

# Rescaled Perturbation Theory

:くりこみ群様方程式を用いた  
非摂動的固有値問題の解析

早田 智也



基研研究会「熱場の量子論とその応用」

# Motivations/ Idea

□ The physics of

- quantum phase transitions ( quantum spin systems, finite density QCD )

- quantum field theories over broad coupling ( BEC-BCS crossover )

needs the non-perturbative analysis which gives the accurate global coupling dependence of the physical quantities.

□ We consider the Hamiltonian:  $\mathcal{H}(g) = \mathcal{H}_0 + g\mathcal{H}_{\text{int}}$ , and calculate

$E_n(g), |\psi_n(g)\rangle$  s.t.  $\mathcal{H}(g)|\psi_n(g)\rangle = E_n(g)|\psi_n(g)\rangle$ .

□ By infinitesimal scale transformation:  $g \rightarrow g + \delta g$ , we obtain the exact relations:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dg} E_i(g) &= \mathcal{H}_{\text{int}}^{ii}(g), \\ \frac{d}{dg} \mathcal{H}_{\text{int}}^{ij}(g) &= \sum_{k \neq i} \frac{\mathcal{H}_{\text{int}}^{ik}(g) \mathcal{H}_{\text{int}}^{kj}(g)}{E_i(g) - E_k(g)} + \sum_{k \neq j} \frac{\mathcal{H}_{\text{int}}^{ik}(g) \mathcal{H}_{\text{int}}^{kj}(g)}{E_j(g) - E_k(g)}, \\ \frac{d}{dg} |\psi_i(g)\rangle &= \sum_{k \neq i} \frac{\mathcal{H}_{\text{int}}^{ki}(g)}{E_i(g) - E_k(g)} |\psi_k(g)\rangle,\end{aligned}$$

, here  $\mathcal{H}_{\text{int}}^{ij}(g) = \langle \psi_i(g) | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_j(g) \rangle$ .

# Tests

## □ Anharmonic Oscillators:

$$\mathcal{H}_{\text{AHO}}(g) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 + gx^4.$$

- A typical example that RSPT is a divergent series.
- AHO is Borel resumable.

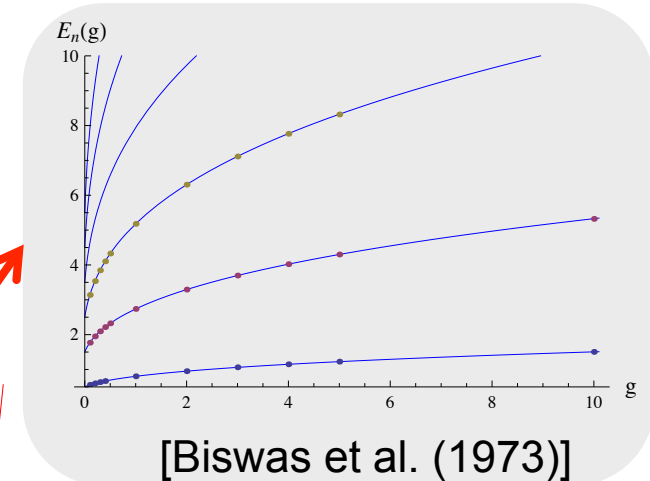
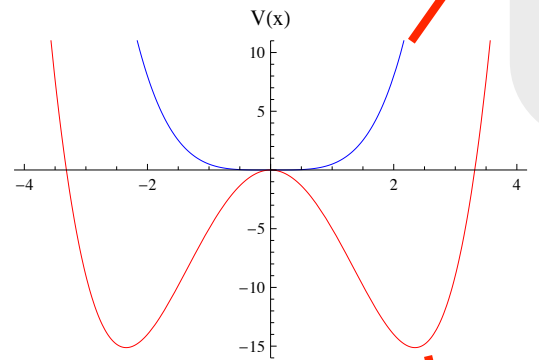
## □ Double Well Potential:

$$\mathcal{H}_{\text{DWP}}(g') = \mathcal{H}_{\text{AHO}}\left(\frac{1}{2}\right) - g'x^2.$$

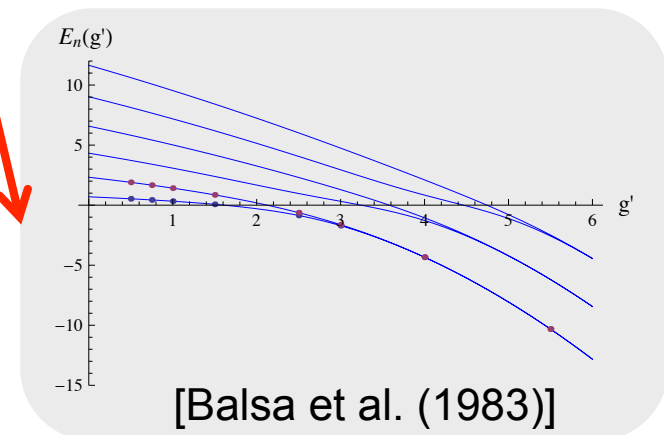
- Also a typical example that RSPT breaks down.
- DWP is not Borel resumable, thus resummation methods will not give sufficient convergences.

**This method can be applied to the both cases beyond the intermediate couplings.**

**Apply to many body problems and QFT (future).**



[Biswas et al. (1973)]



[Balsa et al. (1983)]

# 冷却原子による $1/N$ 展開の検証 — $CP^{N-1}$ モデルについて

名古屋工業大学工学研究科機能工学専攻

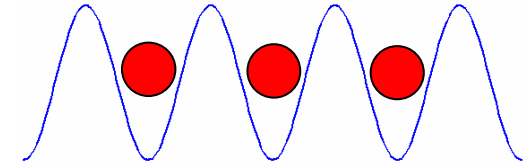
片岡啓介

服部真也

一瀬郁夫



- 光学格子 (Optical lattice)



1. 粒子が内部(スピン)自由度を持つことが可能

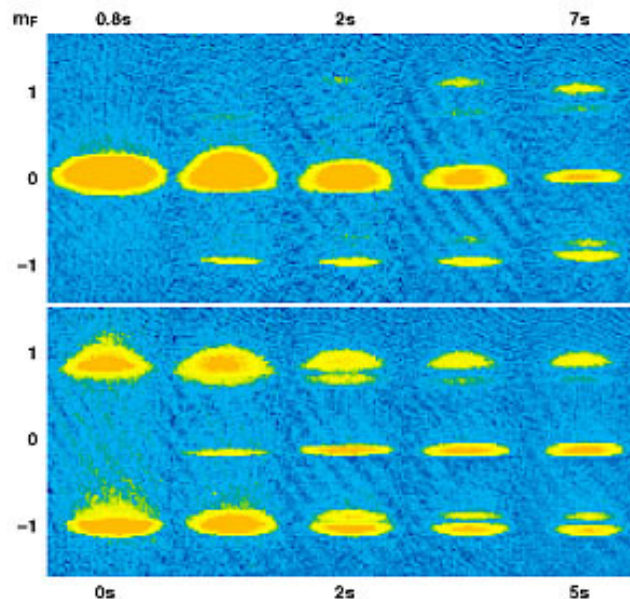
→ スピン自由度を持ったBEC

J.Stenger *et al.*, Nature **396**, 345 (1998)

2. 粒子間の相互作用・格子間隔など調節可能

→ 超流動 – Mott絶縁体転移

M.Greiner *et al.*, Nature **415**,39 (2002)



実験技術の向上により、制御可能な  
high spin強相関係の検証が可能に

スピン自由度を持ったBEC

J.Stenger *et al.*, Nature **396**, 345 (1998)

- 2次元正方格子  $\text{Sp}(4)$  Heisenberg model

$$\mathcal{H} = \sum_{\langle i,j \rangle} J_1 \hat{\Gamma}_i^{ab} \hat{\Gamma}_j^{ab} - J_2 \hat{\Gamma}_i^a \hat{\Gamma}_j^a$$

vector representation of  $\text{Sp}(4)$  group

$$\hat{\Gamma}_a = \hat{\psi}^\dagger \Gamma_a \hat{\psi}$$

spin – 3/2 fermion atom operator

$$\hat{\psi} = (\hat{\psi}_{3/2}, \hat{\psi}_{1/2}, \hat{\psi}_{-1/2}, \hat{\psi}_{-3/2})$$

adjoint representation of  $\text{Sp}(4)$  group

$$\hat{\Gamma}_{ab} = \hat{\psi}^\dagger \Gamma_{ab} \hat{\psi}$$

$\text{SU}(2)$  - Heisenberg model:

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j$$

$S = 1/2$   $\text{SU}(2)$  Heisenberg model よりも高い対称性をもつことにより多彩な相構造をとることができる.

- 有効作用 —  $\text{CP}^{N-1}$  model

$$S = \frac{N}{2g} \{ |\partial_\mu z|^2 - |\bar{z} \partial_\mu z|^2 - \gamma |z \mathcal{J} \partial_\mu z|^2 + \sigma(|z|^2 - 1) \}$$

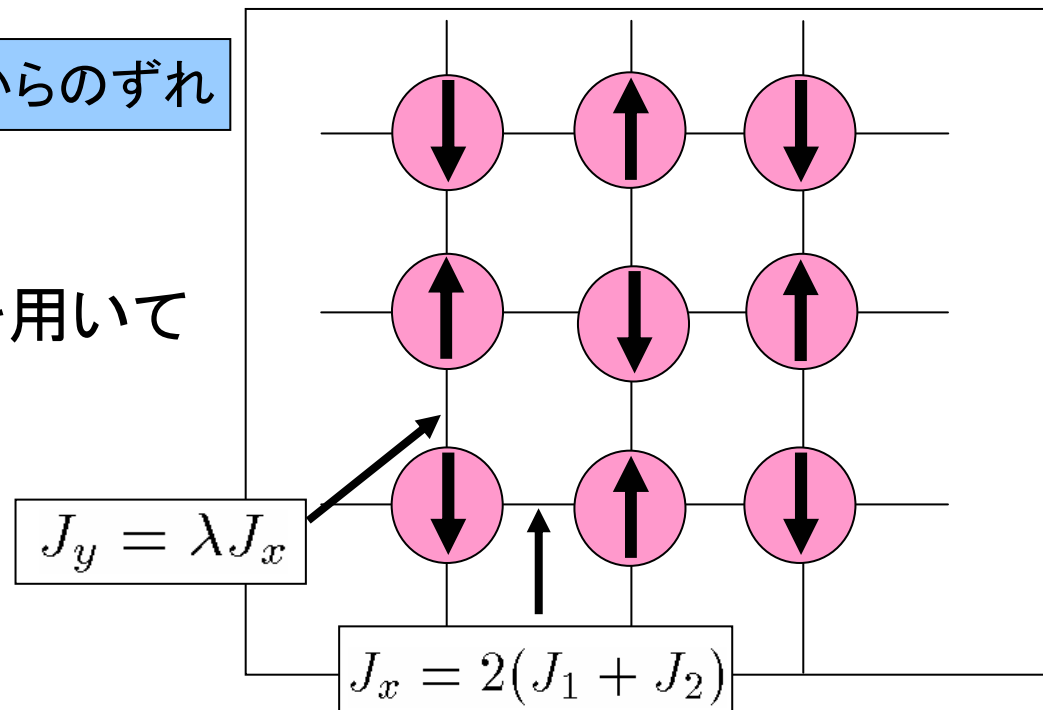
$$\psi \rightarrow z$$

$$g = \frac{1+\lambda}{\sqrt{2\lambda}} \rightarrow \text{系の異方性に依存}$$

fermion atom operator  $\text{CP}^3$  variable

$$\gamma = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2} \rightarrow \text{SU(4)対称性からのずれ}$$

$\text{CP}^{N-1}$  model を  $1/N$  展開法を用いて  
系の相構造を調べる.



- 相図

連続理論  $CP^{N-1}$  model

$$S = \frac{N}{2g} \{ |\partial_\mu z|^2 - |\bar{z} \partial_\mu z|^2 - \gamma |z \mathcal{J} \partial_\mu z|^2 + \sigma (|z|^2 - 1) \}$$

1/N展開法  $N \rightarrow \infty$  2次転移

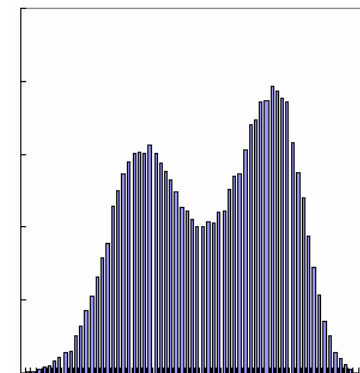
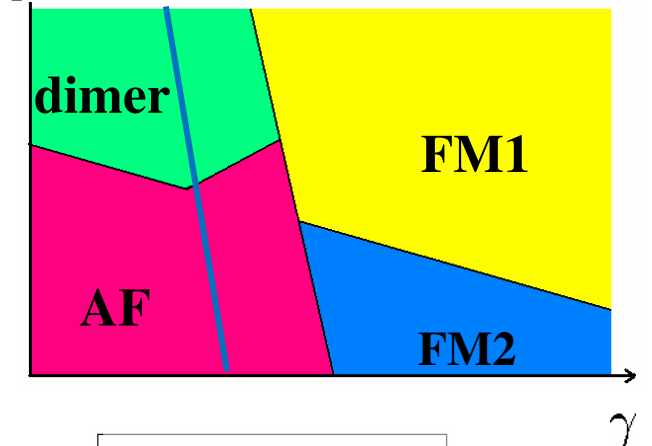
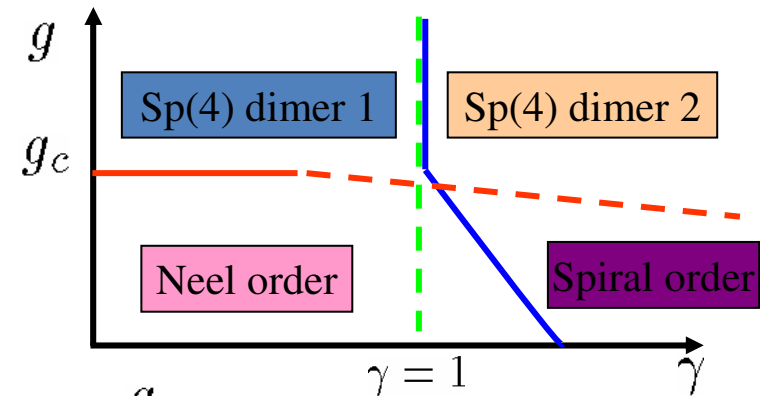
V.S

格子理論  $CP^3$  model モンテカルロシミュレーション

$$S = c_1 \sum_{x,\mu} z_{x+\mu} U_{x,\mu} z_x + c_2 \sum_{x,\mu,\nu} U_{x,x+\mu} U_{x+\mu,\nu} U_{x+\nu,\mu} U_{x,\nu} + (c.c) + c_3 \sum_{x,\mu} |z_x \mathcal{J} z_{x-\mu}|^2$$

$CP^3$  model  $N=4$  1次転移

実験による検証 → 1/N展開法は正しいか？  
インスタントン効果？



# 超流動Fermi原子気体の1粒子 状態とphotoemissionスペクトル

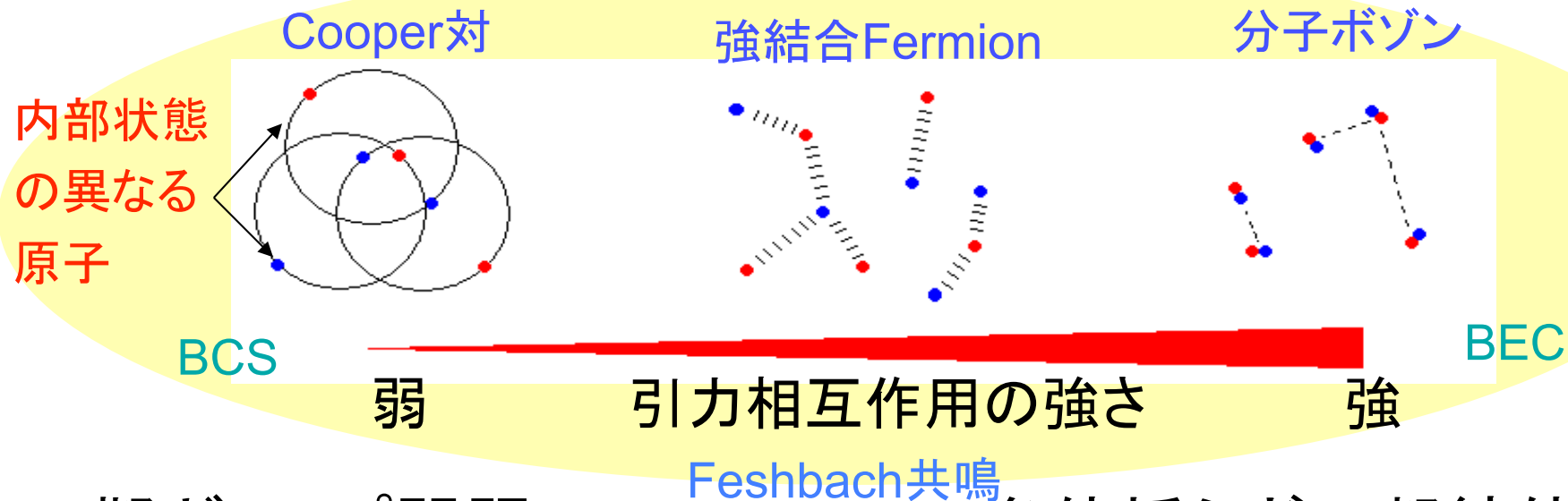
慶大理工 (DC1)

渡邊亮太

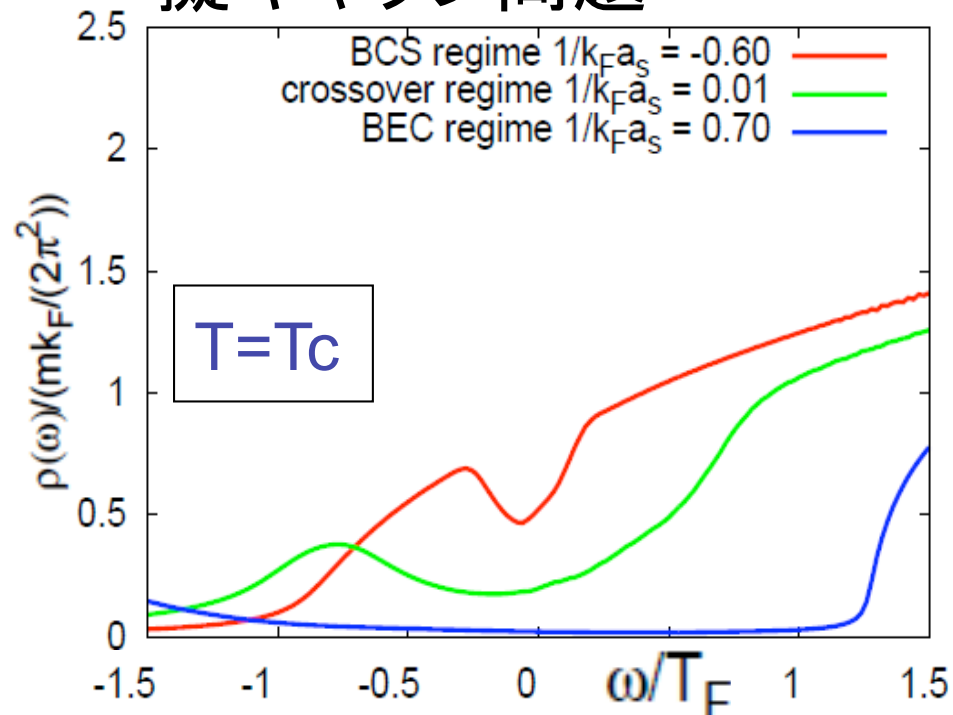
慶大理工<sup>1</sup> 東理大理<sup>2</sup> JST(CREST)

