら変換成功、AB は状態を残す (古典通信)

- A と B は $\left\{\begin{array}{l} |01\rangle \rightarrow |00\rangle \\ |10\rangle \rightarrow |10\rangle \end{array}\right\}$ の基底変換を行う (局所操作)

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_A|00\rangle_B + |10\rangle_A|10\rangle_B\right) = |\mathrm{EPR}\rangle|0\rangle_A|0\rangle_B
$$

エンタングルメント濃縮

$$|\psi\rangle^{\otimes 2} = \left(\sqrt{p}|0\rangle_A|0\rangle_B + \sqrt{1-p}|1\rangle_A|1\rangle_B\right)^{\otimes 2}$$
$$= p|00\rangle_A|00\rangle_B + (1-p)|11\rangle_A|11\rangle_B$$
$$+ \sqrt{2p(1-p)}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_A|01\rangle_B + |10\rangle_A|10\rangle_B\right)$$

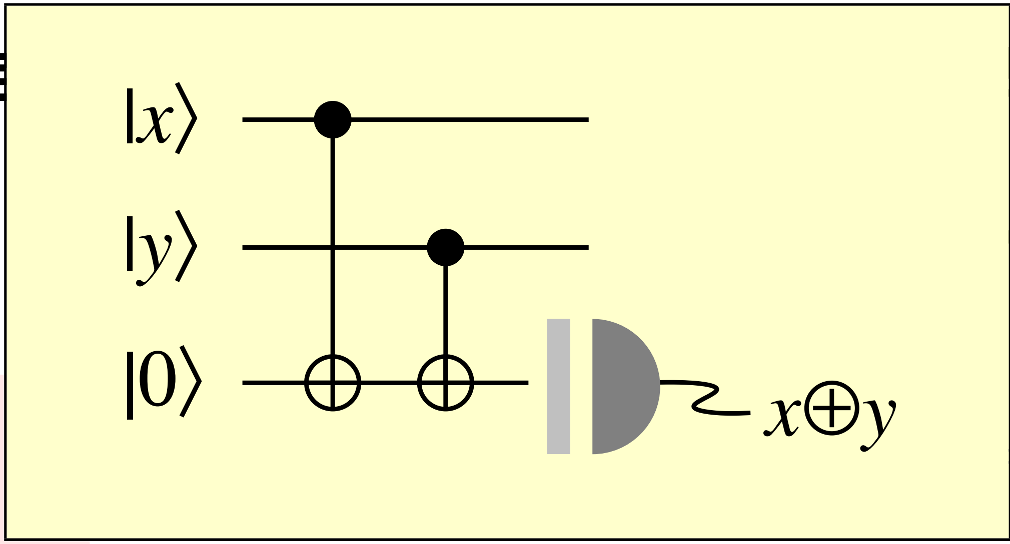


- A は "$|1\rangle$" の状態の数 (k) を決める測定を行う (局所操作)

※個々の量子ビットの状態を完全に決定してはいけない

- $k=1$ の測定 … す (古典通信)
- A と B は { … 作)

$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots$ … $= |\mathrm{EPR}\rangle|0\rangle_A|0\rangle_B$



エンタングルメント濃縮 ($n \to \infty$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle^{\otimes n} &= \left(\sqrt{p}|0\rangle_A|0\rangle_B + \sqrt{1-p}|1\rangle_A|1\rangle_B\right)^{\otimes n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{p^k(1-p)^{n-k}} \underbrace{\left(|k \text{ 個の } 1\rangle_A |k \text{ 個の } 1\rangle_B + \cdots\right)}_{\binom{n}{k} \text{ 項の重ね合わせ}} \end{aligned}$$

- A は "$|1\rangle$" の状態の数 (k) を決める測定を行う
- k の測定結果が出る確率は $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
- $(\cdots)$ は局所ユニタリー変換で $\log_2\binom{n}{k}$ 対の $|\mathrm{EPR}\rangle$
- 平均変換効率 ($n \gg 1$)

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \log_2 \binom{n}{k} \approx \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \log_2 \binom{n}{n(1-p)} \\ &\approx n\big[-p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)\big] = nS_A \end{aligned}$$

※大数法則 $k \approx n(1-p)$,　スターリン公式 $\log_2 n! \approx n\log_2 n - n$

エンタングルメント濃縮 ($n \to \infty$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle^{\otimes n} &= \left(\sqrt{p}|0\rangle_A|0\rangle_B + \sqrt{1-p}|1\rangle_A|1\rangle_B\right)^{\otimes n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sqrt{p^k(1-p)^{n-k}} \underbrace{\left(|k\ \text{個の}\ 1\rangle_A|k\ \text{個の}\ 1\rangle_B + \cdots\right)}_{\binom{n}{k}\ \text{項の重ね合わせ}}
\end{aligned}
$$

- A は "$|1\rangle$" の状態の数 (k) を決める測定を行う
- k の測定結果が出る確率は $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
- $(\cdots)$ は局所ユニタリー変換で $\log_2\binom{n}{k}$ 対の $|\text{EPR}\rangle$
- 平

$m =$

$\binom{n}{n(1-p)}\Big)$

$\approx$

$$\left(\frac{|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B}{\sqrt{2}}\right)^{\otimes n}$$

