

# ② ADS / CFT 対称性とインタングラムメント

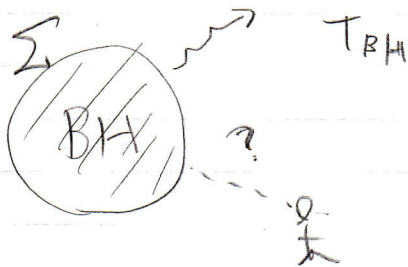
高柳 匡 (京大基礎)

一言で量子力学の幾何学化

① はじめに

キーワード : ホログラフィー原理 (→ ADS/CFT)

重力理論の特徴 → ブラックホールが存在する  
ホーキング放射



ブラックホール熱力学 ( $S_{BH}, T_{BH}, E_{BH}$ )  
 $M_{BH}$

$$S_{BH} = \frac{\text{Area}(\Sigma)}{4G_N}$$

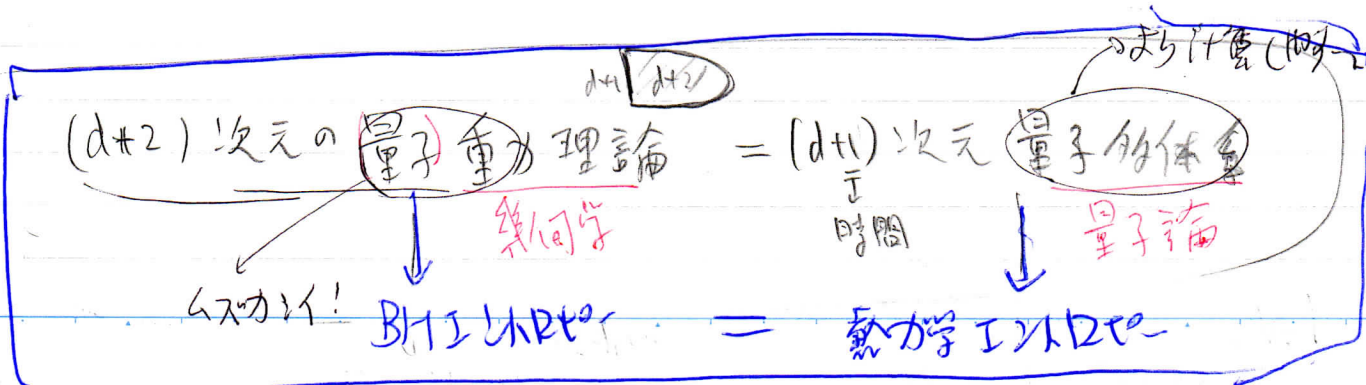
Newton 定数

$$S(\Sigma) \leq \frac{\text{Area}(\Sigma)}{4G_N}$$

インタングラムメント

- 疑問
- ① ブラックホール熱力学と量子力学の熱力学の関係?
  - ② 何故  $\text{Vol}(\Sigma)$  ではなく  $\text{Area}(\Sigma)$  ?

→ これを同時に解決する: ホログラフィー原理



論文-文献 : ADS / CFT  $\Rightarrow$  hep-th/9905111

ホログラフィ・エンタングルメント・エントロピー (2004)

$\Rightarrow$  ArXiv  
1204.24050

ホログラフの厳密な解析.

② トイモデル (C=1 行列量子力学)

[Klebanov  
(hep-th/9108019)]

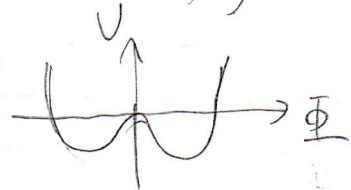
$$S = \frac{1}{2K} \int dt \text{Tr} \left[ \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2 - V(\Phi) \right]$$

[高柳  
物理学雑誌  
2004年 Vol.59, No.11]

$\Phi$ :  $N \times N$  エルミート行列 ( $N \rightarrow \infty$  limit あり)

かつ,  $U(N)$  変換  $\Phi \rightarrow g \Phi g^{-1}$  で不変である  
( $U(N)$  対称性 (2次元))

$$V(\Phi) = -\Phi^2 + g\Phi^4 + \dots$$



対角化.