土屋俊二<sup>1,2</sup> 大橋洋士<sup>1</sup>

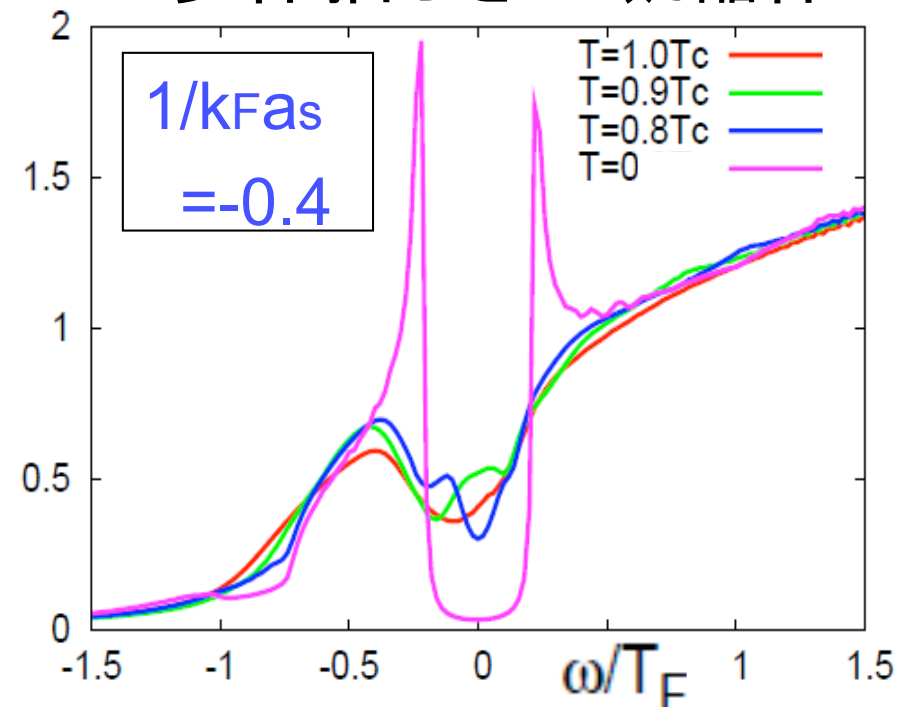
# 引力Fermion系のBCS-BECクロスオーバーと擬ギャップ



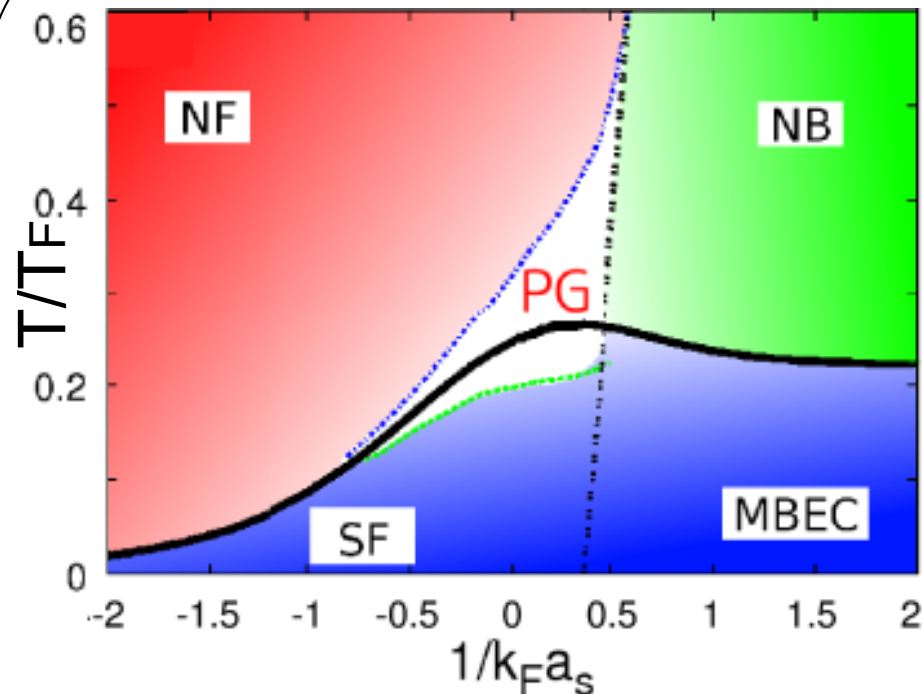
## 擬ギャップ問題



## 多体揺らぎvs凝縮体



# Fermi原子気体の相図



1体的  $\longrightarrow$  多体的  $\longleftarrow$  2体的

**PG : 擬ギャップ領域**

NF(B) :

常流動Fermi(Bose)気体

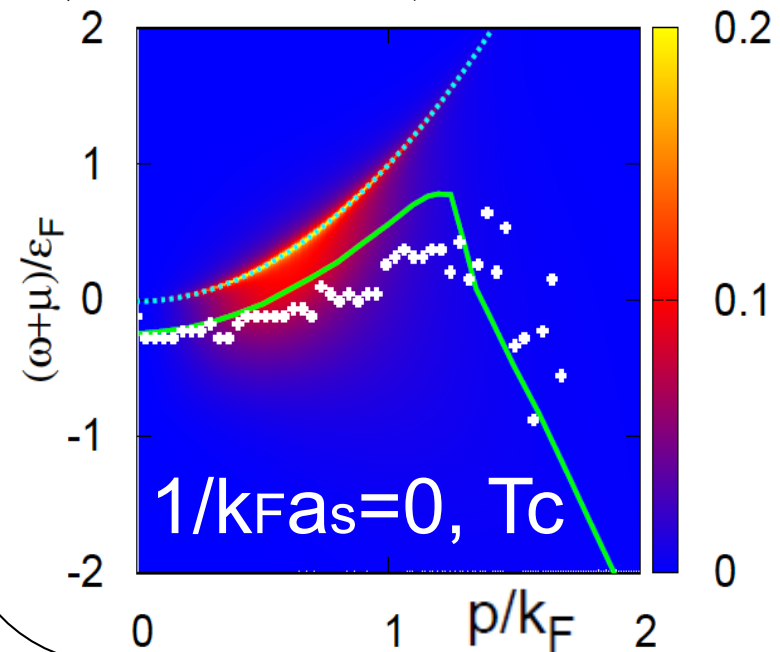
SF: 超流動Femi気体

MBEC : 凝縮分子Bose気体

# 擬ギャップの観測( $T_c$ )

トラップされた冷却原子気体の  
photoemissionスペクトル

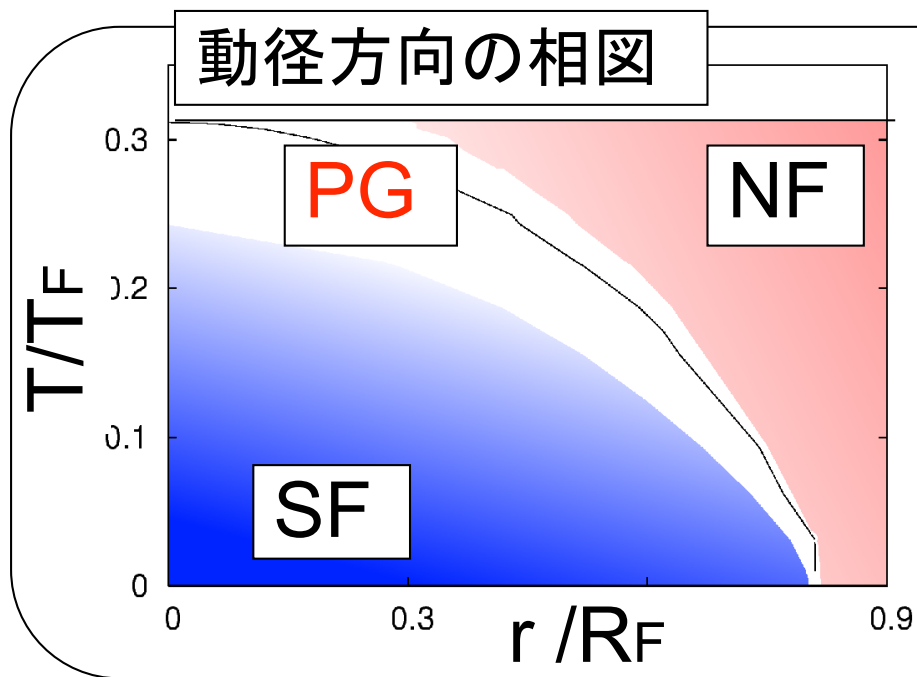
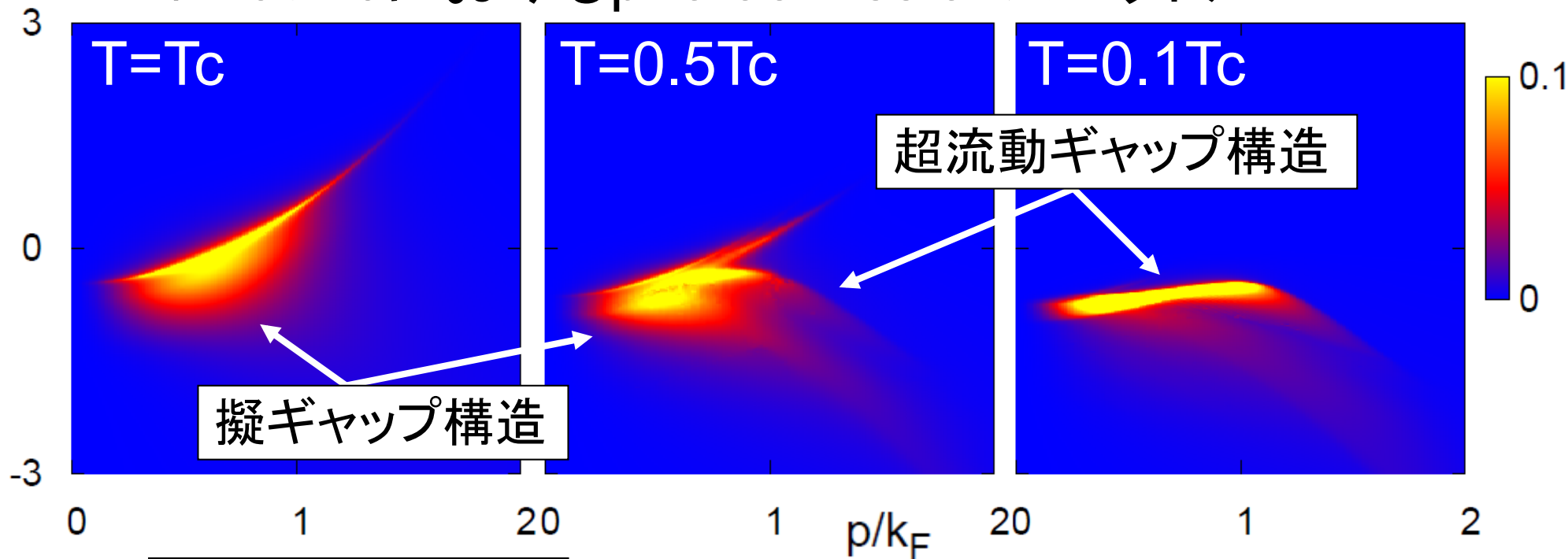
- ・局所密度近似で評価  
 $\Rightarrow$  定量的な一致



# 超流動気体のPES

- ・PG  $\longleftrightarrow$  SF-gapの競合は?
- ・非一様性の影響は?

# $1/k_F a_s = 0$ におけるphotoemissionスペクトル



**非一様空間  
⇒ 非一様な揺らぎ**

**PG : 擬ギャップ領域**

**NF : 常流動Fermi気体的**

**SF : 超流動Fermi気体的**



## まとめ

- Nozieres と Schmitt-Rink の理論を基にしたT-行列理論を用いて、冷却Fermi原子系のBCS-BECクロスオーバーにおける超流動性と強い揺らぎの関係を議論した。
- 多体効果に由来する擬ギャップ現象が、温度および空間の非一様性の影響を強く受けることを示した。
- 擬ギャップ領域を念頭に、超流動Fermi原子気体の相図を提案した。

PRA **80**, 033613 (2009), arXiv : 1002.3016, 1007.3840

## 今後の展望

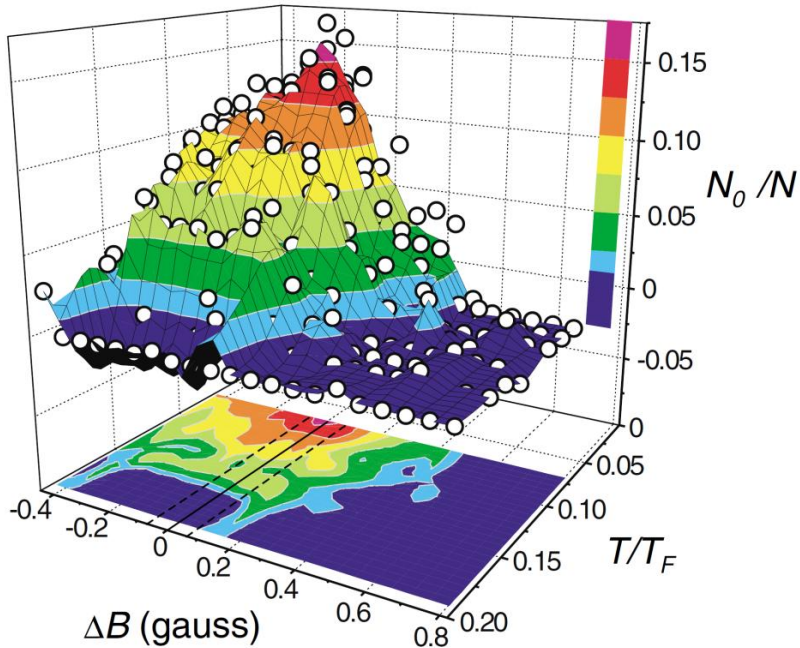
- 圧力勾配等の熱力学量と揺らぎ、擬ギャップ現象の関係性について議論する。  
⇒強く相互作用するFermi気体の理解へ

# フェルミ原子ガス超流動における 超流動／強磁性／超流動接合と $\pi$ -phaseの実現可能性

慶大理工<sup>1</sup>，東理大理<sup>2</sup>，JST (CREST)<sup>3</sup>

柏村 孝<sup>1</sup>，土屋 俊二<sup>2,3</sup>，大橋洋士<sup>1,3</sup>

# *Fermi Gas as “Quantum Simulator”*



C. A. Regal *et al.*, PRL **92**, 040403 (2004)

## **New Fermi superfluid**

- Background physics similar to superconductivity
- Controllability of physical parameters

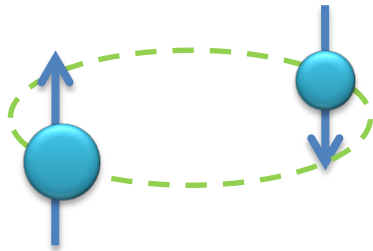
## *“Quantum Simulator” for metallic superconductivity*

- BCS–BEC crossover
- spin–polarized system

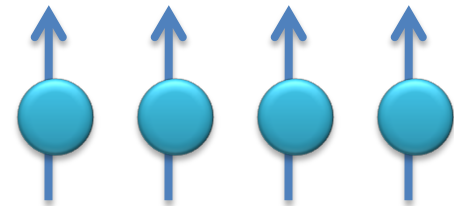
*Current stage of superfluid Fermi gas can't cover all the important topics in superconductivity*

# *Magnetic Effects on Superfluid*

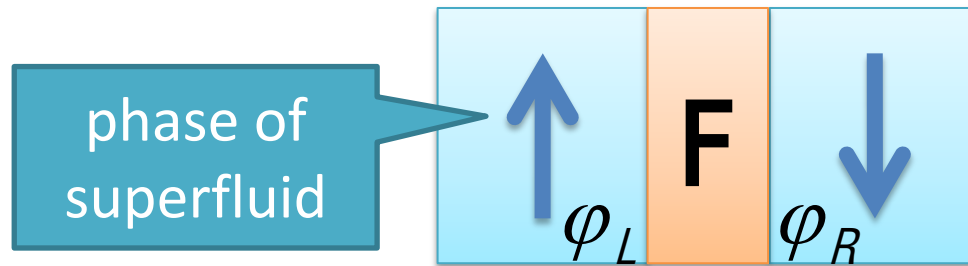
s-wave superfluidity



ferromagnetism



superconductor/ferromagnet/superconductor-junction



*$\pi$ -phase*

*In Fermi gas, magnetic effects have not been studied because there is no “magnetic object”*

# Method to Study Magnetic Effects

We use

spin-polarized Fermi gas

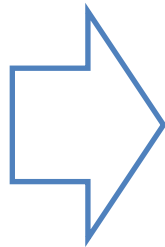
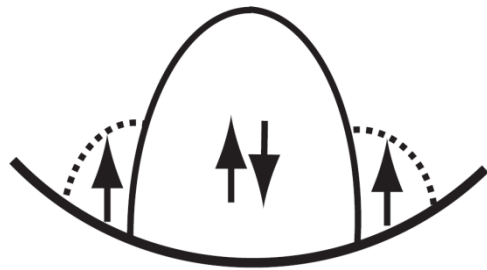
Phase separation to

