

Critical comparison of Closed Time Path formalism and Thermo Field Dynamics in nonequilibrium situation

2010年8月31日
基研研究会「熱場の量子論とその応用」

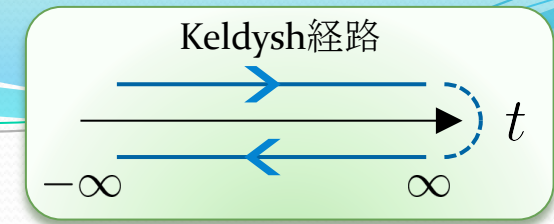
中村祐介, 山中由也

早大 基幹理工 電子光システム

Critical comparison of Closed Time Path formalism and Thermo Field Dynamics in nonequilibrium situation

- 非平衡系に対する 2 つの熱場の量子論
 - Closed Time Path (CTP)
 - Thermo Field Dynamics (TFD)
- どこが同じか？
 - 2×2 行列Green関数によるFeynman図法, etc.
- どこが違うか？
 - 時間依存の非平衡

簡単のためボソン系で。
フェルミオンでも同様です。



Closed Time Path

密度行列の定

- 初期状態 ($t = -\infty$) に特別な形を仮定
- 熱平衡のと同じ構造 (熱平衡な $p = e^{-\beta\omega}$)
- $\hat{p}$ は時間依存しない ($0 \leq p < 1$)

$$\rho = (1 - p) \sum_{m=0}^{\infty} p^m |m\rangle \langle m|$$

規格化定数

粒子数状態 $|m\rangle$ の定義:

$$\text{非摂動ハミルトニアンを対角化する演算子で作る} H_0 = \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell} \quad |m\rangle_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{m!}} (a_{\ell}^{\dagger})^m |0\rangle_{\ell}$$

Heisenberg描像 相互作用描像

$$\begin{aligned} \langle A_H(t) \rangle &= \langle U(-\infty, \infty) U(\infty, t) A(t) U(t, -\infty) \rangle \\ &= \langle S^{-1} T[A(t) S] \rangle \\ &= \langle T_c[A(t) S_c] \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} ds H_{\text{int}}(s) \right) \\ S_c &= T_c \exp \left(-i \int_c ds^c H_{\text{int}}(s^c) \right) \end{aligned}$$

$$\langle A_H(t) \rangle = \langle T_c[S_c A(t)] \rangle \quad + \quad \text{Wickの定理}$$

➡ Feynman図法が使える!

Dyson方程式



Green関数とDyson方程式

時間が**Keldysh経路**上にあるのがポイント

$$G(x_1^c, x_2^c) = -i \langle T_c [\psi_H(x_1^c) \psi_H^\dagger(x_2^c)] \rangle$$

$$G(x_1^c, x_2^c) = \Delta(x_1^c, x_2^c) + \int_c dy_1^3 dy_2^3 dt_1^c dt_2^c \Delta(x_1^c, y_1^c) \Sigma(y_1^c, y_2^c) G(y_2^c, x_2^c)$$



x_1, x_2 が**往路**にあるのか**復路**にあるのかで**場合分け**

これで、時間経路が普通に戻る

しかしその代償として、Green関数が**2×2行列**になる

2×2行列のGreen関数 (**KeldyshのGreen関数**)とDyson方程式

$$G(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} G^c(x_1, x_2) & G^<(x_1, x_2) \\ G^>(x_1, x_2) & G^{\tilde{c}}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \langle T[\psi_H(x_1) \psi_H^\dagger(x_2)] \rangle & -i \langle \psi_H^\dagger(x_2) \psi_H(x_1) \rangle \\ -i \langle \psi_H(x_1) \psi_H^\dagger(x_2) \rangle & -i \langle \tilde{T}[\psi_H(x_1) \psi_H^\dagger(x_2)] \rangle \end{pmatrix}$$

$$G(x_1, x_2) = \Delta(x_1, x_2) + \int dy_1^4 dy_2^4 \Delta(x_1, y_1) \tau_3 \Sigma(y_1, y_2) \tau_3 G(y_2, x_2)$$

