初期宇宙とエンタングルメント

名古屋大学　南部保貞

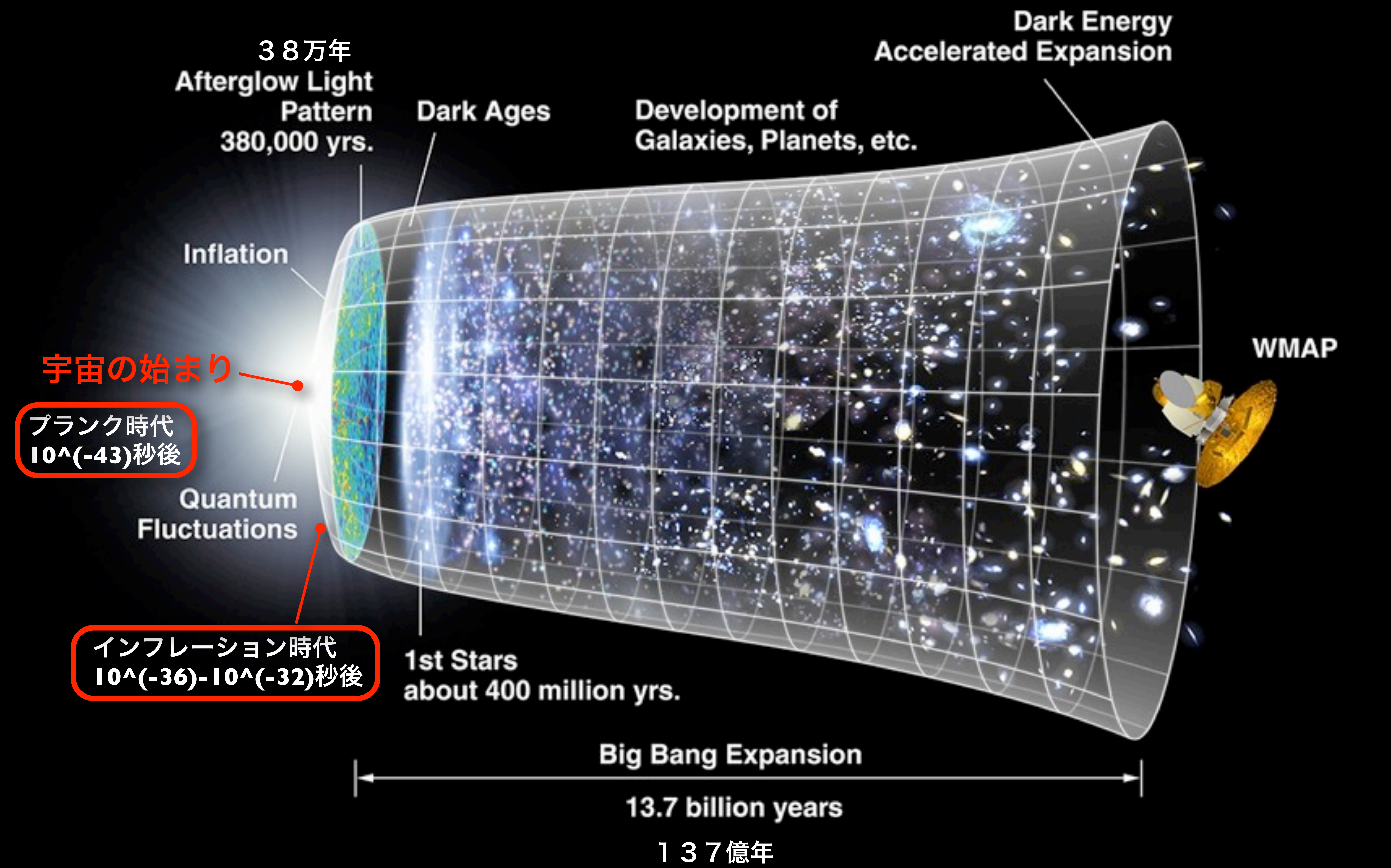
2013/12/4　基研研究会
量子情報物理学

references

YN, Entropy 8,1847 (2013)
YN & Y. Ohsumi, PRD 84,044028 (2011)
YN & Y. Ohsumi, PRD 80,124031 (2009)
YN, PRD 78,044023 (2008)

Introduction

宇宙の歴史


３８万年
Afterglow Light Pattern
380,000 yrs.
Dark Ages
Development of Galaxies, Planets, etc.
Dark Energy
Accelerated Expansion
Inflation
宇宙の始まり
プランク時代
10^(-43)秒後
Quantum Fluctuations
インフレーション時代
10^(-36)-10^(-32)秒後
1st Stars
about 400 million yrs.
WMAP
Big Bang Expansion
13.7 billion years
１３７億年

宇宙の構造形成のシナリオ

インフレーション： 宇宙の加速膨張期

- 計量 $g_{ab}(t) + \delta g_{ab}(t, x)$

  $a \propto e^{Ht}$ de Sitter

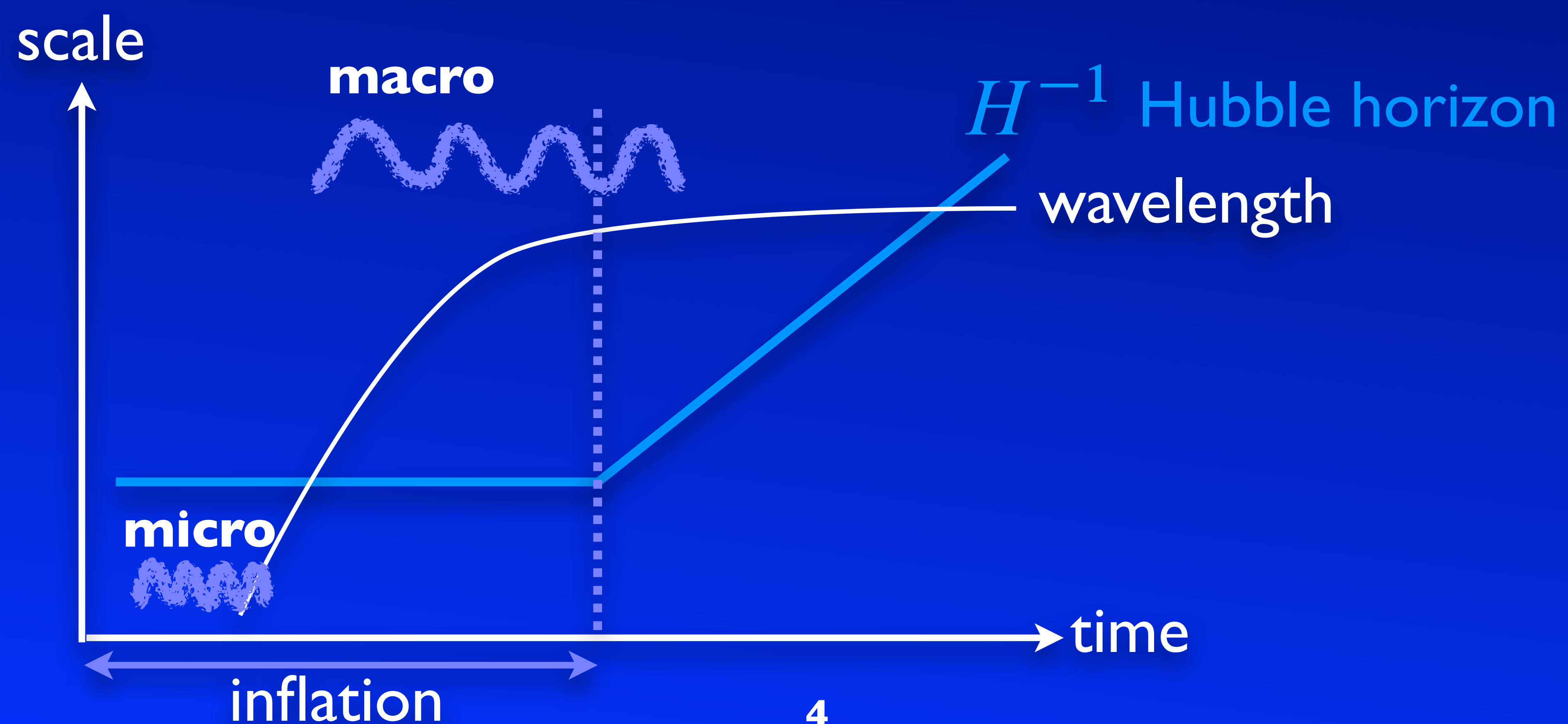
- インフラトン（量子場）

  $\phi(t) + \delta\phi(t, x)$

  量子ゆらぎ

重力不安定性

δg_{ab} ⇒ 大規模構造



インフレーションによるゆらぎ生成

$$\mathcal{R} = -\frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi$$

曲率ゆらぎ　　　　インフラトンのゆらぎ

- インフレーション宇宙での量子場（曲がった時空上の量子場）

$$\langle \delta\hat{\phi}_k \delta\hat{\phi}_k^\dagger \rangle \sim \hbar \frac{H^2}{k^3}$$

super horizon mode

$$k_p^{-1} > H^{-1}$$

- 曲率ゆらぎのパワー

$$\left\langle |\hat{\mathcal{R}}_k|^2 \right\rangle \times k^3 \sim \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \times \left\langle |\delta\hat{\phi}_{\boldsymbol{k}}|^2 \right\rangle \times k^3$$

