Outline

1. **基本的なコンセプト**
2. **局所操作と古典通信** (LOCC)
3. **エンタングルメントの定量化**
4. **混合状態のエンタングルメント**

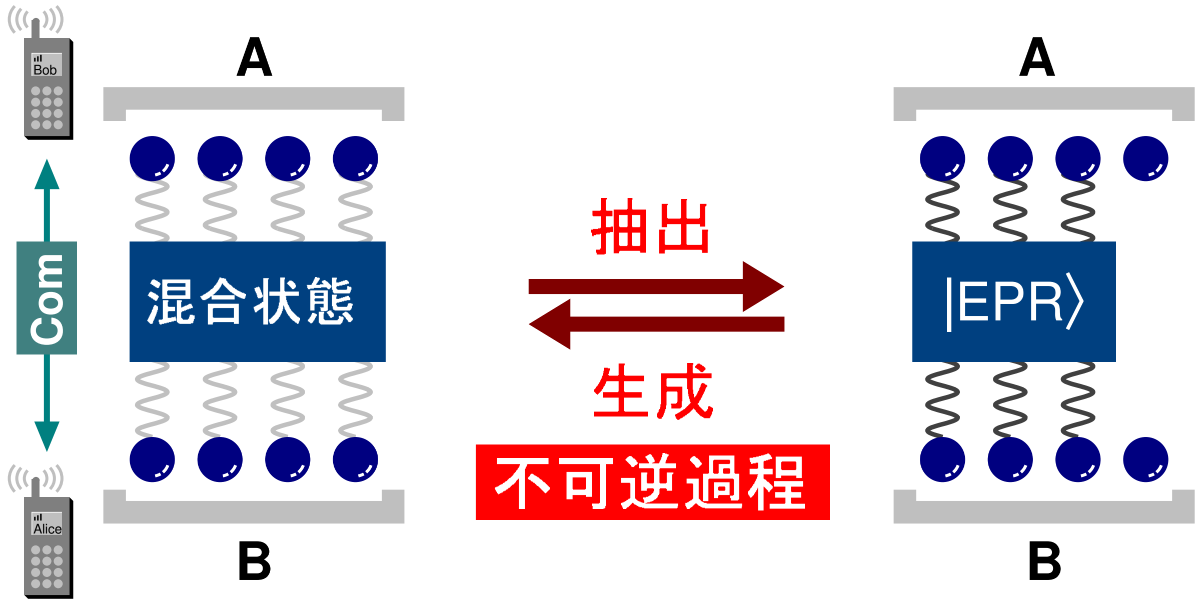
. . . .

5. **混合状態のエンタングルメント操作**
6. **束縛エンタングルメント**
7. **エンタングルメント測度**
8. **多者間エンタングルメント**

5. 混合状態のエンタングルメント操作

純粋状態との大きな違い

混合状態の LOCC 操作



混合状態: $\mathrm{EPR}^{\otimes nE_C} \longrightarrow \sigma^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{EPR}^{\otimes nE_D}$ $\quad E_C > E_D$

純粋状態: $\mathrm{EPR}^{\otimes nS_A} \longrightarrow |\psi\rangle^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{EPR}^{\otimes nS_A}$ $\quad$ **可逆過程**

$E_C - E_D$ **= 束縛エンタングルメント**

状態生成とエンタングルメント蒸留

- **状態生成**: $\mathrm{EPR}^{\otimes n E_C} \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma^{\otimes n}$

$E_C \cdots$ **エンタングルメント・コスト**

> **定理:** [Yang, et.al. 2005]
>
> σ **はエンタングル状態** $\Leftrightarrow \quad E_C > 0$

※ σ **の形によるエンタングルメントの定義は** LOCC **と整合**

- EPR **抽出**: $\sigma^{\otimes n} \xrightarrow{\text{LOCC}} \mathrm{EPR}^{\otimes n E_D}$

$E_D \cdots$ **蒸留エンタングルメント**

> **ペレス判定法と蒸留:** [Horodecki 1998]
>
> $\sigma^{T_A} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma$ **のエンタングルメント蒸留は不可能**

> **縮約判定法と蒸留:** [Horodecki 1999]
>
> $I_A \otimes \sigma_B - \sigma \not\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma$ **のエンタングルメント蒸留は可能**

LOCC とペレス判定法

(1) A **が測定** $\{a_k\}$ **を行い** i **の結果を得る**

$$\sigma_i = (a_i \otimes I)\sigma(a_i^\dagger \otimes I)$$

(2) B **が** i **に依存した測定** $\{b(i)_k\}$ **を行い** j **の結果を得る**

$$\sigma_{ij} = (I \otimes b(i)_j)\sigma_i(I \otimes b(i)_j^\dagger) = (a_i \otimes b(i)_j)\sigma(a_i^\dagger \otimes b(i)_j^\dagger)$$

(3) … **この繰り返し**…

- LOCC **の状態変換の一般形**

$$\sigma_k = (A_k \otimes B_k)\sigma(A_k^\dagger \otimes B_k^\dagger)$$

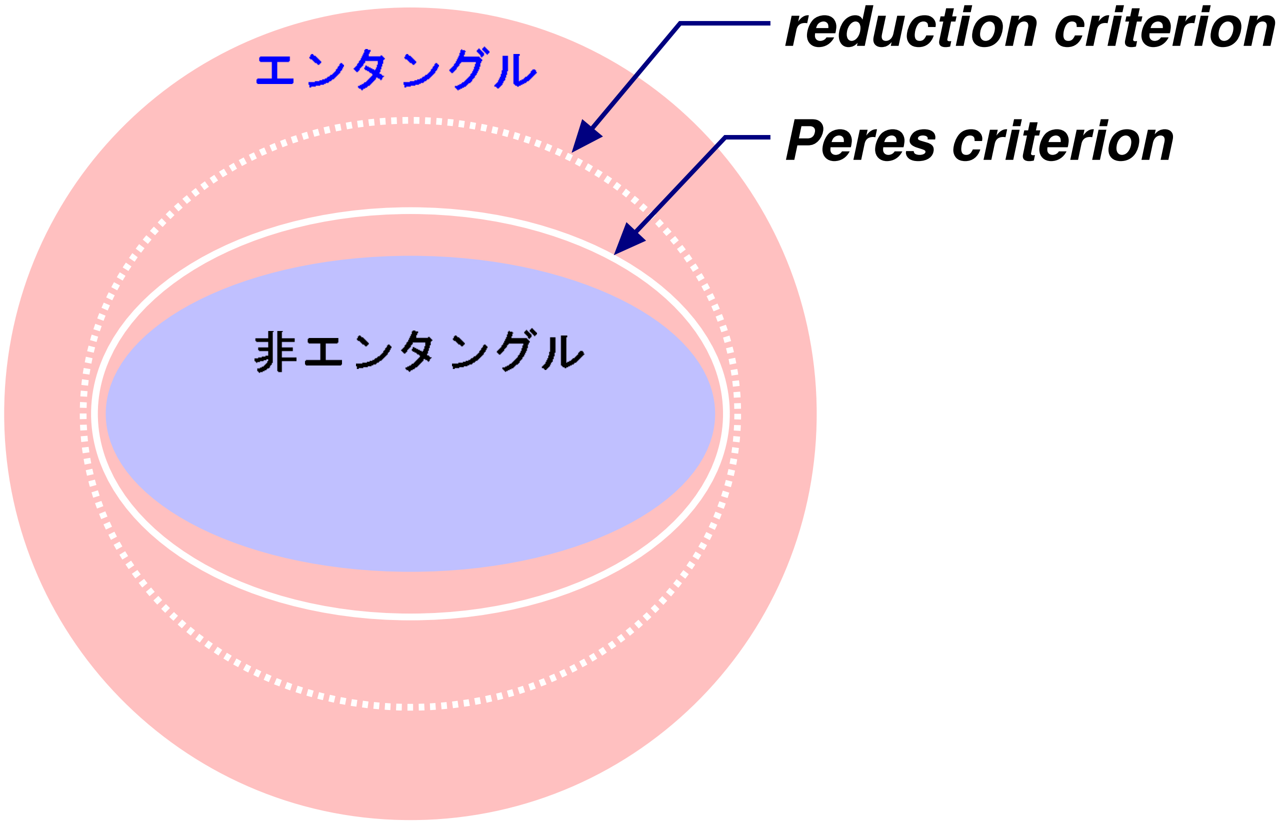
- **部分転置を取ると**

$$\sigma_k^{T_A} = \left[(A_k \otimes B_k)\sigma(A_k^\dagger \otimes B_k^\dagger)\right]^{T_A} = (A_k^* \otimes B_k)\sigma^{T_A}(A_k^T \otimes B_k^\dagger)$$