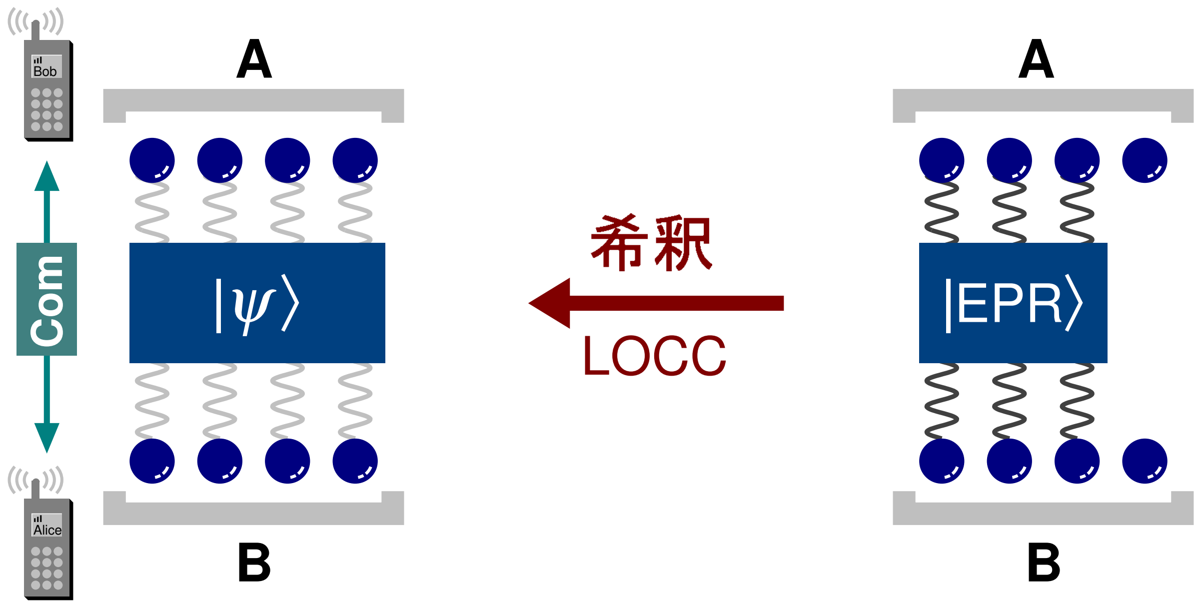
$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\Big(|0\cdots0\rangle_A|0\cdots0\rangle_B + \cdots + |1\cdots1\rangle_A|1\cdots1\rangle_B\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\Big(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B + \cdots + |2^n-1\rangle_A|2^n-1\rangle_B\Big)$$

※大数法則 $k \approx n(1-p)$,　スターリン公式 $\log_2 n! \approx n\log_2 n - n$

エンタングルメントの操作

- LOCC はエンタングルメントを新たに生成できない
- LOCC でエンタングルメントの変換はできる



$$|\psi\rangle = \sqrt{p}|0\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p}|1\rangle|1\rangle$$

$$|\mathrm{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|1\rangle$$

量子データ圧縮

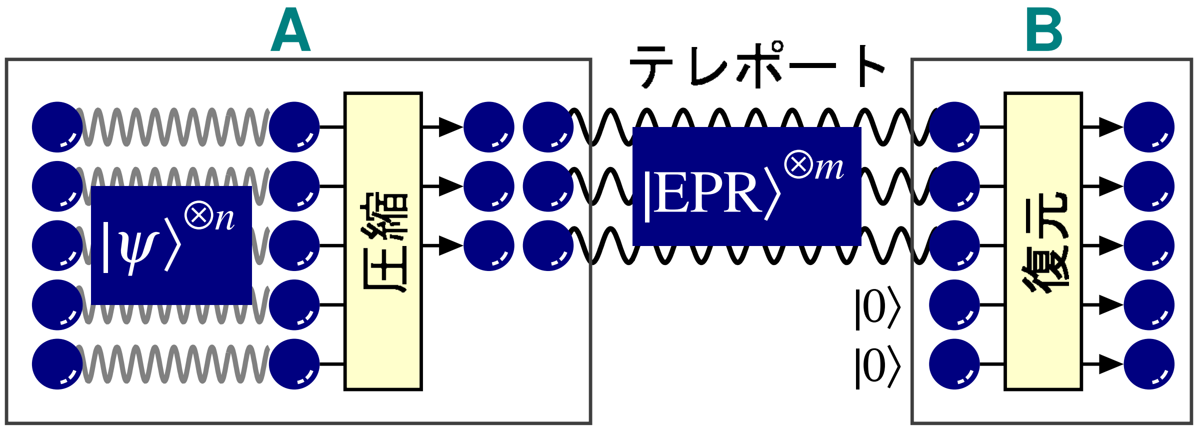
- $|\psi\rangle^{\otimes n} = \left(\sqrt{p}|0\rangle_A|0\rangle_B + \sqrt{1-p}|1\rangle_A|1\rangle_B\right)^{\otimes n}$ の B 側を圧縮したい

確率	展開項		マップ先
≈ 1	$\mid$ 典型系列の 1 番目$)\rangle_B$ $\mid$ 典型系列の 2 番目$)\rangle_B$ $\cdots$ $\mid$ 典型系列の $\binom{n}{np}$ 番目$)\rangle_B$ ("1" を $\sim np$ 個含む状態)	$\longrightarrow$ $\longrightarrow$ ユニタリー変換 U $\longrightarrow$	$\|0000\cdots00\rangle_B$ $\|0000\cdots01\rangle_B$ $\cdots$ $\|000\underbrace{1\cdots11}_{m\text{bits}}\rangle_B$
p^n $p^{n-1}(1-p)$ $\cdots$	$\|000\cdots000\rangle_B$ $\|000\cdots001\rangle_B$ $\cdots$	$\longrightarrow$ $\longrightarrow$ $\longrightarrow$	$\|0010\cdots00\rangle_B$ $\|0010\cdots01\rangle_B$ $\cdots$