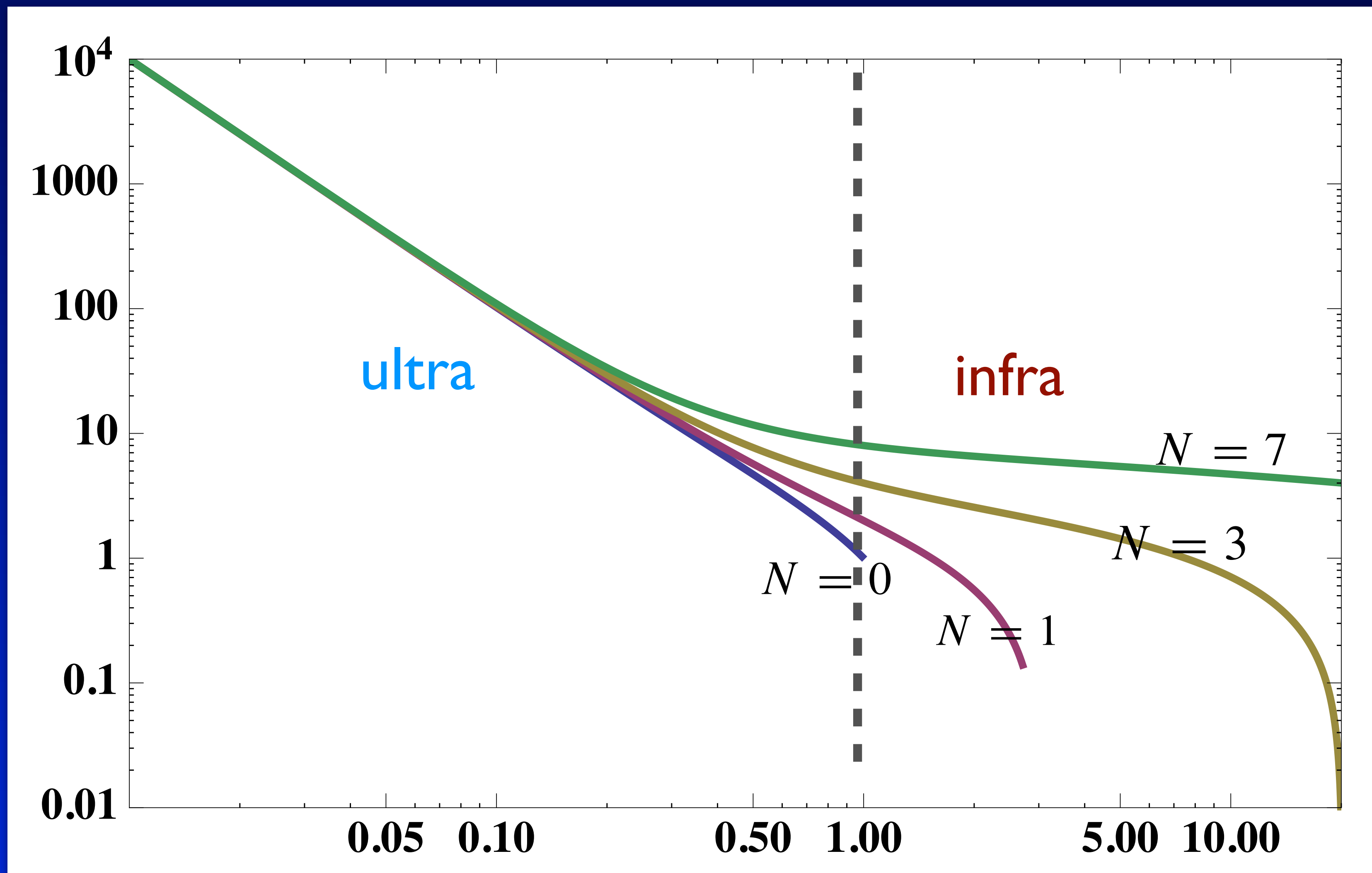
⇒ scale independent

Harrison-Zeldovich

構造形成の初期値

de Sitter時空での２点相関関数　massless minimal scalar

$$\langle \delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)\rangle = \frac{\hbar}{4\pi^2 r_p^2} - \frac{\hbar H^2}{4\pi^2}\ln\left(H r_p\right) + \frac{\hbar H^3 t}{4\pi^2}$$



$\langle \delta\phi^2 \rangle \sim \hbar H^2$

$r_p H$

インフレーション膨張は large scale $r_p > H^{-1}$のゆらぎを生み出す

$\langle \delta\phi^2 \rangle \propto \hbar H^3 t$　　ブラウン運動

ゆらぎの古典性

$$\langle|\hat{\mathcal{R}}_k|^2\rangle \sim \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \times \langle|\delta\hat{\phi}_{\boldsymbol{k}}|^2\rangle$$

量子論の期待値を古典論の初期値として用いる

$\langle\hat{\mathcal{R}}\hat{\mathcal{R}}\rangle$ ⇒ $\langle\cdots\rangle$ を統計平均で置換える

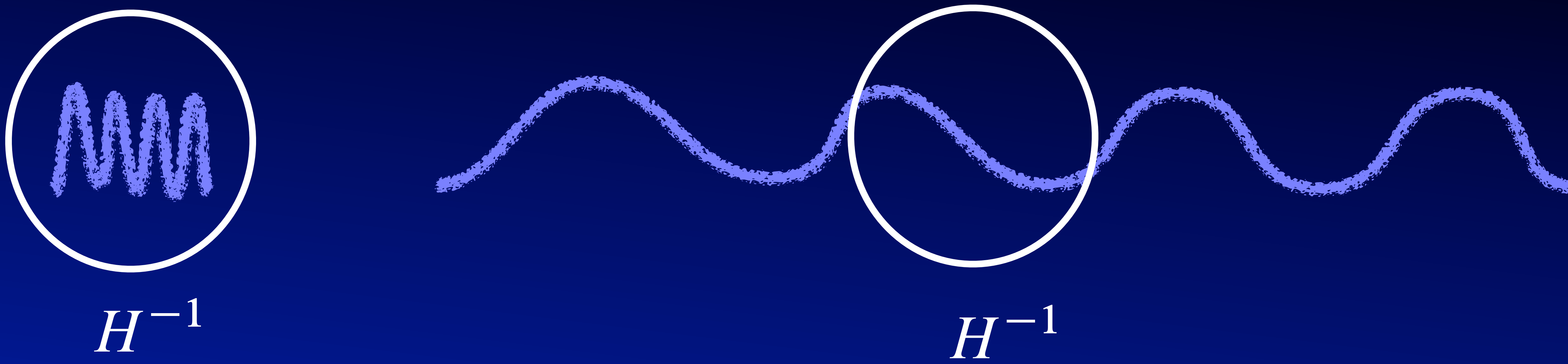
$\hat{\mathcal{R}}$ ⇒ c 数のrandom Gaussian variable

量子力学的変数

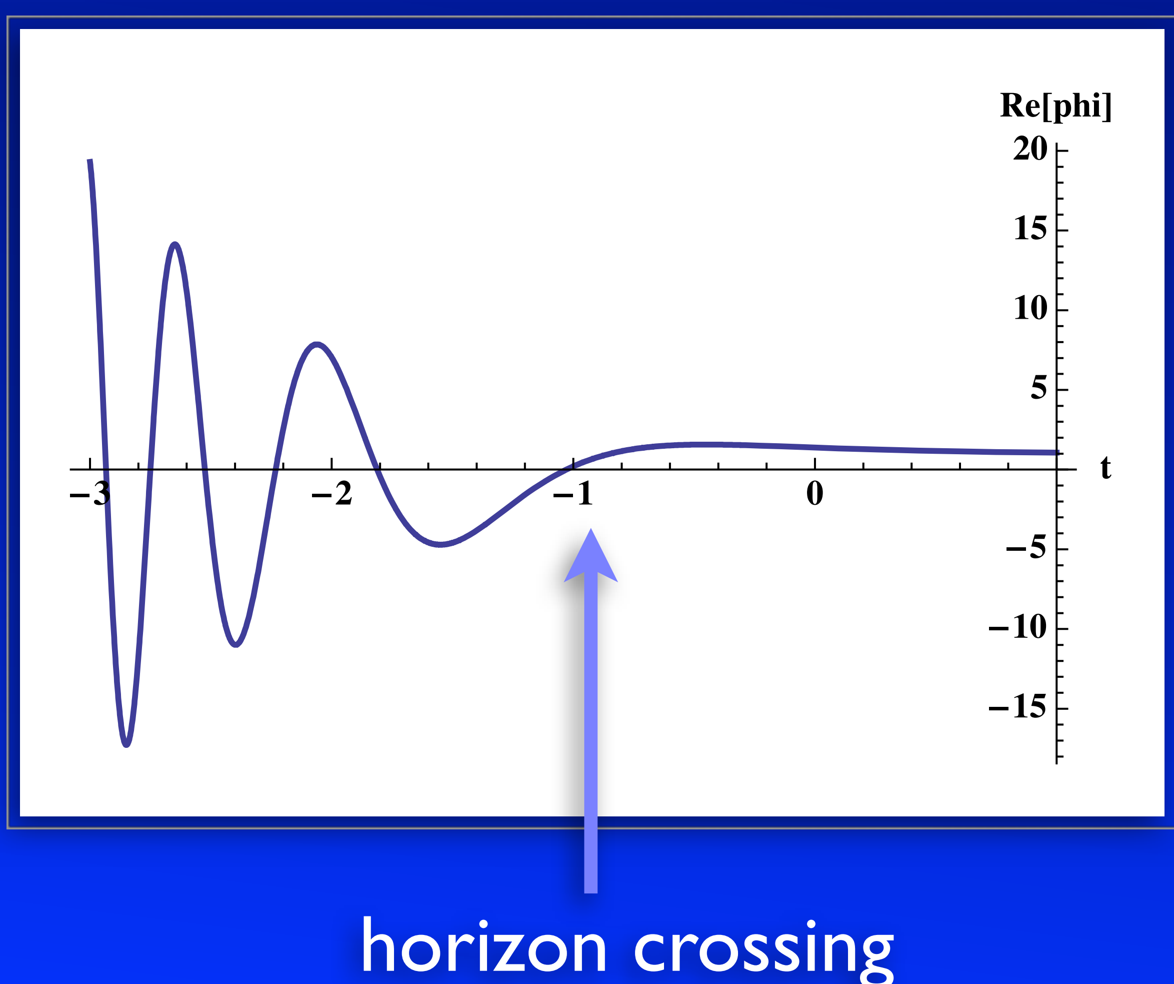
古典化の仮定

量子論の期待値を再現する古典確率分布の存在を仮定

量子ゆらぎが古典的に振る舞うとは？



mode functionの時間波形



- **波動性がなくなる（凍り付く）**

  状態がsqueezeされる

- 『量子力学的』重ね合わせがなくなる

  decoherence

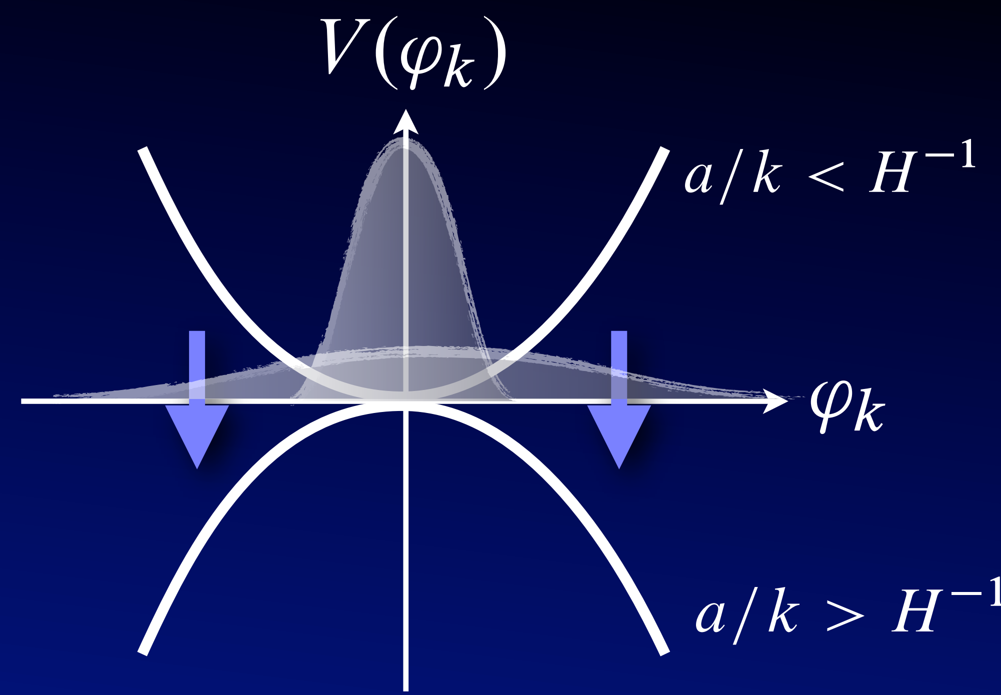
- 『量子力学的』相関がなくなる

  entanglement消失

ゆらぎの凍り付きの意味

mode functionの振舞い

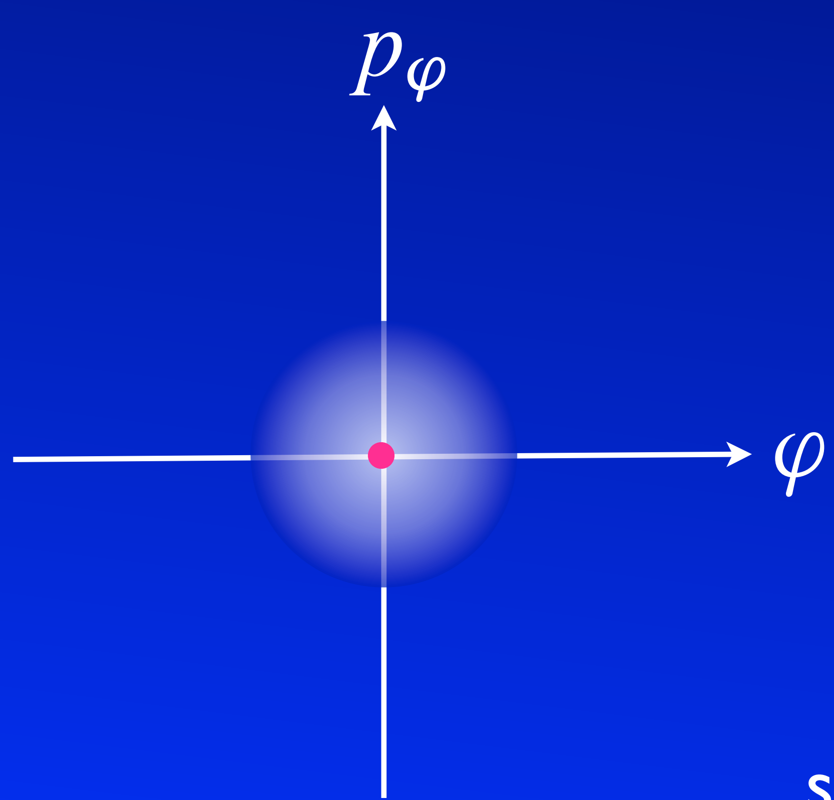
$$\varphi_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right)\varphi_k = 0$$