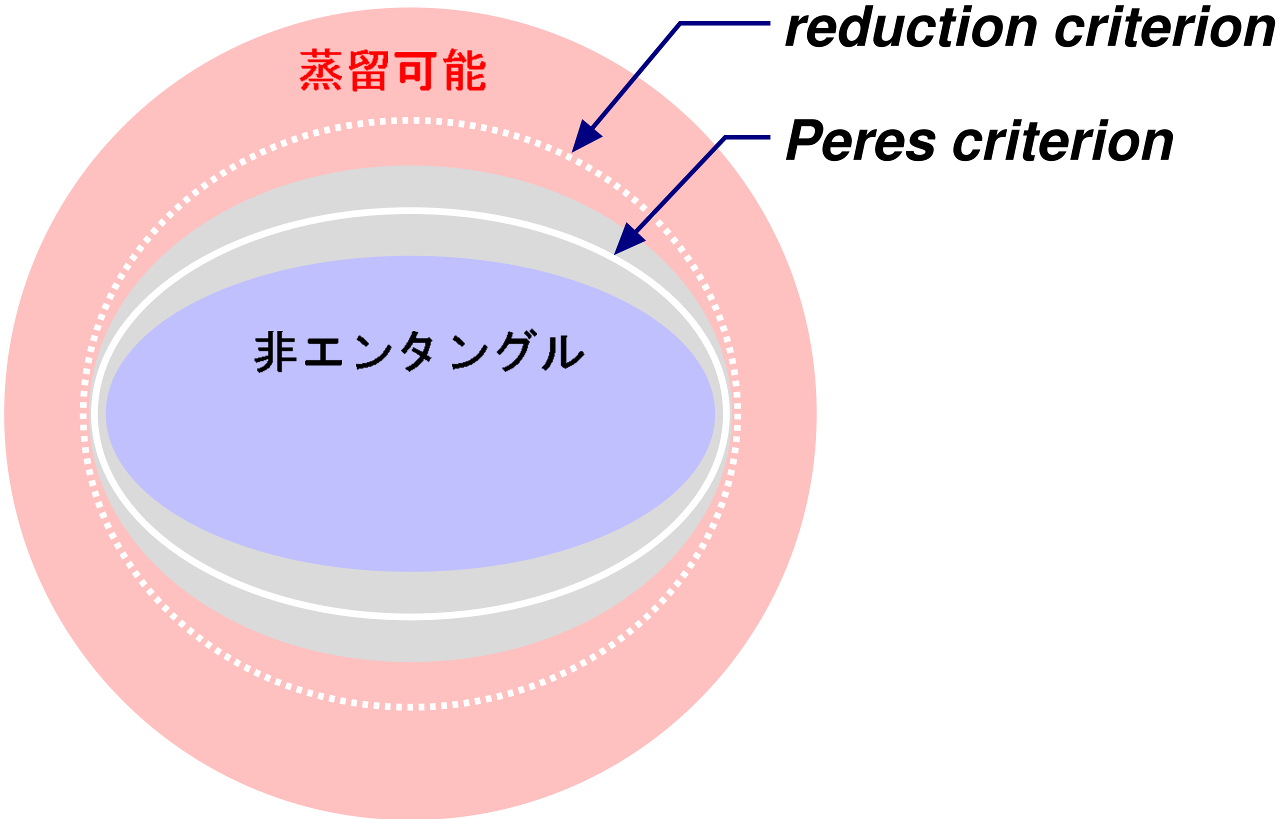
※ $\sigma^{T_A} \geq 0$ **のとき** $\sigma_k^{T_A} \geq 0$

※ $(|\psi\rangle\langle\psi|)^{T_A} \geq 0$ **のエンタングル した純粋状態は無い**

状態の分類



状態の分類

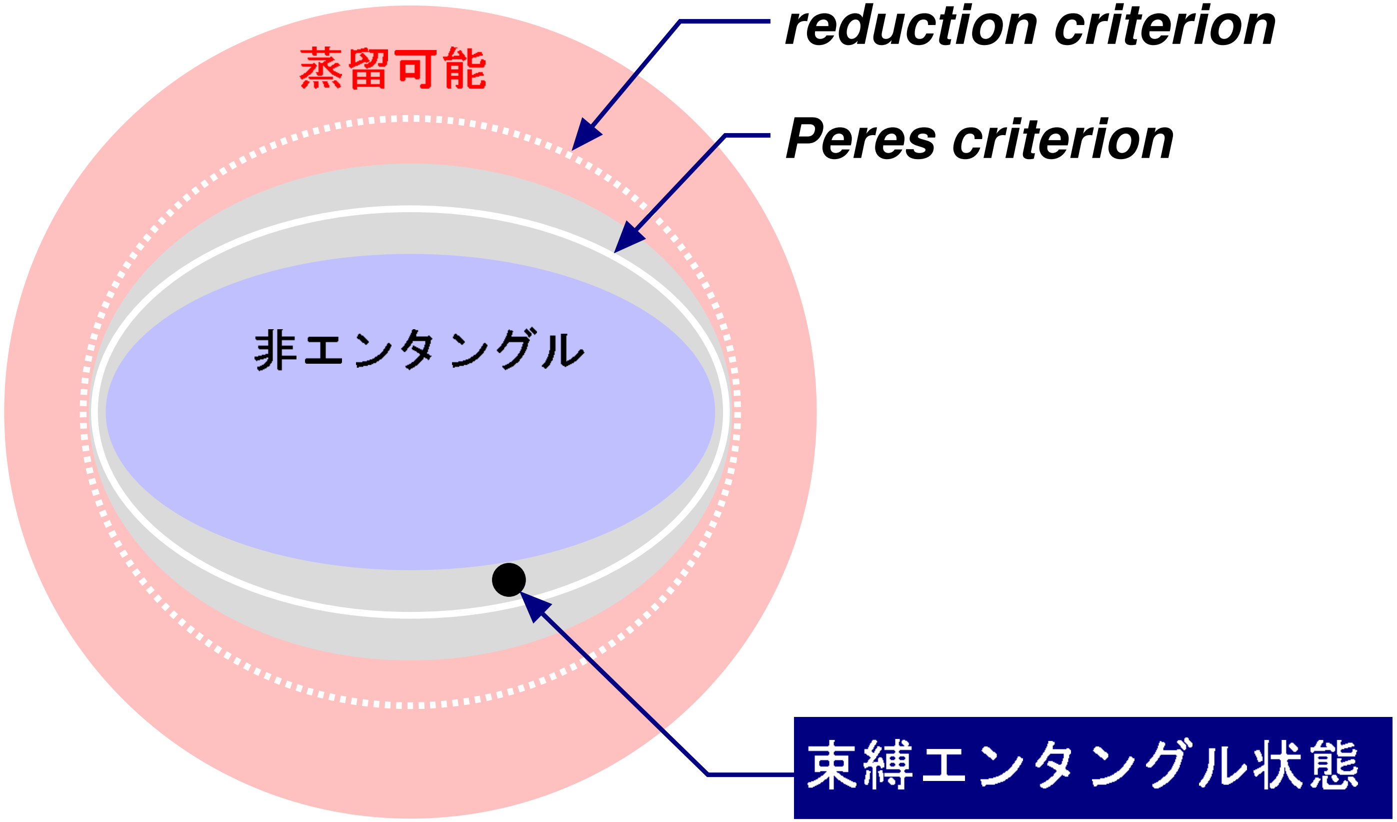


Peres criterion: $\sigma^{T_A} \geq 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{AB}$ **は蒸留不可能**

Reduction criterion: $I_A \otimes \sigma_B - \sigma_{AB} \not\geq 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{AB}$ **は蒸留可能**

※ $2 \otimes 2$ **の系では全ての境界が一致**

状態の分類



Peres criterion: $\sigma^{T_A} \geq 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{AB}$ は蒸留不可能

Reduction criterion: $I_A \otimes \sigma_B - \sigma_{AB} \not\geq 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{AB}$ は蒸留可能

※ $2 \otimes 2$ の系では全ての境界が一致

奇妙な量子状態

$$\text{EPR}^{\otimes nE_C} \longrightarrow \text{BE}^{\otimes n} \longrightarrow \cancel{\text{EPR}}^{\otimes nE_D}$$

束縛エンタングル状態 (BE) $\cdots$ **束縛エンタングルメントしか持たない**

自由エンタングル状態 (FE) $\cdots$ **抽出可能** $E_D > 0$ [Horodecki, 1998]

- **活性化** [Horodecki, 1999] teleportation $f(\text{FE}) \not\to 1$, $f(\text{FE}\otimes\text{BE}) \to 1$
- **アンロッキング (多者間)** [Smolin, 2001]
- **超活性化 (超加法性** "0+0=1"**)** [Shor, et.al., 2003]

$$0 = E_D(\text{BE}) + E_D(\text{BE'}) < E_D(\text{BE}\otimes\text{BE'})$$

- **テレクローニングの逆過程** [Murao, et.al., 2001]
- **量子鍵配布** [Horodecki, et.al., 2003]
- **異種エンタングルメントを変換** [SI, 2004]

6. 束縛エンタングルメント

隠れた非局所資源

束縛エンタングル状態の例

$$\sigma = \underbrace{\frac{2}{7}|\phi_3^+\rangle\langle\phi_3^+|}_{\text{エンタングル状態}} + \underbrace{\frac{\alpha}{7}\sigma_+ + \frac{5-\alpha}{7}\sigma_-}_{\text{非エンタングル状態 (noise)}}$$

$$|\phi_3^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$$

$$\sigma_+ = \tfrac{1}{3}(|01\rangle\langle 01| + |12\rangle\langle 12| + |20\rangle\langle 20|)$$

$$\sigma_- = \tfrac{1}{3}(|10\rangle\langle 10| + |21\rangle\langle 21| + |02\rangle\langle 02|)$$

- $3 < \alpha \leq 4$ **の時、束縛エンタングル状態** [Horodecki, 1999]

活性化 [Horodecki, 1999]

BE state: $\sigma = \frac{2}{7}|\phi_3^+\rangle\langle\phi_3^+| + \frac{\alpha}{7}\sigma_+ + \frac{5-\alpha}{7}\sigma_-$

- Teleportation fidelity $\leq 1/3$ (classical limit)