Superfluid phase

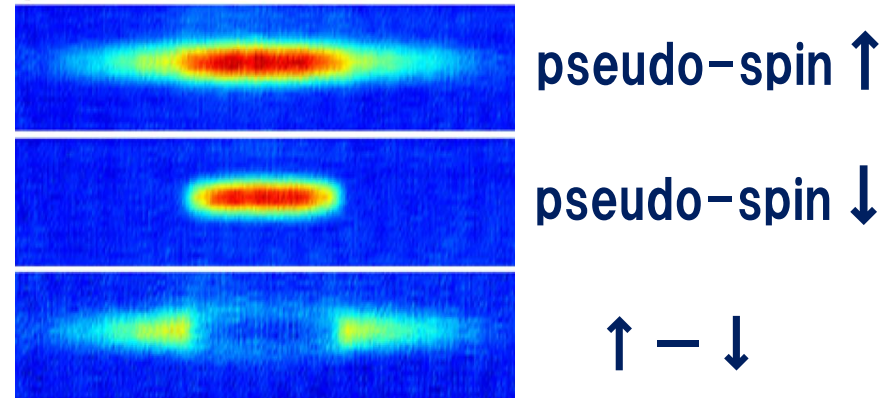
Normal phase

consisting of excess atoms

•harmonic trap

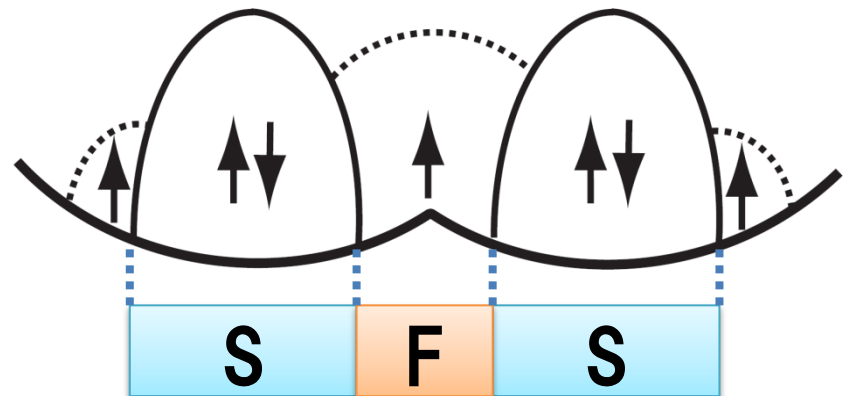


Particle distribution of trapped spin-polarized Fermi gas ( $^6\text{Li}$ )



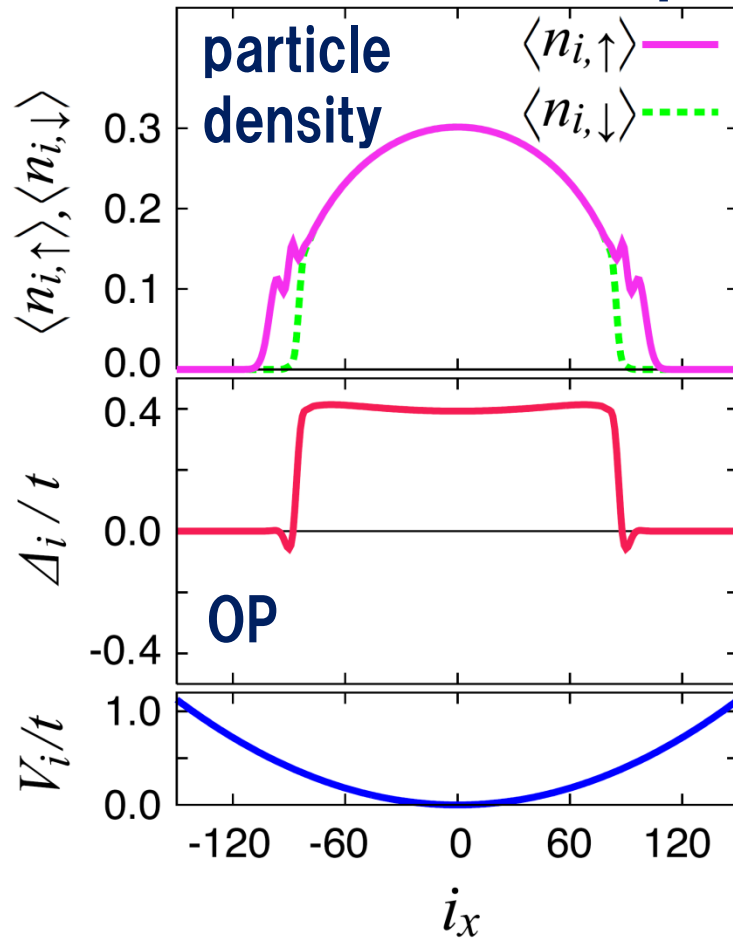
G. Partridge et al., PRL 97, 190407 (2006)

•double-well potential

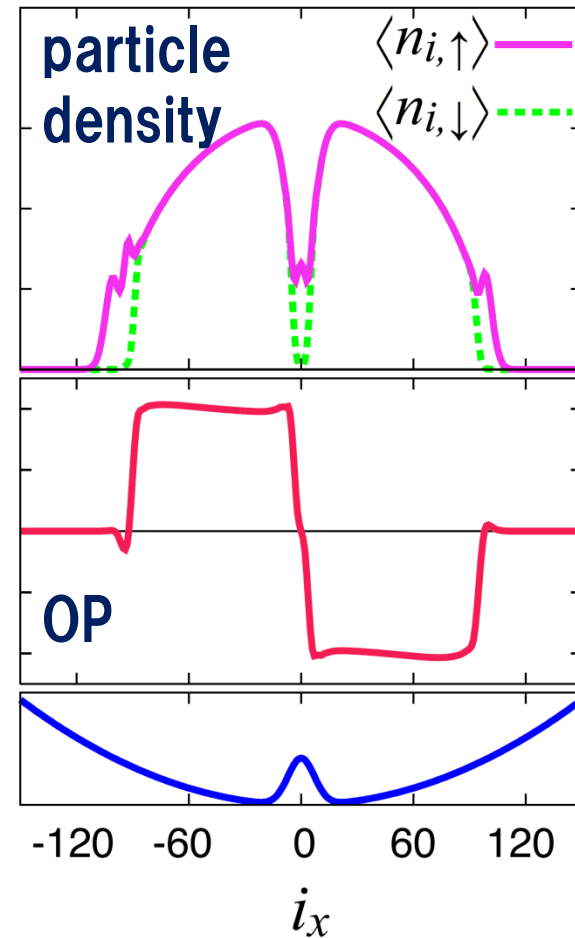


# ***SFS-junction and $\pi$ -phase***

•harmonic trap



•double-well potential



***SFS-junction and  $\pi$ -phase can be realized in a double-well potential !!***

## 双極フェルミ分子を含む極低温原子気体の相構造

立命大理工 松田裕一 藪博之  
お茶大アカデミック 西村拓史

## 背景

極低温原子ガス系の実験

高い操作性

不純物ゼロ

混合系

## +異方的相互作用

系に一層の多様性を与え、  
構造を与える可能性がある

## 分析観点

## 量子統計

## 化学平衡

熱力学的な観点

一般的な議論で多様な系を  
広くとらえることができる

容易に変えられるパラメータ

$$B, F, \tilde{m}_2, \Delta E, \delta N, \alpha, \gamma$$

## 先行研究

分子形成の準化学平衡

T.Nishimura A.Matsumoto and H.Yabu, PRA(2008)

双極フェルミ原子間相互作用

T.Miyakawa, T.Sogo and H.Pu,(2008)

T.Sogo, L.He, T.Miyakawa, S.Yi, H.Lu, and H.Pu,  
New J. Phys., 11055017(2009)

極低温化学

S.Ospelkaus, et al(JILA), arxiv:0802.1093,  
Nature Physics 4, 622, Science 322, 231 (2008)

S.Ospelkaus, et al.(JILA), Science (327)853(2010)

## 試み

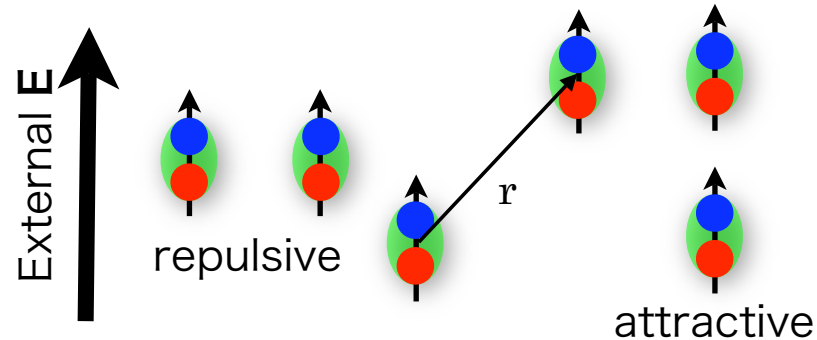
化学平衡を**双極子間相互作用**をもつ系  
に適応してみよう！

今回はBF系



# 双極子分子

Only fermi molecule has a dipole moment and all dipolar molecule is polarized.



z-axis: polarized direction

r: relative distance

Dipole-dipole interaction

$$U(\mathbf{r}) = d^2(1 - 3 \cos^2 \theta)/r^3$$

## Long-range Force

In the neutral atomic gases, the effective interaction is s-wave scattering( short-range force).

## Dipolar molecule in experiments(PA)

Large electric dipole moment

0.566 Debye (Singlet)

0.052 Debye (Triplet)  $a \sim 10^{-6}[m]$

$T \sim 350[nK]$

S.Ospelkaus, et al(Jin group), arxiv:0802.1093,  
Nature Physics 4, 622, Science 322, 231 (2008)

## Theoretical approach for dipolar fermi gases

$$\epsilon_3 = \frac{\hbar^2}{m_3} C_1 n_3^{5/3} \left( \frac{2\alpha_0}{3} + \frac{1}{3\alpha_0^2} - \frac{\pi}{3C_1} C_{dd} I(\alpha_0) \right)$$

T.Sogo, L.He, T.Miyakawa, S.Yi, H.Lu, and H.Pu,  
New J. Phys., **11**055017(2009)

フェルミ面の歪み効果

(歪みを変分法で求める)

$$\left. \frac{d\epsilon_3}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$

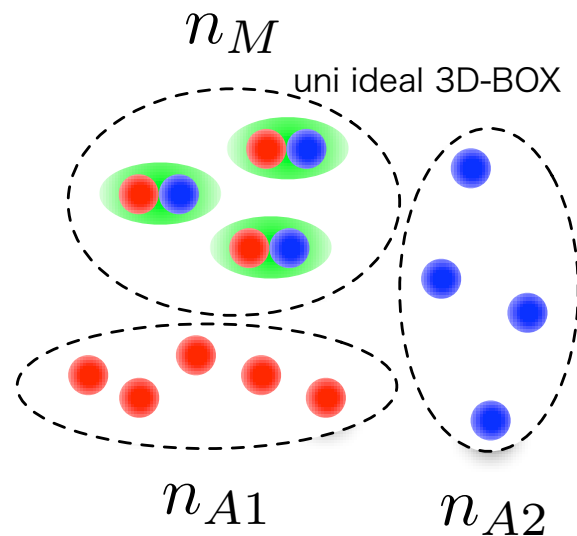
# 混合気体の相図 (T=0)

今回は原子(A1,A2)を  
FermionとBosonに選ぶ  
→分子はFermion

分子がDipolar fermion

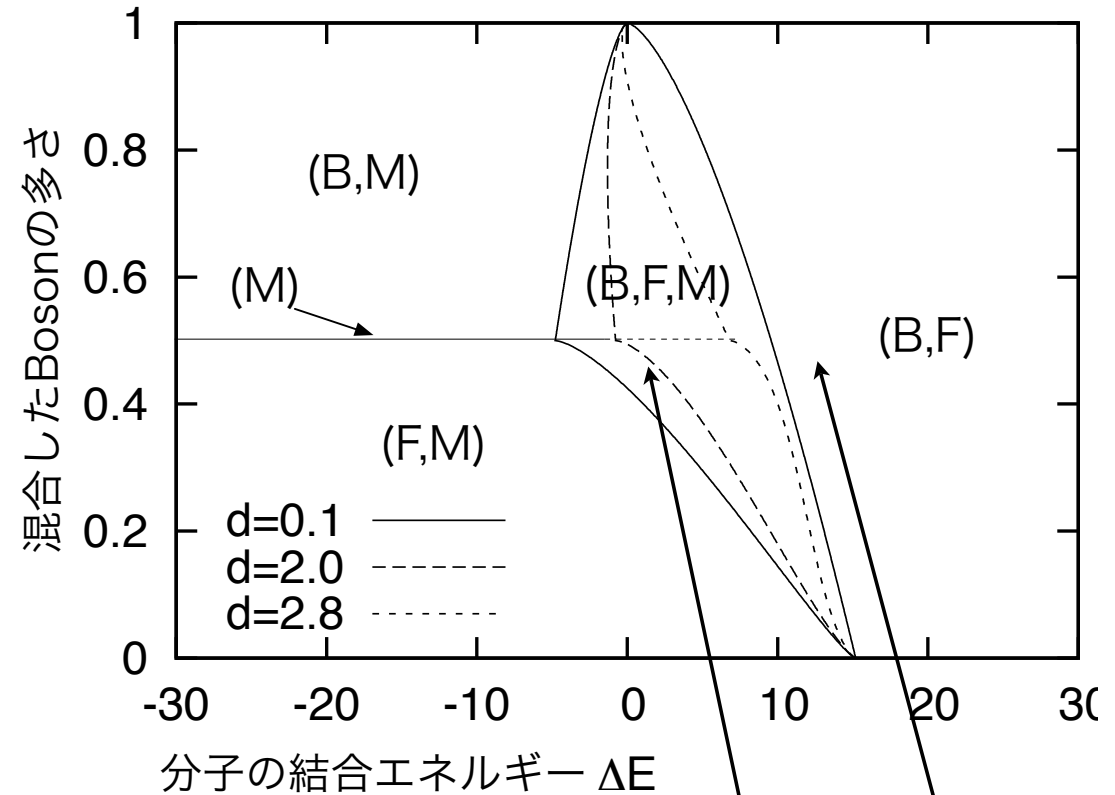
分子間に双極子間相互作用が働く

分子以外は自由気体



双極分子の形成過程を含んだ化学平衡条件

$$\frac{5C_1}{3m_2}n_2^{2/3} - \frac{5C_1}{3m_3}n_3^{2/3} \left( \frac{2\alpha_0}{3} + \frac{1}{3\alpha_0^2} - \frac{2}{5} \frac{\pi}{C_1} C_{dd} I(\alpha_0) \right) = \Delta E$$



prolate

spherical

Fermi surface  
deformation

## 不安定性(T=0)

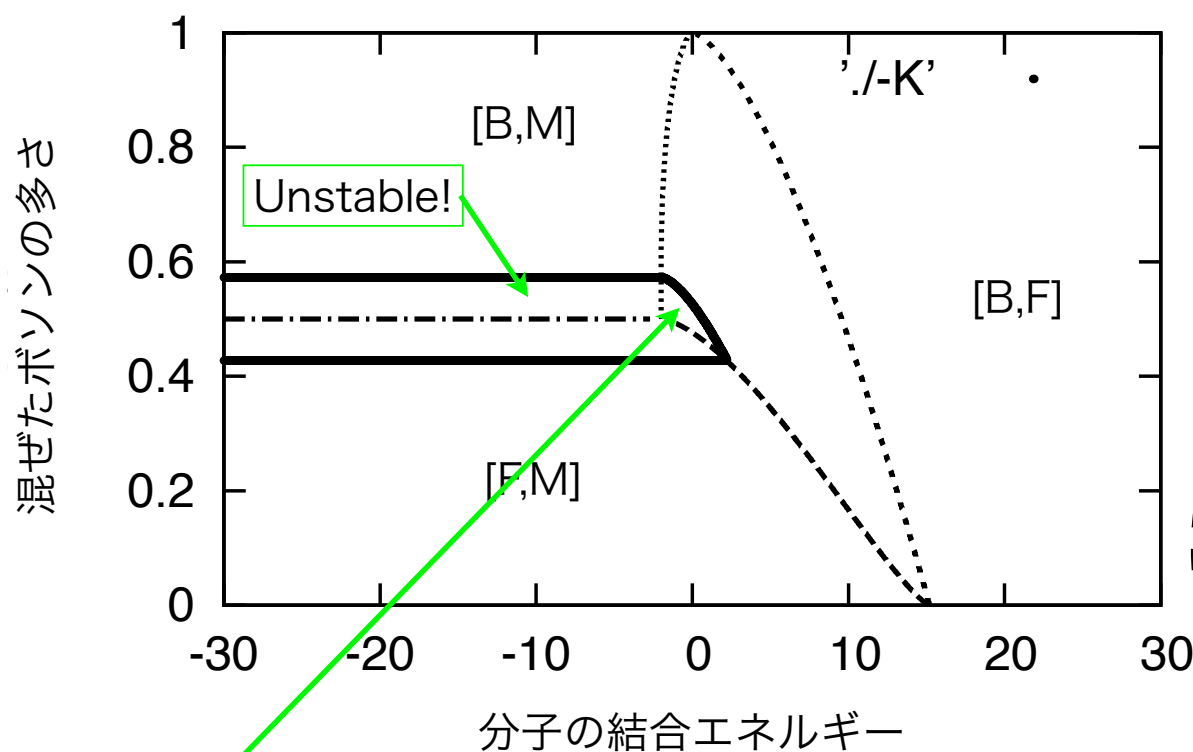
不安定性条件

$$0 > K \stackrel{\text{BF}}{=} n_{2t}^2 \left( 1 - \left( \frac{\partial n_3}{\partial n_{2t}} \right)^2 \frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial n_2^2} + n_{2t}^2 \left( \frac{\partial n_3}{\partial n_{2t}} \right)^2 \frac{\partial^2 \epsilon_3}{\partial n_3^2} \right) = n_{2t}^2 \frac{10C_1}{9} \left( \tilde{m}_2 \tilde{n}_2^{1/3} + \tilde{n}_3^{1/3} B^{-1} \right)^{-1}$$

フェルミ面の効果

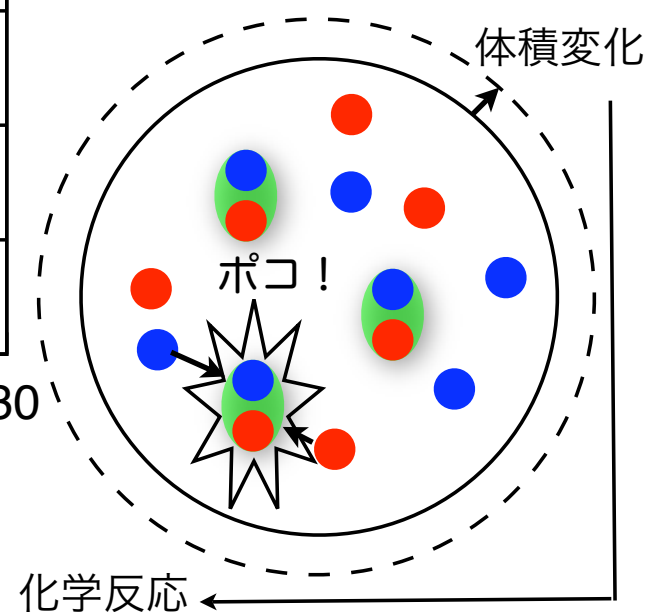
$$d = 1.8 \quad m_2 = 0.5$$

$$\text{化学平衡の効果} \quad \frac{\partial n_3}{\partial n_{2t}} \stackrel{\text{BF}}{=} \frac{\frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial n_2^2}}{\frac{\partial^2 \epsilon_2}{\partial n_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_3}{\partial n_3^2}}$$