量子Boltzmann方程式の導出例

Kadanoff-Baym方程式 (Dyson方程式をより導かれる)

$$(i\partial_{t_1} - h_0(\mathbf{x}_1))G^{\lessgtr}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{t_1} d^4y [\Sigma^>(x_1, y) - \Sigma^<(x_1, y)] G^{\lessgtr}(t, x_2) - \int_{-\infty}^{t_2} d^4y \Sigma^{\lessgtr}(x_1, y) [G^>(t, x_2) - G^<(t, x_2)]$$



Wigner表示して、一次の勾配展開

$$\left\{ \Delta^{-1} - \text{Re}\Sigma^R, iG^{\lessgtr} \right\} - \left\{ i\Sigma^{\lessgtr}, \Delta^{-1} - \text{Re}\Sigma^R \right\} = G^<\Sigma^> - G^>\Sigma^<$$



Full Green関数にスペクトル表示 → 準粒子近似
自己エネルギーを Φ 微分近似で計算



$$n_H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \int d^3\bar{\mathbf{x}} \langle \psi_H^\dagger(\mathbf{x} - \frac{\bar{\mathbf{x}}}{2}, t) \psi_H(\mathbf{x} + \frac{\bar{\mathbf{x}}}{2}, t) \rangle e^{-i\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}} \text{ の時間変化を記述する方程式を得る}$$

Wigner表示の分布関数

量子Boltzmann方程式

Thermo Field Dynamics

トレース公式と Liouville 方程式を出発地点とする

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A] \quad i \frac{d}{dt} \rho_s = [H, \rho_s]$$

Schrödinger 描像の
密度演算子

密度行列の形を CTP の時と同じ形に仮定

$$\rho = (1 - p) \sum_m p^m |m\rangle \langle m|$$

ここで φ は時間依存しないとする



熱的状态条件

$$\begin{aligned} a \rho - p \rho a &= 0 \\ \rho a^\dagger - p a^\dagger \rho &= 0 \end{aligned}$$

ρ には「左から演算子を掛ける」と
「右から演算子を掛ける」
の

2通りの演算がある

演算子に対する演算子

超演算子形式

熱的狀態条件

$$a \rho - p \rho a = 0$$

$$\rho a^\dagger - p a^\dagger \rho = 0$$

ρ に左から A を掛ける超演算子 A を、
 ρ に右から $A^\dagger$ を掛ける超演算子 $\tilde{A}$ を と書

$$\langle \rightarrow |\rho\rangle\rangle = \rho$$

超演算子が作用する超ケット

$$(a - p \tilde{a}^\dagger) |\rho\rangle\rangle = 0$$

$$(\tilde{a} - p a^\dagger) |\rho\rangle\rangle = 0$$

対応する超ブラ $\langle\langle 1|$ はトレース演算

$$\text{トレースの循環性} \\ \text{Tr}[a \bullet] = \text{Tr}[\bullet a]$$

$$\langle\langle 1| = \sum_m \langle m| \bullet |m\rangle$$

$$\langle\langle 1| (a - \tilde{a}^\dagger) = 0$$

$$\langle\langle 1| (a^\dagger - \tilde{a}) = 0$$

$$\text{熱的期待値 : } \text{Tr}[A \rho] = \langle\langle 1| A | \rho \rangle\rangle$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tr}[A \rho] = \langle\langle \rho^{1-\alpha} | A | \rho^\alpha \rangle\rangle \\ \text{とすることもできる} \\ = \alpha \text{ 自由度} \end{array} \right)$$

チルダルール

超演算子 $a, \tilde{a}$ に関する代数 :

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 & [a, \tilde{a}] &= [a, \tilde{a}^\dagger] = 0 \\ (c_1 A + c_2 B)^\sim &= c_1^* \tilde{A} + c_2^* \tilde{B} & |\rho\rangle\rangle^\sim &= |\rho\rangle\rangle \\ (AB)^\sim &= \tilde{A}\tilde{B} & \langle\langle 1|^\sim &= \langle\langle 1| \\ (\tilde{A})^\dagger &= (A^\dagger)^\sim & \hat{H} &= H - \tilde{H} \\ \tilde{\tilde{A}} &= A \end{aligned}$$