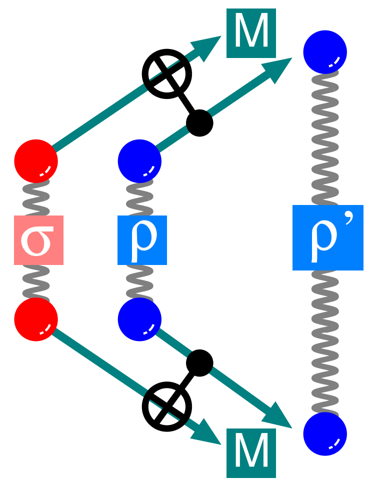
FE state: $\varrho = \beta|\phi_3^+\rangle\langle\phi_3^+| + (1-\beta)\sigma_+$

- Teleportation fidelity $\leq f_0$ (threshold)

Recurrence like method:

- bilocal CNOT & post selection

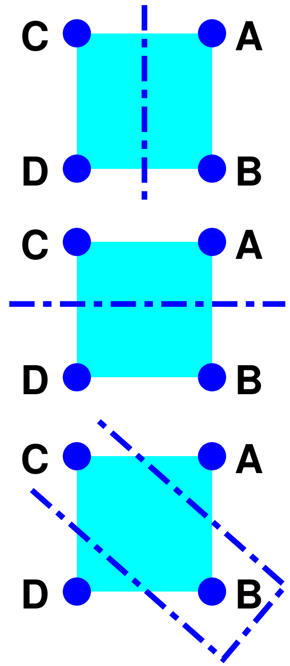
Teleportation fidelity of $\varrho' \to 1$



アンロッキング [Smolin, 2001]

$$
\begin{aligned}
\sigma = \frac{1}{4}\Big[& |\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{AB} \otimes |\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{CD} \\
& +|\phi^-\rangle\langle\phi^-|_{AB} \otimes |\phi^-\rangle\langle\phi^-|_{CD} \\
& +|\psi^+\rangle\langle\psi^+|_{AB} \otimes |\psi^+\rangle\langle\psi^+|_{CD} \\
& +|\psi^-\rangle\langle\psi^-|_{AB} \otimes |\psi^-\rangle\langle\psi^-|_{CD}\Big]
\end{aligned}
$$

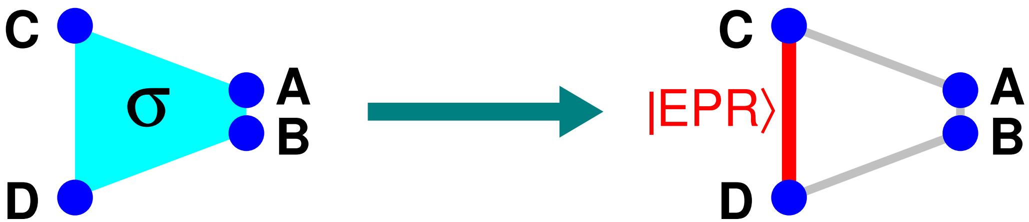
$$|\phi^\pm\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}},\ |\psi^\pm\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}$$



- σ **はエンタングルメント蒸留不可能**

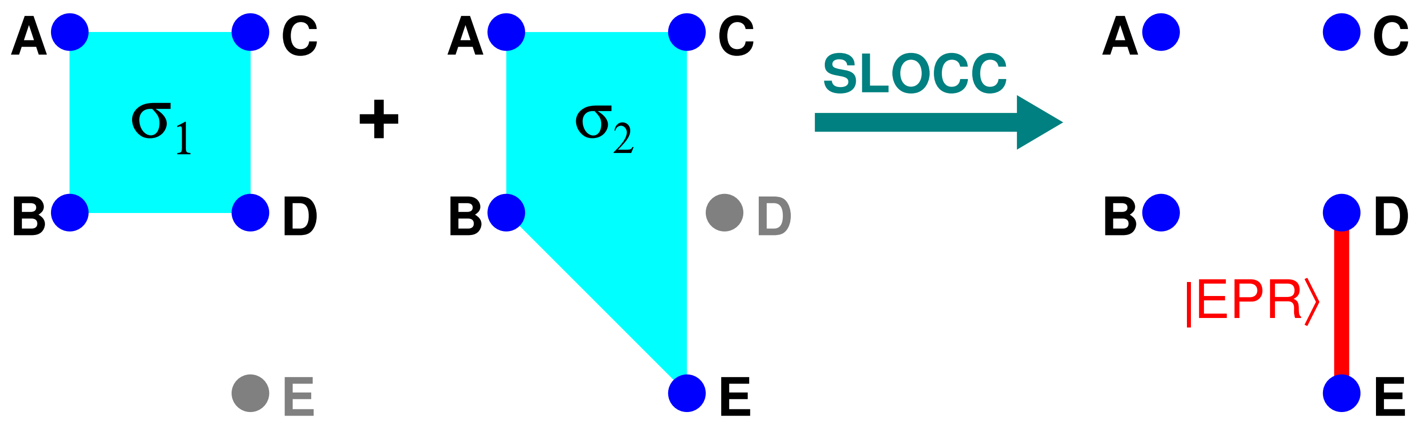
  (AB)-(CD), (AC)-(BD), (AD)-(BC) **で見ると非エンタングル状態**

- A **と** B **が一緒になると** $|\mathrm{EPR}\rangle_{CD}$ **が抽出できる (アンロッキング)**



超活性化 [Shor, et.al., 2003]

- アンロッカブル状態を 2 つ使うと



※ σ_1 を使い、σ_2 の AC 量子ビットを BD にテレポート

※ σ_2 は A と B が一緒になり、$|\phi^+\rangle_{DE}$ を取り出せる

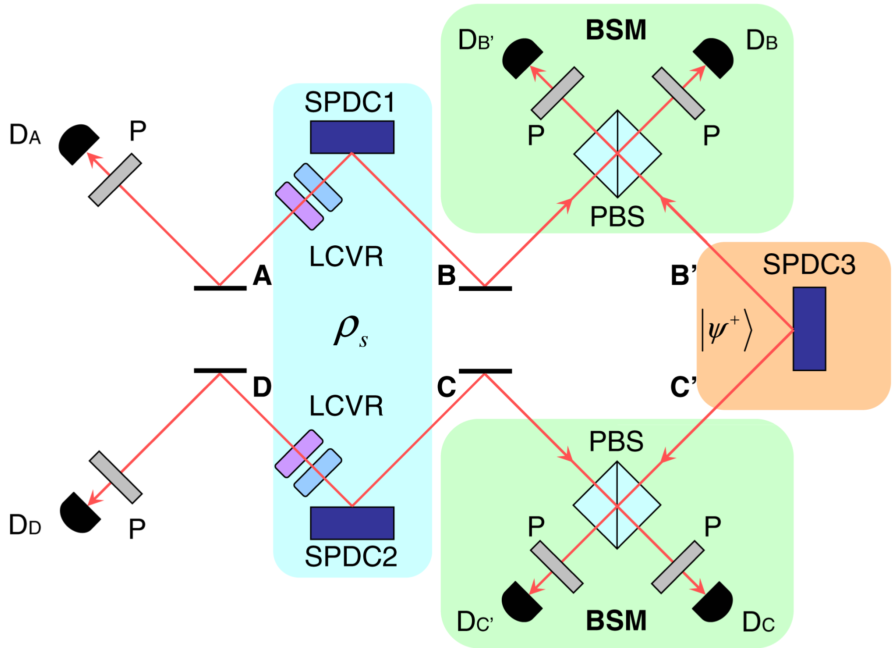
- 蒸留エンタングルメントは超加法的 "0+0=1"

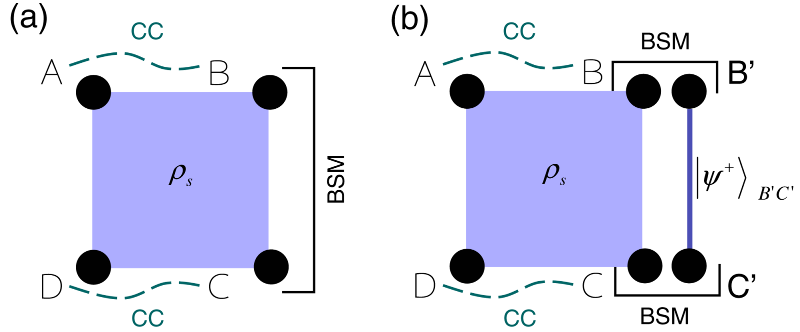
$$0 = \underbrace{D_{DE}(\sigma_1)}_{0} + \underbrace{D_{DE}(\sigma_2)}_{0} < D_{DE}(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = 1$$

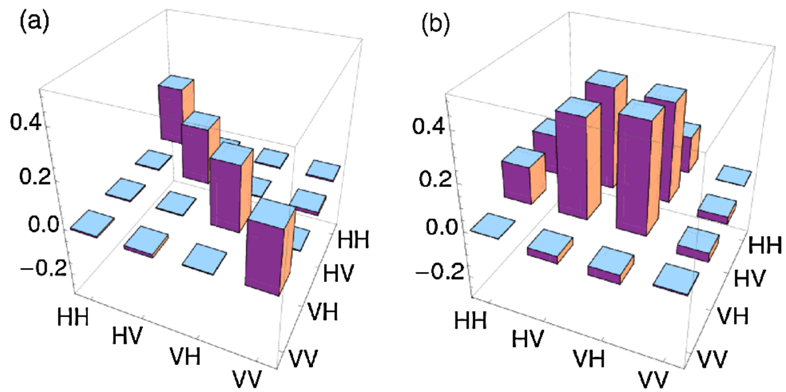
- 多者間の量子通信容量 Q_2 もまた超加法的

Experimental activation of BE

[F. Kaneda, R. Shimizu, SI, Y. Mitsumori, H. Kosaka, K. Edamatsu, 2012]







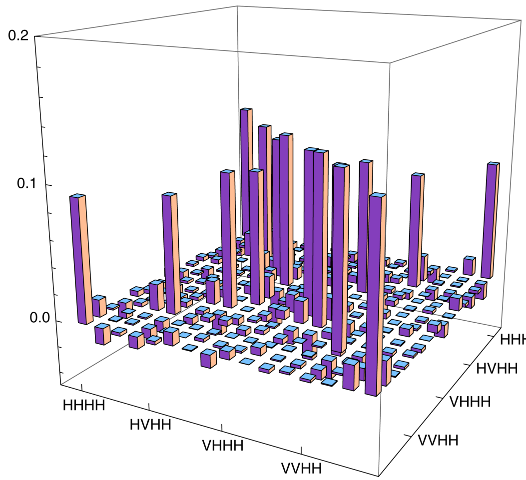


FIG. 3 (color online). Real part of the measured Smolin state ρ_s^{exp}.