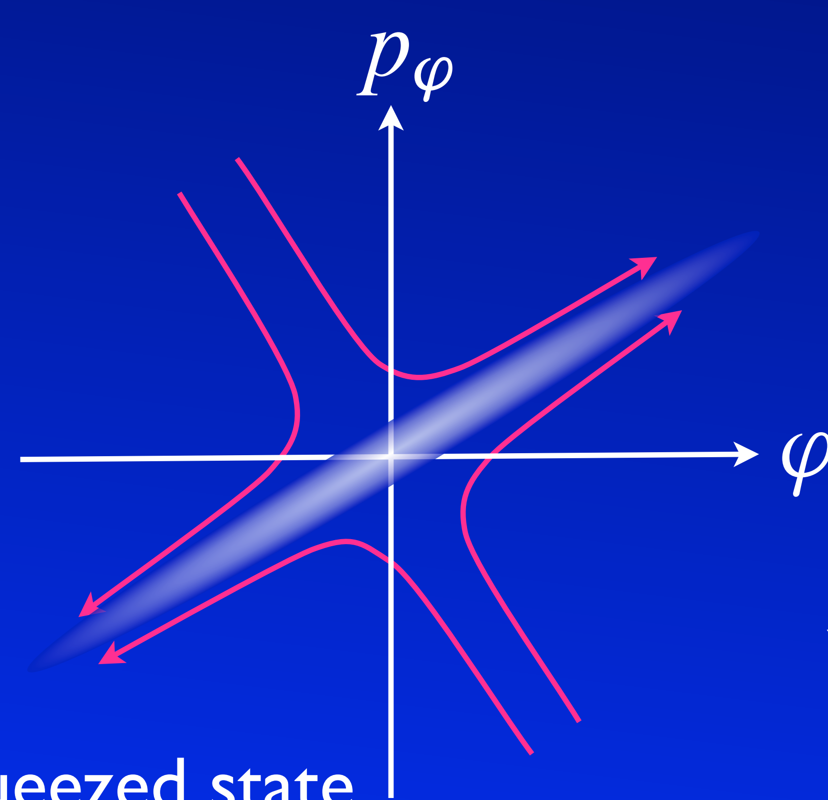


真空状態

$$\Psi(\varphi_k) \propto \exp\left(-A\,\varphi_k^2\right)$$

量子力学的非可換性が
無視可能となり古典的
ゆらぎとして扱える





古典軌道の集団と
して波動関数を記
述できる

各kモードを古典的確率変数
として扱える

A. Guth & S-Y. Pi 1985
D. Polarski & A.A. Starobinsky 1996

量子起源のゆらぎが古典ゆらぎとして振舞う条件

ゆらぎの相関を再現する局所的確率分布が存在する
（local hidden variable theoryで記述できる）

⇒ Bell不等式を満たす

２体系に関してはseparableであることと同値
（エンタングルしていない）

ここで問題にしたいこと

インフレーションによって生成される量子ゆらぎの古典性を
エンタングルメント（量子相関）の側面から理解する

２体間エンタングルメント

Entanglement (two party)

2体間エンタングルメント

A　　B

(q_A, p_A)　　(q_B, p_B)

pure state

- A, Bはseparable

$$|A, B\rangle = |A\rangle|B\rangle$$

- A, Bはentangled

$$|A, B\rangle = |a_1\rangle|b_1\rangle + |a_2\rangle|b_2\rangle + \cdots$$

量子力学固有の相関

一般に

- A, Bはseparable

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_j w_j \hat{\rho}_A^j \otimes \hat{\rho}_B^j, \quad \sum_j w_j = 1, \quad w_j \geq 0$$

- このように表せないとき，A, Bはentangled

Bell不等式が破れる　entangled

Separableである必要十分条件

R.Simon 2000, L.Duan et al. 2000

1 自由度 X 1 自由度 Gaussian state

A　B

$(\hat{q}_A, \hat{p}_A)$　$(\hat{q}_B, \hat{p}_B)$

$$\hat{\xi}_i = (\hat{q}_A, \hat{p}_A, \hat{q}_B, \hat{p}_B) \qquad [\hat{\xi}_j, \hat{\xi}_k] = i\Omega_{jk}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

covariance matrix $\quad V_{jk} = \frac{1}{2}\langle \hat{\xi}_j \hat{\xi}_k + \hat{\xi}_k \hat{\xi}_j \rangle$

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}]$$

- positivity $\quad V + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$

任意の$\hat{A}$に対して$\langle \hat{A}\hat{A}^\dagger \rangle \geq 0$

- 部分転置 $\quad p_B \longrightarrow -p_B \qquad V \longrightarrow \tilde{V}$

A,Bがseparable $\Longleftrightarrow$ $\tilde{V} + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$

2X2
2X3
1XN

一般のM X N 自由度に対しては

A,Bがseparable $\Longrightarrow$ $\tilde{V} + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$

Symplectic eigenvalue

symplectic変換

$$S V S^T = \mathrm{diag}(\nu_+, \nu_+, \nu_-, \nu_-)$$

$$\nu_+ \geq \nu_- > 0$$

$$S \in \mathrm{Sp}(4, R)$$

$$S \Omega S^T = \Omega$$

- positivity $\quad \nu_- \geq \frac{1}{2}$ (不確定性関係)
- separability $\quad \tilde{\nu}_- \geq \frac{1}{2}$

この条件が満たされている場合にはA, Bはentangleしてない

（「量子相関」なし）

Logarithmic negativity

$$E_N = -\min\left[\log_2(2\tilde{\nu}_-), 0\right]$$

$E_N > 0$ entangled

$E_N = 0$ separable

古典化の条件（量子論の期待値を再現する確率分布の存在条件）

任意の F に対して次の関係を満たす分布関数$\mathcal{P}$が存在

$$\langle F(\hat{q}_A, \hat{p}_A, \hat{q}_B, \hat{p}_B)\rangle = \int d^2q d^2p\, \mathcal{P}(q_A, p_A, q_B, p_B) F(q_A, p_A, q_B, p_B)$$

$$\int d^2q d^2p\, \mathcal{P} = 1,\ \mathcal{P} > 0$$

- 1 自由度 X 1 自由度 Gaussian stateに対しては

系がseparable $\Longleftrightarrow$ $\hat{\rho}_{AB} = \int d^2\alpha d^2\beta\, P(\alpha, \beta)\, |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta|$

(R.Simon 2000, L.Duan *et al.* 2000)

$P \geq 0$ $\quad |\alpha, \beta\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle$ A, Bに対する coherent state

P-function $\quad \langle : F(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}) : \rangle = \int d^2q d^2p\, P(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$

P-funcの存在条件 $\Longleftrightarrow$ separability

Wigner function

$$W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = [\det V]^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T V^{-1}\boldsymbol{\xi}\right) \qquad \boldsymbol{\xi} = (q_A, p_A, q_B, p_B)^T$$

任意の関数$F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})$に対して

$$\boxed{\begin{aligned}\langle\{F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})\}_{\mathrm{sym}}\rangle &= \int d^2q\,d^2p\,W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\\ \langle :F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}}):\rangle &= \int d^2q\,d^2p\,P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\end{aligned}}$$

Wigner func. :$V > 0$なら存在

P-func. : separableなら存在

separableの条件下で古典化の条件は

$$\langle\{F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})\}_{\mathrm{sym}}\rangle \approx \langle :F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}}):\rangle \approx \langle F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})\rangle \iff P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \approx W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

$\hat{q},\hat{p}$ の非可換性が無視できる

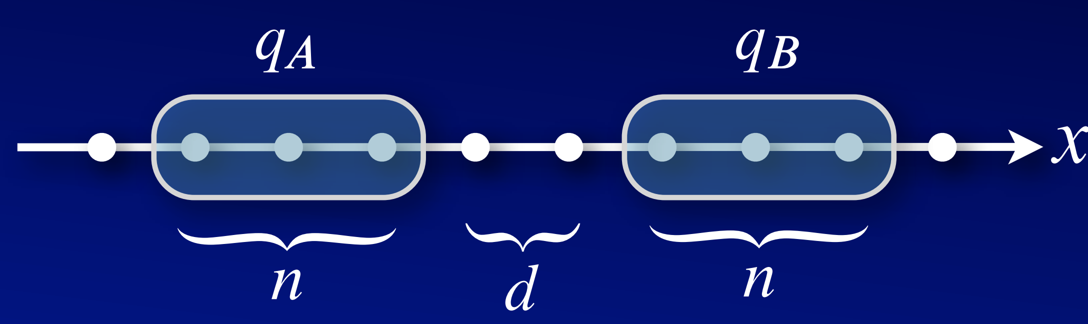
$\nu, \tilde{\nu} \gg 1$ (nambu, 2008)

$$\Rightarrow \quad \langle F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})\rangle \approx \int d^2q\,d^2p\,W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

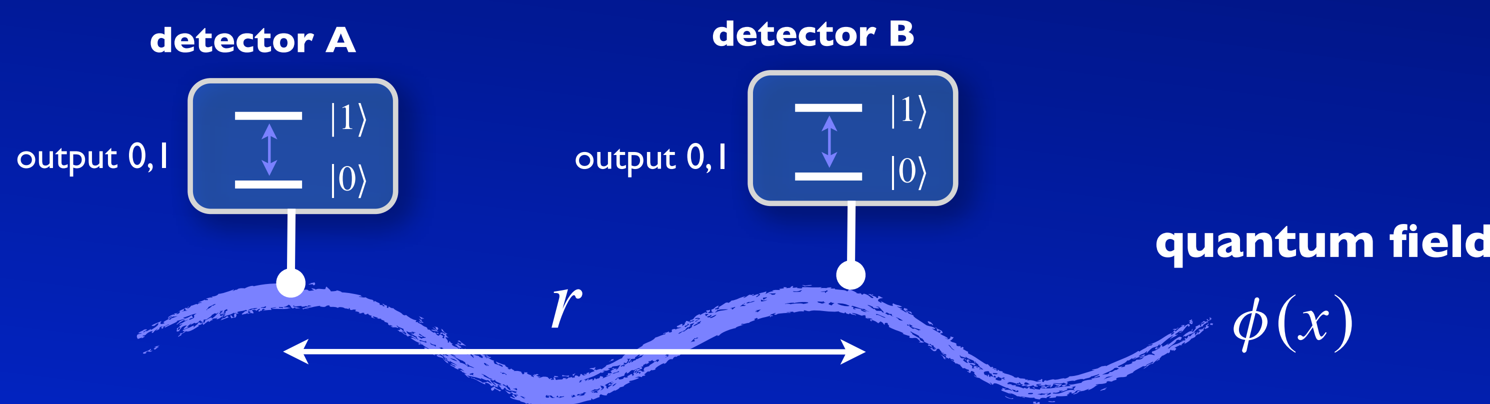
量子場のエンタングルメント

場に対する２体系の定義

(1) ２つの空間領域を定義する



(2) ２つのdetectorで場の相関を読み出す



detector ABの状態

initial: separable → final: entangle

場のエンタングルメントをdetectorに移す
(entanglement swapping)