$$\Phi = g \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \cdot g^{-1}$$

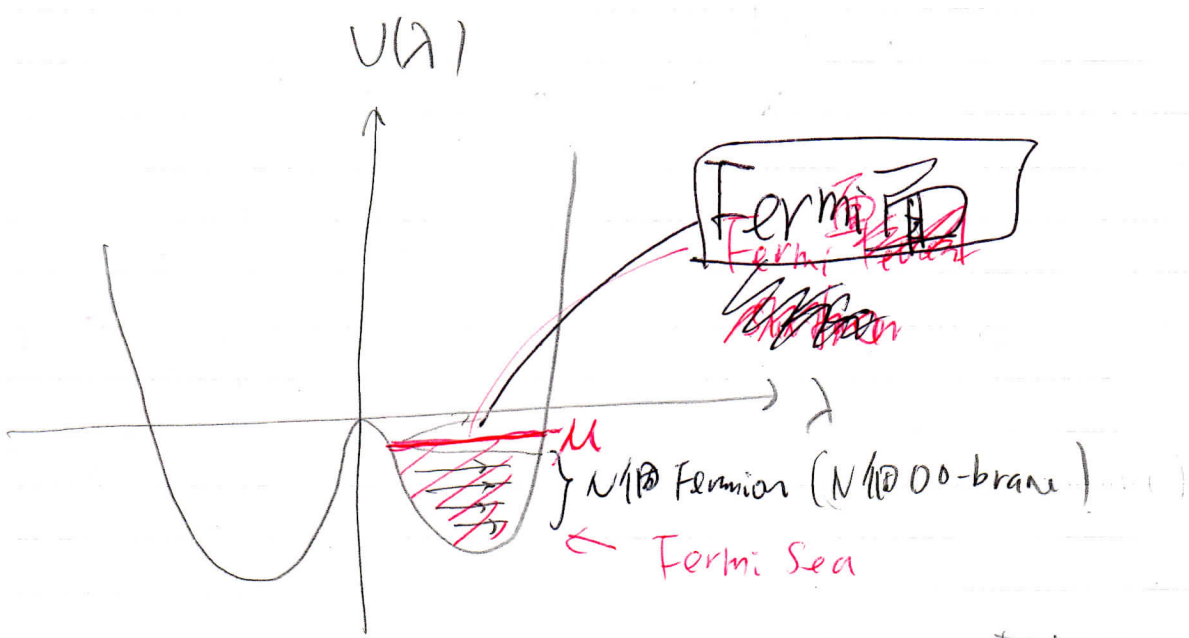
[XIV.]

$$\underbrace{\Psi(\lambda_i, t_0)}_{\text{対称 (Boson)}} = \int_{t=-i\infty}^{t=t_0} \mathcal{D}\Phi e^{\frac{i}{K} S(\Phi)} \equiv \prod_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j) \cdot \underbrace{\Psi(\lambda_i, t_0)}_{\text{反対称 fermion}}$$

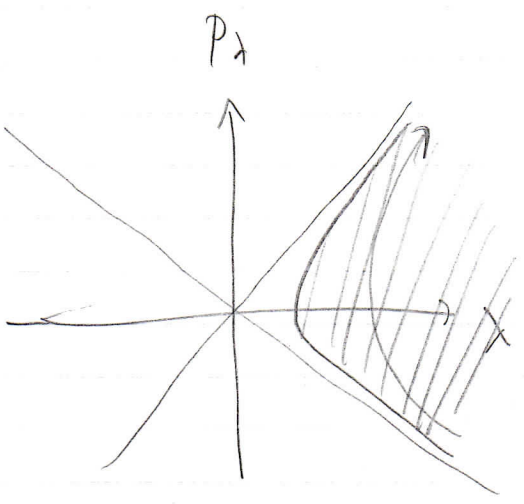
$$d\Phi = \prod_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \cdot d\lambda_1 \dots d\lambda_N \cdot (dg)$$

[Note =  $\prod_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$  ( $\prod_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$  の path-integral と cancel する  
action 自体は変化しない. かつ  $t=t_0$  の任意環境のみ あり.]