TABLE II. The values of the REE for the two-two bipartite cuts.

	ρ_s^{exp}	ρ_s	$\rho(\psi^+)$
$R_{\mathrm{AB}\vert\mathrm{CD}}(\rho)$	≤ 0.033	0	0
$R_{\mathrm{AC}\vert\mathrm{BD}}(\rho)$	≤ 0.080	0	2
$R_{\mathrm{AD}\vert\mathrm{BC}}(\rho)$	≤ 0.073	0	2

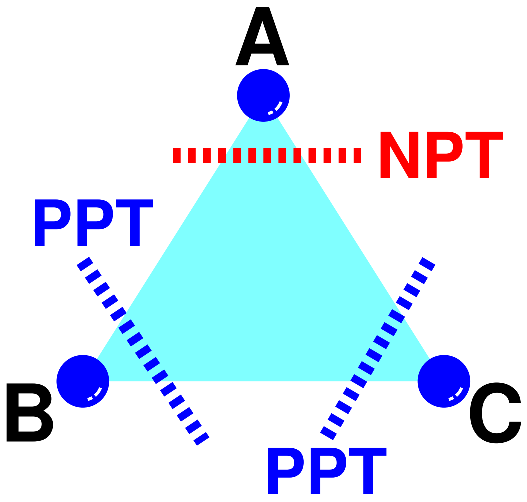
$$
\begin{aligned}
D^b_{A|D} + R^b_{\mathrm{AD|BC}} &\leq 0.106 \\
&< 0.150 \leq D^a_{A|D}
\end{aligned}
$$

Tripartite bound entanglement

$$\boxed{\sigma = \frac{|\mathsf{GHZ}\rangle\langle\mathsf{GHZ}|}{3} + \frac{|001\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 010| + |101\rangle\langle 101| + |110\rangle\langle 110|}{6}}$$

- Tripartite unlockable bound entanglement

[W. Dür, et. al., 1999]



$\sigma^{T_B} \geq 0$, $\sigma^{T_C} \geq 0$ but $\sigma^{T_A} \ngeq 0$

$\Downarrow$

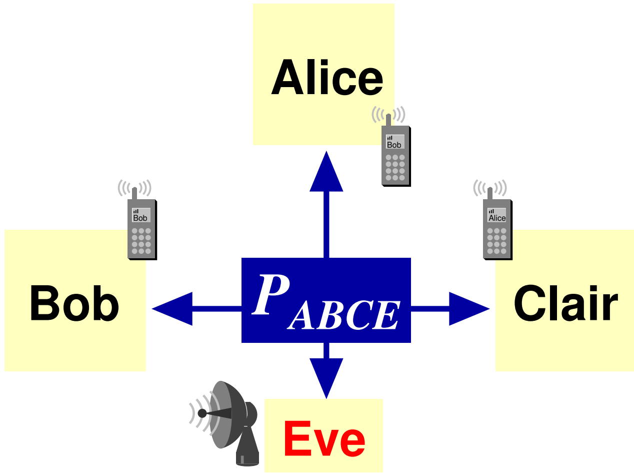
σ is entangled but $E_D = 0$

$\sigma^{T_A} \ngeq 0$ (NPT) $\Rightarrow$ σ is entangled with respect to A

$\sigma^{T_B} \geq 0$ (PPT) $\Rightarrow$ σ is undistillable with respect to B

Bound information exists [A. Acń, J. I. Cirac, and L. Masanes, 2004]

A	B	C	E	P_{ABCE}
0	0	0	0	1/6
1	1	1	0	1/6
0	0	1	1	1/6
0	1	0	2	1/6
1	0	1	3	1/6
1	1	0	4	1/6



$$E \to \tilde{E} \begin{cases} 1 \to 0 \\ 4 \to 0 \end{cases}$$

AB	C	$\tilde{E}$	$P_{ABC\tilde{E}}$
0	0	0	1/6
3	1	0	1/6
0	1	0	1/6
1	0	2	1/6
2	1	3	1/6
3	0	0	1/6

$I(AB:C|\tilde{E})=0$, $I(AC:B|\tilde{E})=0$, but $I(A:BC|E)>0$

$\Downarrow$

Secret key cannot be extracted by LOPC (local operation & public com)

but

P_{ABC} cannot be distributed by LOPC

7. エンタングルメント測度

E_C と E_D が違ってしまって、定量化はどうする？

エンタングルメント測度

- E_D も E_C もエンタングルメント測度 $\cdots$ 計算は非常に困難

エンタングルメント測度が満たすべき条件

(1) **単調性**: **平均エンタングルメント量は LOCC で増加しない**

(2) **ゼロ点**: σ **が非エンタングル状態の時** $E(\sigma)=0$

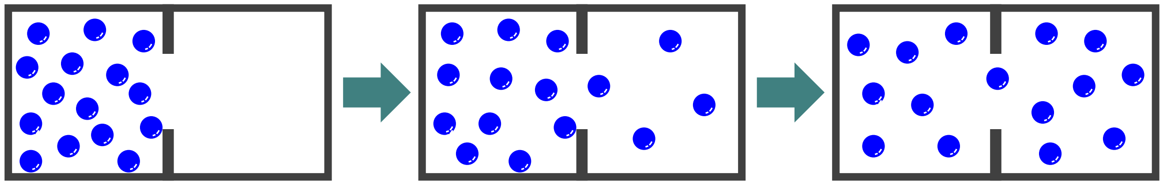
(3) **規格化**: σ **が 純粋状態の時** $E(\sigma)=S_A$

(4) **凸性**: **状態を混合するとエンタングルメント量は減少する**

$$pE(\sigma_1)+(1-p)E(\sigma_2)\geq E\big(p\sigma_1+(1-p)\sigma_2\big)$$

- エンタングルメント・モノトーン $\cdots$ 単調性のみを満たす量

c.f. 熱力学におけるエントロピー



生成エンタングルメント (EoF)

生成エンタングルメント [Bennett 1996]

$$E_F(\sigma) = \min \sum_k \lambda_k S_A(|\psi_k\rangle) \quad \text{(最小化は全ての } \sigma = \sum_k \lambda_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\text{)}$$

(1) $\sigma = \sum_k \lambda_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ **の分解を考える**

(2) A **と** B **は乱数** k **を** λ_k **の確率で生成する**

(3) **乱数の値** k **に応じ、**$|\psi_k\rangle$ **を** $|\mathrm{EPR}\rangle$ **から** LOCC **で生成する**

- **上記プロトコルで必要な** $|\mathrm{EPR}\rangle$ **は** $\sum_k \lambda_k S_A(|\psi_k\rangle)$
- σ **の分解の仕方には曖昧さがある** $\rightarrow$ **最小化する** $\rightarrow$ **自動的に凸関数**
- $$E_C(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{E_F(\sigma^{\otimes n})}{n}$$ **が証明されている** [Hayden, et.al., 2001]

生成エンタングルメント (EoF)

$2 \otimes 2$ **の生成エンタングルメント** [Wootters 1998]:

(1) $\tilde{\sigma} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\sigma^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ **とする**

(2) $\sigma\tilde{\sigma}$ **の固有値を大きい順に** $\{l_0^2, l_1^2, l_2^2, l_3^2\}$ **とする**

(3) $C = l_0 - l_1 - l_2 - l_3$ **(コンカレンス)**

(4) $E_F(\sigma) = S(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - C^2})$

- tilde **操作**: $|\tilde{\psi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y)|\psi^*\rangle$

  任意の最大エンタングル状態 ($(U \otimes V)|\mathrm{EPR}\rangle$) $\longrightarrow$ **不変**

  積状態 $|e\rangle|f\rangle \longrightarrow |e_\perp\rangle|f_\perp\rangle$

  $$\because\ A^T \sigma_y A = (\det A)\sigma_y$$

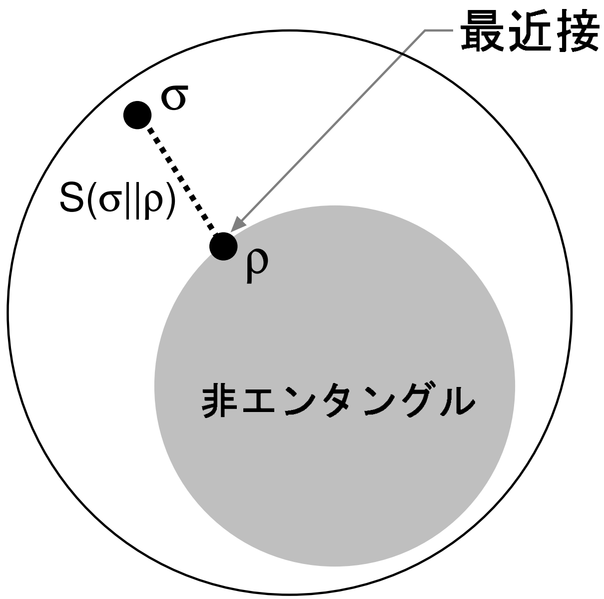
- **最大エンタングル状態で** $C = 1$, **非エンタングル状態で** $C = 0$