(3) 場を粗視化する（波数空間にwindow functionを導入）

Lattice modelでの解析

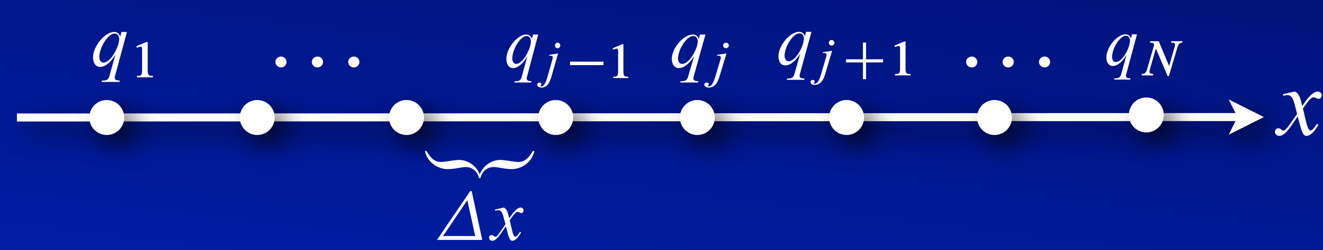
nambu, 2008

EOM $$q'' - \frac{a''}{a}q - \nabla^2 q = 0$$

scale factor $a = -1/(H\eta)$

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\boldsymbol{x}^2)$$

空間を離散化 $$q_j'' - \frac{a''}{a}q_j + 2q_j - \alpha(q_{j+1} + q_{j-1}) = 0$$



1-dim

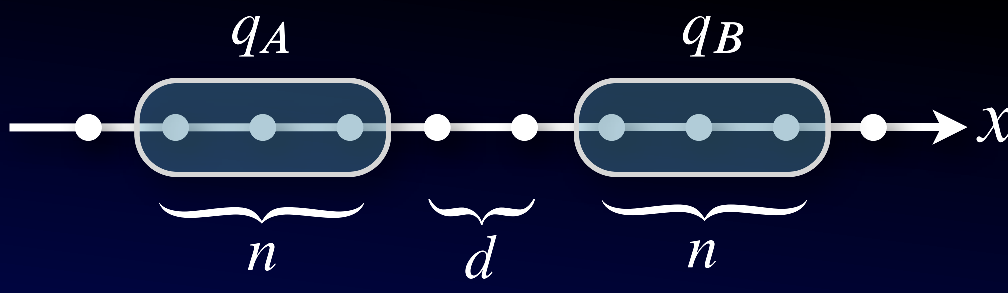
量子化

$$\hat{q}_j = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f_k\hat{a}_k + f_k^*\hat{a}_{N-k}^\dagger\right)e^{i\theta_k j} \qquad \theta_k = \frac{2\pi k}{N}$$

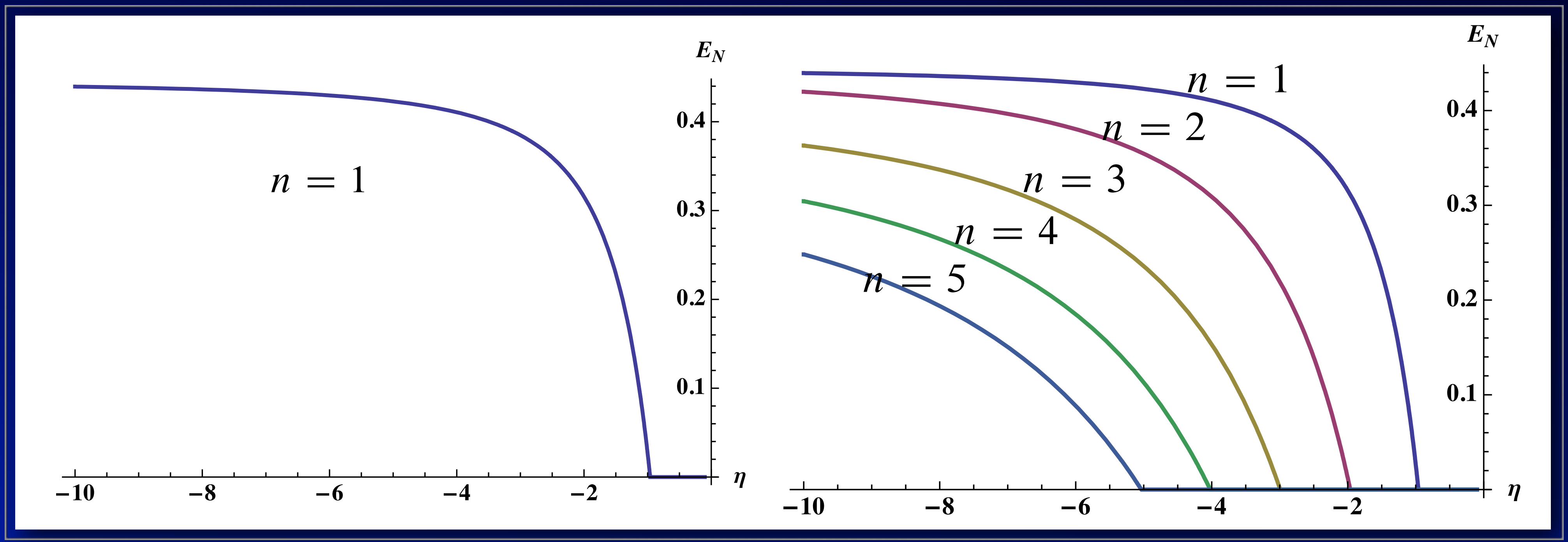
$$f_k'' + \left(\omega_k^2 - \frac{a''}{a}\right)f_k = 0 \qquad \omega_k^2 = 2(1 - \alpha\cos\theta_k)$$