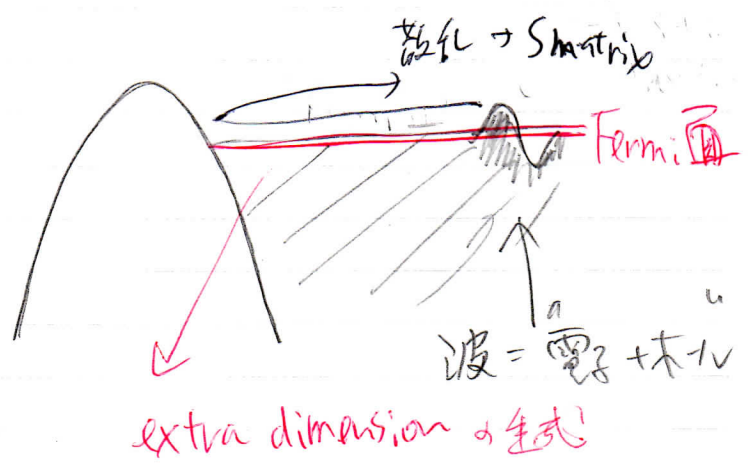
$$\left\{ \begin{aligned} H &= \sum_i \left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} + V(\lambda_i) \right) \rightarrow N \text{個の Free Fermion} \\ H \psi &= E \psi \end{aligned} \right.$$



特に  $g \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$  の極限  
(Double scaling limit)



結論



$C=1$   
(1+1)次元重力理論(弦理論)  $\simeq$   $C=1$  行列量子力学  
(0+1次元)

### ③ AdS/CFT 対称性

$$(x^\mu \in \mathbb{R}^{d+1}) \quad \mu=0 \sim d$$

トイモデルを高次元化する  $\Rightarrow$   $(d+1)$ 次元の  $\mathcal{N}=1$  理論

$$\left( \underbrace{A_\mu(x)}_{\text{N=1超}} , \underbrace{\Phi_a(x)}_{\text{スカラー}} , \underbrace{\psi_a(x)}_{\text{フェルミオン}} \right)$$

すなわち  $N \times N$  インターゲリヤ

このよくなる理論の中で特に、性質の良い「共形場理論」(CFT) を考える。

||  
長距離スケールの理論

例: Maxwell 理論  
(Massless の理論)

$SO(d, 1) \rightarrow$  Lorentz 対称性

$\uparrow$  拡大  
 $SO(d+1, 2) \rightarrow$  共形対称性 (等角写像)

$\cup$   
スケール変換  
 $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$

$\downarrow$  幾何学的に実現したい!

この対称性を持つ空間は何か?  
(2) 時間軸だけ  $d$  ... 大丈夫?)

$\downarrow$   
AdS 空間

# Ads 空間

(d+2) 次元 反 de Sitter 空間 (Ads 空間)

$\mathbb{R}^{2, d+1}$   
 $ds^2 = -(dx_0)^2 - (dx_{d+2})^2 + (dx_1)^2 + \dots + (dx_{d+1})^2$