- $2^m = \binom{n}{np}$ より $m \approx n\left[-p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)\right] = nS_A$

$U|\psi\rangle^{\otimes n} \approx |0\cdots0\rangle \otimes |m \text{ qbits}\rangle$ $\cdots$ $n \to nS_A$ 量子ビットへ圧縮

エンタングルメント希釈



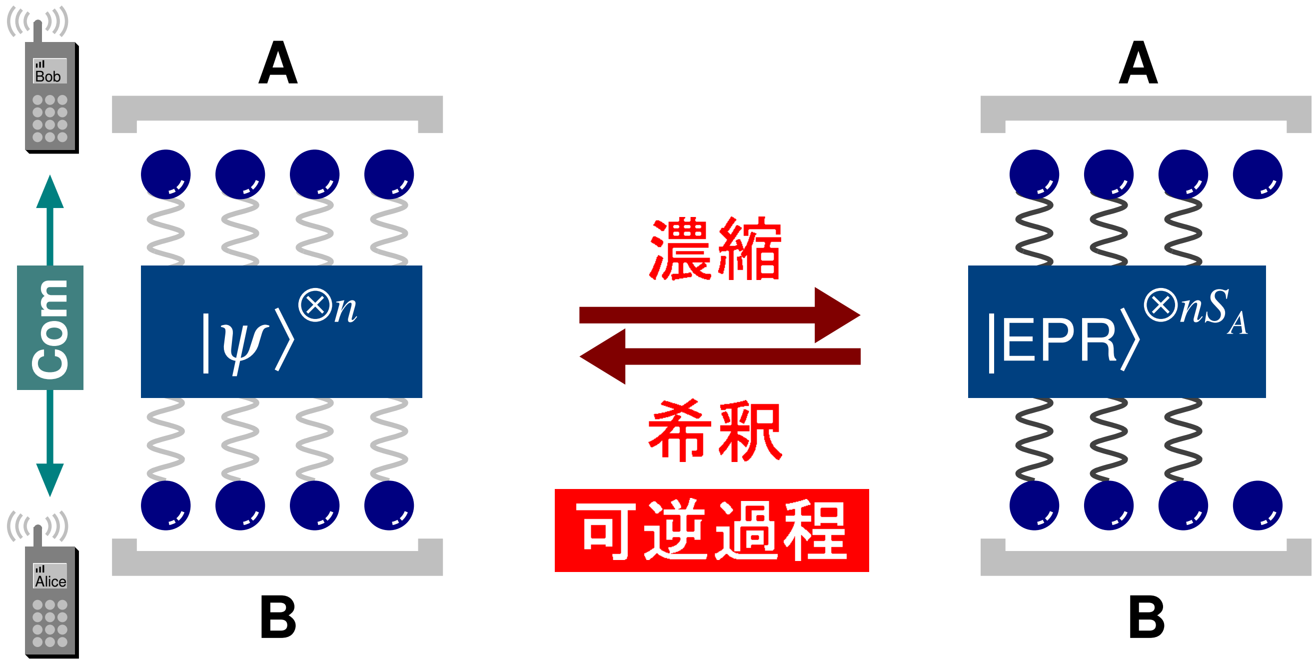
- A は $|\psi\rangle^{\otimes n}$ を自前で生成
- A は $|\psi\rangle^{\otimes n}$ の B 側の n 量子ビットを、nS_A 量子ビットへ圧縮 (U)
- 圧縮した量子ビットを、EPR$^{\otimes nS_A}$ を使って B にテレポート

※ EPR$^{\otimes nS_A}$ のエンタングルメントは破壊される

- B は圧縮の解凍 (U^{-1}) により、$|\psi\rangle^{\otimes n}$ を A と B で共有

$$\mathrm{EPR}^{\otimes nS_A} \longrightarrow \boxed{\mathrm{LOCC}} \longrightarrow |\psi\rangle^{\otimes n}$$

エンタングルメントの定量化



[C. H. Bennett, et.al., 1996] [M. Hayashi, 2002]

- $n \to \infty$ での**最適**変換レート: $S_A = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$

※ LOCC はエンタングルメントを生成できない

- **可逆過程 = 変換のサイクルにおいてエンタングルメント損失はゼロ**
- $|\mathrm{EPR}\rangle$ **を基本単位として、** $|\psi\rangle$ **のエンタングルメント量は** S_A ebit

4．混合状態のエンタングルメント

エンタングルメントの判定

混合状態

- **純粋状態 (孤立系)**

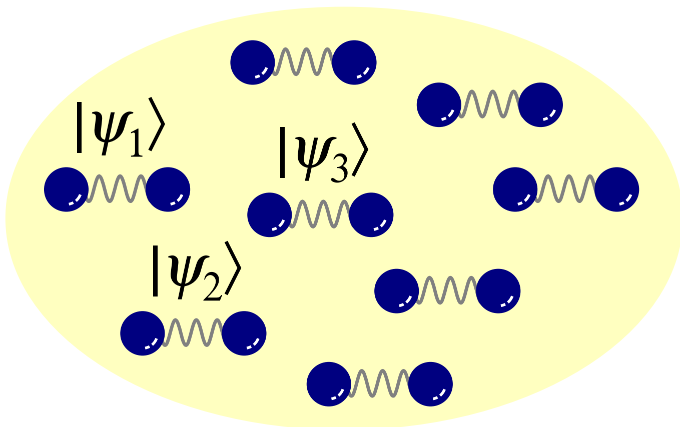
  波動関数 $\cdots$ $|\psi\rangle$

- **混合状態 (環境と相互作用、デコヒーレンス、通信エラー等)**

  密度行列 $\cdots$ $\sigma = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

  アンサンブル解釈 $\cdots$ **確率** λ_i **で** $|\psi_i\rangle$ **の状態**

  (σ **の固有値** ≥ 0)