例 $[a, \tilde{a}]|R\rangle\rangle = (a\tilde{a} - \tilde{a}a)|R\rangle\rangle = a(Ra^\dagger) - (aR)a^\dagger = 0$ 任意の超ケット $|R\rangle\rangle$

1)

例 Liouville方程式 $i\frac{d}{dt}\rho_s = [H, \rho_s] \quad \longrightarrow \quad i\frac{d}{dt}|\rho_s\rangle\rangle = (H - \tilde{H})|\rho_s\rangle\rangle$

2)

 いわゆる Liouvillian

超演算子の空間から 倍加されたFock空間へ

$$|\rho\rangle\rangle = (1-p) \sum_m p^m |m\rangle \langle m| \rightarrow (1-p) \sum_m p^m |m\rangle \otimes |m\rangle \equiv |0\rangle$$

$$a, a^\dagger \quad \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$$

$$\langle\langle 1| = \sum_m \langle m| \bullet |m\rangle \rightarrow \sum_m \langle m| \otimes \langle m| \equiv \langle 0|$$

熱的真空

熱的期待値

混合状態

$$\text{Tr} A \rho$$

超ブラと超ケット

$$\langle\langle 1| A |\rho\rangle\rangle$$

倍加されたFock空間
の純粋状態

$$\langle 0| A |0\rangle$$

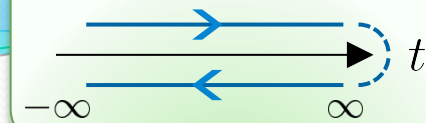
=TFD

TFD : 空間を倍加した純粋状態で、熱的な混合状態を扱う！

TFDとCTPの関係

$$\hat{H}_{\text{int}} = H_{\text{int}} - \tilde{H}_{\text{int}}$$

Keldysh経路



TFDで相互作用描像を定義

$$A(t) = \hat{U}(t, -\infty) A_H(t) \hat{U}(-\infty, t)$$

$$\hat{U}(t, t_0) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t ds \hat{H}_{\text{int}}(s) \right)$$

縮約は？

$$\langle 0 | T[A(t_1) \tilde{B}(t_2) \hat{S}] | 0 \rangle = \langle 0 | T[\tilde{B}(t_2) \tilde{S}] T[A(t_1) S] | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \tilde{T}[B^\dagger(t_2) S] T[A(t_1) S] | 0 \rangle$$

$$= \langle U(-\infty, t_2) B^\dagger(t_2) U(t_2, \infty) U(\infty, t_1) A(t_1) U(t_1, -\infty) \rangle$$

$$= \langle T_c[A(t_1^+) B^\dagger(t_2^-) S_c] \rangle$$

$$\begin{aligned} A &= A[a, a^\dagger] \\ B &= B[a, a^\dagger] \end{aligned}$$

- Keldysh経路が **自然に現れる**

$\tilde{B}$ は復路の $B^\dagger$ に対応！

- TFDとCTPの**Green関数**が**全て同じ**になる

小まとめ

密度演算子

$$\rho = (1-p) \sum_{m=0}^{\infty} p^m |m\rangle\langle m|$$

- 超演算子形式からTFDを“導出”し、更にCTPを“導出”した。
 - 色々なものが自然に出てくる
 - 2×2 のGreen関数
 - TFDの チルダ演算子、チルダルール
 - CTPの Keldysh経路、KeldyshのGreen関数
- TFDとCTPは同じ理論である！
 - ただし $\dot{p} \neq 0$ と仮定した

TFDでは本来は $\dot{p} \neq 0$ とす

る
そして p の時間依存性はあとで自己無撞着に決める

Ex.) Chu-Umezawaの繰り込み条件

H. Chu and H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 1693 (1995).

密度演算子の時間変化

$\dot{p} \neq 0$ とする。密度演算子は平衡系と同じ構造を持つと仮定。
時間変化する粒子数分布、粒子描像を追いかける形式

Heisenberg描像の密度演算子も一般には時間依存

$$\rho(t) = (1 - p(t)) \sum_m p^m(t) |m(t)\rangle \langle m(t)|$$

時間依存

これも時間依存するかも

$|m(t)\rangle$ 由来

$$i \frac{d}{dt} |\rho\rangle\rangle = (\hat{R} - \hat{Q}) |\rho\rangle\rangle$$

$p(t)$ 由来

$|m(t)\rangle$ を決めるために相互作用描像に。
でも相互作用ハミルトニアンを何にする？

$$i \frac{d}{dt} |m(t)\rangle \langle m(t)| = \hat{R}(t) |m(t)\rangle \langle m(t)|$$

$$\hat{Q}(t) = i \dot{n}(t) [a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)] [a(t) - \tilde{a}^\dagger(t)]$$