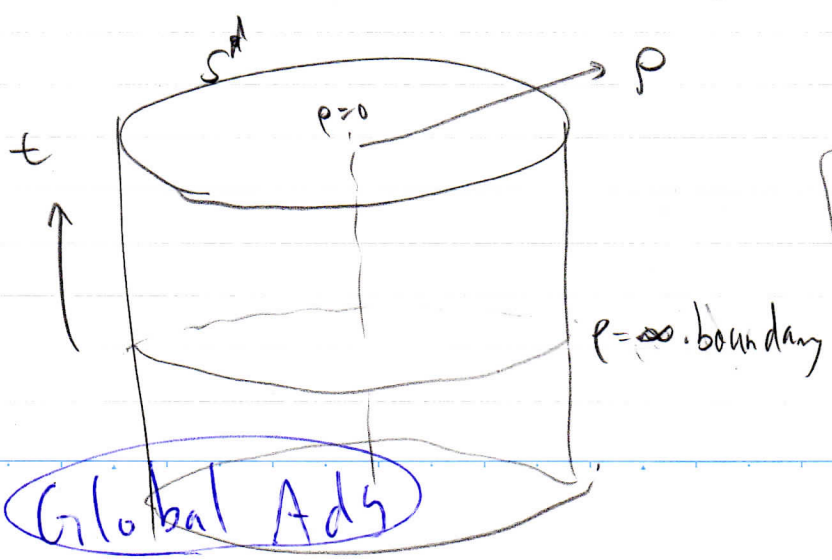
の 超曲面 :  $X_0^2 + X_{d+2}^2 = X_1^2 + \dots + X_{d+1}^2 + R^2$   
) 半径

$\tau$  に 定義される.  $\rightarrow SO(2, d+1)$  の 対称性  
 は 明らか!

$$\left\{ \begin{aligned} X_0 &= R \cosh p \cos \tau \\ X_{d+2} &= R \cosh p \sin \tau \\ X_k &= R \sinh p \Omega_k \end{aligned} \right.$$

( $k=1 \sim d+1$ )

$$ds^2 = R^2 \left( -\cosh^2 p d\tau^2 + dp^2 + \sinh^2 p \underbrace{d\Omega_d^2}_{S^d} \right)$$



$$\partial(\text{AdS}_{d+2}) = \underbrace{R}_{\text{time}} \times S^d$$

↑  
CFT<sub>d+1</sub> が 定義される.

# Ads/CFT 対応 (Maldacena 1997)

$$\text{重力理論 on } \underbrace{\text{Ads}_{d+2}}_{\text{半径 } R} = \text{CFT}_{d+1} \text{ on } \underbrace{\mathcal{X}(\text{Ads}_{d+2})}_{\substack{\text{IR} \times \text{S}^d \text{ (超球面)} \\ \text{or } \text{R}^{d,d} \text{ (平坦空間)}}}$$

物理量の対応

bulk-boundary 対応

$$\underbrace{\sum_{\text{重力}}}_{\substack{\downarrow \\ \text{重力解 (BH etc.)} \\ \text{作用を評価して}}} = \underbrace{\sum_{\text{CFT}}}_{\substack{\downarrow \\ \text{外場 } \lambda \text{ による自由エネルギー}}} \text{ 全角の問題}$$

重力理論の  
量子補正を  
無視して条件

$$\frac{R}{l_{\text{pl}}} = N^{1/4} \gg 1 \quad \text{large } N \text{ limit}$$

$g_{\text{YM}}$ : 結合定数  
 $N$ : 行列サイズ

$$\frac{R}{l_{\text{string}}} = \frac{(g_{\text{YM}}^2 N)^{1/4}}{\alpha'} \gg 1 \quad \text{4次元理論の強結合}$$

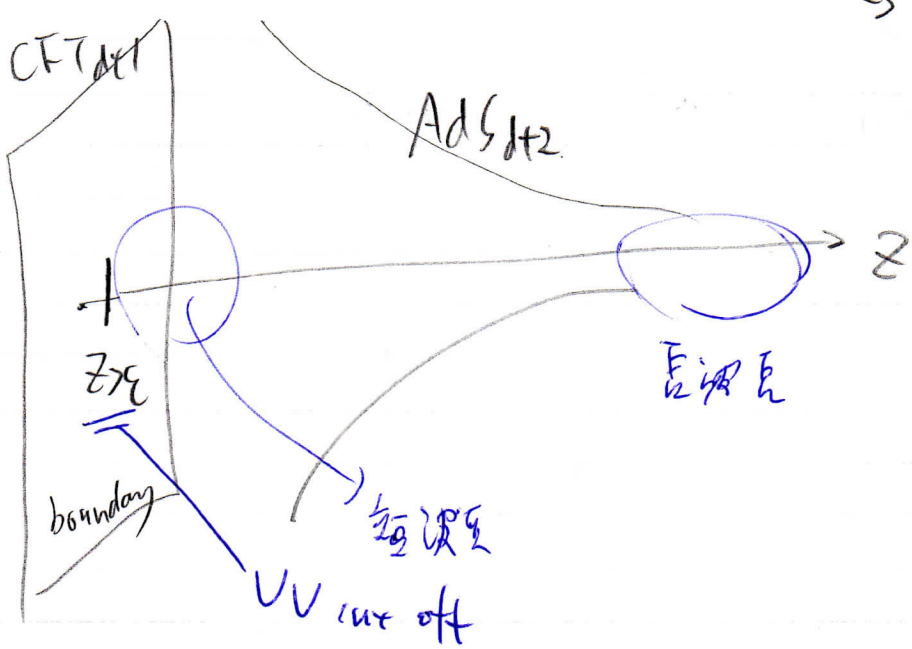
$$\phi \text{ (動場)} \leftrightarrow \text{Tr}(\overline{\Phi}_1 \dots \Phi_n)$$