混合状態

- **アンサンブル解釈には曖昧さがある**

$$\sigma = |\mathsf{EPR}\rangle\langle\mathsf{EPR}|$$

$$\Downarrow$$

$\frac{1}{2}$ **の確率で位相エラー**

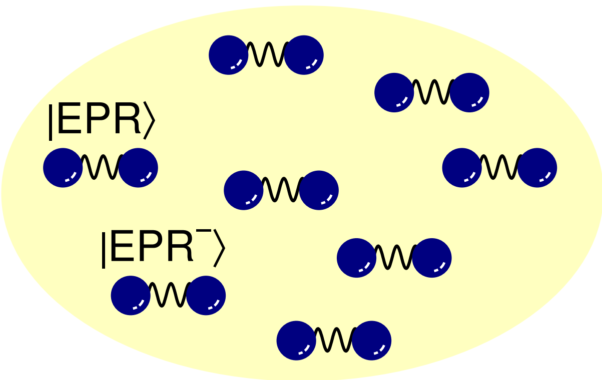
$$|\mathsf{EPR}\rangle \to |\mathsf{EPR}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big)$$

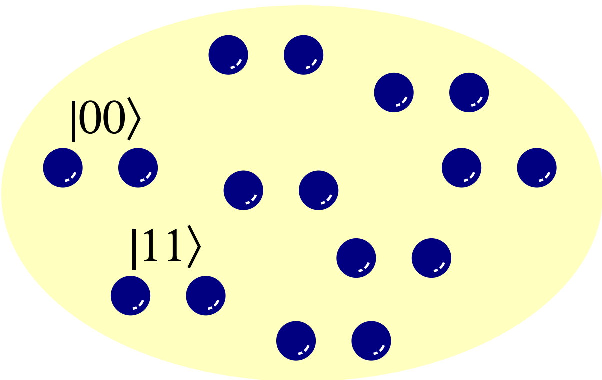
$$\Downarrow$$

$$\sigma = \frac{1}{2}|\mathsf{EPR}\rangle\langle\mathsf{EPR}| + \frac{1}{2}|\mathsf{EPR}^-\rangle\langle\mathsf{EPR}^-|$$

$$= \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$$

- σ **はエンタングルしているのか？**





エンタングルした混合状態

混合状態のエンタングルメントの定義: [R. Werner, 1989]

σ **はエンタングルしていない** $\Longleftrightarrow \quad \sigma = \sum_i \lambda_i |e_i f_i\rangle\langle e_i f_i|$

※**積状態** $|e_i f_i\rangle = |e_i\rangle_A |f_i\rangle_B$

- **密度行列の形による定義**

  LOCC **による定義とも整合 (後述)**

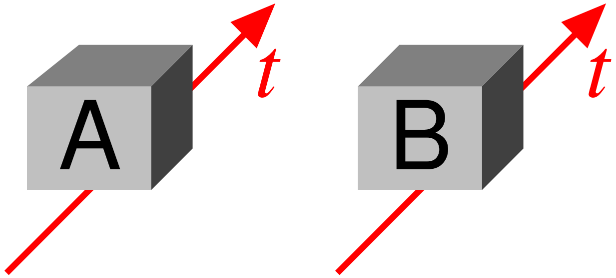
- **混合状態のエンタングルメントの判定**

  σ **の全ての純粋状態への分解を調べなければならない**

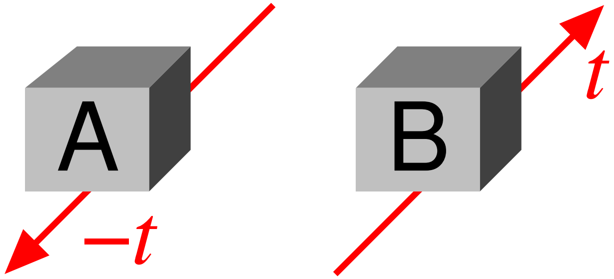
  極めて難しい問題 $\cdots$ **簡便で万能な方法は見つかっていない**

  2 **量子ビット系には良い方法がある**

Peres の判定法



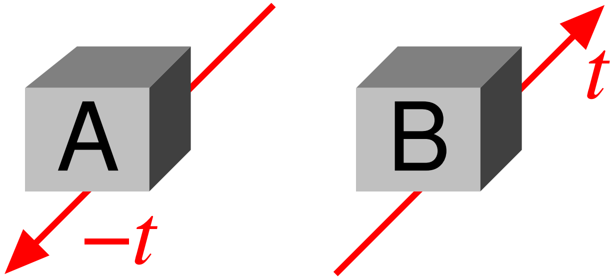
Peres の判定法



時間反転 ＝ 波動関数の複素共役

＝ 密度行列の転置

Peres の判定法



時間反転 ＝ 波動関数の複素共役

＝ 密度行列の転置

- A 系だけの転置 ＝ 部分転置

- エンタングルしていないと...

$$\sigma^{T_A} = \sum_i \lambda_i |{e_i}^* f_i\rangle\langle {e_i}^* f_i| \cdots \text{ 固有値} \geq 0$$

- エンタングルしていると...