不安定相が三種混合相で成長している様子が分かる

体積変化に伴う化学反応



# p波相互作用するフェルミ気体 における強結合効果と 擬ギャップ構造

猪谷太輔<sup>1</sup>, 渡邊亮太<sup>1</sup>,  
Manfred Sigrist<sup>2</sup>, 大橋洋士<sup>1</sup>

<sup>1</sup>慶大理工

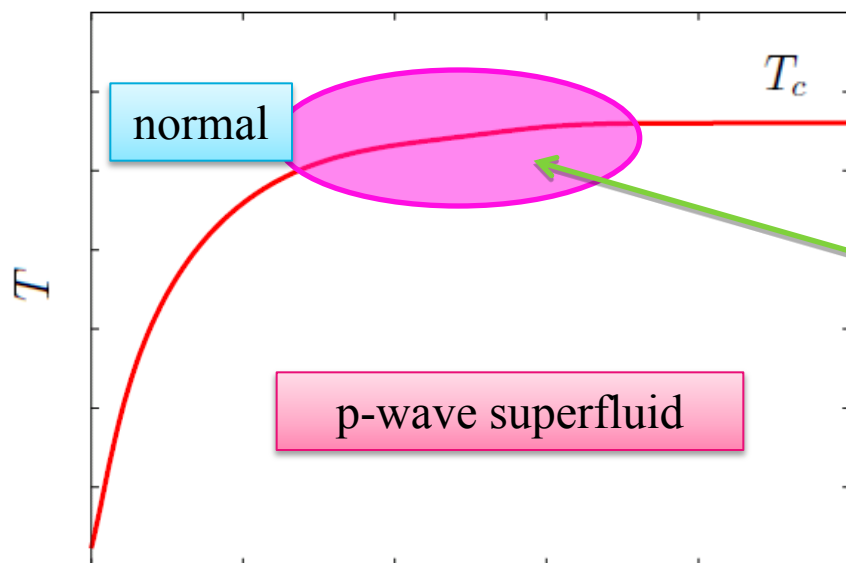
<sup>2</sup>ETH Zurich, Switzerland

# 1. Introduction

p波Feshbach共鳴： ${}^6\text{Li}$  (2004)、 ${}^{40}\text{K}$  (2007)

➡ p波相互作用の強さを操作することができる。

冷却原子気体によるp波超流動の実現が期待されている。



- ${}^3\text{He}$ 超流動
- 重い電子系
- (高温超伝導)

➡ 転移温度以上においても状態密度に  
擬ギャップ構造？

➡ 超流動転移の前駆現象

擬ギャップを測定することによって超流動転移に  
どの程度近づいているか調べることができる。

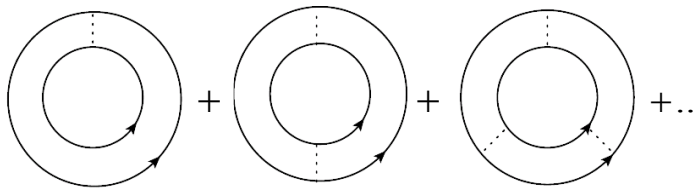
## 2. 転移温度と化学ポテンシャルの決定

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^{\dagger} c_{\mathbf{p}} - \frac{U}{2} \sum_{\substack{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q} \\ i=x,y,z}} \rho_i \rho_i' c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^{\dagger} c_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}^{\dagger} c_{-\mathbf{p}'+\mathbf{q}/2} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2}$$

p-wave interaction

• 熱力学ポテンシャル  $\Omega$

$$\Omega = \Omega_F + \Omega_{NSR}$$

$$\Omega_{NSR} = \text{Fock term} + \dots$$


Fock term

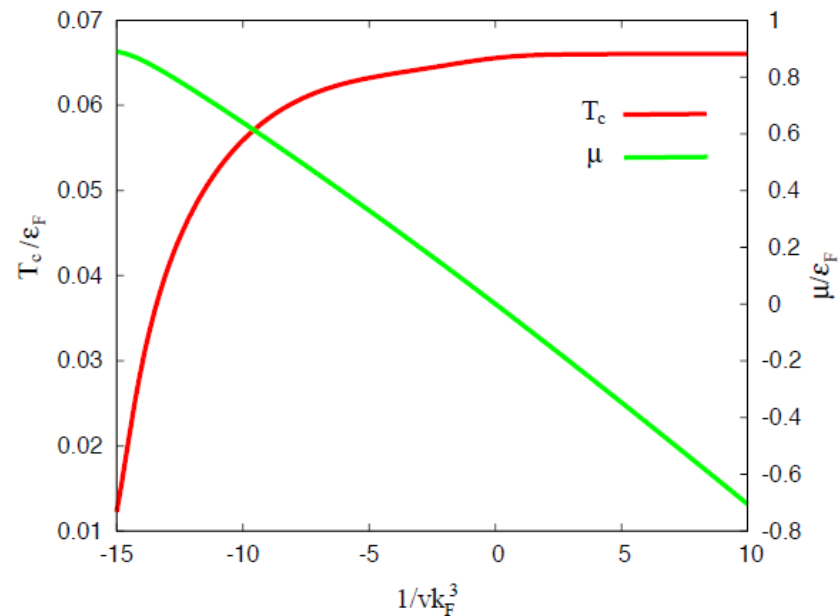
粒子数方程式

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = N_F + N_{NSR}$$

+

Gap方程式 ( $\Delta=0$ )

$T_c, \mu$



### 3. 状態密度 (DOS) 及び、スペクトル強度 (SW) の計算

$$G(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{1}{G_0^{-1}(\mathbf{p}, i\omega_n) - \Sigma(\mathbf{p}, i\omega_n)}$$

self energy

$$\Sigma(\mathbf{p}, i\omega_n) = \text{[diagram: box with } \Gamma \text{ and a semi-circular arrow]} = \text{[diagram: circle on a vertical line]} + \text{[diagram: box with } \Gamma \text{ and a semi-circular arrow, dashed bottom]} + \text{[diagram: box with } \Gamma \text{ and a semi-circular arrow, dashed bottom and right]} + \dots$$

+ Fock term

$$\boxed{\Gamma} = \text{[diagram: vertical dashed line]} + \text{[diagram: square with dashed top and bottom]} + \text{[diagram: square with dashed top, bottom, and right]} + \dots$$

$$G(\mathbf{p}, i\omega_n) \xrightarrow{i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta} G(\mathbf{p}, \omega + i\delta)$$

スペクトル強度

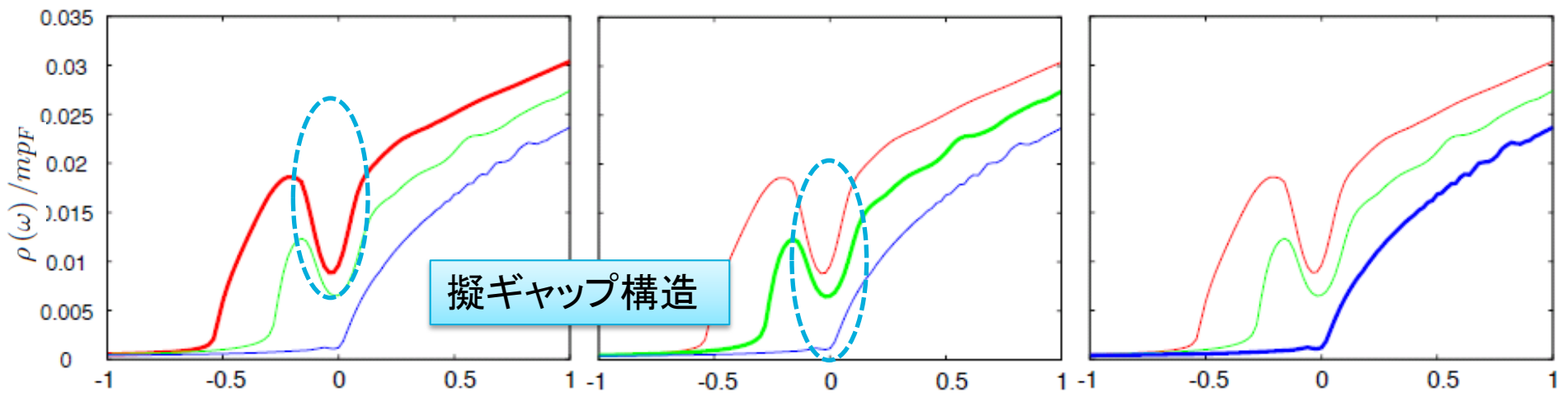
$$A_p(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G(\mathbf{p}, \omega + i\delta)$$

状態密度

$$\rho(\omega) = \sum_p A_p(\omega)$$

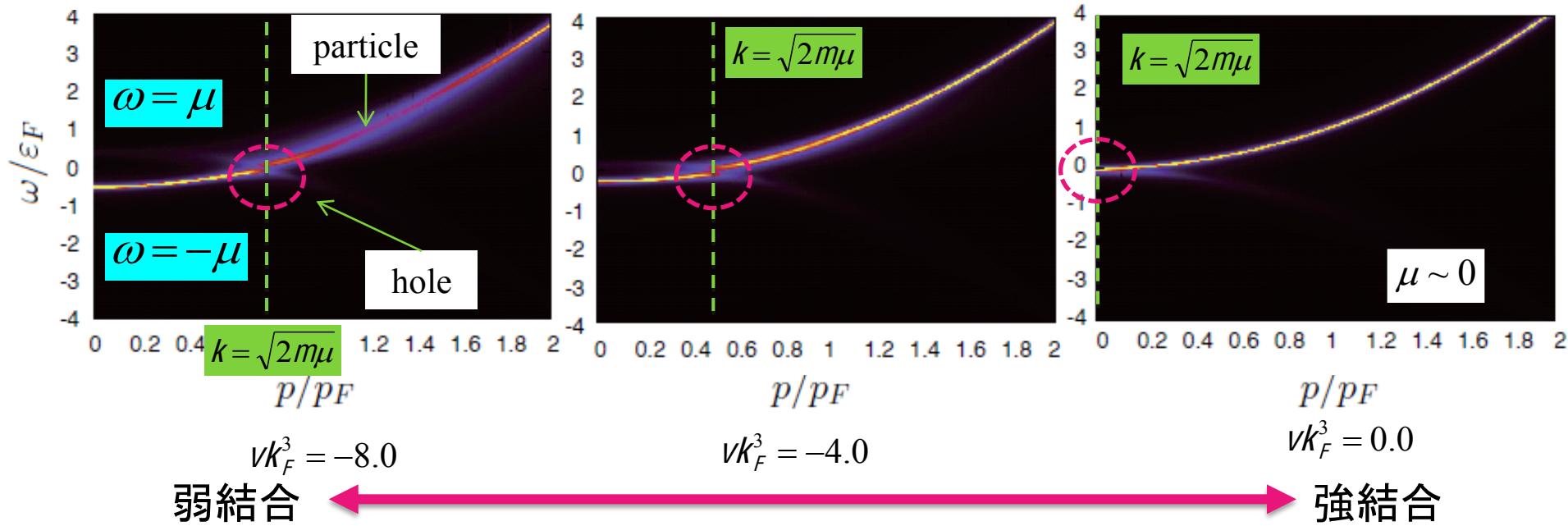
# 3. 状態密度(DOS)及び、スペクトル強度(SW)の計算

•DOS



p波超流動の前駆現象

•SW





# 非摂動くりこみ群を用いた量子色力学 におけるカイラル相転移現象の解析

金沢大数物, 愛知淑徳大人情<sup>A</sup>, 金沢大自然<sup>B</sup>

青木健一, 宮下和洋<sup>A</sup>, ○佐藤大輔<sup>B</sup>

2010年 熱場の量子論とその応用 @ 京都大学基礎物理学研究所

# カイラル対称性の自発的破れとその回復

- カイラル対称性の自発的破れ

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0 \longrightarrow \text{ハドロンの質量} \gg 3m_{u,d,s}$$

- 初期宇宙などの高温の世界  $\longrightarrow$  カイラル対称性が回復

カイラル相転移温度:  $T_C$  は170MeV付近 $\sim$ 2兆K

非摂動くりこみ群 を用いて解析

Wilsonian有効作用:  $S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]$  くりこみスケール(運動量切断):  $\Lambda$   
(sharp cut-off)

Wegner-Houghton 方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial t} = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \delta(1 - |p|) \left\{ -\text{Tr} \ln \left( \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \right) + \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p} \left( \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \right)^{-1} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_{-p}} \right\} \\ & + D S_{\text{eff}} + \int_0^1 \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi_p \left( \frac{2 - D - \eta}{2} - p^\mu \frac{\partial'}{\partial p^\mu} \frac{\delta}{\delta \phi_p} \right) S_{\text{eff}} \end{aligned}$$

# ゲージ理論への適用

$$S_{\text{eff}}[\bar{\psi}, \psi, A; t] = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(\not{\partial} - g_s \not{A})\psi + \frac{1}{2N_f N_c} \sum_i^{4\text{-fermi}} G_i(t) \mathcal{O}_i(\bar{\psi}, \psi; t) + \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right\}$$

- $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \times SU(N_c) \times U(1)_V$  を満たす operator

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2 & \mathcal{O}_2 &= (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi)^2 \\ \mathcal{O}_{c1} &= (\bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu T^a\psi)^2 & \mathcal{O}_{c2} &= (\bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu T^a\psi)^2 \end{aligned}$$

$T^a$ : カラー空間のGell-Mann行列

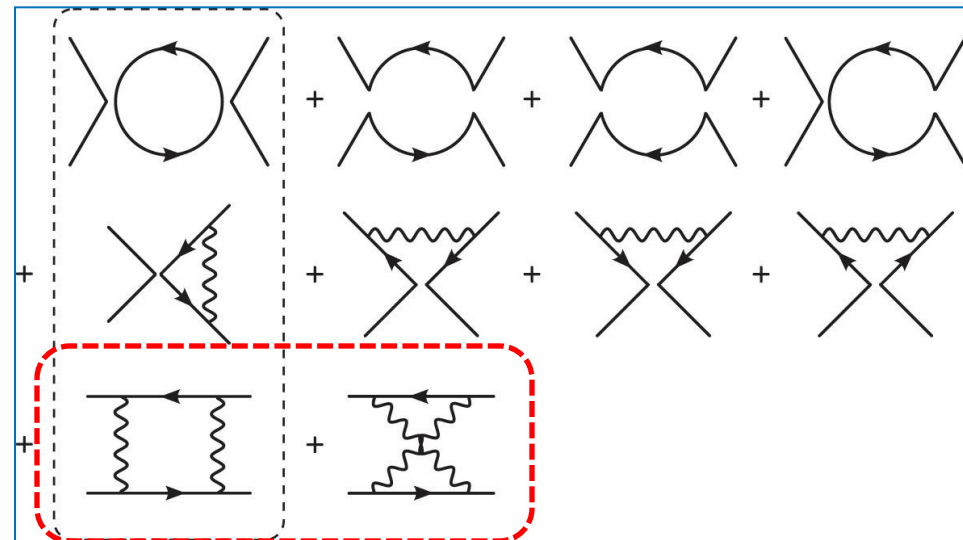
## ● 非摂動くりこみ群方程式

4-fermi結合定数のベータ関数

$$\frac{dG_i}{dt} = \beta_i(\{G\}, g_s) \quad \leftarrow$$

初期条件

$$G_i(t=0) = 0$$



4-fermi operatorがgauge 相互作用により生成される

# Collective field による chiral condensate の評価

$\bar{\psi}\psi$  の composite field である collective field  $\sigma$  を導入する。

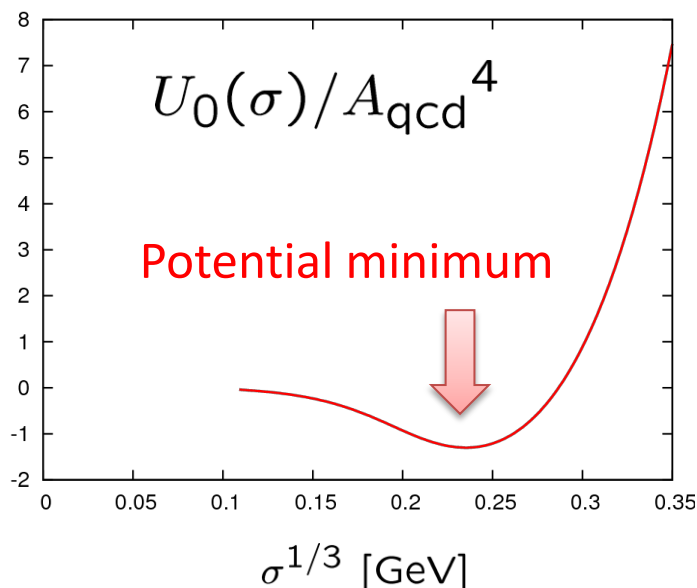
$$Z = \int \prod_{0 < p < \Lambda_c} d\Omega_i(p) d\sigma(p) e^{-S_{\text{eff}}[\Omega; \Lambda_c]} \exp \left\{ - \int d^4x \frac{1}{2} (\sigma - y \bar{\psi}\psi)^2 \right\}$$

$$\equiv \int \prod_{0 < p < \Lambda_c} d\Omega_i(p) d\sigma(p) e^{-S'_{\text{eff}}[\Omega, \sigma; \Lambda_c]}$$

$\sigma \sim$  Auxiliary field  
in original path integration

Wilsonian effective potential

$$U(\psi, \bar{\psi}, \sigma; \Lambda) = U_0(\sigma; \Lambda) - U_1(\sigma; \Lambda) \bar{\psi}\psi + \mathcal{O}_{\text{fermi}}(\psi, \bar{\psi}, \sigma; \Lambda)$$



$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \frac{1}{N_f} \frac{\partial}{\partial m_0} U_0(\langle \sigma \rangle, m_0; \Lambda) \Big|_{m_0=0}$$