CFT の演算子

もう一つの便利な座標：ホウワシカレ座標

$$\left\{ \begin{aligned} X_0 &= \frac{z}{2} \left( 1 + \frac{R^2 + \vec{x}^2 - t^2}{z^2} \right), & X_i &= \frac{R x_i}{z} & i &= 1 \sim d. \\ X_{d+1} &= \frac{z}{2} \left( 1 - \frac{R^2 - \vec{x}^2 + t^2}{z^2} \right), & X_{d+2} &= \frac{R t}{z} \end{aligned} \right.$$

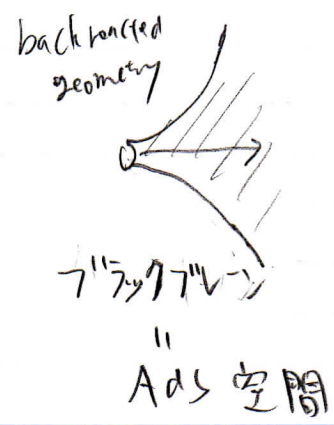
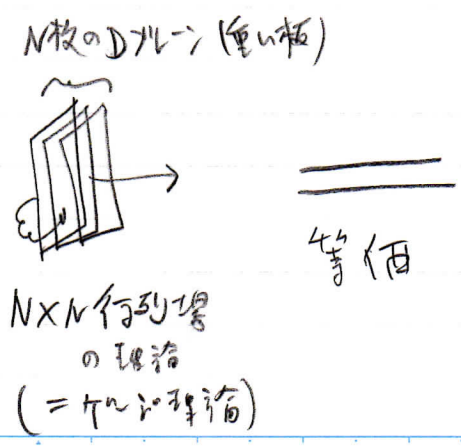
$$\rightarrow ds^2 = R^2 \left( \frac{dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2}{z^2} \right)$$



$(z, \vec{x}, t) \sim (z\lambda, \vec{x}\lambda, t\lambda)$   
 で不変!  
 步  
 z方向の長さのスケール  
 (くり返し)

何故 AdS/CFT が成り立つのか?

→ 正しい物理理論の知識や文脈 (XIL, 直観的たりかたの簡単)