非摂動の分布関数：

$$n = \langle a^\dagger a \rangle = p / (1 - p)$$

平衡なら Bose-Einstein 分布

相互作用描像の定義

熱的状态条件

$$(a - p\tilde{a}^\dagger)|\rho\rangle\rangle = 0$$

$$\langle\langle 1|(a - \tilde{a}^\dagger) = 0$$

2つの演算子がある a, ξ

それぞれのHeisenberg方程式

$$i\frac{d}{dt}a_H = [a_H, \hat{H}] \quad i\frac{d}{dt}\xi_H = [\xi_H, \hat{H} + \hat{Q}]$$

熱的Bogoliubov変換

$$\begin{pmatrix} \xi_H \\ \tilde{\xi}_H^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_H \\ \tilde{a}_H^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\xi|\rho(t)\rangle\rangle = 0$$

$$\langle\langle 1(t)|\xi^\dagger = 0$$

摂動ハミルトニアンを何にする？ 2つの候補

~~がある~~ $\hat{H}_{\text{int}}$

$$i\frac{d}{dt}a = [a, \hat{H}_0]$$

$$i\frac{d}{dt}|m(t)\rangle\langle m(t)| = 0$$

$$i\frac{d}{dt}|\rho\rangle\rangle = -\hat{Q}|\rho\rangle\rangle \quad \hat{R} = 0$$

$$\langle A(t) \rangle = \langle\langle 1|A(t)|\rho(t)\rangle\rangle$$

$|\rho\rangle\rangle$ は時間依存す

る

$\hat{H}_{\text{int}} + \hat{Q}$

$$i\frac{d}{dt}\xi = [\xi, \hat{H}_0]$$

$$i\frac{d}{dt}|m(t)\rangle\langle m(t)| = \hat{Q}(t)|m(t)\rangle\langle m(t)|$$

$$i\frac{d}{dt}|\rho\rangle\rangle = 0 \quad \hat{R} = \hat{Q}$$

$$\langle A(t) \rangle = \langle\langle 1|A(t)|\rho\rangle\rangle$$

$|\rho\rangle\rangle$ は時間依存しない

非平衡TFDの構造

$$n = \langle a^\dagger a \rangle = p/(1-p)$$

$$n_H = \langle a_H^\dagger a_H \rangle \neq n$$

もともとの演算

$$i \frac{d}{dt} a = [a, \hat{H}_0 - \hat{Q}]$$

熱的真空を消す演算子

$$i \frac{d}{dt} \xi = [\xi, \hat{H}_0]$$

$$\langle A \rangle = \langle 0 | A | 0 \rangle$$

$$\xi | 0 \rangle = \tilde{\xi} | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | \xi^\dagger = \langle 0 | \tilde{\xi}^\dagger = 0$$

熱的Bogoliubov変換

熱的状态条件から来る

非摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_0 - \hat{Q}$$

摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_{\text{int}} + \hat{Q}$$

熱的カウンタ項 (繰り込

$$\hat{Q}(t) = i\hbar(t) [a^\dagger(t) - \tilde{a}(t)] [a(t) - \tilde{a}^\dagger(t)]$$

熱的真空が時間依存しないために必要

非摂動の分布関数の時間依存性に起因

摂動ハミルトニアン $\hat{H} - \tilde{H}$ ではない

の形で

Keldysh経路の形にならない

チルダと非チルダが混ざる

$$[\psi_H(x_1), \tilde{\psi}_H(x_2)] \neq 0$$

$$G^{12} \neq G^<$$

結合定数、励起エネルギー同様ハミルトニアンのパラメータ

TFD

CTP

$\dot{n}$ を決める条件 (繰り込み条件) が必要 Ex.) Chu-Umezawaの繰り込み条件

$\dot{n}$ に対する輸送方程式

$\dot{n}$ さえ決まれば何でも計算できる
例えば $\dot{n}_H$ に対する方程式

密度演算子

$$\rho = (1-p) \sum_{m=0}^{\infty} p^m |m\rangle \langle m|$$

まとめ その1

- トレース公式+Liouville方程式からTFDとCTPを“導出”した
 - 超演算子形式により、両者の関係が明らかに
 - 密度演算子に特別な形を仮定 Wickの定理