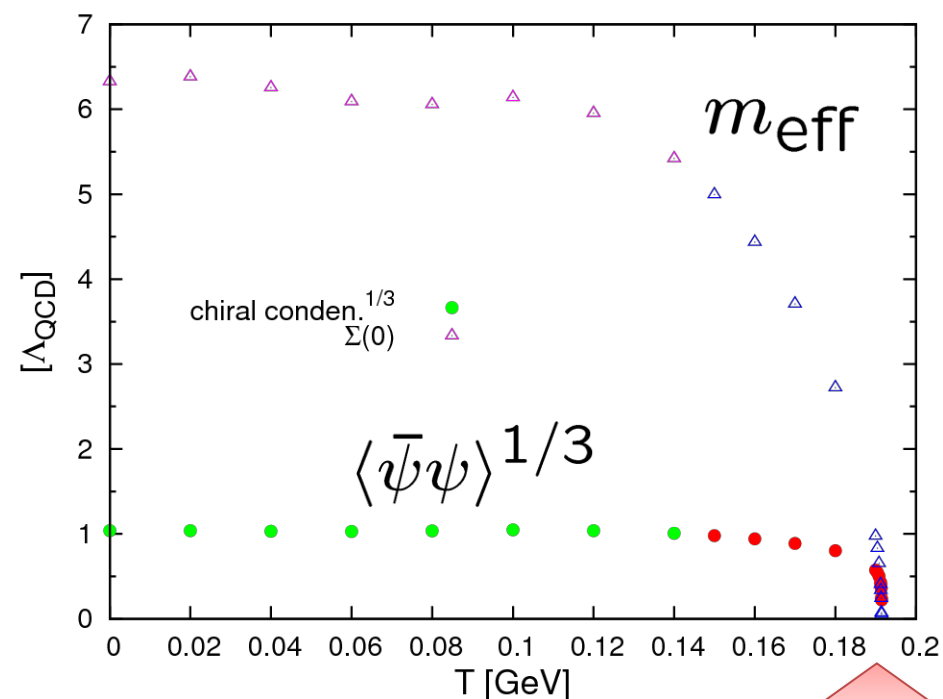
$m_0$  : bare mass

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{1\text{GeV}} = (250 \text{ MeV})^3$$

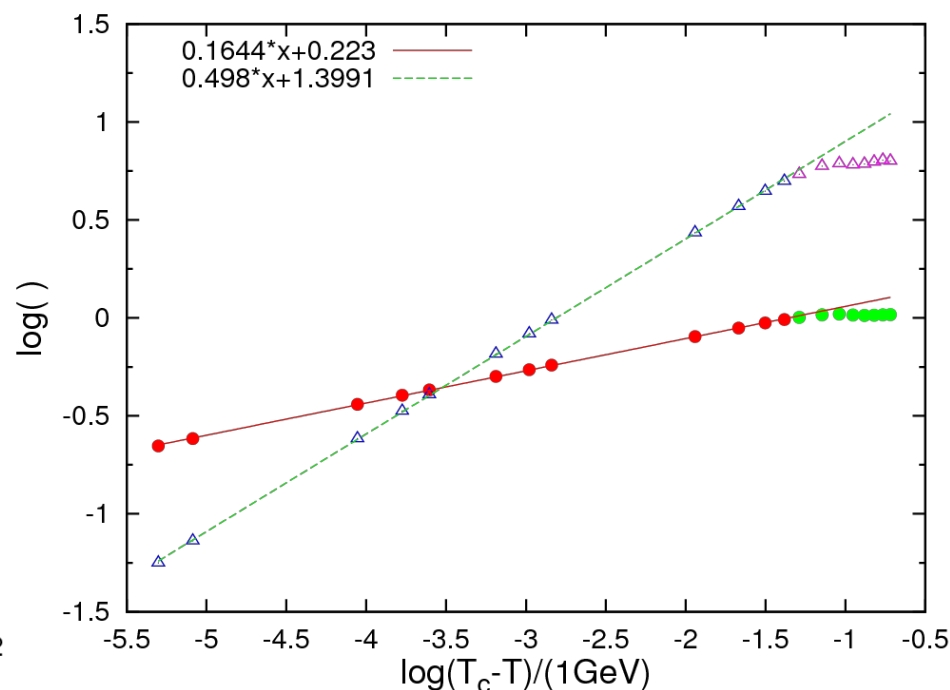
# 有限温度における Chiral 対称性の回復

$$T_c = 191\text{MeV}$$

$$\nu = 0.49$$



カイラル対称性が回復



$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle(T) \sim C|T - T_c|^\nu$$

# *The order of the deconfinement phase transition in a heavy quark region - Dependence on the number of flavors -*

H. Saito for WHOT-QCD Collaboration



**University of Tsukuba**

熱場の量子論とその応用, 基研, 2010 8/30-9/1

## **WHOT-QCD Collaboration:**

S. Aoki<sup>1</sup>, S. Ejiri<sup>2</sup>, T. Hatsuda<sup>3</sup>, K. Kanaya<sup>1</sup>, Y. Maezawa<sup>4</sup>, H. Ohno<sup>1</sup>,  
H. Saito<sup>1</sup>, and T. Umeda<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Univ. of Tsukuba, <sup>2</sup>Niigata Univ., <sup>3</sup>Univ. of Tokyo, <sup>4</sup>RIKEN, <sup>5</sup>Hiroshima Univ.



# *The order of the deconfinement phase transition*

- ▶ What is the order of the deconfinement phase transition?
  - quark mass dependence
  - the end point of the 1st order transition
  - the dependence on  $N_f$
- ▶ In this study
  - heavy quark region
  - lattice QCD simulation
  - effective potential method

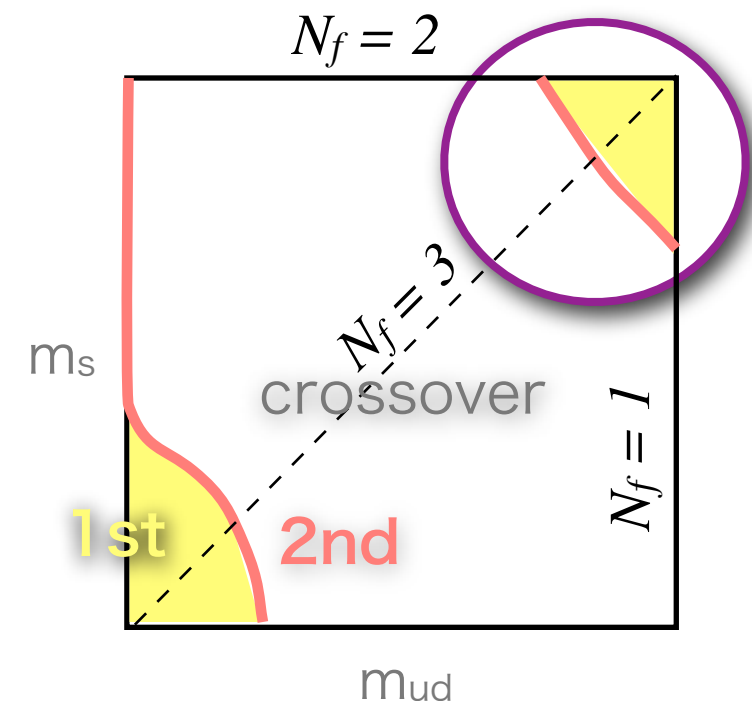


Fig. 1 Quark mass dependence



## Result - The dependence on the number of flavors -

- ▶ The quark mass at the end point of the 1st order transition increases as the number of flavors increases.

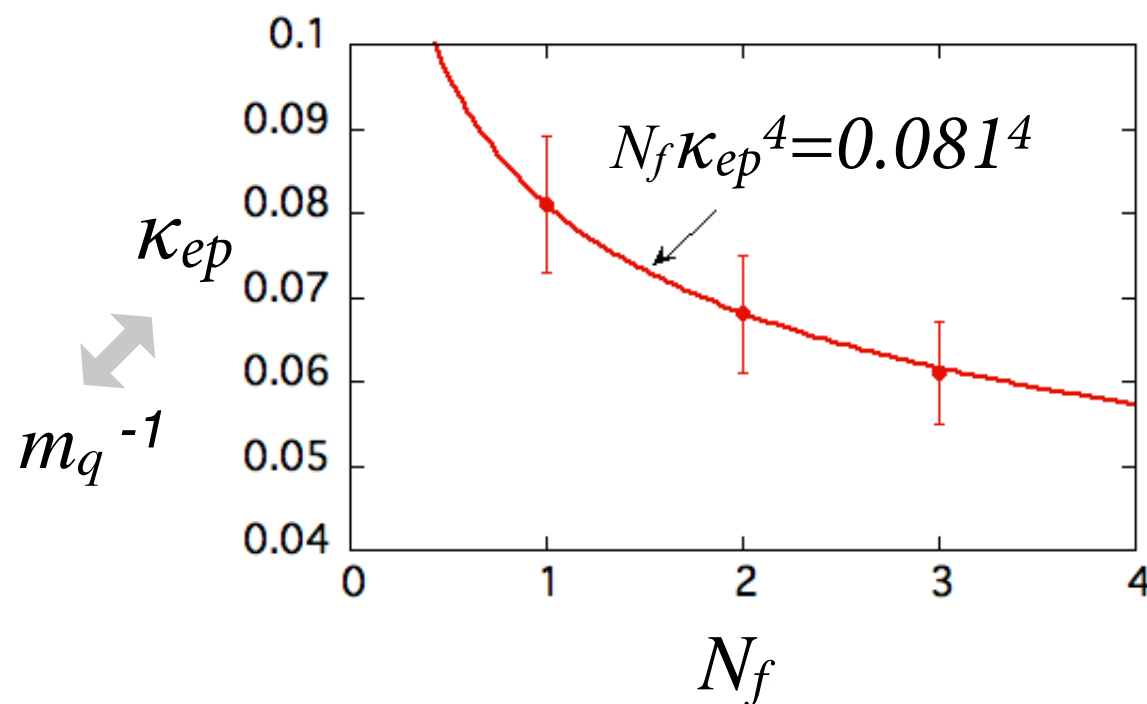


Fig. 2 The dependence on the number of flavors

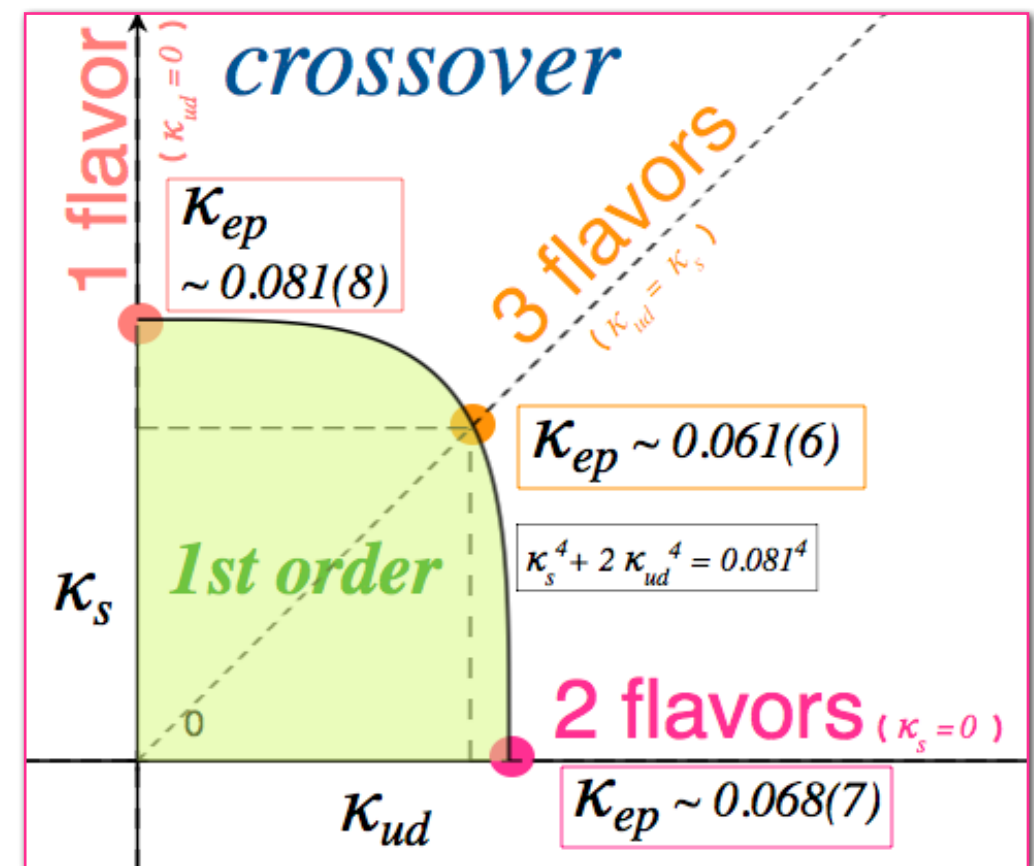


Fig. 3 For  $N_f = 2+1$  case  
(  $u, d$  quark degenerate )





## Method - An effective potential -

- ▶ An effective potential defined by a histogram of plaquette value :

$$V_{eff}(P) = -\ln W(P)$$

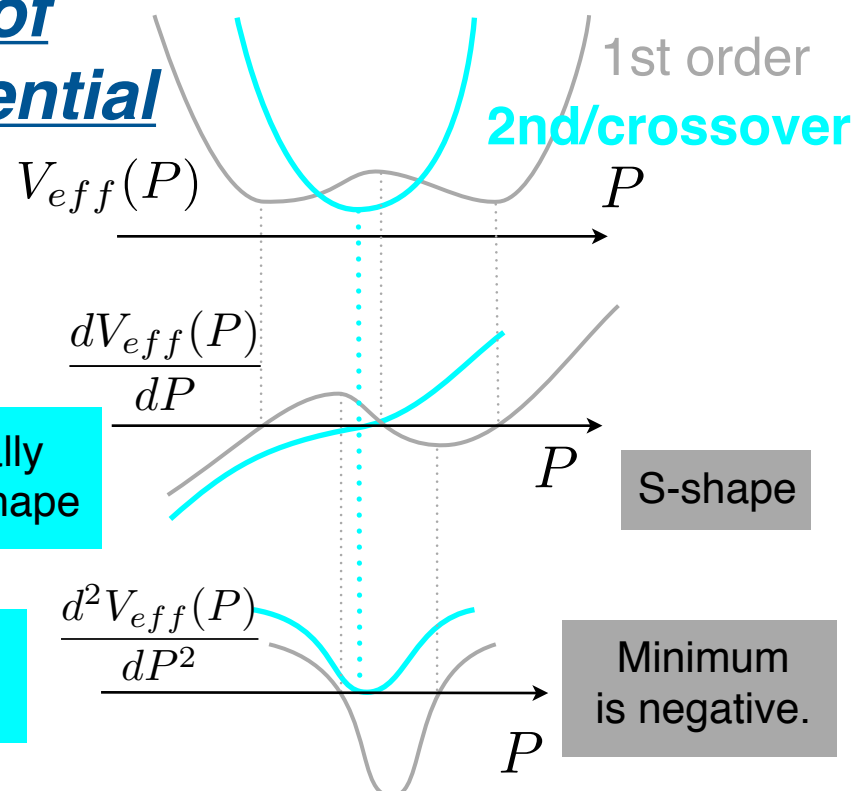
where

$$W(P') = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \delta(P(U) - P') e^{-S}$$

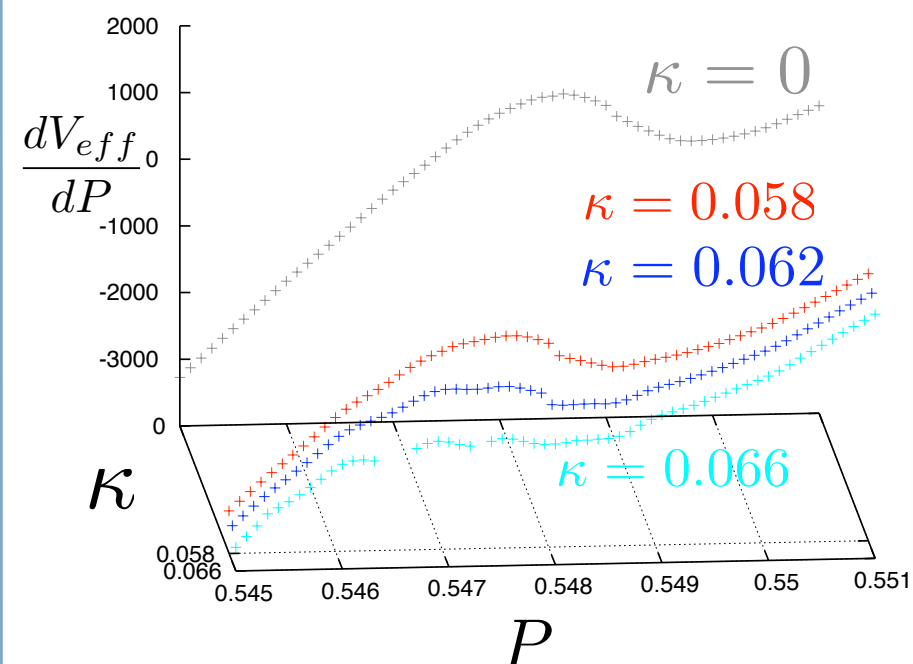
- ▶ The derivative of the effective potential

### Nature of the potential

(Fig.4)



### Result (Fig.5)



As  $\kappa$  increases,

“S shape”



Monotonically increasing shape

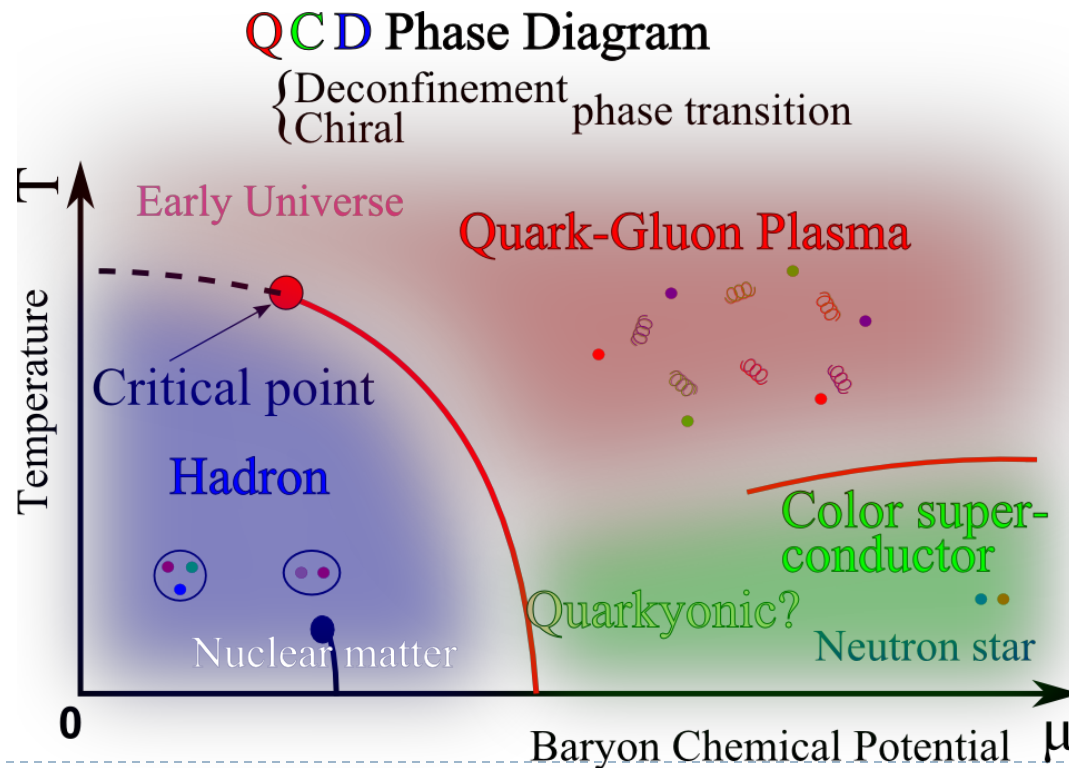
# Polyakov Loop Effects in Strong Coupling Lattice QCD

T. Z. Nakano (YITP, Kyoto Univ.),

K. Miura (INFN-Laboratori Nazionali di Frascati)

and

A. Ohnishi (YITP)



# Strong Coupling Lattice QCD

- ▶ Finite  $\mu$  in Monte Carlo simulation  $\rightarrow$  sign problem ...