もっと簡単に言うと、  
 振動の時は、重力波を学ぶ  
  
 自由な振動  
 検知できる



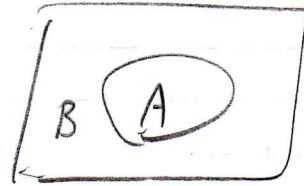
④ ホログラフィックなエンタングルメント・エンタロピー

AdS/CFT : CFTの幾何学化

↓  
EE の幾何学化? ⇒ HEE

$$S_A = -\text{tr} \rho_A \log \rho_A$$

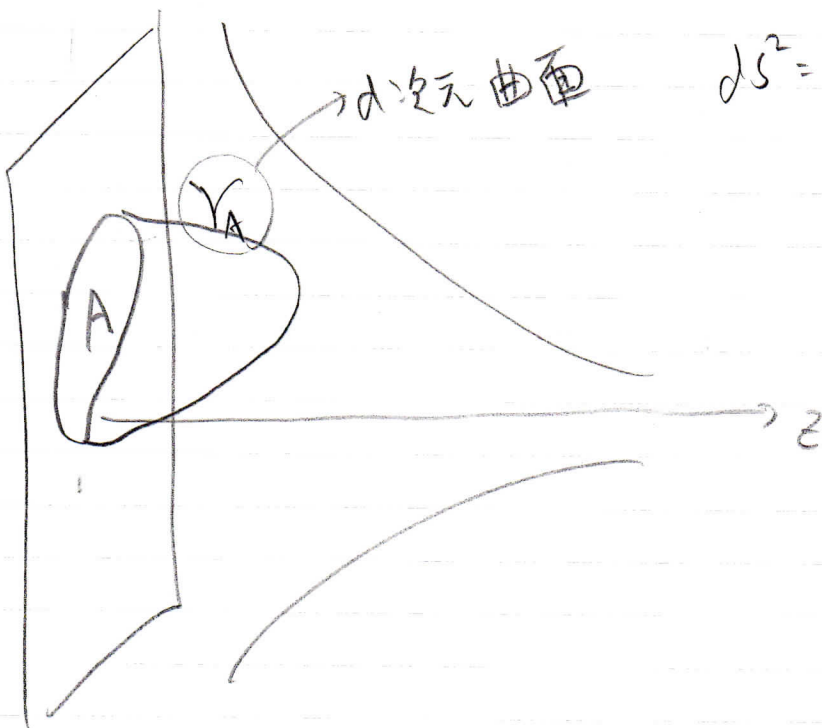
$$(\rho_A = \text{tr}_{\bar{A}} \rho_{\text{tot}})$$



← 時間一定面

$$H = H_A \otimes H_B$$

・ 時間一定面  $t=0$  の時 (静的な背景)



→ d次元曲面

$$ds^2 = R^2 \frac{dz^2 + dx^2}{z^2}$$

HEE :

$$S_A = \frac{\text{Area}(\partial A)}{4G_N}$$

(3結合の large N limit  
のLTの増設と想定)

(笠高柳 2006)

Proved by

Lewkowycz

- Maldacena (2013)

$\gamma_A$ :  $\partial\gamma_A = \partial A$  とする.  $\gamma_A$  の中で面積が最少

とある  $\epsilon$  の

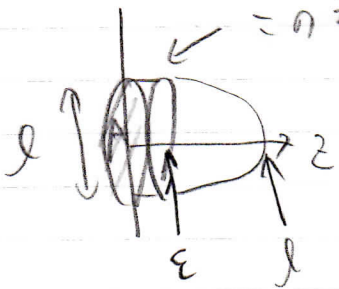
1x-3



基本的性質の検証

(1) 面積則

この部分の寄与が最も大.

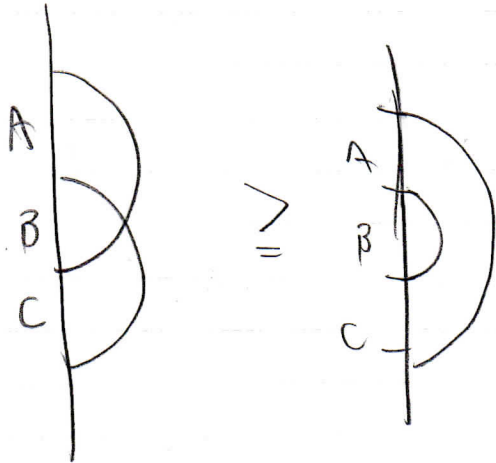


$$S_A = \frac{l}{4G_N} \times \text{Area}(\partial A) \times R^d \times \int_{\epsilon}^{(d)} \frac{dz}{z^d}$$

$$\approx \left( \frac{R^d}{4G_N} \right) \times \frac{\text{Area}(\partial A)}{\epsilon^{d-1}} + \mathcal{O}(\epsilon^{d-3})$$