$$\dot{p} = 0$$

- の場合
 - TFDとCTPは等価な理論

例えばTFDでもKadanoff-Baym方程式からWigner表示のBoltzmann方程式が導出可能

$$\dot{p} \neq 0 \quad (\dot{n} \neq 0)$$

- の場合
 - 非平衡TFDが自然に導かれる
 - 現時点ではCTPでは定式化されていない形式
 - パラメータ を決める条件（繰り込み条件）が必要

まとめ その2

$$n = \langle a^\dagger a \rangle = p/(1-p)$$
$$n_H = \langle a_H^\dagger a_H \rangle \neq n$$

• CTP

- $\dot{p} = 0$ とする。つまり n は時間依存しない
- Φ 微分近似 + Wigner表示 + 1 次の勾配展開
- n_H に対する量子Boltzmann方程式

• TFD

- $\dot{p} \neq 0$ とする。つまり n は時間依存する
- $\hat{Q}$ に対する繰り込み条件が必要 $\rightarrow n$ に対する輸送方程式 (Boltzmann-like 方程式)

中性原子BEC系への応用
例：

Y.N., T.Sunaga, M.Mineev, M.Okumura, and Y.Y., Ann.Phys.**325**,426(2010).
Y.N. and Y.Y., arXiv:1007.1847 (2010).

• TFDの自由度2重化 (チルドルール)

- 混合状態 $\rightarrow$ 純粋状態 (超演算子)
- 統計力学 環境系自由度を消去する射影演算子法などの
粗視化手続きに合致 (例 Lindblad型方程式)
- 非平衡TFDの計算には粗視化が含まれている

Closed Time Path

混合状態の期待値
 $\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho A]$

粒子数状態 $|m\rangle$ の定義:

非摂動ハミルトニアンを対角化する演算子で作る

$$H_0 = \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell} \quad [a_{\ell}, a_{\ell'}^{\dagger}] = \delta_{\ell\ell'} \quad \longrightarrow \quad a_{\ell} |0\rangle = 0 \quad |m\rangle_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{m!}} (a_{\ell}^{\dagger})^m |0\rangle_{\ell}$$

密度行列の定

特別な形に仮定

- 熱平衡と同じ構造 (熱平衡な $p = e^{-\beta\omega}$)
- 重みは p^m
- p は時間依存しない ($0 \leq p < 1$)

$$\rho = (1 - p) \sum_{m=0}^{\infty} p^m |m\rangle \langle m|$$

規格化定数

熱的状态条件が成立

$$a \rho = p \rho a \quad \rho a^{\dagger} = p a^{\dagger} \rho$$

Wickの定理が成立

Keldysh経路



Heisenberg描像

相互作用描像

$$\begin{aligned}
 \langle A_H(t) \rangle &= \langle U(-\infty, \infty) U(\infty, t) A(t) U(t, -\infty) \rangle \\
 &= \langle S^{-1} T[A(t) S] \rangle \\
 &= \langle T_c[A(t) S_c] \rangle
 \end{aligned}$$

$$U(t, t_0) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t ds H_{\text{int}}(s) \right)$$

$$S = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} ds H_{\text{int}}(s) \right)$$

$$S_c = T_c \exp \left(-i \int_c ds^c H_{\text{int}}(s^c) \right)$$

T_c 積：括弧の中をKeldysh経路の上の順に並べる演算

$$\langle A_H(t) \rangle = \langle T[SA(t)] \rangle$$

+

Wickの定理



Feynman図法が使える！

しかしその代償として時間経路に往路と復路が必要
=Keldysh経路

$$F^R(x_1, x_2) = \theta(t_1 - t_2) [F^>(x_1, x_2) - F^<(x_1, x_2)]$$

$$F^A(x_1, x_2) = -\theta(t_2 - t_1) [F^>(x_1, x_2) - F^<(x_1, x_2)]$$

Kadanoff-Baym方程式

微分形のDyson方程式より

$$(i\partial_{t_1} - h_0(\mathbf{x}_1))G^{\gtrless}(x_1, x_2) = \int d^4y \left[\Sigma^R(x_1, y)G^{\gtrless}(y, x_2) + \Sigma^{\gtrless}(x_1, y)G^A(y, x_2) \right]$$