Bunch-Davies vacuum

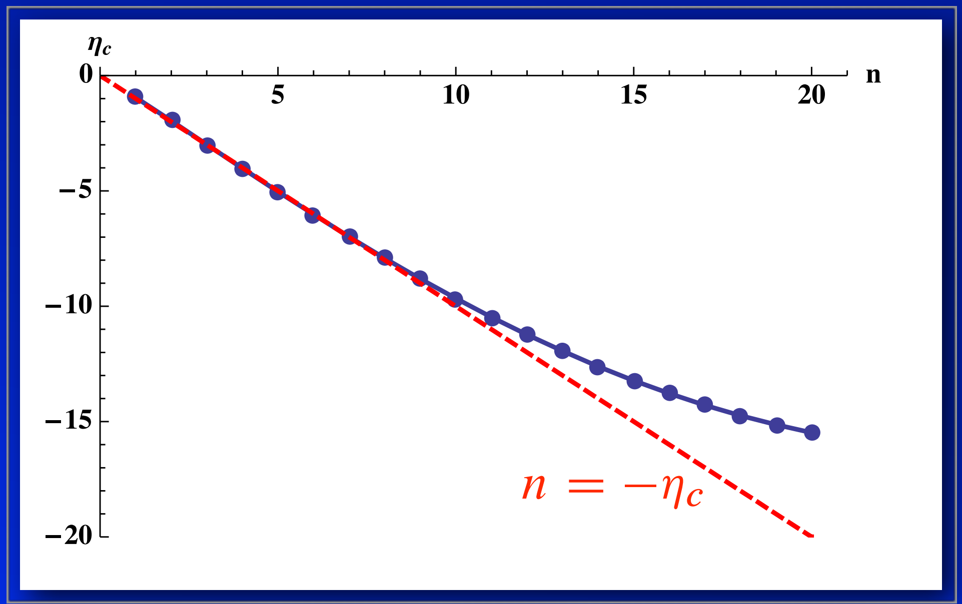
block variablesの振舞い

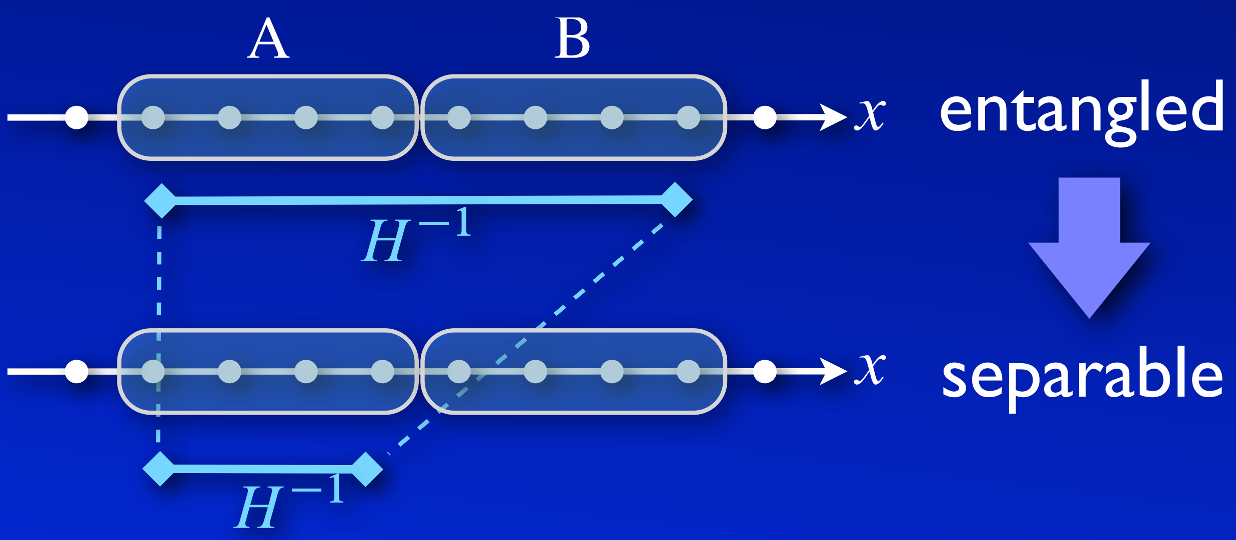


negativityの時間変化 $d = 0$



group sizeとseparableになる時刻の関係



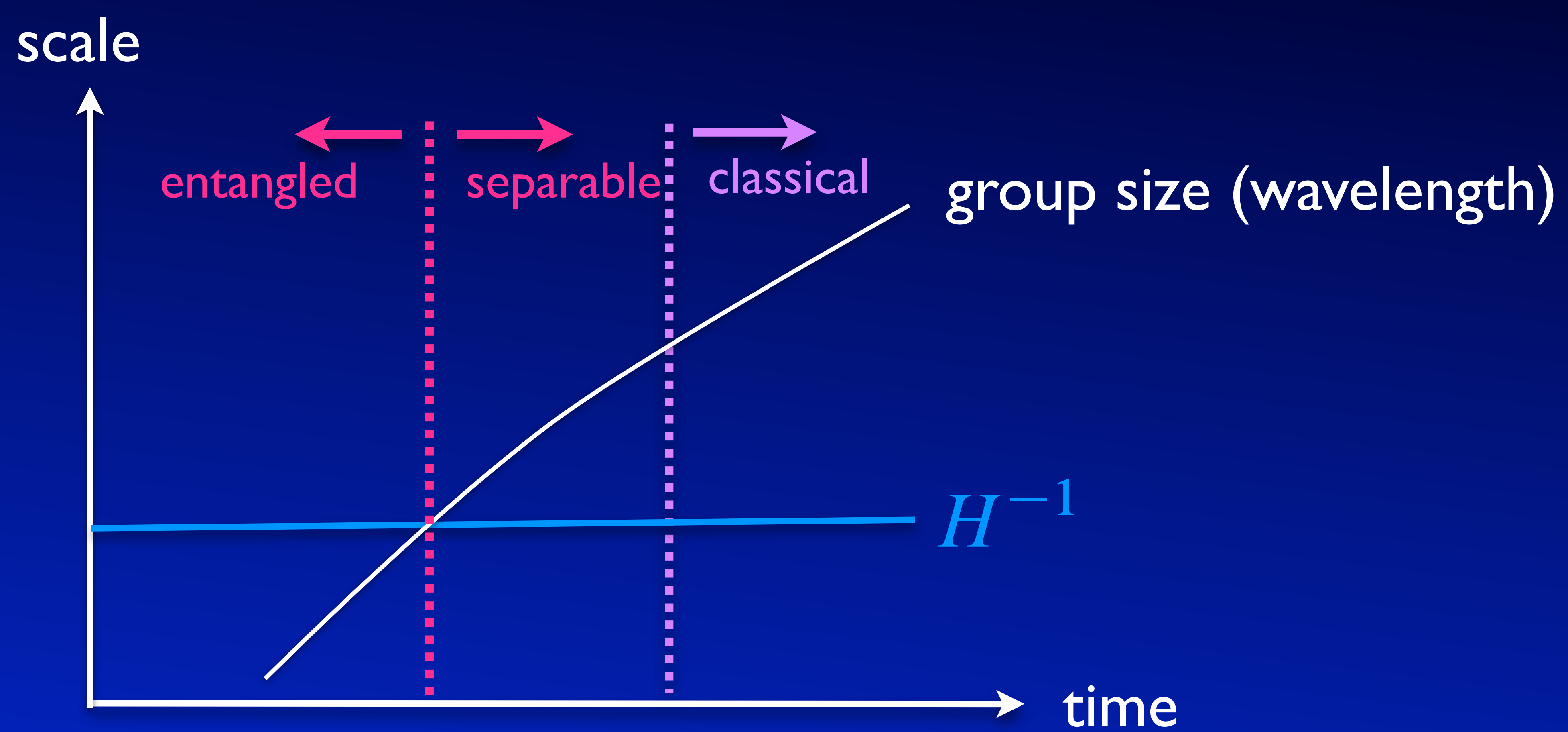


$$n\Delta x = -\eta_c = \frac{1}{a_c H} \quad \therefore \quad a_c\,(n\Delta x) = H^{-1}$$

group sizeがHubble horizon scaleと等しくなると“量子相関”が切れる

Lattice modelにおける古典化のまとめ

2体entanglementに基づく古典化に到る流れ



- 領域の大きさがhorizon scaleを超すと領域間はseparable

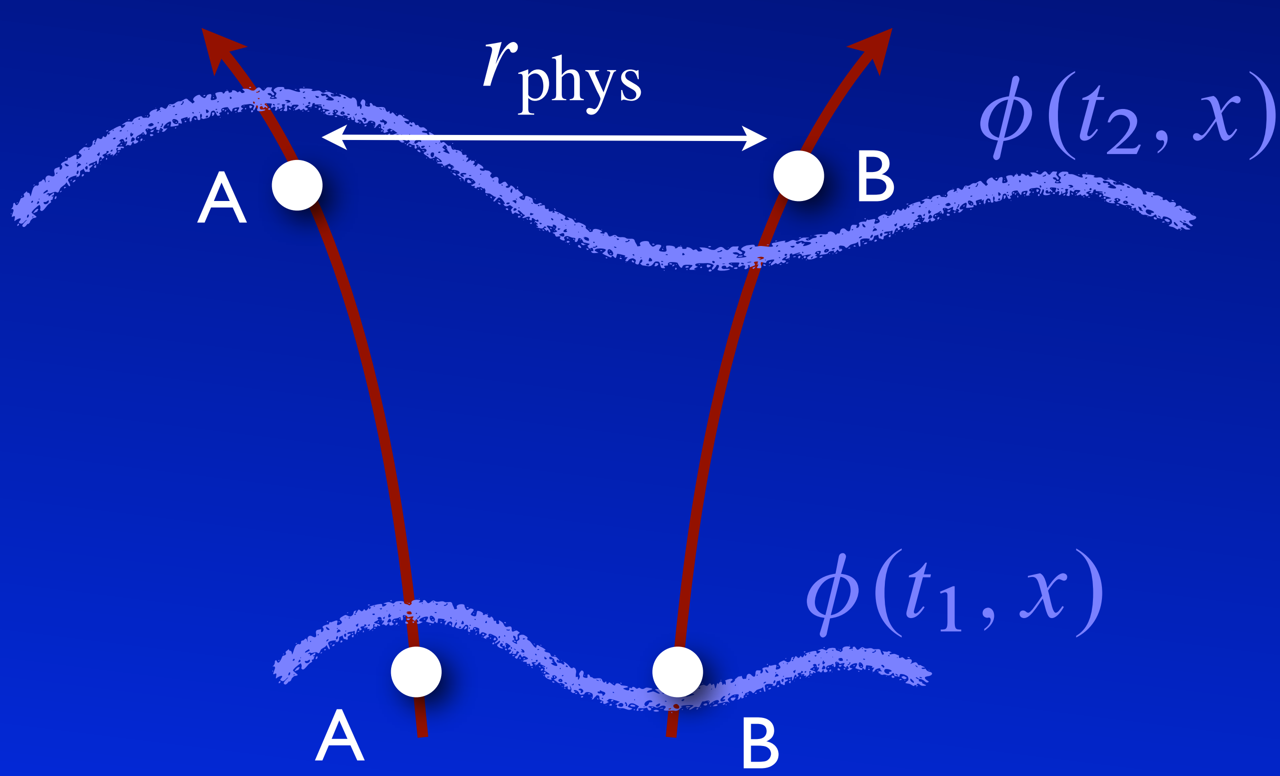
  ➡ horizonが量子相関の有無を決定

- separableになってからone Hubble time程度で“古典化”　$\nu, \tilde{\nu} \gg 1$

  ➡ 相関関数を再現する古典分布関数の出現

Detector modelを用いた解析

- より現実の測定（観測）に沿った設定
- 場のentanglementをdetector間のentanglementを通して読み取る

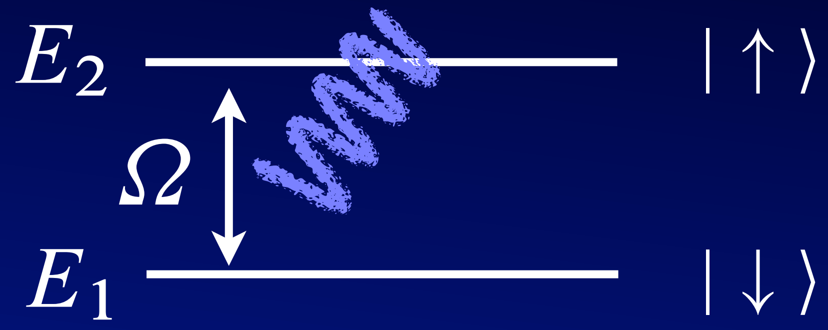


2つのdetectorは宇宙膨張と共に離れる（comoving）

$$r_{\mathrm{phys}} = a(t)\, r$$

detectorの初期状態：separable

Unruh-DeWitt detector



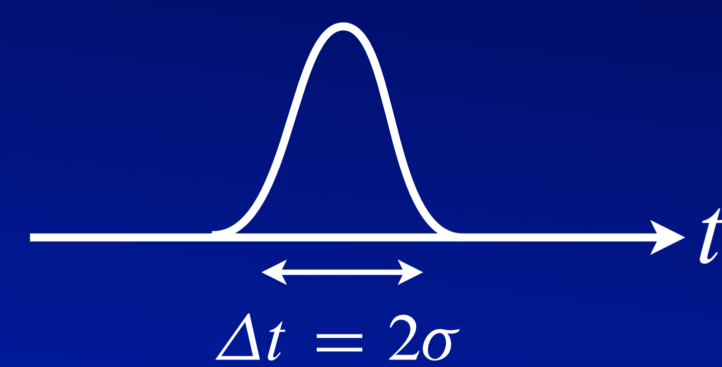
$$V = \epsilon(\tau)(\sigma^+ + \sigma^-)\phi(x(\tau))$$

$$\sigma^+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$$

$$\sigma^- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$$

window function

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \ \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$



total Hamiltonian

$$H = \frac{\Omega}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\Big) + V + H_\phi$$

相互作用後の状態

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \left[1 - i\int dt_1 \tilde{V}_1 - \frac{1}{2}\int dt_1 dt_2 \mathrm{T}[\tilde{V}_1\tilde{V}_2] + \cdots\right]|\tilde{\Psi}_0\rangle$$

final state of detectors

initial state: $|\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B$

$$\rho = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \uparrow\uparrow & \uparrow\downarrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & E & E_{AB} & 0 \\ 0 & E_{AB} & E & 0 \\ X^* & 0 & 0 & 1-2E \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{array}$$

$$X = -2\int_{t_1>t_2} dt_1 dt_2\, g_1 g_2\, e^{i\Omega(t_1+t_2)} \langle \phi(t_1, \boldsymbol{x}_A)\phi(t_2, \boldsymbol{x}_B)\rangle$$

$$E_{AB} = \int dt_1 dt_2\, g_1 g_2\, e^{-i\Omega(t_1-t_2)} \langle \phi(t_1, \boldsymbol{x}_A)\phi(t_2, \boldsymbol{x}_B)\rangle$$

$$E = \int dt_1 dt_2\, g_1 g_2\, e^{-i\Omega(t_1-t_2)} \langle \phi(t_1, \boldsymbol{x}_A)\phi(t_2, \boldsymbol{x}_A)\rangle$$

2 qubit系のseparability: negativity:

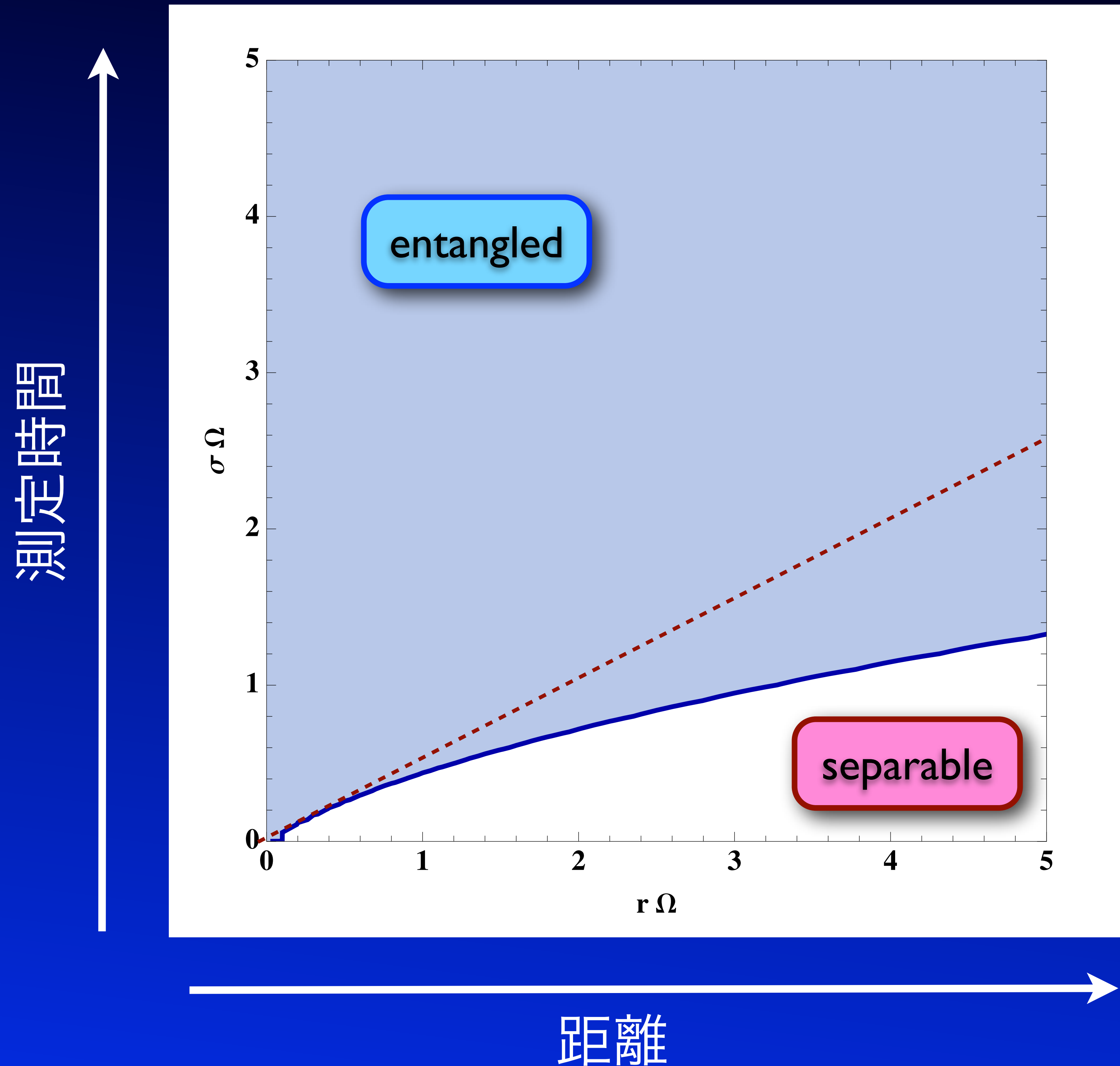
$$\mathcal{N} = \boxed{|X|} - \boxed{E}$$

非対角成分間のコヒーレンス　局所的なゆらぎの大きさ

$\mathcal{N} > 0$　２つのdetectorはエンタングル

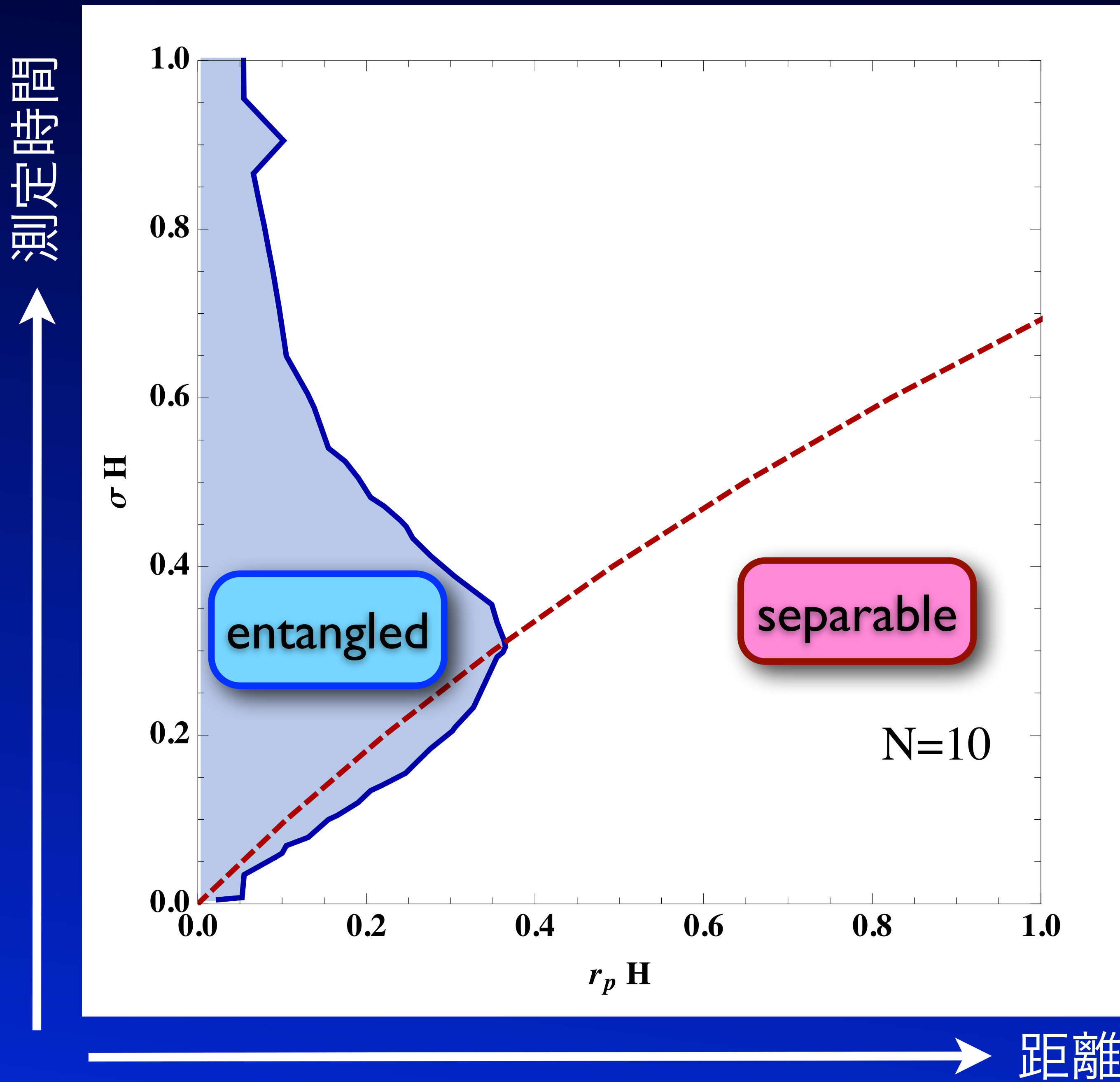
$\mathcal{N} < 0$　２つのdetectorはセパラブル

Minkowski vacuum



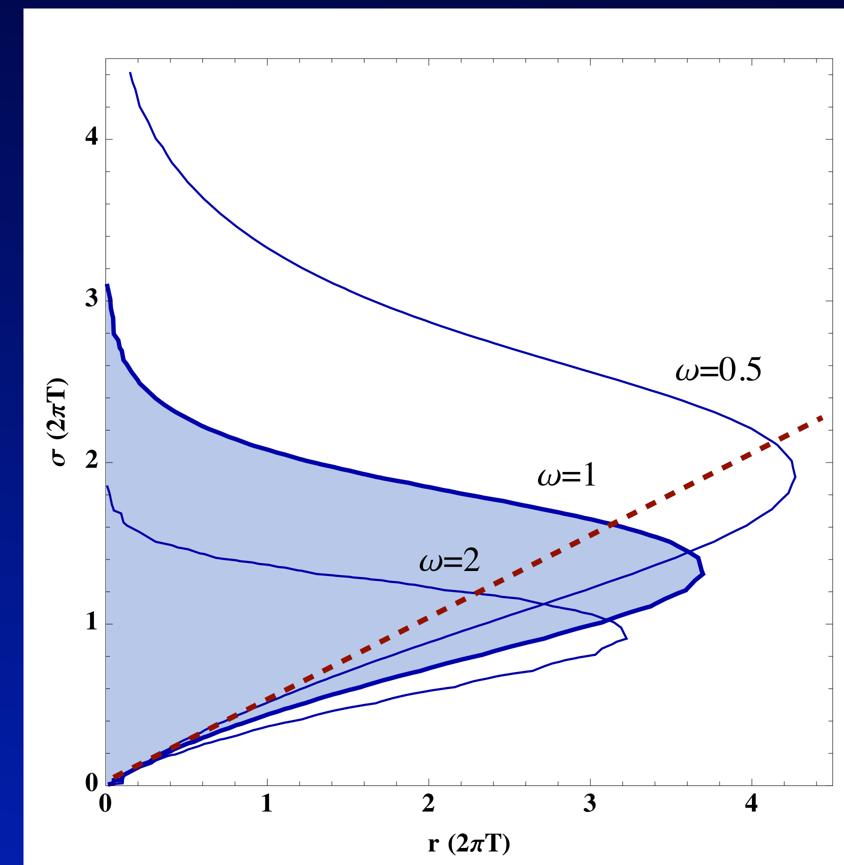
- どのような距離に対しても，エンタングルが検出できる

deSitter massless scalar (inflaton)



$r_p \lesssim H^{-1}$ でのみ場のエンタングルメントが検出可能

Minkowski thermal state



$r \lesssim T^{-1}$ でのみ場のエンタングルメントが検出可能

➡ super horizon scale の量子ゆらぎが古典的であることと無矛盾

Detector modelにおける古典化のまとめ

initial : separable → final : entangled　場はエンタングル $r_p \lesssim H^{-1}$

initial : separable → final : separable　場の状態？

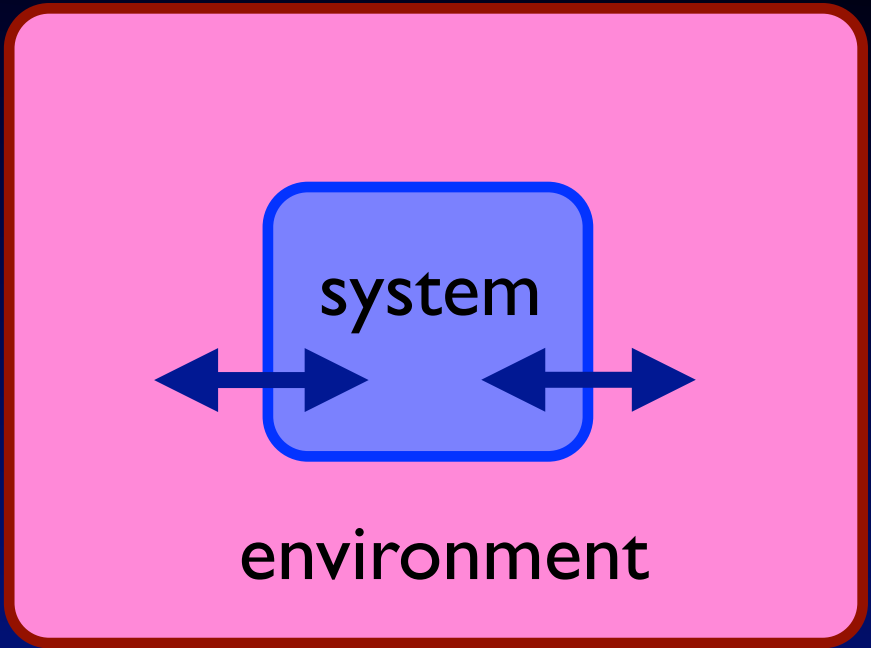
initial : entangle → final : entangled　場の状態？
（摂動の最低次で）