$$\left(|\mathrm{EPR}\rangle\langle\mathrm{EPR}|\right)^{T_A} = \tfrac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |{\color{red}1}0\rangle\langle{\color{red}0}1| + |{\color{red}0}1\rangle\langle{\color{red}1}0| + |11\rangle\langle 11|\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ & 1 & & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$$

固有値 $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, {\color{red}-\frac{1}{2}}\} \cdots$ 1 つは負

Peres の判定法

Peres 判定法 [Peres 1996]

σ^{T_A} **が負の固有値を持つ** $\Longrightarrow$ σ **はエンタングル状態**

- 2 **量子ビット** (**と** $2 \otimes 3$) **の系では逆も成立** [Horodecki, 1996]

  ※ Peres-Horodecki **判定法で必要十分**

- **実験的に判定するには？**

  σ **を種々の測定結果から決定 (状態トモグラフィー)**

  ※ 2 **量子ビットで** 15 **個の独立パラメータ**

  σ^{T_A} **の固有値を数値的に求める**

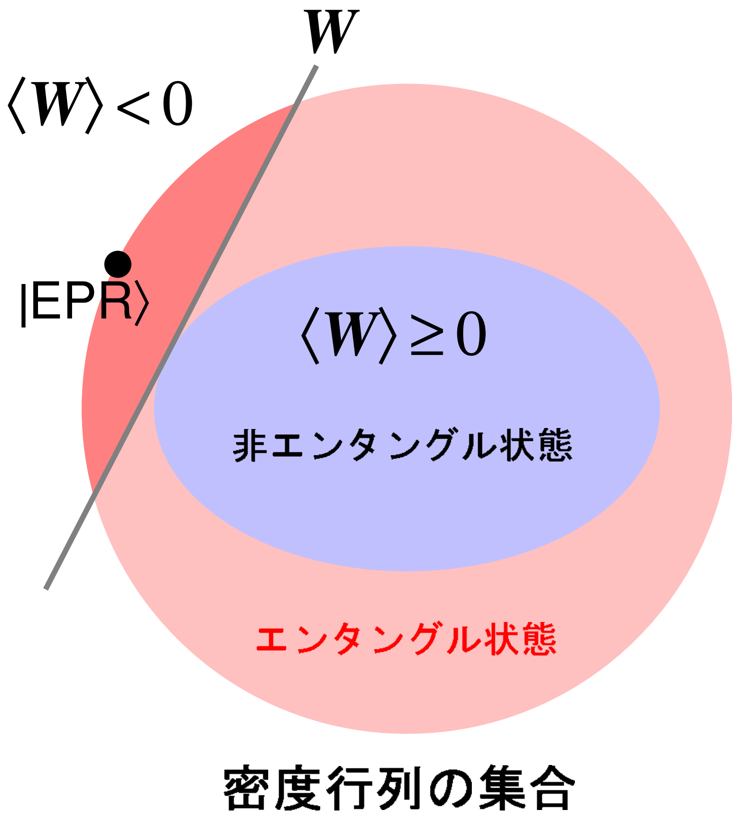
- **もう少し効率的な方法もある** $\cdots$ entanglement witness

Entanglement witness

Entanglement witness: [Horodecki, Terhal 1996]

$$\langle W\rangle < 0 \;\;\Rightarrow\;\;$$ **その状態はエンタングルしている**

e.g. $W = \frac{1}{2} - |\mathrm{EPR}\rangle\langle\mathrm{EPR}|$



- $|\mathrm{EPR}\rangle\langle\mathrm{EPR}|^{T_A}$ **の負の固有値** $\cdots |\mu\rangle$
- $W = (|\mu\rangle\langle\mu|)^{T_A}$

$\langle W\rangle = \mathrm{tr}\sigma W = \langle\mu|\sigma^{T_A}|\mu\rangle$

$$= \begin{cases} \textbf{負の固有値}\ (\sigma = |\mathrm{EPR}\rangle\langle\mathrm{EPR}|) \\ \textbf{ゼロ以上}\ (\sigma\ \textbf{が非エンタングル}) \end{cases}$$

Entanglement witness

Entanglement witness: [Horodecki, Terhal 1996]

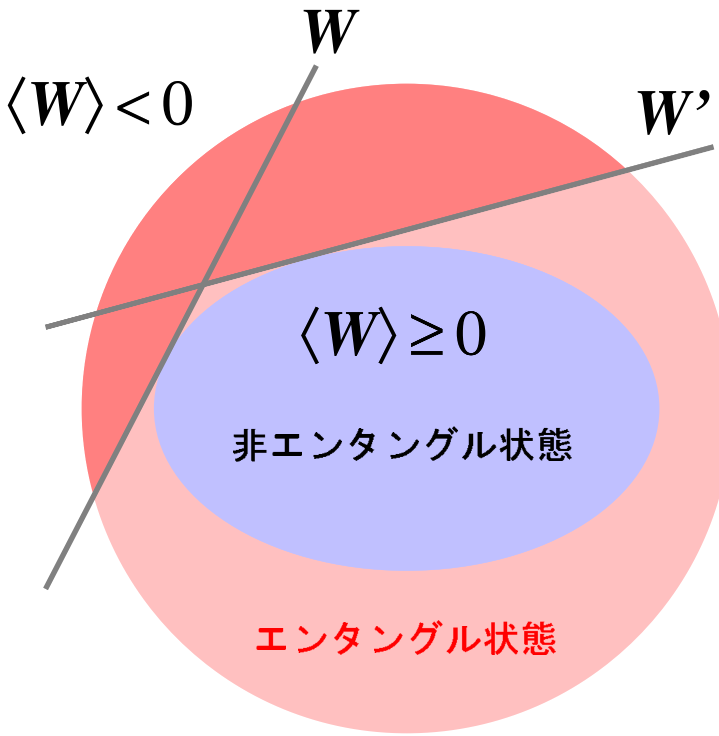
$$\langle W \rangle < 0 \quad \Rightarrow$$ **その状態はエンタングルしている**

e.g. $W = \frac{1}{2} - |\mathrm{EPR}\rangle\langle\mathrm{EPR}|$

- $|\mathrm{EPR}\rangle\langle\mathrm{EPR}|^{T_A}$ **の負の固有値** $\cdots |\mu\rangle$
- $W = (|\mu\rangle\langle\mu|)^{T_A}$