$$(-i\partial_{t_2} - h_0(\mathbf{x}_2))G^{\gtrless}(x_1, x_2) = \int d^4y \left[G^{\gtrless}(x_1, y)\Sigma^A(y, x_2) + G^R(x_1, y)\Sigma^{\gtrless}(y, x_2) \right]$$



Wigner表示

$$F(\mathbf{p}, \varepsilon; \mathbf{x}, t) = \int d^3\bar{x} d\bar{t} F\left(\mathbf{x} + \frac{\bar{\mathbf{x}}}{2}, t + \frac{\bar{t}}{2}; \mathbf{x} - \frac{\bar{\mathbf{x}}}{2}, t - \frac{\bar{t}}{2}\right) e^{-i[\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \varepsilon \bar{t}]}$$

$$\Delta^{-1} * G^{\gtrless} = \Sigma^R * G^{\gtrless} + \Sigma^{\gtrless} * G^A$$

$$G^{\gtrless} * \Delta^{-1} = \Sigma^A * G^{\gtrless} + G^R * \Sigma^{\gtrless}$$

ここまでは等式変形

Moyal積

$$U(\mathbf{p}, \varepsilon; \mathbf{x}, t) * V(\mathbf{p}, \varepsilon; \mathbf{x}, t) = U(\mathbf{p}, \varepsilon; \mathbf{x}, t) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\partial}_{\mathbf{p}} \cdot \overrightarrow{\partial}_{\mathbf{x}} - \overleftarrow{\partial}_t \overrightarrow{\partial}_{\varepsilon} + \overleftarrow{\partial}_{\varepsilon} \overrightarrow{\partial}_t \right) \right] V(\mathbf{p}, \varepsilon; \mathbf{x}, t)$$

一次の勾配展開

$$U * V \simeq UV + \frac{i}{2}\{U, V\}$$

$$\{U, V\} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}(\Delta^{-1} - \Sigma^R) G^{\geq} + \frac{i}{2} \left\{ \Delta^{-1} - \Sigma^R, G^{\geq} \right\} &= \Sigma^{\geq} G^A + \frac{i}{2} \left\{ \Sigma^{\geq}, G^A \right\} \\(\Delta^{-1} - \Sigma^A) G^{\geq} - \frac{i}{2} \left\{ \Delta^{-1} - \Sigma^A, G^{\geq} \right\} &= \Sigma^{\geq} G^R - \frac{i}{2} \left\{ \Sigma^{\geq}, G^R \right\}\end{aligned}$$

$$\left\{ \Delta^{-1} - \text{Re}\Sigma^R, iG^{\geq} \right\} - \left\{ i\Sigma^{\geq}, \Delta^{-1} - \text{Re}\Sigma^R \right\} = G^{<}\Sigma^{>} - G^{>}\Sigma^{<}$$

例えば準粒子近似

$$n_{\text{H}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \int d^3\bar{x} \langle \psi_{\text{H}}^{\dagger}(\mathbf{x} - \frac{\bar{\mathbf{x}}}{2}, t) \psi_{\text{H}}(\mathbf{x} + \frac{\bar{\mathbf{x}}}{2}, t) \rangle e^{-i\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}} \quad \text{の時間発展を記述する方程式を得る}$$

= 量子 Boltzmann 方程式

$$\hat{H}_{\text{int}} = H_{\text{int}} - \tilde{H}_{\text{int}}$$

TFDでもFeynman図法は使える？

相互作用描像を定義

$$A(t) = \hat{U}(t, -\infty) A_H(t) \hat{U}(-\infty, t)$$

$$\hat{U}(t, t_0) = T \exp \left(-i \int_{t_0}^t ds \hat{H}_{\text{int}}(s) \right)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_H(t) | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{U}(-\infty, t) A(t) \hat{U}(t, -\infty) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{S}^{-1} T[A(t) \hat{S}] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T[A(t) \hat{S}] | 0 \rangle \end{aligned}$$