## *Strong Coupling Lattice QCD*

- ▶ (Semi) Analytic Lattice QCD based on  $1/g^2$  expansion
- ▶ Applicable to the High Density matter

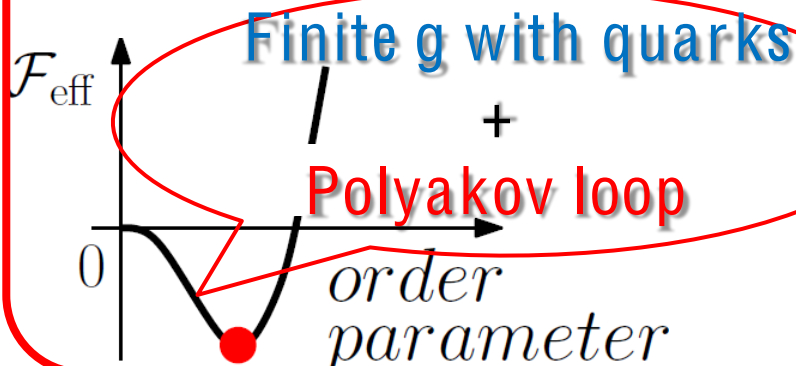
# Strong Coupling Lattice QCD

- ▶ Finite  $\mu$  in Monte Carlo simulation  $\rightarrow$  sign problem ...

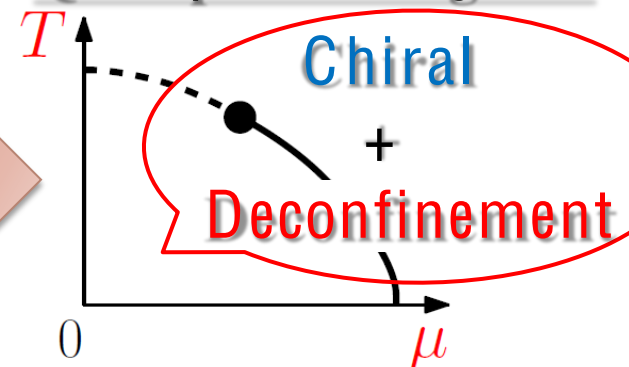
## Strong Coupling Lattice QCD

- ▶ (Semi) Analytic Lattice QCD based on  $1/g^2$  expansion
- ▶ Applicable to the High Density matter

### Effective Potential

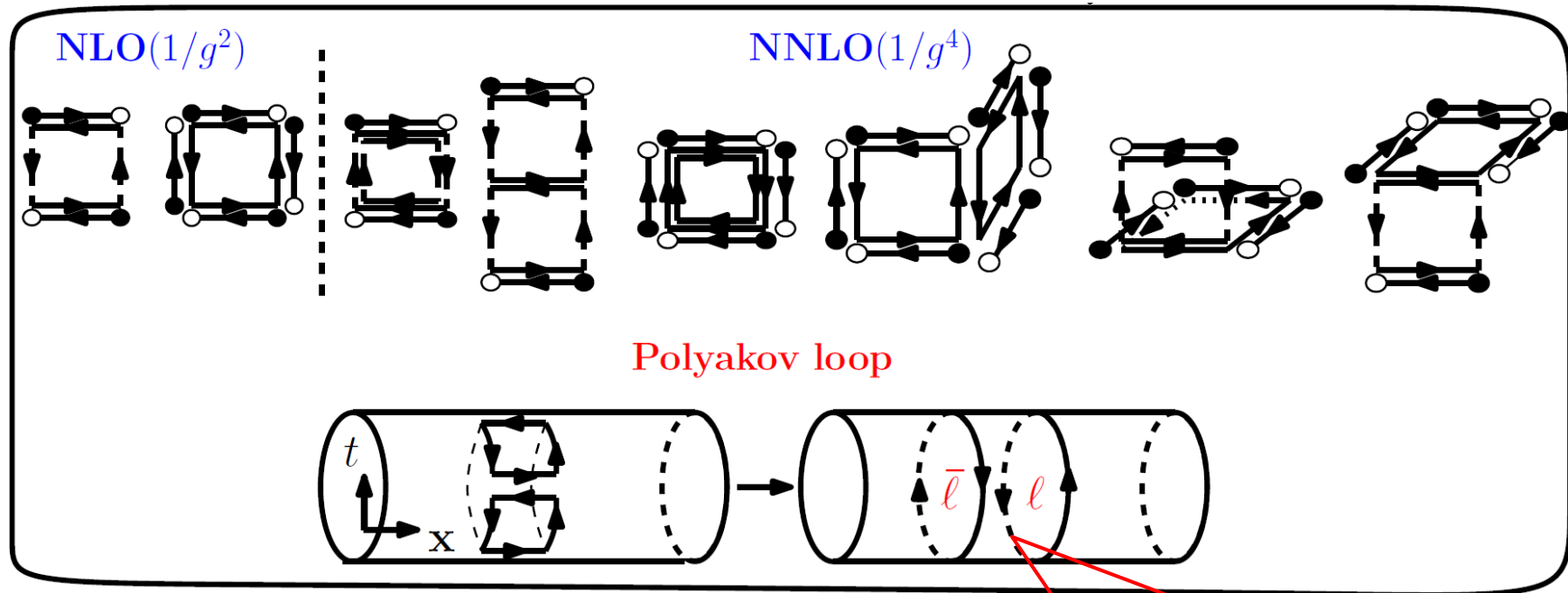


### QCD phase diagram



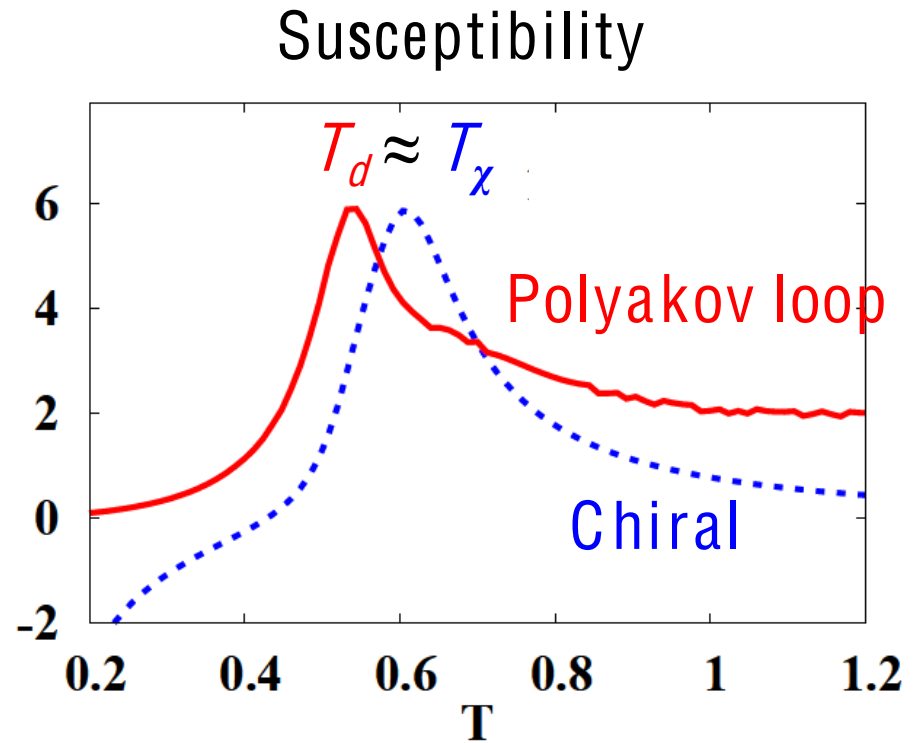
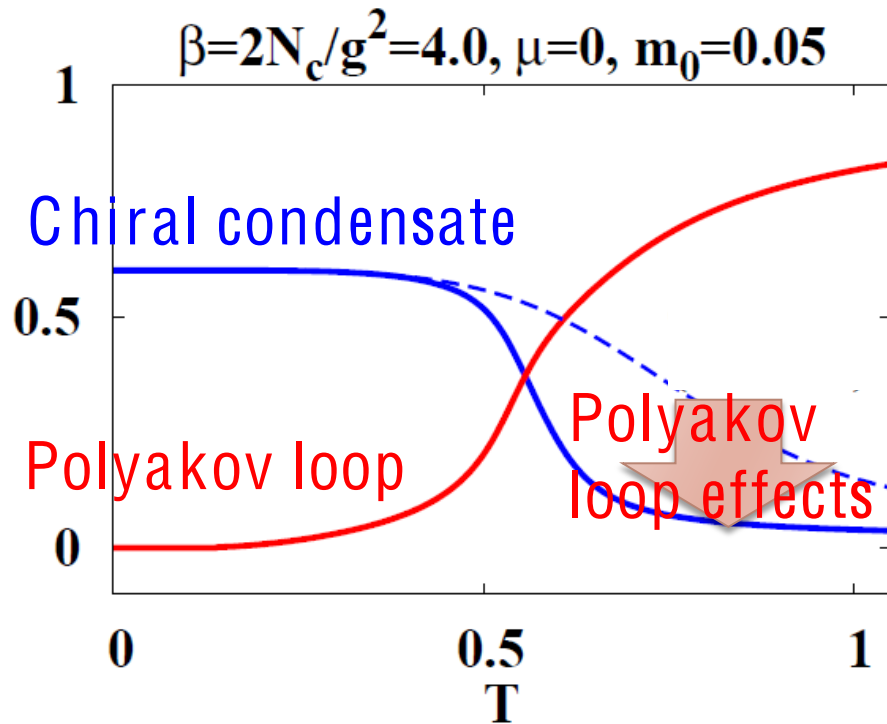
# Diagrams

## ► Finite $1/g^2$ effects



Weiss mean-field  
vs  
Haar measure

# Results



# Average Phase Factor in the PNJL model

境 祐二  
九大理

arXiv: 1005.0993

佐々木 崇宏, 河野 宏明, 八尋正信

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}A_\nu \mathcal{O} \det M_q(\mu) e^{-\mathcal{S}_{\text{gl}}[A_\nu]}$$

符号問題  $\det M_q(\mu) = \underline{e^{i\theta(\mu)}} |\det M_q(\mu)|$   
 激しく振動  $e^{i\theta} \rightarrow 0 \ (\mu \neq 0)$

$$M_q = \begin{pmatrix} \Delta_u(\mu) & 0 \\ 0 & \Delta_d(\mu) \end{pmatrix}$$

Average Phase Factor

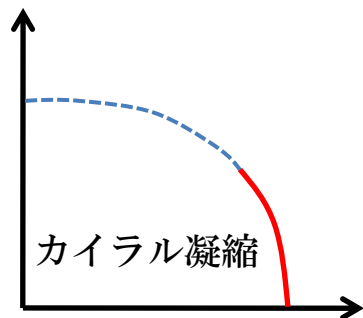
$$e^{i\theta} = \frac{\Delta^2}{|\Delta|^2} = \frac{\text{クォーク化学}}{\text{アイソスピン化学}}$$

○ クォーク化学ポテンシャル

$$\mu_u = \mu_d = \mu_q$$

$$\det M_q = \Delta^2$$

$$\Delta_u = \Delta_d = \Delta$$

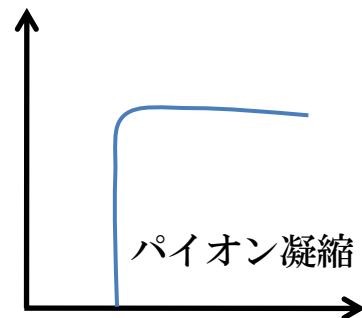


○ アイソスピン化学ポテンシャル

$$\mu_u = -\mu_d = \mu_I$$

$$\det M_q = |\Delta|^2$$

$$\Delta_u = \Delta_d^\dagger = \Delta$$





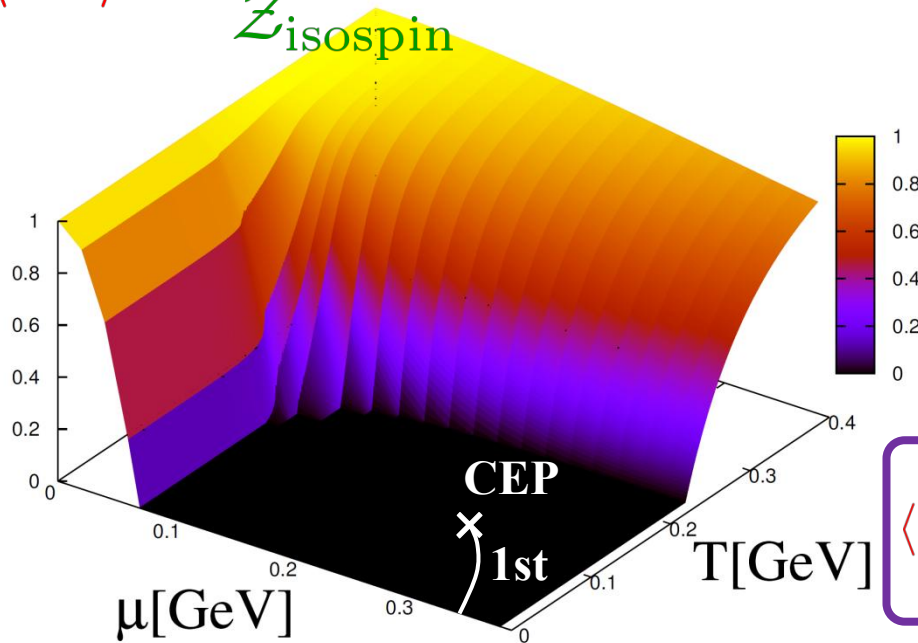
# Polyakov--Nambu--Jona-Lasinio 模型

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \frac{\mathcal{Z}_{\text{quark}}}{\mathcal{Z}_{\text{isospin}}}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{qrk}}(\text{NJL}) + \mathcal{L}_{\text{gl}}(\text{Polyakov})$$

Fukushima (04)

共変微分

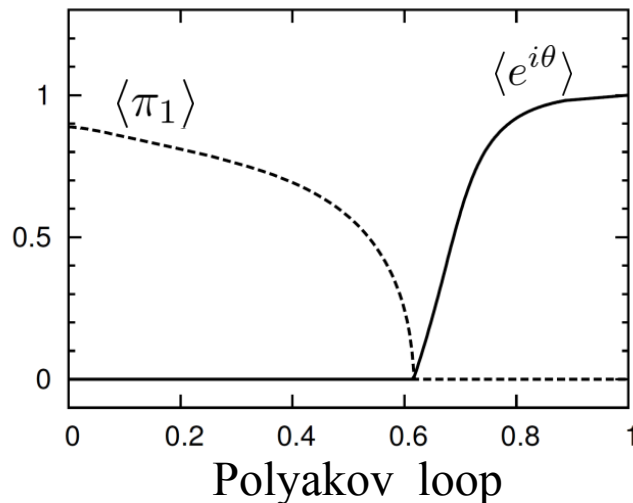


Mean Field Approx.

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\sqrt{\det H_{\text{mf}}}} \exp \left[ -\frac{V}{T} \Omega_{\text{mf}} \right]$$

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \quad ; \quad \text{曲率}$$

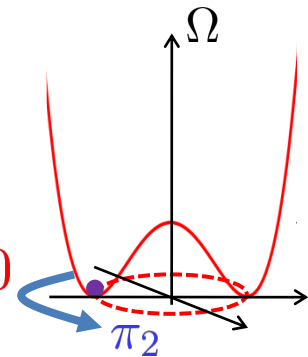
$$\langle e^{i\theta} \rangle = \frac{\sqrt{\det H_{\text{iso}}}}{\sqrt{\det H_{\text{qrk}}}} \exp \left[ -\frac{V}{T} (\Omega_{\text{qrk}} - \Omega_{\text{iso}}) \right]$$



パイオン凝縮相  $\langle \pi_1 \rangle \neq 0$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \pi_2 \partial \pi_2} = 0 \quad (\text{NG boson})$$

$$\det H_{\text{iso}} = 0 \rightarrow \langle e^{i\theta} \rangle = 0$$



$$\langle e^{i\theta} \rangle = \frac{\sqrt{\det H_{\text{iso}}}}{\sqrt{\det H_{\text{qrk}}}} \exp \left[ -\frac{V}{T} (\Omega_{\text{qrk}} - \Omega_{\text{iso}}) \right]$$

パイオン凝縮相  $\langle e^{i\theta} \rangle = 0$  ( $\langle \pi_1 \rangle \neq 0$ )

パイオン非凝縮相  $\Omega_{\text{qrk}} = \Omega_{\text{iso}}$  (m.f.)