相対エントロピー・エンタングルメント

Relative entropy of entanglement

[Vedral, et.al., 1997]:

$$
\begin{aligned}
E_R(\sigma) &= \min_{\rho} S(\sigma||\rho) \\
&= \min_{\rho} \left[\mathrm{tr}\sigma \log \sigma - \mathrm{tr}\sigma \log \rho \right]
\end{aligned}
$$



- **相対エントロピーは状態間距離の様なもの**

※幾何学的エンタングルメント測度

- **多者系への拡張が容易**
- **様々な測度** (discord **等**) **への適用が可能**

エンタングルメント測度の一義性定理 [Donald, et.al., 2002]

漸近変換の可逆性が定量化にとって本質的に重要

$$|\psi\rangle^{\otimes n} \longleftrightarrow |\mathrm{EPR}\rangle^{\otimes n S_A}$$

- **エンタングルメント測度 E が単調性と連続性を満たすとすると…**

$\longrightarrow$ **から** $E(|\psi\rangle^{\otimes n}) \geq E(|\mathrm{EPR}\rangle^{\otimes n S_A})$

$\longleftarrow$ **から** $E(|\psi\rangle^{\otimes n}) \leq E(|\mathrm{EPR}\rangle^{\otimes n S_A})$

$$\therefore\ E(|\psi\rangle^{\otimes n}) = E(|\mathrm{EPR}\rangle^{\otimes n S_A})$$

- **更に弱い加法性を満たすと…** $E(|\psi\rangle^{\otimes n}) = n \cdot E(|\psi\rangle)$

$$\therefore\ E(|\psi\rangle) = S_A \cdot E(|\mathrm{EPR}\rangle) = S_A$$

単調性、連続性、弱い加法性を満たすエンタングルメント測度は、純粋状態に対して S_A に一致する

エンタングルメント測度の間の関係 [Horodecki, 2000]

エンタングルメント測度 E が

(1) 単調性、(2) 凸性、(3) 弱い加法性、(4) 連続性

の条件を満たす時

$$E_D(\sigma) \leq E(\sigma) \leq E_C(\sigma)$$

※ (1),(3),(4) → (5) **一義性定理**

$$E(\sigma) \overset{(3)}{=} \frac{E(\sigma^{\otimes n})}{n} \overset{(2)}{\leq} \frac{\sum_i p_i E(|\psi_i\rangle)}{n} \overset{(5)}{=} \frac{\sum_i p_i E_F(|\psi_i\rangle)}{n} = \frac{E_F(\varrho^{\otimes n})}{n} = E_C(\sigma)$$

$$E(\sigma) \overset{(3)}{=} \frac{E(\sigma^{\otimes n})}{n} \overset{(1)}{\geq} \frac{\sum_i p_i E(\sigma_i)}{n} \overset{\text{distill}}{=} \frac{\sum_i p_i E(|\mathsf{EPR}\rangle^{\otimes m_i})}{n} = E_D(\sigma)$$

計算容易なエンタングルメント・モノトーン

(1) **コンカレンス** [Wootters, 1998]

(2) **対数ネガティビティ**

$\cdots$ Peres **判定法における負の固有値の絶対値の和**

$$LN(\sigma) = \log_2 \mathrm{tr}|\sigma^{T_A}|$$

$\sigma^{T_A} \geq 0$ **のとき**

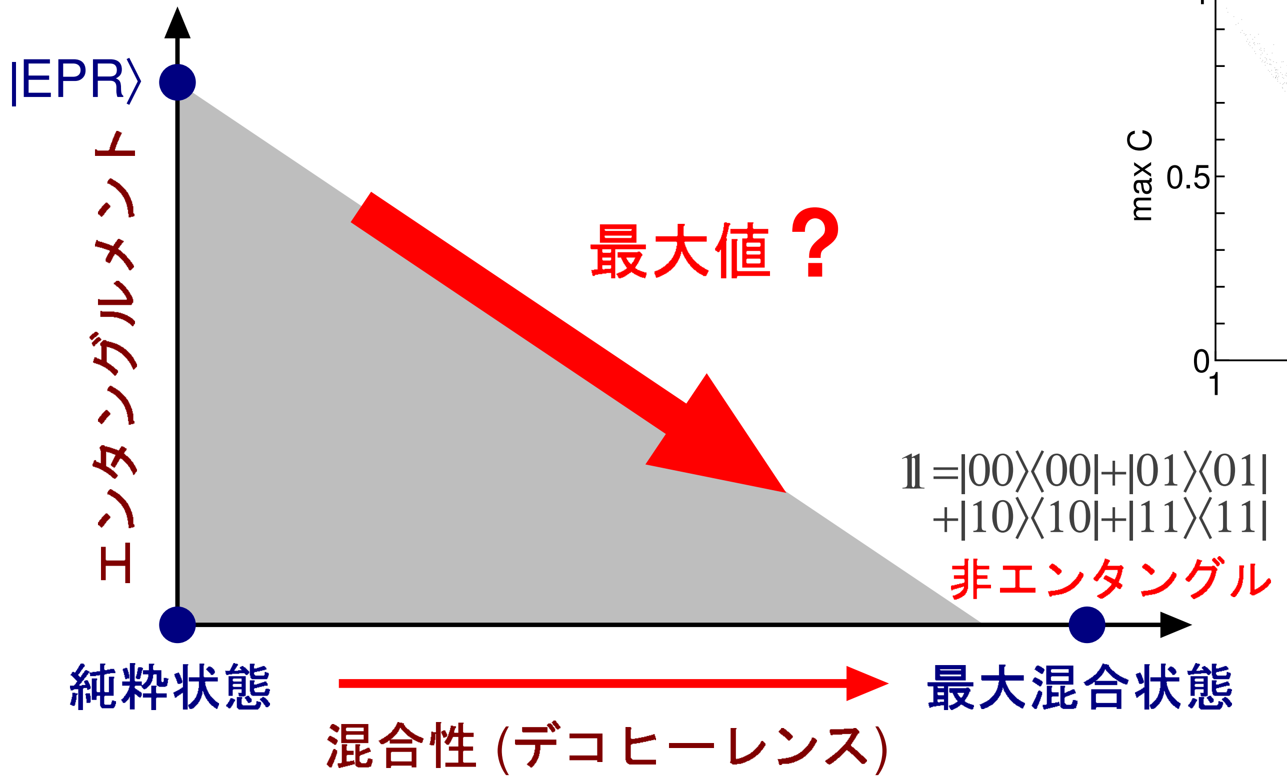
$$\mathrm{tr}|\sigma^{T_A}| = \mathrm{tr}\sigma^{T_A} = \mathrm{tr}\sigma = 1 \quad \longrightarrow \quad LN(\sigma) = 0$$

- LOCC+BE **操作における生成コスト**

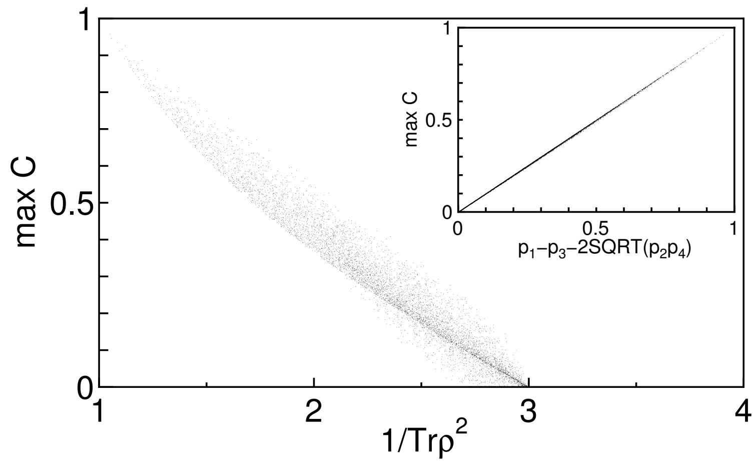
[Audenaert, et.al., 2003] [SI, 2004]

- E_D **の上限を与える** ($E_D(\sigma) \leq LN(\sigma)$)