- Super horizon scaleの量子ゆらぎが古典的であることと無矛盾
- 量子相関が切れることを見るためには時間発展を追跡する必要あり（古典化が時間と共に起きること）

detectorに対するmaster方程式

Quantum Markovian Master Equation

Open quantum system



$$H_T = H_S + V + H_B$$

$$\dot{\rho}_T = -i\,[H_T\,, \rho_T]$$

systemの状態

$$\rho = \mathrm{Tr}_B\{\rho_T\}$$

- weak coupling
- environmentに対するback action無視
- Markov性

⇒ ρ に対するMarkovian master equation

Master equation

time coarse-graining approach

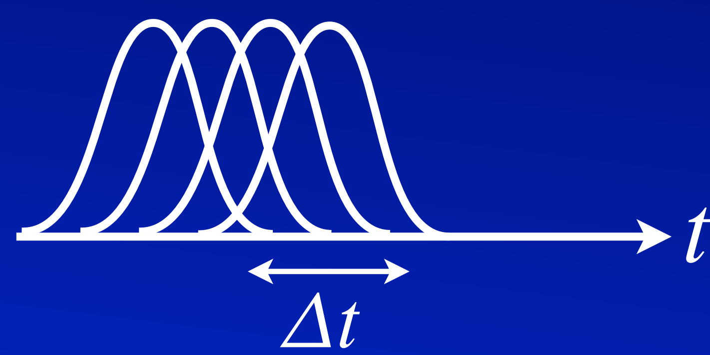
F. Benatti et al. 2010
C. Majenz et al. 2013

$$\dot{\rho} = -i\,[H_{\mathrm{eff}}, \rho] + \mathscr{L}[\rho]$$

$$\mathscr{L}[\rho] = \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Tr}_{\phi}\left[L(\rho \otimes \rho_{\phi})L - \frac{1}{2}\{L^2, \rho \otimes \rho_{\phi}\}\right]$$

$$L = \int_0^{\Delta t} ds\, \tilde{V}(s)$$

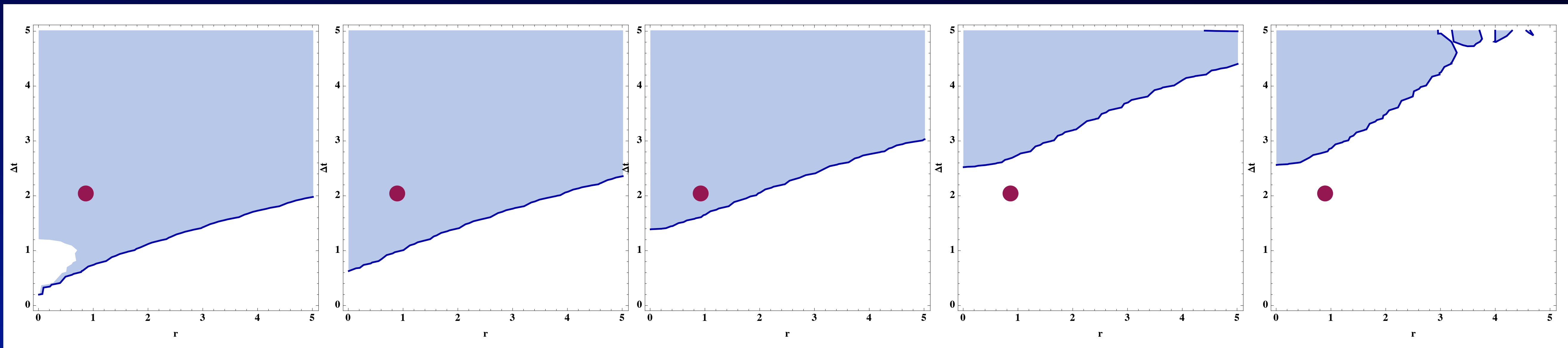
Δt :時間の粗視化のスケール



- positivity, trace conditionを保証する　　Lindblad form
- $\Delta t \to \infty$で回転波近似のmaster方程式に帰着

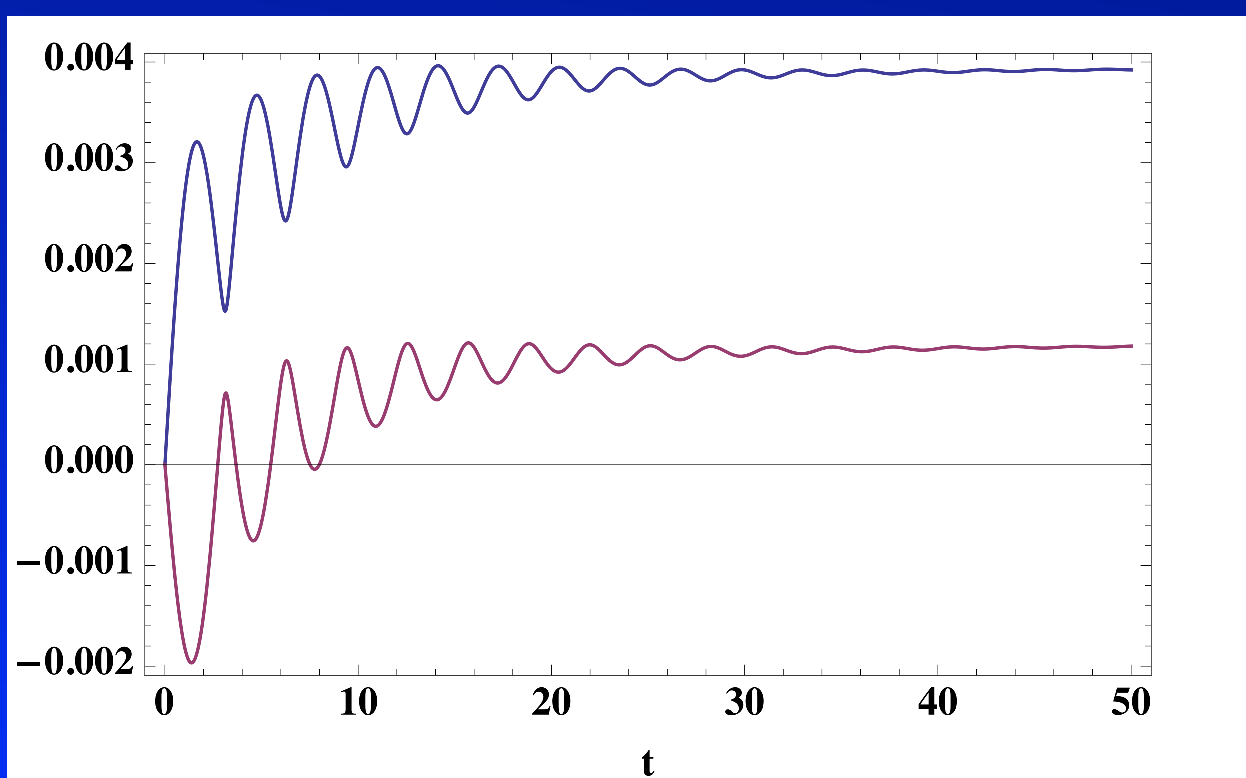
Minkowski vacuum

initial: separable $|\downarrow\downarrow\rangle$



t=1　　t=2　　t=5　　t=10　　t=50

ρ^{PT}の固有値



r=1, Δt=2

separable

↓

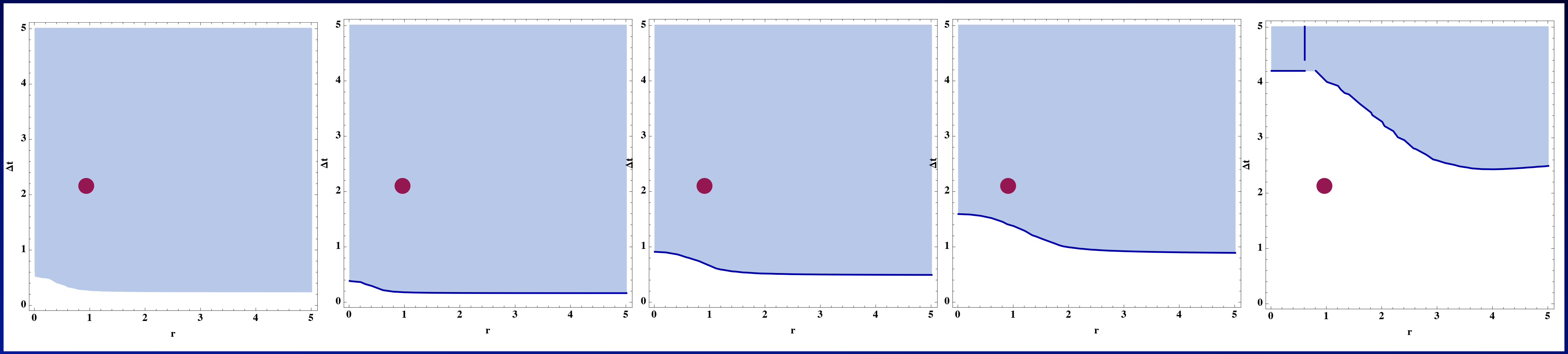
entangle

↓

separable

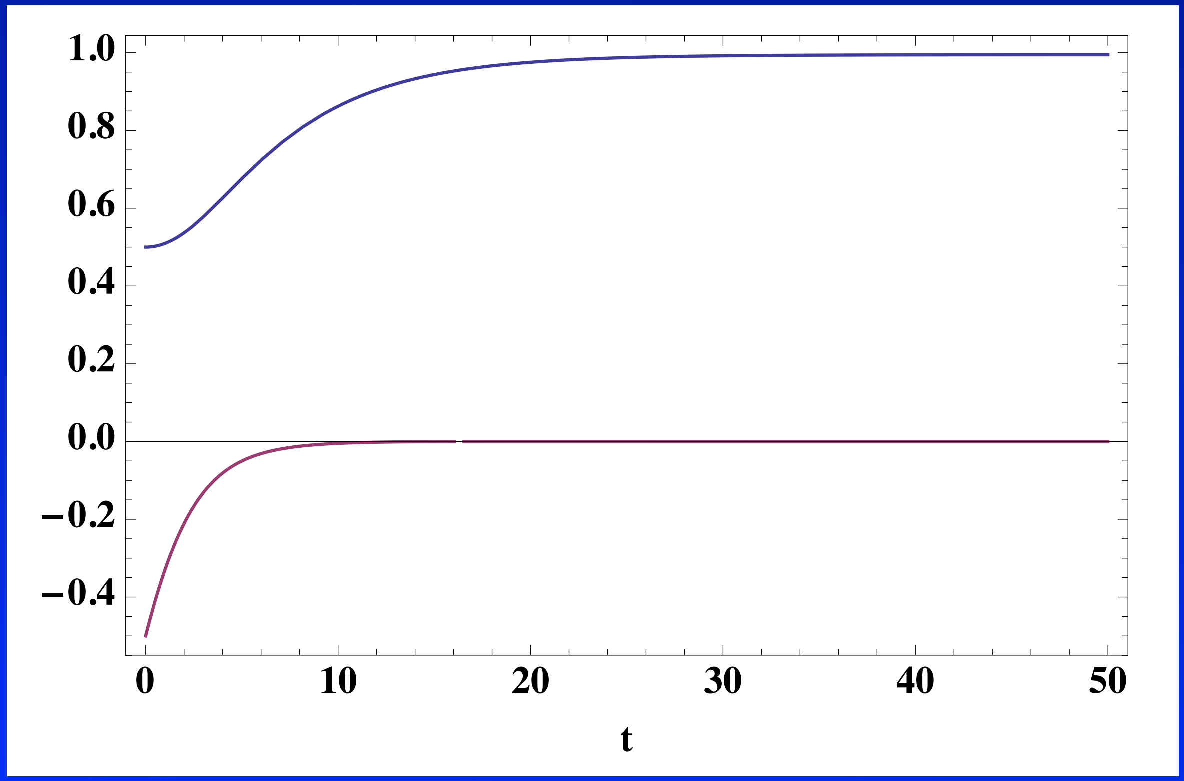
Minkowski vacuum

initial: entangled $|\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle$



t=1 t=2 t=5 t=10 t=50

ρ^{PT}の固有値



r=1, Δt=2

entangle

↓

separable

Master 方程式の定常解

$$\tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\rho}] = 0$$ 初期状態に依存する漸近状態に近づく

- Minkowski vacuum:

  任意の r に対して

  separable → entangle
  entangle → entangle
  となる漸近状態が存在する

- de Sitter:

  初期状態によらず $r_p > H^{-1}$ ではseparableとなるか？

  separable → separable
  entangle → separable
  となる漸近状態が存在する

Summary

量子場に対する2体間エンタングルメント

初期量子ゆらぎの古典化

- separability

「古典」確率分布の存在条件

- super horizon scaleゆらぎの「古典化」の正当性

lattice model: entangle → separable

detector model: super horizon scaleでエンタングルメントは検出されない

今後の展望

- 場のエンタングルメントの時間発展と測定

- resourceとしてのエンタングルメント

  エンタングルメントの消失 ⟺ 大きなゆらぎの生成

  conformal invarianceの破れ

  QT, QETとの関係

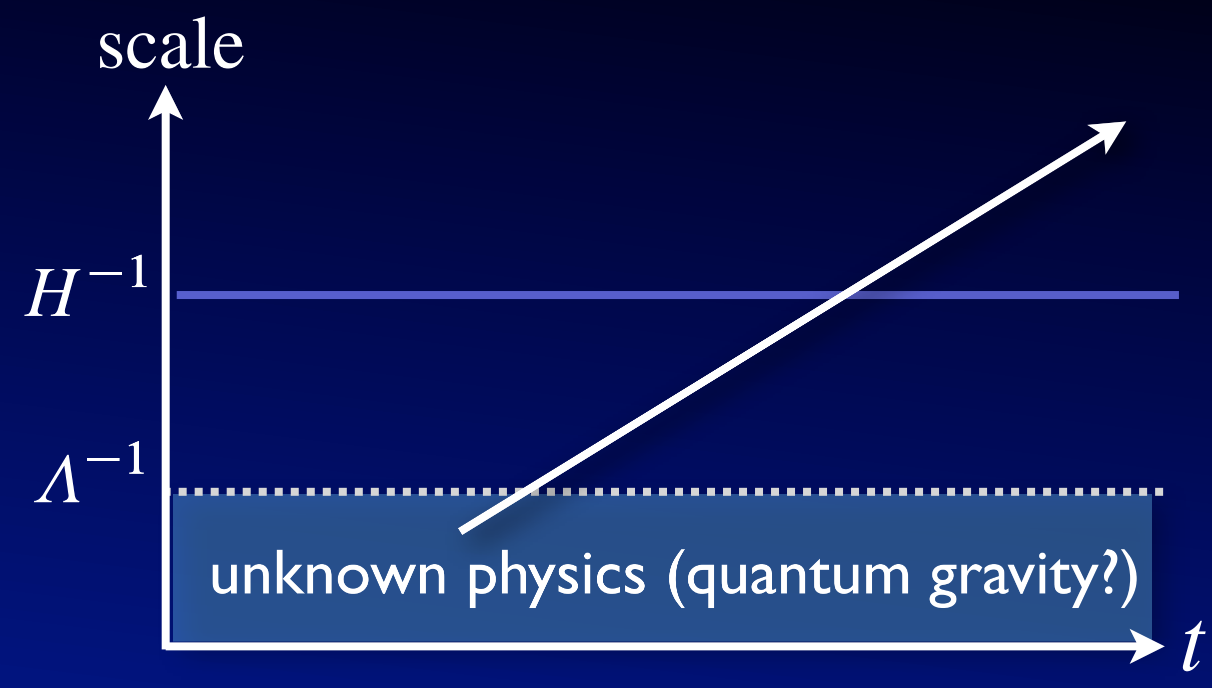
- 観測的検証？

  古典化実験，重力波，CMB (polarization)

  trans-Planckian problem

Planck scale以下の情報が見えてくる？

$$\Lambda^{-1} \sim \ell_p < H^{-1}$$

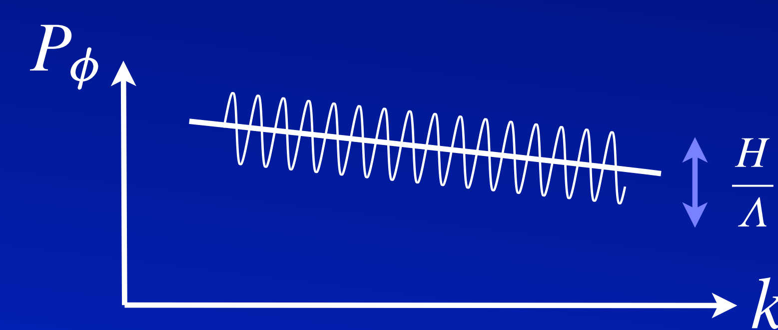


- **approach 1**

Λ において「真空」状態を要請

Bunch-Davies真空とは異なる初期状態

$$P_\phi = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{H}{\Lambda} \sin\left(\frac{2\Lambda}{H}\right)\right)$$



oscillation in power spectrum
non-Gaussianity

- **approach 2**

unknown physicsを分散関係の修正として表現

$$\omega^2 = c_2 k^2 + c_3 k^3 + c_4 k^4 + \cdots$$

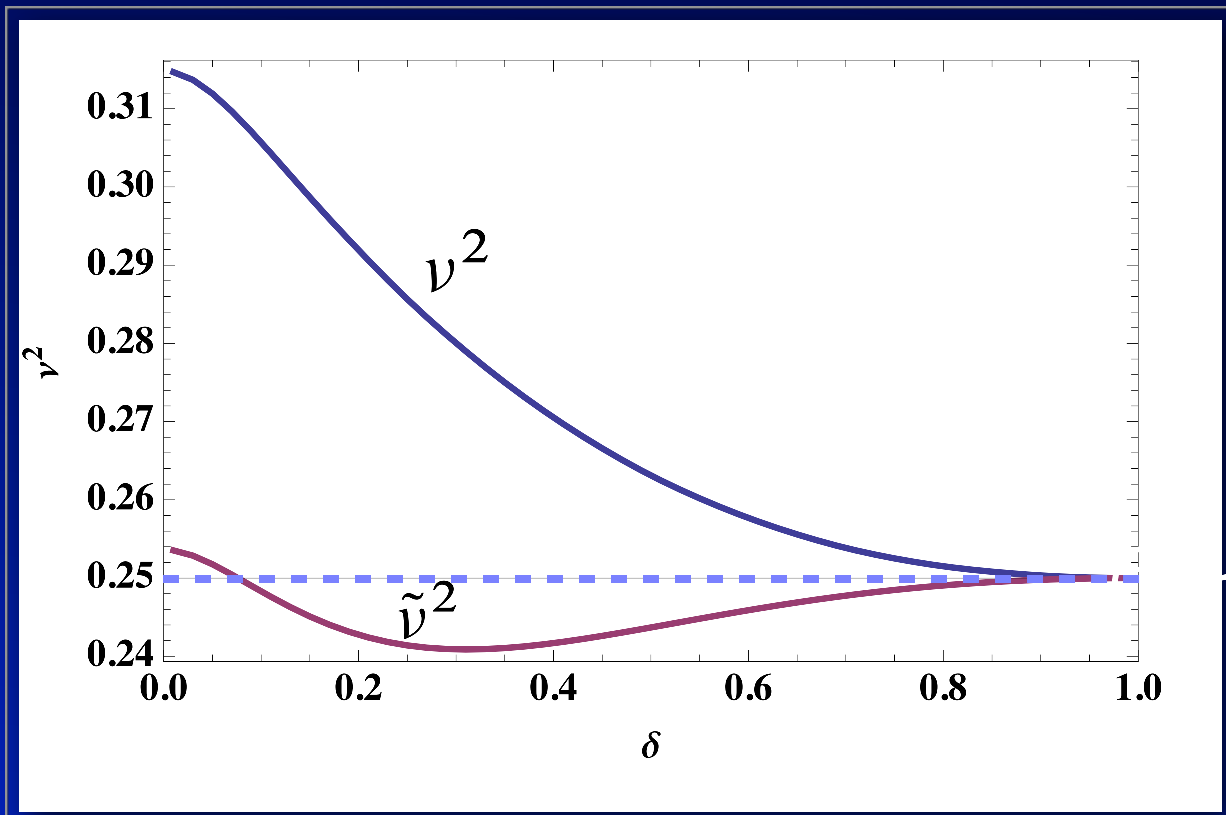
Lorentz不変性の破れ

エンタングルメントの振舞い

$$\omega^2 = k^2 + \beta^2 k^4$$

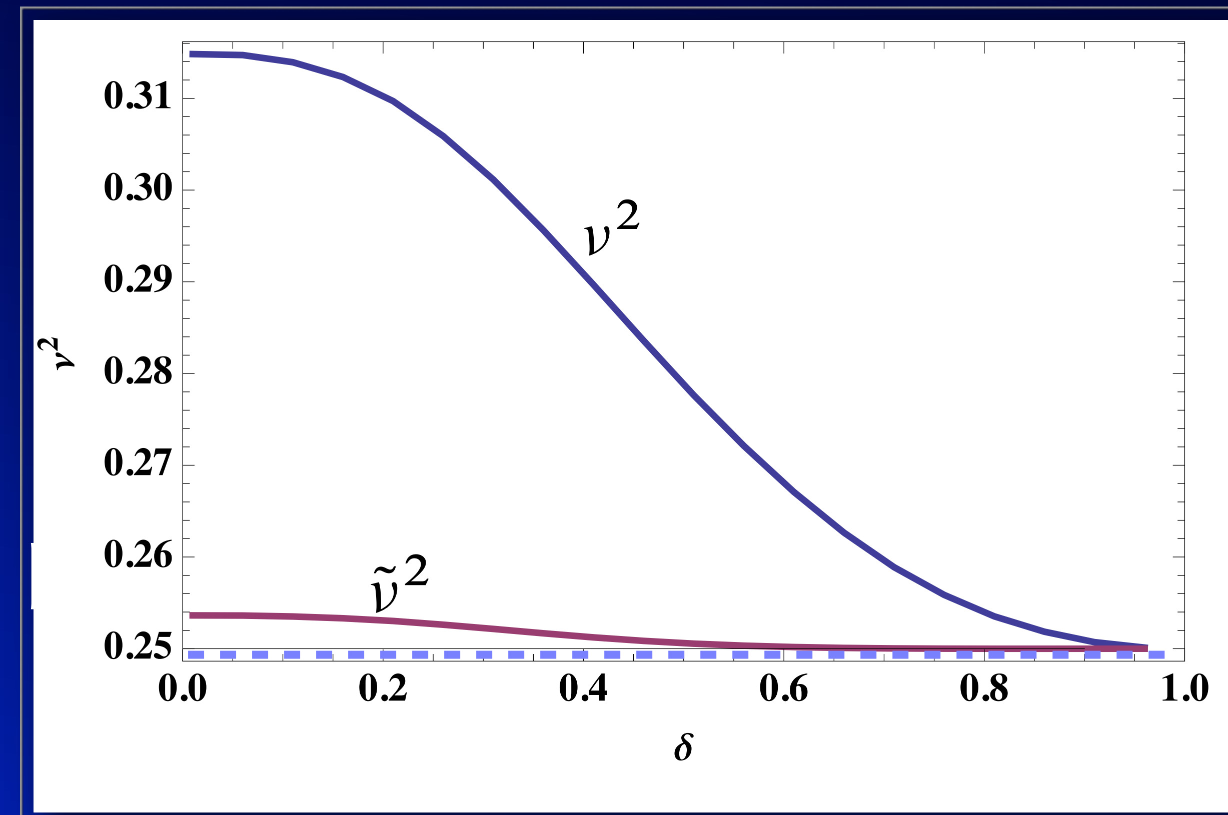
symplectic eigenvalue

$\beta = 0.5$



２点間距離

$\beta = 10$



２点間距離

- 短波長領域ではseparable（エンタングルしてない）
- 最初から古典的？？
- 古典化条件とfreezing条件が一致していない？

エンタングルメントと（sound）horizonの関係？