~ 場の数  
(自由度)  
 $\mathcal{O}(N^2)$

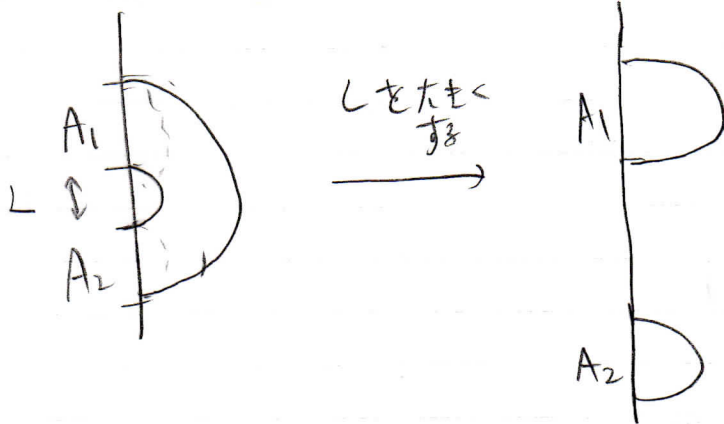
面積則

(2) 強弱加法性

$$\Leftrightarrow S_{A \cup B} + S_{B \cup C} \geq S_{A \cup B \cup C} + S_B$$

(3) A が非連結な場合

$$A = A_1 \cup A_2$$



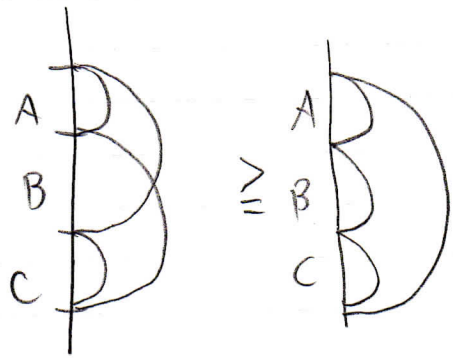
$$I(A_1; A_2) = S_{A_1} + S_{A_2} - S_{A_1 \cup A_2} > 0$$

$$I(A_1; A_2) = 0$$

consistent with  $C \rightarrow \infty$  of CFT<sub>2</sub>

(Hendrick 2000)  
(Hartman 2013)

(4) 毛ノ加ニ - (Hayden-Headrich-Maloney 2011)



$$S_{A \cup B} + S_{B \cup C} + S_{A \cup C} \geq S_A + S_B + S_C + S_{A \cup B \cup C}$$

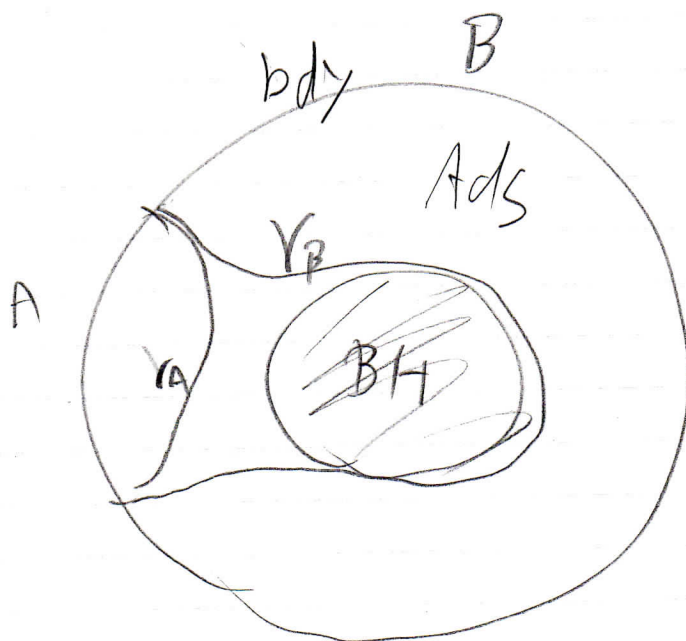
$$\Leftrightarrow I(A:B) + I(A:C) \leq I(A:BC)$$

特別な場合として Cadney-Linden-Winter 不等式  
を言及

(5) Mixed State / Pure State.