混合性とエンタングルメント量



コンカレンス vs 混合性

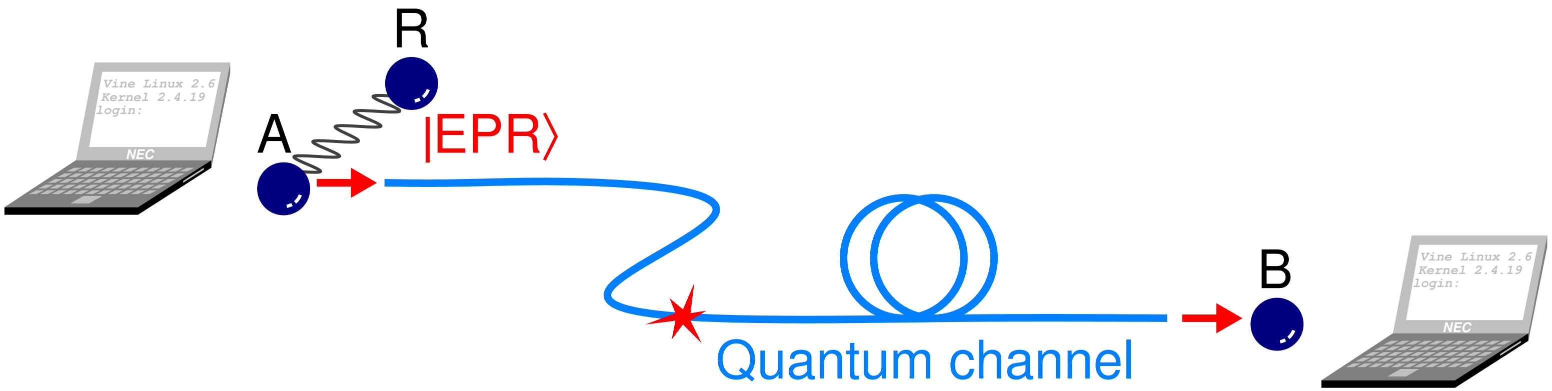


$$\sigma = p_1|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + p_2|01\rangle\langle 01| + p_3|\phi^-\rangle\langle\phi^-| + p_4|10\rangle\langle 10|$$

$$p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4, \quad |\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right)$$

[SI, Hiroshima, 2000] [Verstraete, et.al., 2001] [Munro, et.al., 2001]

エンタングルメント理論と応用



- **量子通信容量**: $Q \leq Q_{\text{2-way}} = 0 \iff E_D(\sigma_{RB}) = 0$
- **古典通信容量**: C **の超加法性** $\iff$ E_F **の超加法性**

[K. Matsumoto, et.al., 2004]

※ C **も** Q **も超加法的** [M. B. Hastings, 2009] [G. Smith, et.al., 2008]

通信容量・通信符号

量子暗号デザイン・ルール $\Big\}$ $\longleftarrow$ **エンタングルメントの定量理論**

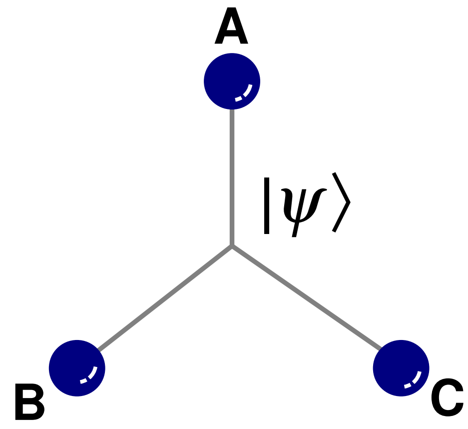
8. 多者間のエンタングルメント

A と B と C の間のエンタングルメント
～クラス分類と定量化～

3 量子ビットのエンタングルメント

- GHZ **状態**

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_C + |1\rangle_A|1\rangle_B|1\rangle_C\Big)$$



- **どの** 2 **つペアもエンタングルしていない**

$$\sigma_{AB} = \sigma_{BC} = \sigma_{AC} = \tfrac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \tfrac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$$

$$\begin{aligned}|\mathrm{GHZ}\rangle_{ABC} \;=\; & \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\frac{|00\rangle_{AB}+|11\rangle_{AB}}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle_C+|1\rangle_C}{\sqrt{2}} \\ & + \frac{|00\rangle_{AB}-|11\rangle_{AB}}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle_C-|1\rangle_C}{\sqrt{2}}\Bigg)\end{aligned}$$

C **が** $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ **の基底で測定を行い、**A (**あるいは** B) **に測定結果を伝えてやると、**A **と** B **の間の状態をエンタングルさせる事ができる**

2 **者間よりはるかに複雑**

エンタングルメントの一夫一妻制

- **シュミットの分解定理は適用できない**

3 量子ビットの正準型 [Carteret 2000, Acin 2000]

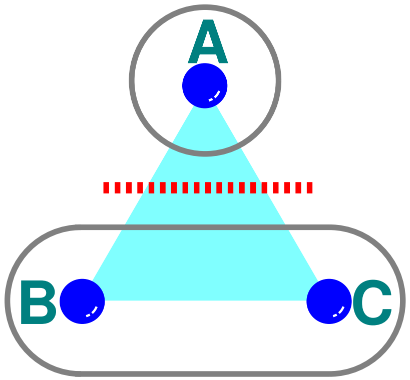
3 **量子ビットの任意の純粋状態は局所ユニタリ変換で**

$$|\psi\rangle = \lambda_0 e^{i\phi}|000\rangle + \lambda_1|011\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle$$

の形に変換できる $(\lambda_i \geq 0,\ \phi \in [0, \pi],\ \sum_i \lambda_i^2 = 1)$ **。**

コンカレンスの関係式 (**エンタングルメントの分配則**) $\cdots$ **一夫一妻制**

$$C_{A-BC}^2 = C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + \tau$$



- τ $\cdots$ **タングル** (3-**エンタングルメントの指標**)
- GHZ **状態に対しては** $\tau = 1$
- **量子暗号の安全性証明**

W 状態

- W 状態

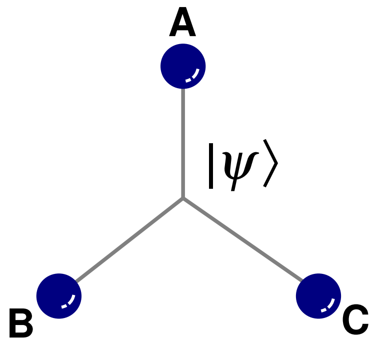
$$|\mathrm{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle\Big)$$

- W 状態はエンタングルメントの分配則より $\tau = 0$

$$\begin{aligned}\sigma_{AB} &= \frac{2}{3}|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + \frac{1}{3}|00\rangle\langle 00| \quad \rightarrow C^2_{AB} = \frac{4}{9}\\ \sigma_{A} &= \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1| \quad \rightarrow C_{A-BC} = \frac{8}{9}\end{aligned}$$

- 2 量子ビット間のエンタングルメントを等しく最大にした状態

$$C^2_{A-BC} = C^2_{AB} + C^2_{AC} + \tau$$



確率的 LOCC (SLOCC)

- **純粋状態間の LOCC 変換**: $|\psi\rangle \xrightarrow{\text{LOCC}} |\phi\rangle$

$$|\phi\rangle\langle\phi| = \sum_k (A_k \otimes B_k)|\psi\rangle\langle\psi|(A_k^\dagger \otimes B_k^\dagger)$$

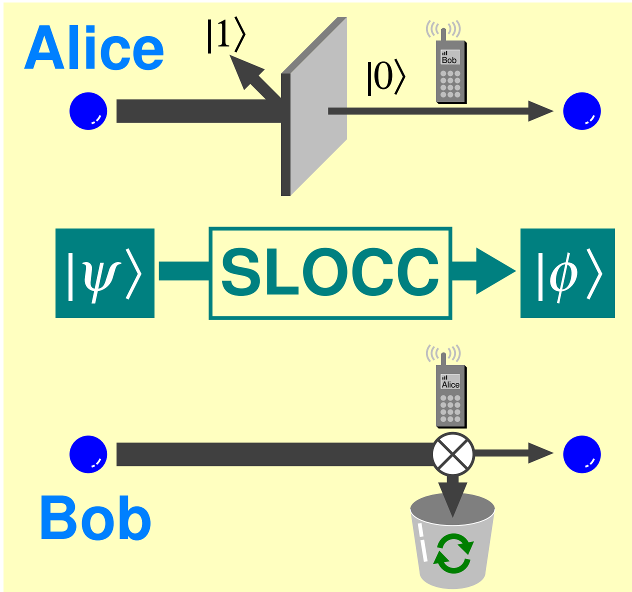
- $|\psi\rangle \xrightarrow{\text{SLOCC}} |\phi\rangle$ **が可能な条件**

$|\phi\rangle = (A \otimes B)|\psi\rangle$ **となる** $A,\ B$ **が存在** $\cdots$ **確率的** LOCC

$$|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}|00\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|11\rangle$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes I\right]|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{\tfrac{1}{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

確率 2/3 **で** $|\psi\rangle$ **から** $|\mathrm{EPR}\rangle$ **へ変換可能**



※確率的にはエンタングルメントを増やせる

※エンタングルメントの平均量は増やせない

確率的 LOCC による変換性

$|\psi\rangle \longleftarrow \boxed{\text{SLOCC}} \longrightarrow |\phi\rangle$ $\cdots$ $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ は互換 (comparable)

- $|\phi\rangle = (A \otimes I)|\psi\rangle$ のとき

$$\sigma_A^{\phi} = A\sigma_A^{\psi}A^{\dagger} \text{ より } \mathrm{rank}(\sigma_A^{\phi}) \leq \mathrm{rank}(\sigma_A^{\psi})$$