CTPではKeldysh経路を導入した

$$\hat{S} = \hat{U}(\infty, -\infty)$$



Wickの定理も成立する



TFDでもFeynman図法が使える！

重要だったのは $: \langle 0 | (a - \tilde{a}^\dagger) = 0$

ブラの熱的状态条件

$$\langle 0 | \hat{H}_{\text{int}} = 0$$

$$\langle 0 | \hat{S}^{-1} = \langle 0 |$$

T. S. Evans *et al.*, J. Math. Phys. **33**, 370 (1992).

量子Boltzmann方程式

例えば $H_0 = \int d^3x \psi^\dagger \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V \right) \psi = \sum_{\ell} \omega_{\ell} a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell}$

$$H_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int d^3x \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi$$

$$n_{\text{H}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \int d^3\bar{x} \langle \psi_{\text{H}}^{\dagger}(\mathbf{x} - \frac{\bar{\mathbf{x}}}{2}, t) \psi_{\text{H}}(\mathbf{x} + \frac{\bar{\mathbf{x}}}{2}, t) \rangle e^{-i\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}}}$$

$$n_{\ell}(t) = \langle 0 | a_{\ell}^{\dagger}(t) a_{\ell}(t) | 0 \rangle$$

CTP

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) n_{\text{H}}(\mathbf{p}; \mathbf{x}, t) \quad \left(h_j = \frac{p_j^2}{2m} + V(\mathbf{x}_j) \right)$$

$$= 2g^2(2\pi)^4 \int \left[\prod_{j=1}^3 \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \right] \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}) \delta(h_1 + h_2 - h_3 - h)$$

$$\times \left[n_{\text{H},1} n_{\text{H},2} (1 + n_{\text{H},3}) (1 + n_{\text{H}}) - (1 + n_{\text{H},1}) (1 + n_{\text{H},2}) n_{\text{H},3} n_{\text{H}} \right]$$

TFD

$$\dot{n}_{\ell}(t) = 4g^2 \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} \int_{-\infty}^t dt' \left(|W_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}|^2 \cos[(\omega_{\ell} - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3)(t - s)] \right.$$

$$\left. \times \{ n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_{\ell_3}) (1 + n_{\ell}) - (1 + n_{\ell_1}) (1 + n_{\ell_2}) n_{\ell_3} n_{\ell} \}_{t'} \right)$$

TFDとCTPの関係

TFDのGreen関数

$$G^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -i\langle 0|T[\psi_H(x_1)\psi_H^\dagger(x_2)]|0\rangle & i\langle 0|T[\psi_H(x_1)\tilde{\psi}_H(x_2)]|0\rangle \\ -i\langle 0|T[\tilde{\psi}_H^\dagger(x_1)\psi_H^\dagger(x_2)]|0\rangle & i\langle 0|T[\tilde{\psi}_H^\dagger(x_1)\tilde{\psi}_H(x_2)]|0\rangle \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} -i\langle T[\psi_H(x_1)\psi_H^\dagger(x_2)] \rangle & i\langle \psi_H^\dagger(x_2)\psi_H(x_1) \rangle \\ -i\langle \psi_H(x_1)\psi_H^\dagger(x_2) \rangle & i\langle \tilde{T}[\psi_H(x_1)\psi_H^\dagger(x_2)] \rangle \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

CTPと同じ！

↑
符号だけ違う
(でもどうでもよい)

証明：

ブラの熱的状态条件

$$\langle 0|\tilde{\psi}_H = \langle 0|\psi_H^\dagger$$

&

チルダ-非チルダの交換関係使う

$$[\psi_H(x_1), \tilde{\psi}_H(x_2)] = 0$$

例) $i\langle 0|T[\psi_H(x_1)\tilde{\psi}_H(x_2)]|0\rangle = i\langle 0|\tilde{\psi}_H(x_2)\psi_H(x_1)|0\rangle = i\langle 0|\psi_H^\dagger(x_2)\psi_H(x_1)|0\rangle$