$\langle W \rangle = \mathrm{tr}\sigma W = \langle\mu|\sigma^{T_A}|\mu\rangle$

$= \begin{cases} \textbf{負の固有値} \ (\sigma = |\mathrm{EPR}\rangle\langle\mathrm{EPR}|) \\ \textbf{ゼロ以上} \ (\sigma \ \textbf{が非エンタングル}) \end{cases}$

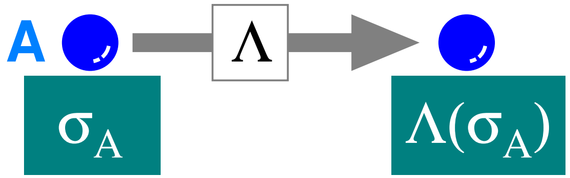


密度行列の集合

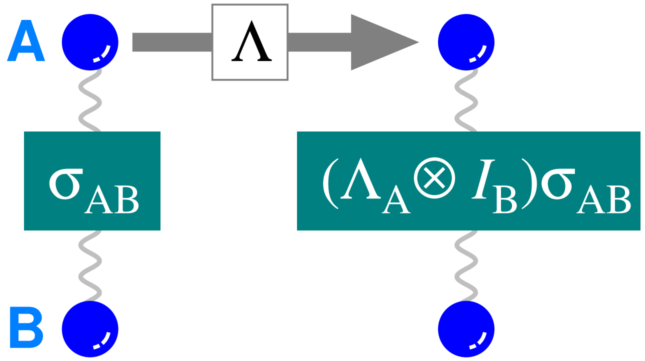
物理的に可能な操作とは？

- 密度行列の固有値は常に非負 $(\sigma_A \geq 0)$

$\Lambda(\sigma_A) \geq 0$ $\cdots$ **正写像**



※物理操作の条件としては不十分



- 写像が物理操作である為には

$(\Lambda_A \otimes I_B)\sigma_{AB} \geq 0$ $\cdots$ **完全正写像**

σ_{AB} がエンタングルしていない時は、正写像の Λ に対して

$$\sigma_{AB} = \sum_i p_i |e_i\rangle\langle e_i| \otimes |f_i\rangle\langle f_i|$$

$$(\Lambda_A \otimes I_B)\sigma_{AB} = \sum_i p_i \Lambda(|e_i\rangle\langle e_i|) \otimes |f_i\rangle\langle f_i| \geq 0$$

正写像とエンタングルメント判定

- ある正写像 Λ に対して

$$(\Lambda_A \otimes I_B)\sigma_{AB} \ngeq 0$$

ならば、σ_{AB} はエンタングル状態

※ペレスの判定法はこれに基づいている

- この逆も証明されている

定理: [Horodecki 1996]

σ_{AB} がエンタングル状態

$$\Updownarrow$$

ある正写像 Λ に対して $(\Lambda_A \otimes I_B)\sigma_{AB} \ngeq 0$

※実はエンタングルしていない事を示す方が難しい

※物理操作は完全正写像でなければならない理由＝エンタングルメント

縮約判定法

- **縮約写像** $R(X) = (\mathrm{tr}X)I - I$ **も正写像**

$$(R_A \otimes I_B)\sigma = I_A \otimes \sigma_B - \sigma$$

定理: [Horodecki 1999, Cerf et.al. 1999]