- このとき、純粋状態では $\mathrm{rank}(\sigma_A) = \mathrm{rank}(\sigma_B)$ なので

$$\mathrm{rank}(\sigma_B^{\phi}) \leq \mathrm{rank}(\sigma_B^{\psi})$$

SLOCC では縮約密度行列の階数は上がらない

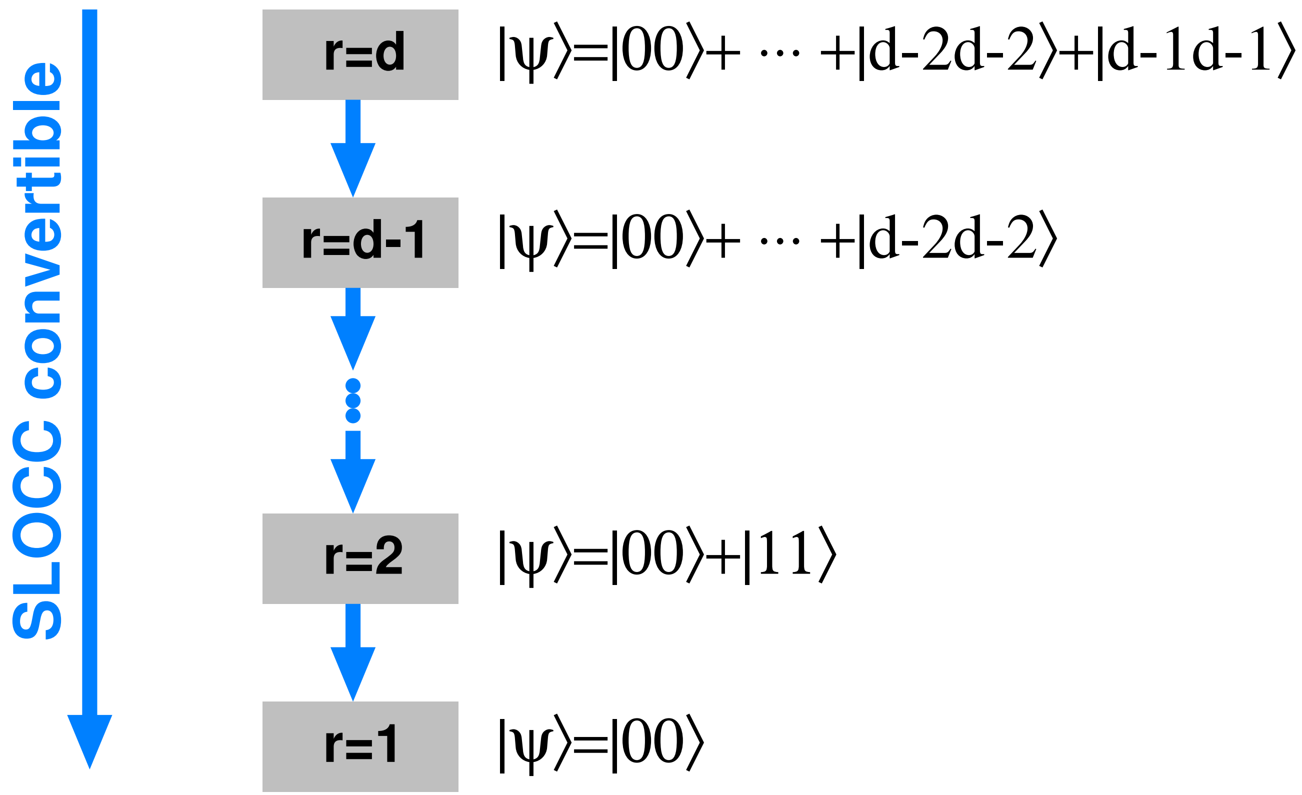
- $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ が互換なら、$|\psi\rangle \to |\phi\rangle$ かつ $|\phi\rangle \to |\psi\rangle$

対応する縮約密度行列の階数は等しい

確率的 LOCC によるエンタングルメントの分類

- 2 者間エンタングルメントのクラス分類

rank$(\sigma_A) = 1$ **から** rank$(\sigma_A) = d \cdots d$ **個のクラス**



[Lo and Popescu, Nielsen, Vidal]

3 者間エンタングルメントのクラス分類 [Dür, et.al., 2000]

(1) $\mathrm{rank}(\sigma_A) = \mathrm{rank}(\sigma_B) = \mathrm{rank}(\sigma_C) = 1$

クラス A-B-C $|\text{A-B-C}\rangle = |000\rangle$

(2) $\mathrm{rank}(\sigma_A) = 1,\ \mathrm{rank}(\sigma_B) = \mathrm{rank}(\sigma_C) = 2$

クラス A-BC, B-AC, C-AB $|\text{A-BC}\rangle = |0\rangle_A \otimes |\text{EPR}\rangle_{BC}$

(3) $\mathrm{rank}(\sigma_A) = \mathrm{rank}(\sigma_B) = \mathrm{rank}(\sigma_C) = 2$

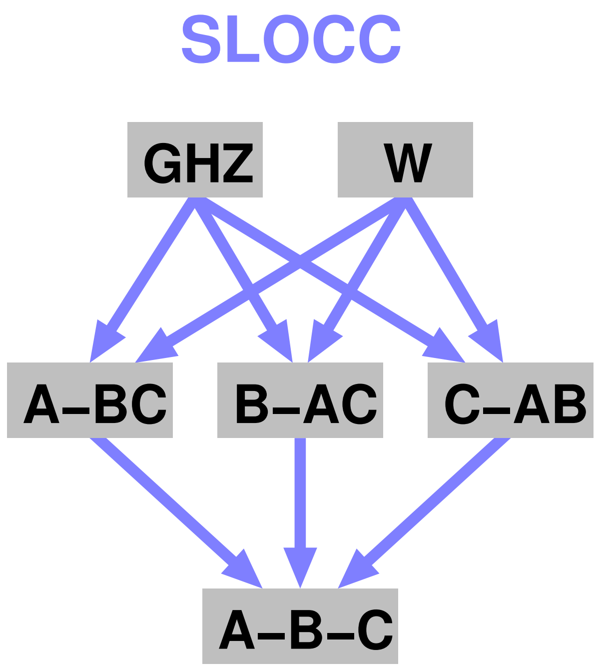
直積状態での最小展開項数は増やせない

(3-A) **最小展開項数** $= 2$

クラス GHZ $|\text{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$

(3-B) **最小展開項数** $= 3$

クラス W $|\text{W}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$



GHZ **と** W **は全く異質**

定量化

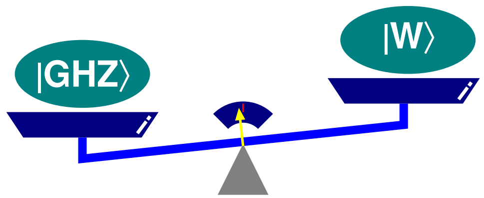
- 2 者間における漸近変換の可逆性 $\rightarrow$ エンタングルメントの定量化

$$|\psi\rangle^{\otimes n} \overset{\text{LOCC}}{\longleftrightarrow} |\mathrm{EPR}\rangle^{\otimes n S_A}$$

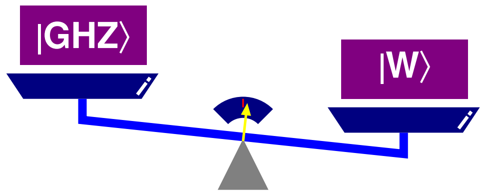
単調性、連続性、弱い加法性 $\longrightarrow$ 一義性定理

- $|\mathrm{GHZ}\rangle$ と $|\mathrm{W}\rangle$ は、どちらが強くエンタングルしているか？

$$S_A(\mathrm{GHZ}) = 1 > \log 3 - \frac{2}{3} = S_A(\mathrm{W})$$



$$E_R^{\infty}(\mathrm{GHZ}) = 1 < \log \frac{9}{4} = E_R^{\infty}(\mathrm{W})$$



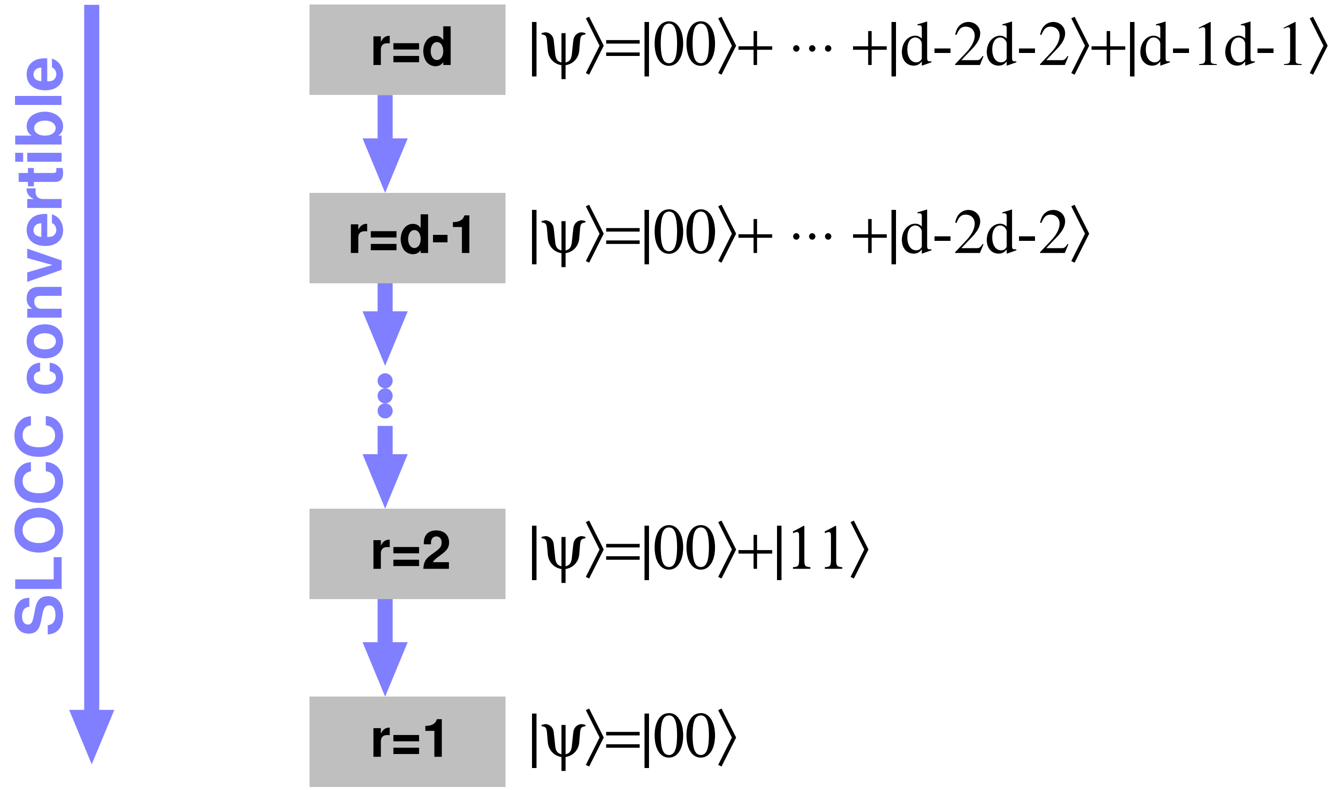
$$|\mathrm{GHZ}\rangle^{\otimes n} \overset{\text{LOCC}}{\cancel{\longleftrightarrow}} |\mathrm{W}\rangle^{\otimes n E}$$