$$| \text{Ads}_{dt+2} = \text{CF}_{T_{dt+1}}$$

$$\text{Ads}_{dt+2}^{\text{BH}} = \text{有限温度の } \text{CF}_{T_{dt+1}} \rightarrow S' \times R^d$$



$$V_A \neq V_B$$

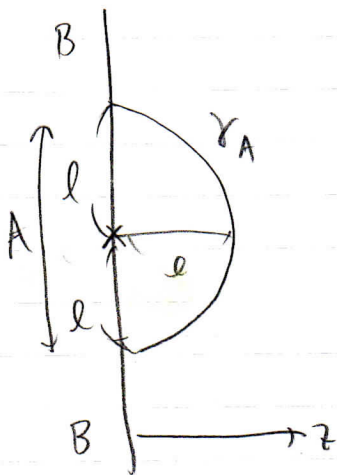
$$\rightarrow S_A \neq S_B$$

for Mixed State.

# HEEの計算

(1)  $AdS_3 / CFT_2$

$$ds^2 = \frac{dz^2 + dx^2}{z^2}$$



$$r_A: x^2 + z^2 = l^2$$

$$x = \sqrt{l^2 - z^2}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dz^2 + dx^2}{z^2} = \frac{dz^2}{z^2} + \left( \frac{z dz}{\sqrt{l^2 - z^2}} \right)^2 \times \frac{1}{z^2} \\ &= \frac{l^2 dz^2}{z^2 (l^2 - z^2)} \end{aligned}$$

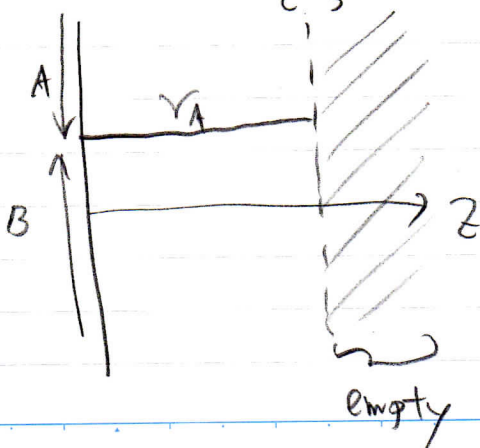
$$L(r_A) = 2R \int_a^0 dz \frac{l}{z \sqrt{l^2 - z^2}} = 2R \log \left( \frac{2l}{\epsilon} \right)$$

$$S_A = \frac{L(r_A)}{4G_N} = \frac{c}{3} \log \left( \frac{2l}{\epsilon} \right) //$$

$$\boxed{\frac{3R}{2G_N} = C}$$

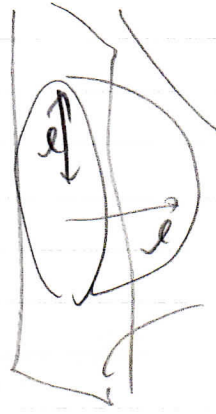
→ CFT 対応!

• Mass gap 粒子は  $z = \xi$



$$S_A = \frac{R}{4G_N} \int_{\epsilon}^{\xi} \frac{dz}{z} = \frac{c}{6} \log \left( \frac{\xi}{\epsilon} \right)$$

(2) AdS<sub>d+2</sub> / CFT<sub>d+1</sub>



$$r_A: x_1^2 + \dots + x_d^2 + z^2 = l^2$$

Area law

$$S_A = a_{d-1} \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-1} + a_{d-3} \left(\frac{l}{\epsilon}\right)^{d-3} + \dots$$

Central charge n  
反常算符結合

$$+ \dots + \begin{cases} C \cdot \log \frac{l}{\epsilon} + a_0 & (d+1 = \text{even}) \\ a_1 \cdot \frac{l}{\epsilon} + F & (d+1 = \text{odd}) \end{cases}$$

F-関数 F-theorem

(mass gapped theory  
→ Stop)

ε ≪ cutoff ε  
↳ 依然 CFT の  
Universal!

End //