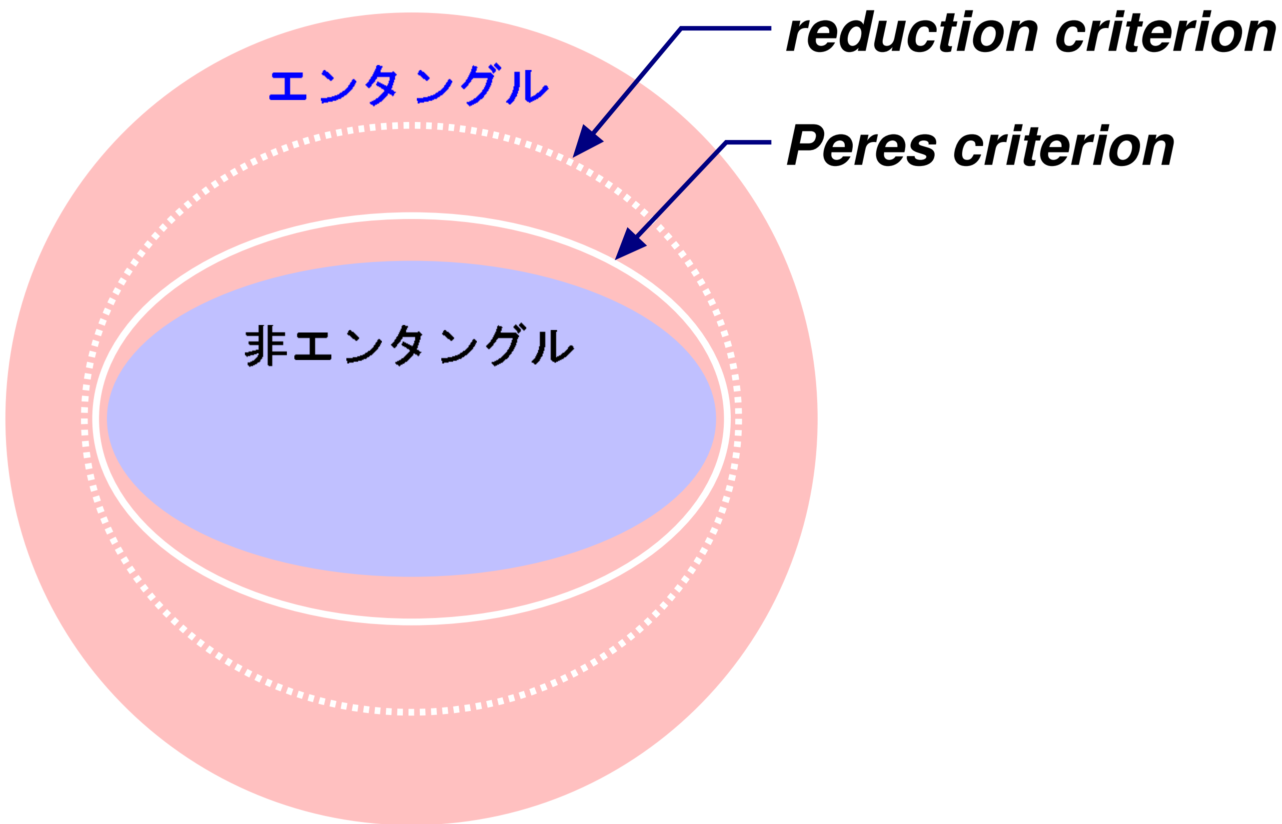
$I_A \otimes \sigma_B - \sigma \ngeq 0 \;\;\Rightarrow\;\; \sigma_{AB}$ **はエンタングル状態**

- $2 \otimes N$ **の系でペレス判定法と縮約判定法は等価**

ペレス判定法と縮約判定法は、$2 \otimes 2$ **系と** $2 \otimes 3$ **系のエンタングルメント判定の必要十分条件**

※これらの系の正写像は $\Lambda = \Theta_1 + \Theta_2 \circ T$ **と書けることによる** (Θ_1, Θ_2 **は完全正写像**)

状態の分類



Peres criterion: $\sigma^{T_A} \not\geq 0 \;\Rightarrow\; \sigma$ は**エンタングル状態**

Reduction criterion: $I_A \otimes \sigma_B - \sigma \not\geq 0 \;\Rightarrow\; \sigma$ は**エンタングル状態**

量子相関＝エンタングルメント (?)

相関で混合状態を分類すると…

無相関	$\sigma_{AB} = \sigma_A \otimes \sigma_B$ e.g. $\|ef\rangle\langle ef\| = \|e\rangle\langle e\| \otimes \|f\rangle\langle f\|$
古典相関	**エンタングルしていない混合状態？**
エンタングル **(量子相関)**	$\sigma_{AB} \neq \sum_i p_i \|e_i\rangle\langle e_i\| \otimes \|f_i\rangle\langle f_i\|$ e.g. $\|\mathrm{EPR}\rangle\langle \mathrm{EPR}\|$

※ **純粋状態は無相関かエンタングルかのどちらか**

- $\frac{1}{2}\,|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}\,|11\rangle\langle 11|$ $\cdots$ **古典対応物がある (古典相関)**
- $\frac{1}{2}\,|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}\,|{+}{+}\rangle\langle{+}{+}|$ $\cdots$ **古典対応物がない**

(これも量子力学的相関＝非古典相関)

量子相関＝エンタングルメント (?)

相関で混合状態を分類すると…

無相関	$\sigma_{AB} = \sigma_A \otimes \sigma_B$ e.g. $\vert ef\rangle\langle ef\vert = \vert e\rangle\langle e\vert \otimes \vert f\rangle\langle f\vert$
古典相関	$\sigma_{AB} = \sum_{kk'} \lambda_{kk'} \vert k\rangle\langle k\vert \otimes \vert k'\rangle\langle k'\vert$ e.g. $\frac{1}{2}\vert 00\rangle\langle 00\vert + \frac{1}{2}\vert 11\rangle\langle 11\vert$
非古典相関	$\sigma_{AB} = \sum_i p_i \vert e_i\rangle\langle e_i\vert \otimes \vert f_i\rangle\langle f_i\vert$ e.g. $\frac{1}{2}\vert 00\rangle\langle 00\vert + \frac{1}{2}\vert ++\rangle\langle ++\vert$
エンタングル **(量子相関)**	$\sigma_{AB} \neq \sum_i p_i \vert e_i\rangle\langle e_i\vert \otimes \vert f_i\rangle\langle f_i\vert$ e.g. $\vert \mathrm{EPR}\rangle\langle \mathrm{EPR}\vert$

そもそも相関とは？

相互情報量 (古典情報理論)

$$\boxed{\text{情報源 A}}\ a \longrightarrow \boxed{\text{通信路}} \longrightarrow b\ \boxed{\text{受信者 B}}$$