[SI, et.al., 2005] [H. Zhu, et.al., 2010]

多者間エンタングルメントの「基本単位」は一つではない

クラス分類と束縛エンタングルメント

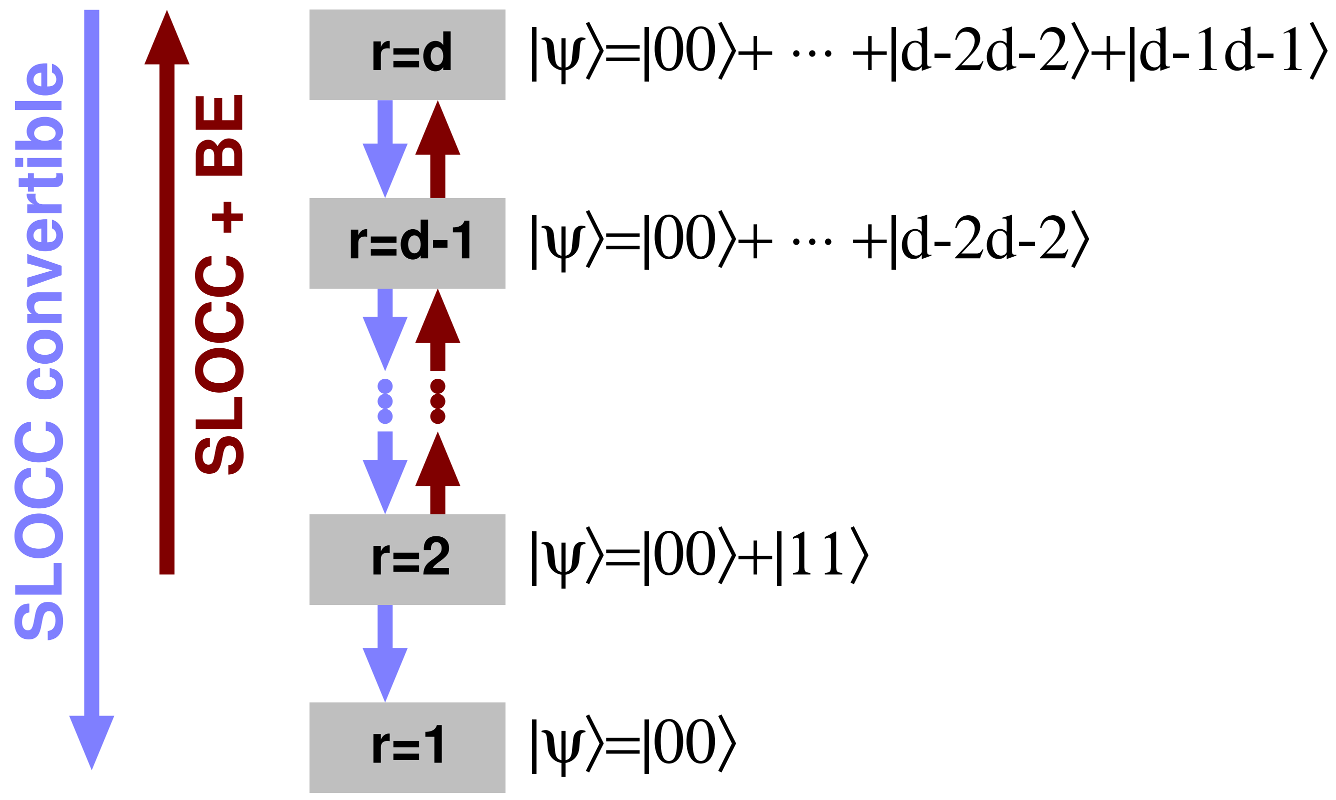
-



クラス分類と束縛エンタングルメント

- **束縛エンタングルメントがクラス分類を劇的に単純化する**

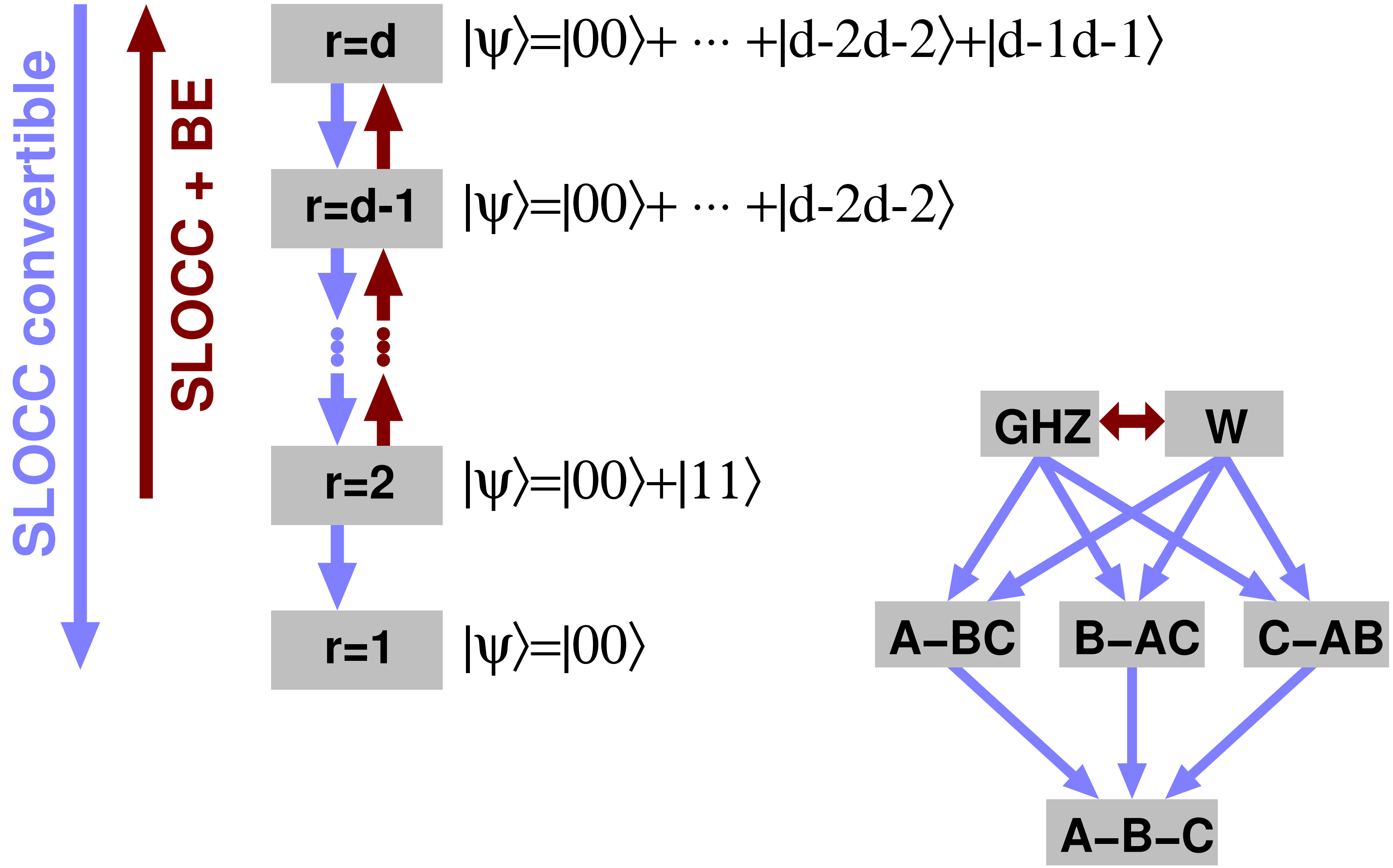
[SI 2004]



クラス分類と束縛エンタングルメント

- 束縛エンタングルメントがクラス分類を劇的に単純化する

[SI 2004]



Summary

- 純粋状態の LOCC 変換は可逆 ··· エンタングルメントの定量化

  エンタングルメントの濃縮と希釈

- 混合状態も含めた一般状態のエンタングルメントの定義と判定

  Peres **の判定法、縮約判定法、** entanglement witness

- 混合状態の LOCC 変換は非可逆 ··· 束縛エンタングルメント

  BE **状態に関する様々な興味深い現象 (活性化・超活性化)**

- エンタングルメント測度

  コンカレンス、対数ネガティビティ

  混合性とエンタングルメント

- 多者間エンタングルメントの特異性

  異種エンタングルメントの存在

  基本単位は一つではない