$\langle e^{i\theta} \rangle \neq 0$  格子QCD計算と比較できる。

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \frac{\sqrt{\det H_{\text{iso}}}}{\sqrt{\det H_{\text{qrk}}}} \quad \text{MF + Static Fluct. (SF)}$$

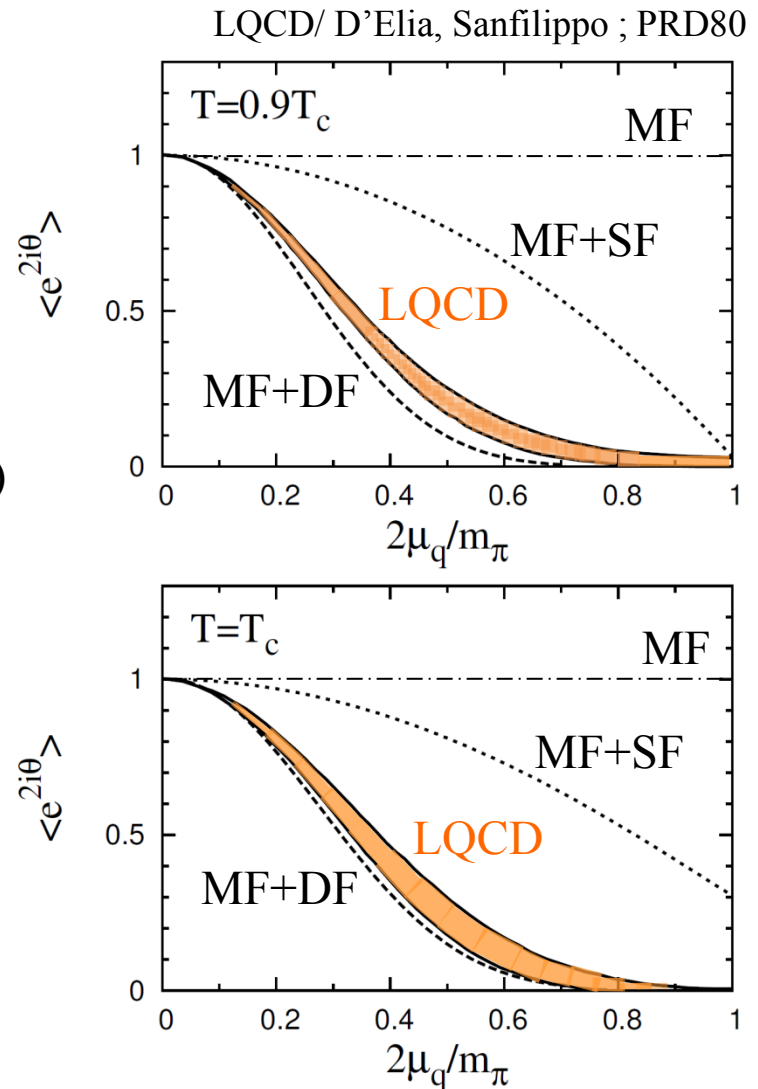
メソン効果

$$\Omega = \Omega_{\text{mf}} + \delta\phi_i(y) H_{ij}(x-y) \delta\phi_j(x)$$

MF+SF/  $H(x-y) \rightarrow H(0)$

メソン効果 ; Random Phase Approx. (RPA)

MF + Dynamical Fluct. (DF)



# 有限バリオン、有限アイソスピン化学ポテンシャル におけるQCD相図

arXiv:hep-ph/1005.0910

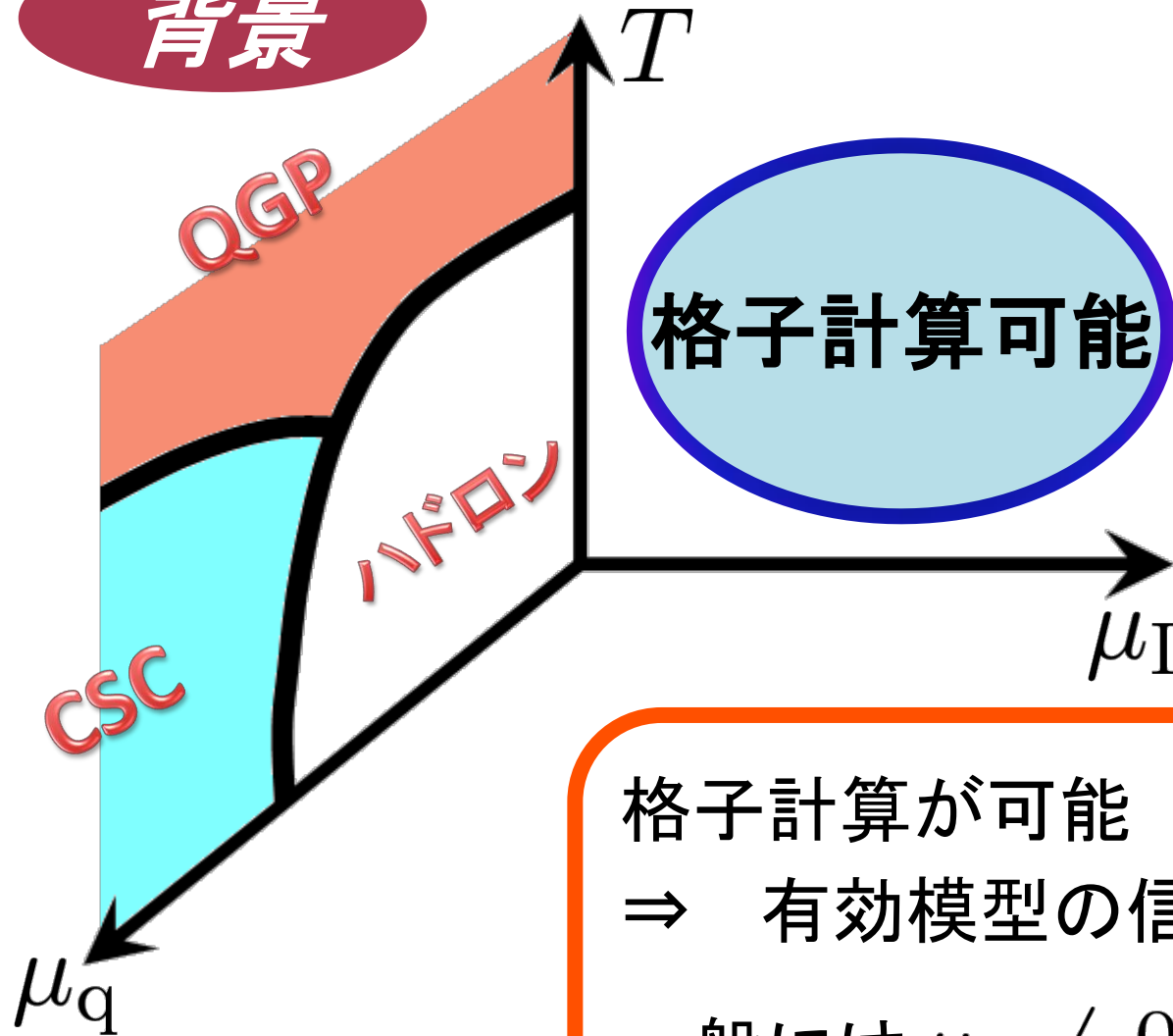
佐々木崇宏

境祐二、河野宏明<sup>A</sup>、八尋正信

九大院理、佐賀大理工<sup>A</sup>

2010.8.30@京都大学基礎物理学研究所  
基研研究会「熱場の量子論とその応用」

# 背景



$$\mu_q = \frac{\mu_u + \mu_d}{2}$$

$$\mu_I = \frac{\mu_u - \mu_d}{2}$$

格子計算が可能

⇒ 有効模型の信頼性を確認できる

一般には  $\mu_I \neq 0$

⇒  $\mu_I$ - $\mu_q$ - $T$  のQCD相図

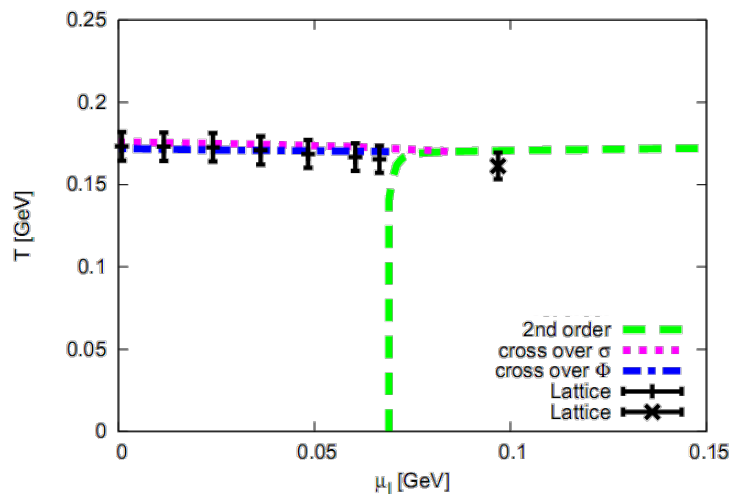
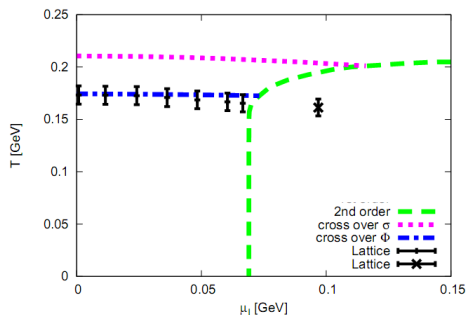
結果

PNJL模型

+

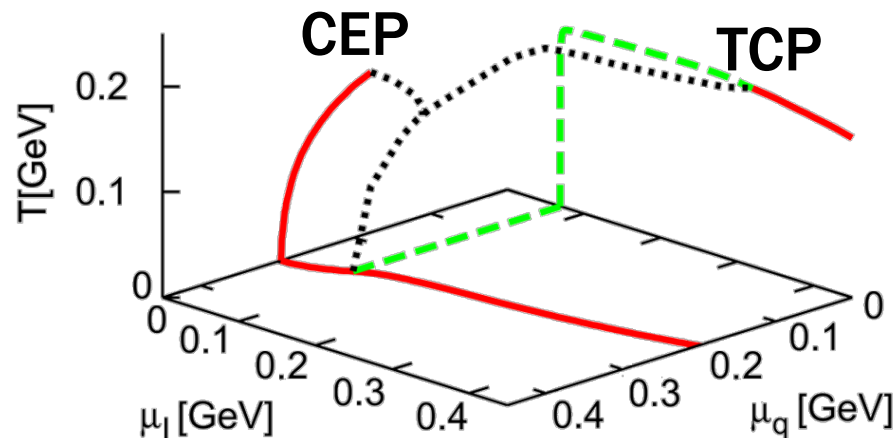
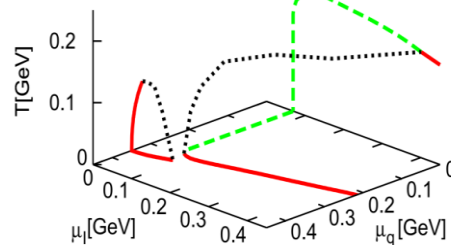
クォーク8点相互作用

$\mu_q = 0$  の相図



格子計算と一致

$\mu_I - \mu_q - T$  の相図



定性的な変化



東京大学  
THE UNIVERSITY OF TOKYO

# ランダム行列模型による 有限密度QCD相構造

佐野 崇、 藤井宏次

東京大学大学院理学系研究科、東京大学大学院総合文化研究科

- $U(1)$ アノマリーの効果を取り込んだカイラルランダム行列(CHRM)模型を有限アイソスピン・Hypercharge化学ポテンシャルに拡張
- アノマリー効果の相図への影響に着目

# ChRM model with U(1) anomaly

◆ Dirac行列  $D \in \mathbf{C}^{(N+N_+) \times (N+N_-)}$

◆ 要素をランダム化=グルーオンダイナミクスの模型化

$$Z_{N_+, N_-} = \int dR e^{-N \Sigma \text{tr} R R^\dagger} \prod_{f=1}^{N_f} \det(D(\mu_f) + m_f)$$

◆ 行列サイズを変化=色々な位相的配位を取り込む

➔ アノマリー効果の取り込み

$$Z^{\text{RM}}(\mathcal{M}, \hat{\mu}) = \sum_{N_+, N_-} \underbrace{P(N_+)P(N_-)}_{\text{二項分布!}} Z_{N_+, N_-} = \int dS e^{-2N\Omega} \quad \begin{aligned} \mathcal{M} &= \text{diag}(m_u, \dots, m_{N_f}) \\ \hat{\mu} &= \text{diag}(\mu_u, \dots, \mu_{N_f}) \end{aligned}$$

$$\Omega(S; \mathcal{M}, \hat{\mu}) = \frac{\Sigma^2}{2} \text{tr} S^\dagger S - \frac{1}{2} \log \det \begin{bmatrix} S + \mathcal{M} & \hat{\mu} \\ \hat{\mu} & S^\dagger + \mathcal{M}^\dagger \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{2} \log |\alpha \det(S + \mathcal{M}) + 1|^2$$

$$S^{fg} \sim \bar{\psi}_L^f \psi_R^g$$

按点法で基底状態を決定



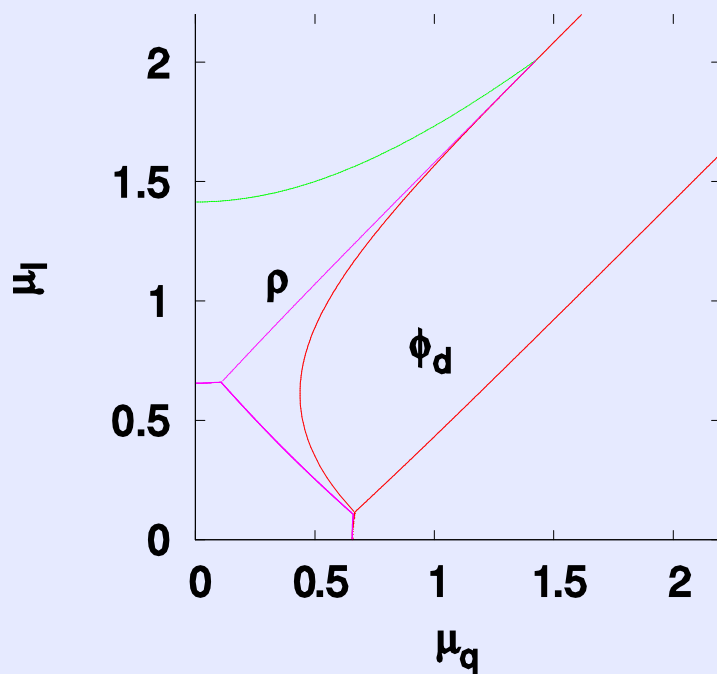
# Nf=2

$$S = \begin{pmatrix} \phi_u & \rho \\ -\rho & \phi_d \end{pmatrix} \rightarrow \det S = \phi_u \phi_d + \rho^2$$

→ u, dのカイラル凝縮が混合

→ 相転移が同時 → 臨界(終)点は1つ

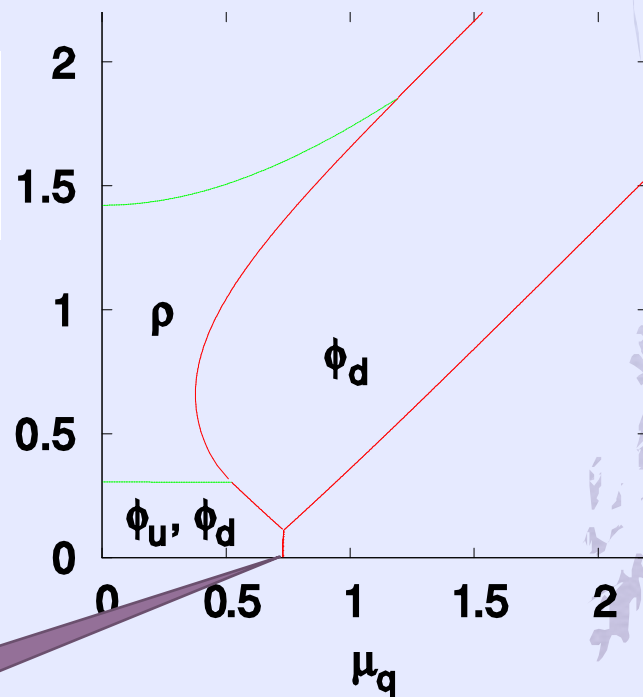
m=0



$$\mu_q = \frac{1}{2}(\mu_u + \mu_d),$$

$$\mu_I = \frac{1}{2}(\mu_u - \mu_d).$$

m≠0

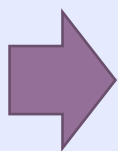


相転移が一度!



# Nf=3

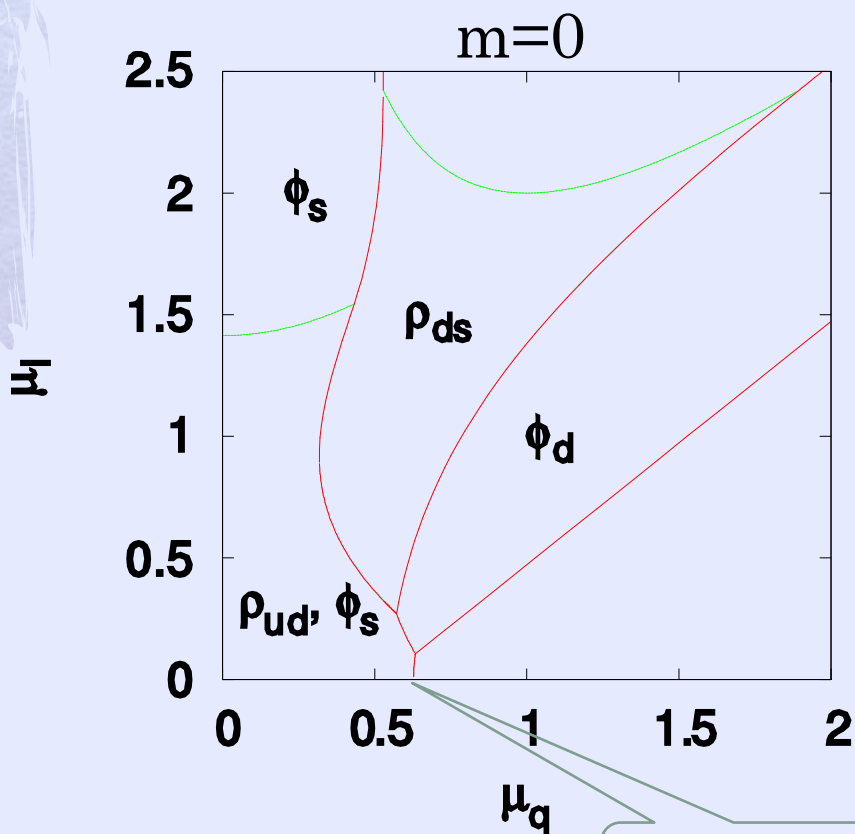
$$S = \begin{pmatrix} \phi_u & \rho_{ud} & -\rho_{su} \\ -\rho_{ud} & \phi_d & \rho_{ds} \\ \rho_{su} & -\rho_{ds} & \phi_s \end{pmatrix}$$