- A の情報量 $=$ a の曖昧さ

$$-\sum_a P(a)\log P(a) \equiv S(A)$$

- b を知った後の a の曖昧さ (の平均)

$$\sum_b P(b)\Big[-\sum_a P(a|b)\log P(a|b)\Big] \equiv S(A|B)$$

$\cdots$ 条件付エントロピー

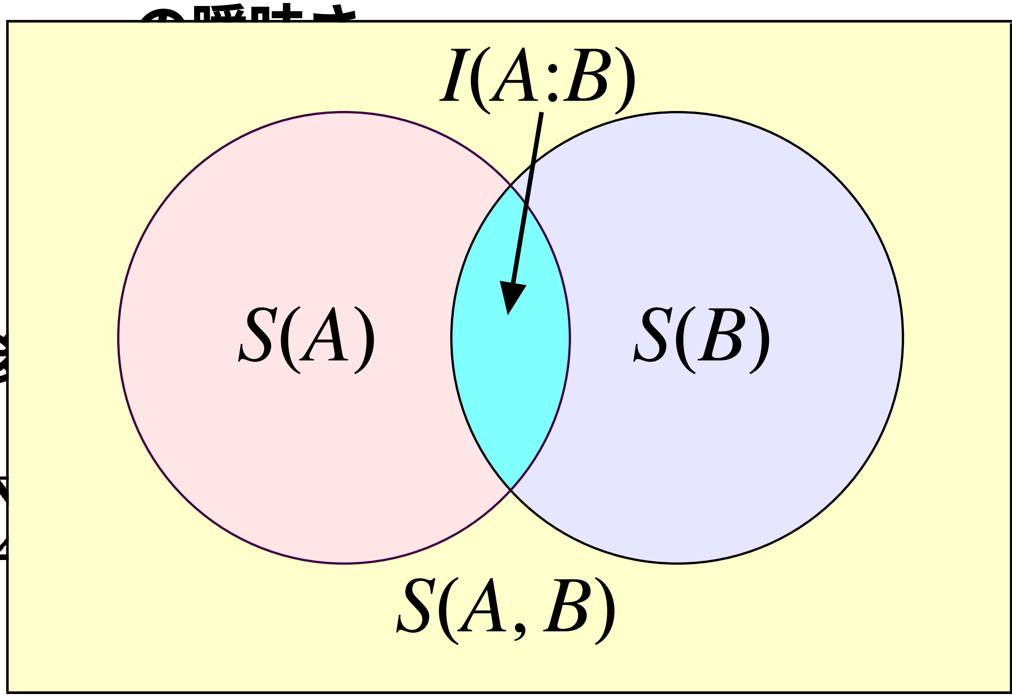
- b を知ったことによる a の曖昧さの減少分

$$\begin{aligned} S(A) - S(A|B) &= I(A:B) \cdots \text{相互情報量} \\ &= S(A) + S(B) - S(A,B) \end{aligned}$$

相互情報量 (古典情報理論)

$\boxed{\text{情報源 A}}\ a \longrightarrow \boxed{\text{通信路}} \longrightarrow b\ \boxed{\text{受信者 B}}$

- A の情報量



- b を知った後

$(A|B)$

件付エントロピー

- b を知ったことによる a の曖昧さの減少分

$$
\begin{aligned}
S(A) - S(A|B) &= I(A:B) \cdots \text{相互情報量} \\
&= S(A) + S(B) - S(A,B)
\end{aligned}
$$

量子相互情報量と quantum discord

$$\boxed{\text{量子系 A}} \longleftarrow \boxed{\text{相関}} \longrightarrow \boxed{\text{量子系 B}}\ \boxed{\text{測定 } \{M_i\}} \longrightarrow b$$

- **量子相互情報量**

$$I(A:B) = S(A) + S(B) - S(A,B) \ \cdots$$ **全相関の量 (古典+非古典)**

- **測定で b を知った後の A の曖昧さ**

$$\tilde{S}(A|B) \equiv \min_{\{M_i\}} \sum_b P(b) S\left(\frac{\mathrm{tr}_B \sigma_{AB}(I \otimes M_b)}{P(b)}\right)$$

※ $S(A|B) = S(A,B) - S(B) < 0$ **となり得る**

$$\tilde{I}(A:B) = S(A) - \tilde{S}(A|B) \cdots$$ **古典相関の量**

[Henderson, Vedral, 2001]

- Quantum discord

$$I(A:B) - \tilde{I}(A:B) \ \cdots$$ **非古典相関の量 (含エンタングル)**

[Ollivier, Zurek, 2002]

量子相互情報量と quantum discord

$\boxed{\text{量子系 A}} \longleftarrow \boxed{\text{相関}} \longrightarrow \boxed{\text{量子系 B}}\ \boxed{\text{測定 } \{M_i\}} \longrightarrow b$

- 量子相互情報量

$$I(A:B) = S(A) + S(B) - S(A,B) \cdots$$ **全相関の量 (古典+非古典)**

- 測

state	$I(A:B)$	$\tilde{I}(A:B)$	discord
$\vert\text{EPR}\rangle$	2	1	1
pure state $\vert\psi\rangle$	$2S_A$	S_A	S_A
$\frac{1}{2}\vert 00\rangle\langle 00\vert + \frac{1}{2}\vert ++\rangle\langle ++\vert$	0.39	0.25	0.14
$\frac{1}{2}\vert 00\rangle\langle 00\vert + \frac{1}{2}\vert 11\rangle\langle 11\vert$	1	1	0

り得る

, 2001]

- Quantum discord

$$I(A:B) - \tilde{I}(A:B) \cdots$$ **非古典相関の量 (含エンタングル)**

[Ollivier, Zurek, 2002]