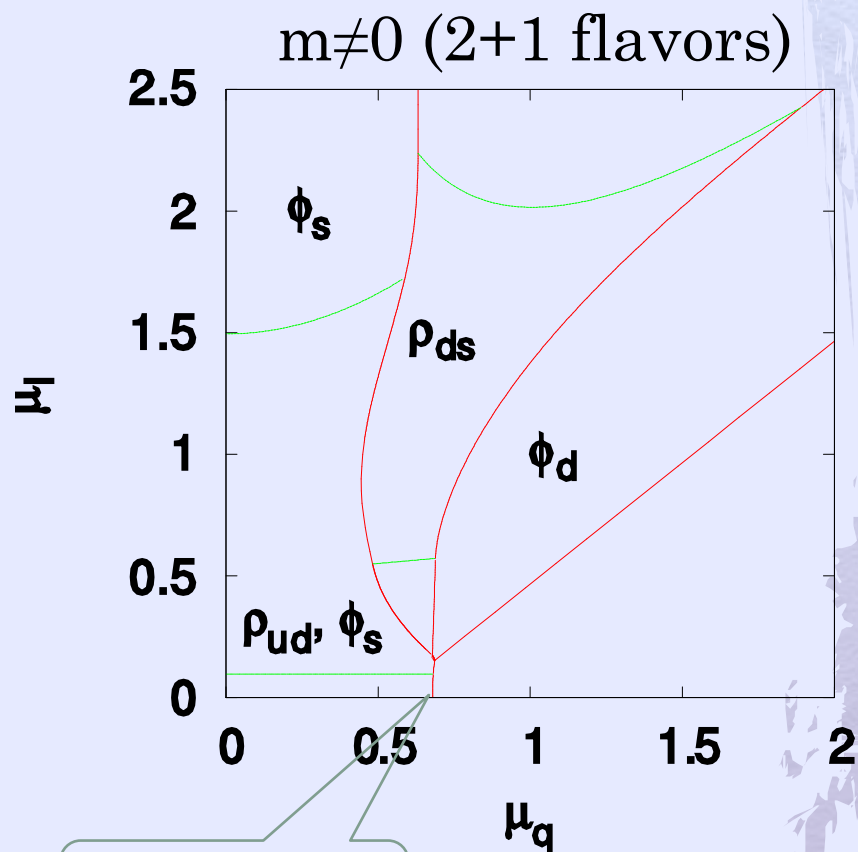
$$\det S = \phi_u \phi_d \phi_s + \rho_{ud}^2 \phi_s + \rho_{ds}^2 \phi_u + \rho_{su}^2 \phi_d$$

- カイラル凝縮とメソン凝縮も混合: 同時相転移
- カイラル凝縮とメソン凝縮の共存がより安定化

$\mu_q$ - $\mu_I$ 平面(@ $\mu_Y=0$ )



$\rho$ と $\phi_s$ の同時  
相転移



同時カイラル  
相転移

# Conclusion

- U(1)アノマリーを持ったChRM模型を有限アイソスピン・Hypercharge化学ポテンシャルに拡張
- $N_f=2$ 
  - アノマリー項はu,dカイラル凝縮を混合
    - (小さな $\mu_I$ に対し)両者の相転移は同時
    - T- $\mu$ 平面上の臨界点は1つ
- $N_f=3$ 
  - アノマリー項はu,d,sカイラル凝縮を混合
    - 小さな非対称性に対して相転移は1回
    - 臨界点も1つ
  - さらに、カイラル凝縮とメソン凝縮が混合
    - 両者の相転移が同時に起きる傾向
    - 両者の共存状態がより安定化

# 一般化された隠れた局所対称性に基づく 有限密度2-color QCDにおける ベクトルボソン質量の解析

名古屋大学大学院理学研究科 山岡 哲朗  
(共同研究者: 原田 正康、野中 千穂)

---

M.Harada, C.Nonaka, T.Yamaoka, Phys. Rev. D 81, 096003 (2010).

---

《2010 熱場の量子論とその応用》

# 研究の動機

## ◎興味があること

➤ハドロンの質量の起源 ⇔ カイラル対称性回復の機構



~~符号問題~~

➤有限温度・密度でのQCDの相構造

## ◎有限密度2-color QCD

➤有限密度中の低エネルギー有効模型の一般的な議論ができる

➤模型の結果を格子QCDの計算結果と比較できる

## ◎本研究の目的

(一般化された)隠れた局所対称性

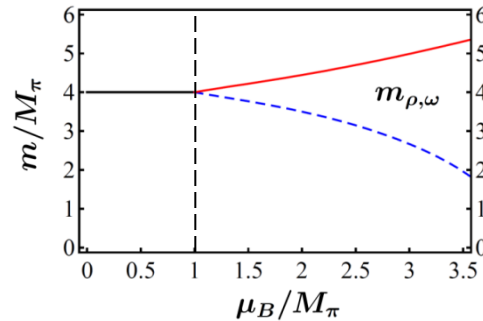
➤カイラル対称性を尊重する有効模型を用いて、  
ベクトル中間子の質量密度依存性を解析する



➤「カイラル対称性」によって、質量の振る舞いがどこまで決まるか？

# 結果

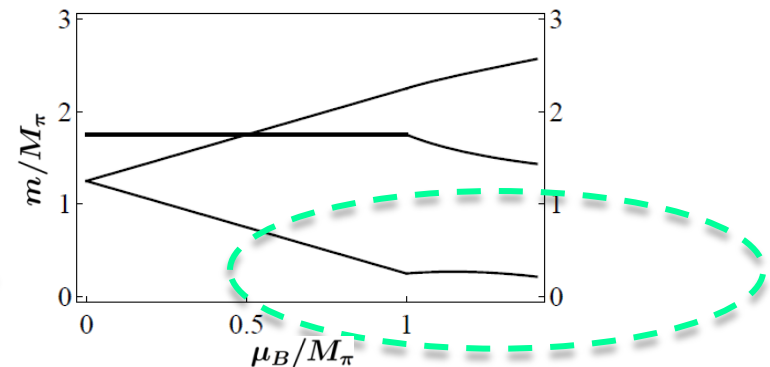
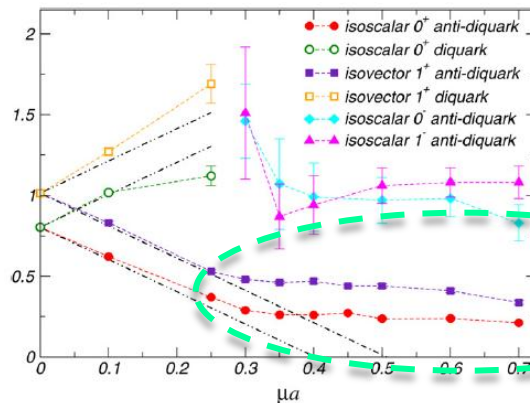
## ◎ $\pi$ 中間子、ベクトル中間子を含む有効模型



➤有限密度中で $\rho$ の質量が変化する

➤ $U(1)_B$ 破綻相におけるバリオン荷を持つベクトル中間子の混合と $m_\rho$ 、 $m_\omega$ が関係！

## ◎ $\pi$ 中間子、ベクトル中間子、軸性ベクトル中間子を含む有効模型



S.Hands, P.Sitch, J-I.Skullerud, Phys. Let. B 662, 405 (2008).

➤格子QCD計算の結果 (の一部) を再現

# 有限密度における アンダーソン・ヒッグス機構

濱 祐介

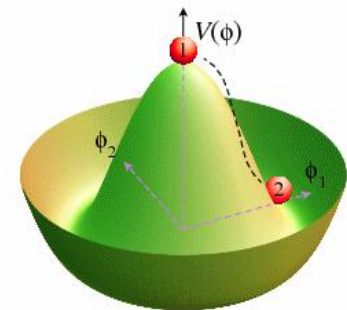
(東京大学大学院理学系研究科物理学専攻)

共同研究者

初田 哲男 (東京大学)

内野 瞬 (東京大学)

# 研究の背景



## 対称性の自発的破れ(SSB)の例

| 系                       | SSB<br>パターン                                  | NG<br>ボソン | NG<br>ボソン<br>総数 | 分散関係                             | 種別と<br>個数                               |
|-------------------------|----------------------------------------------|-----------|-----------------|----------------------------------|-----------------------------------------|
| 零質量<br>QCD              | $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$ | パイオン      | 3               | $E(k) \sim k$                    | Type I $\times 3$                       |
| 反強磁性                    | $O(3) \rightarrow (2)$                       | マグノン      | 2               | $E(k) \sim k$                    | Type I $\times 2$                       |
| 強磁性                     | $O(3) \rightarrow (2)$                       | マグノン      | 1               | $E(k) \sim k^2$                  | Type II $\times 1$                      |
| 有限密度<br>Goldstone<br>模型 | $U(2) \rightarrow (1)$                       | NG<br>ボソン | 2               | $E(k) \sim k$<br>$E(k) \sim k^2$ | Type I $\times 1$<br>Type II $\times 1$ |

Nielsen-Chadha不等式  
(1976)

Type I :  $E(k) \sim k$

Type II :  $E(k) \sim k^2$

$\#(\text{Type I}) + \#(\text{Type II}) \leq \#(\text{破れた生成子の数})$

## 研究の目的

カラー超伝導への応用を視野に入れて、Type II の NGボソンを含む有限密度アンダーソン・ヒッグス機構について調べる。

# 有限密度( $\mu \neq 0$ )アンダーソン・ヒッグス機構

有限密度 SU(2) Higgs-Kibble 模型:

- ・NGボソン数(2)とゲージ場の総数(3)にミスマッチ。
- ・NGボソン(Type II)は如何にゲージ場に吸収されるか？

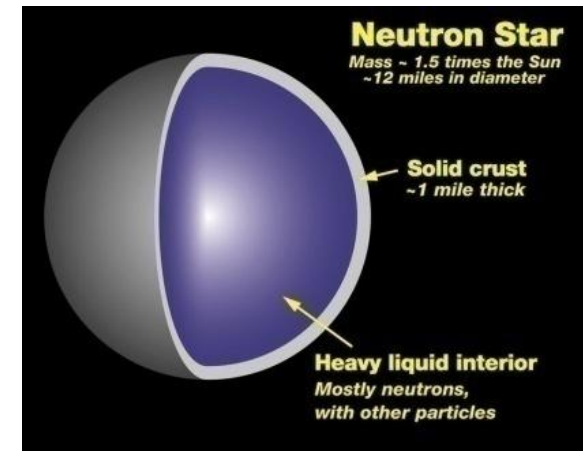


## 結果

| 場     | $g=0$<br>$\mu=0$ | $g=0$<br>$\mu \neq 0$     | $g \neq 0$<br>$\mu \neq 0$ |
|-------|------------------|---------------------------|----------------------------|
| ゲージ場  | $2 \times 3$     | $2 \times 3$              | $3 \times 3$               |
| NGボソン | 3 (Type I)       | 1 (Type I)<br>1 (Type II) | なし                         |
| 有質量場  | 1                | 2                         | 1                          |

**結論:** 本来3つであった零質量NGボソンのうちの1つが有質量になってしまっているものの、ちゃんとゲージ場がこの有質量粒子も吸収している。

## 展望



カラー超伝導  
への応用

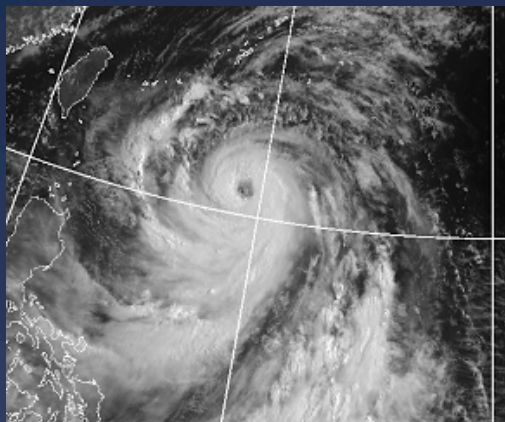


# カラー超伝導における非可換渦と環境の トポロジカルな相互作用

東京大学 広野雄士

共同研究者: 金澤拓也(東京大)、新田宗土(慶応大)

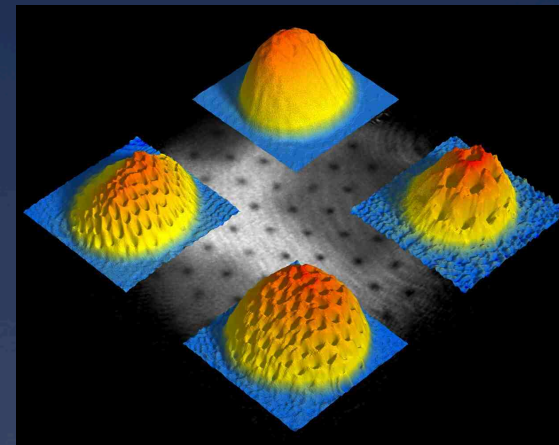
# 様々な渦



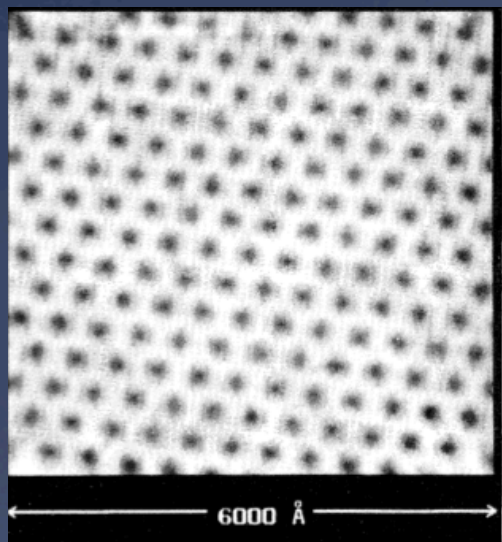
台風  
©JMA



アンドロメダ銀河



超流動体における渦  
Ketterle, et al.



第二種超伝導体における渦  
Hess, et al.

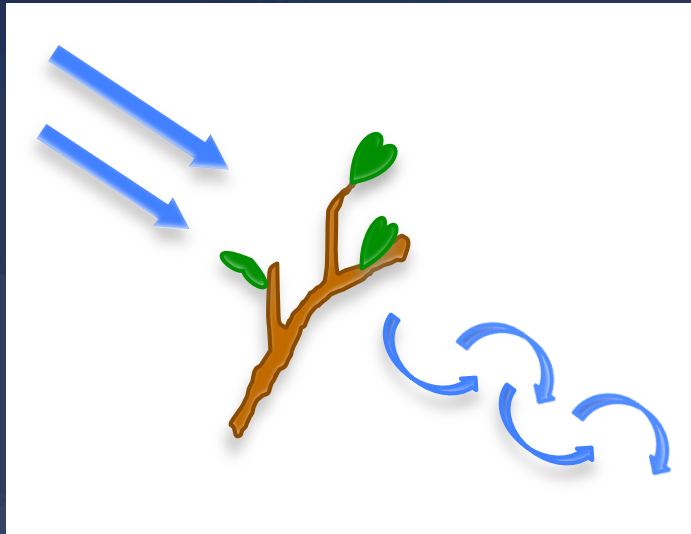


鳴門海峡の渦潮

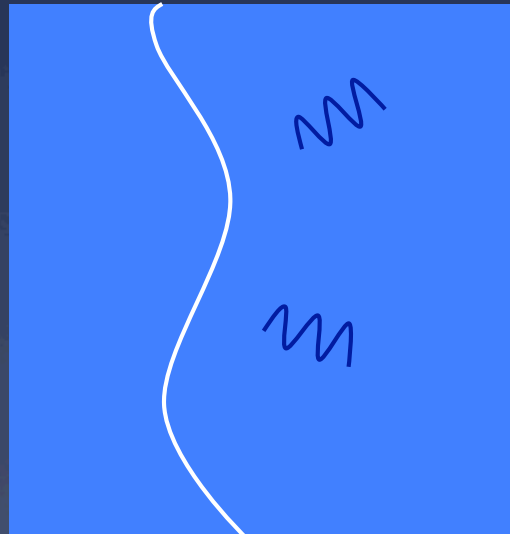


渦戦士エディ

# 渦が動くと"phonon"を放出する



カルマン渦からの音の放出



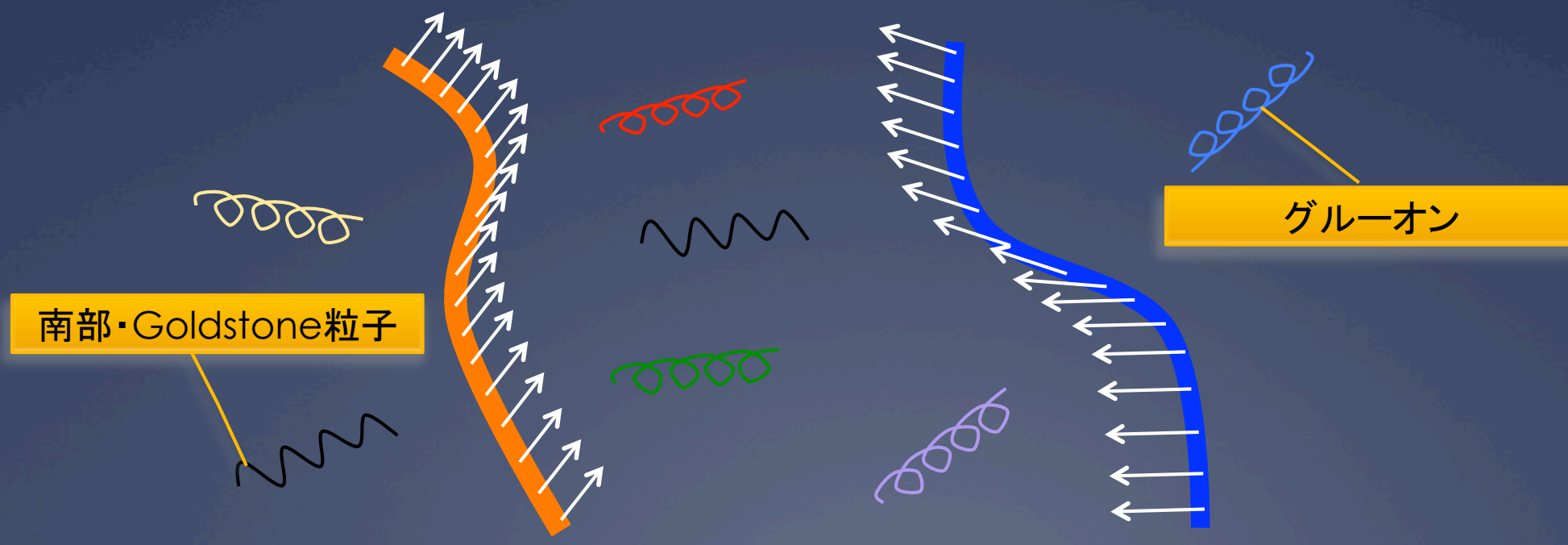
超流動中を移動する量子渦



バイクに乗って移動する  
渦戦士エディ

# カラー超伝導(カラー・フレイバー・ロッキング (CFL)相)における渦

- \* 超流動渦 量子化された循環を持つ
- \* 超伝導渦 カラーの磁束を伴う
- \* CFL相に残っている対称性  $H = SU(3)$  が非可換群  
渦が内部自由度( $CP^2$ )を持つ



# Analysis of Fermionic Soft Mode with Resummed Perturbation Theory

Yoshimasa Hidaka, Daisuke Satow, Teiji Kunihiro  
(Kyoto Univ.)



# Introduction

- Massless boson-fermion system.

Perturbation at finite  $T$  yields several collective modes.

In **bosonic** sector, hydro mode exists in infrared region.

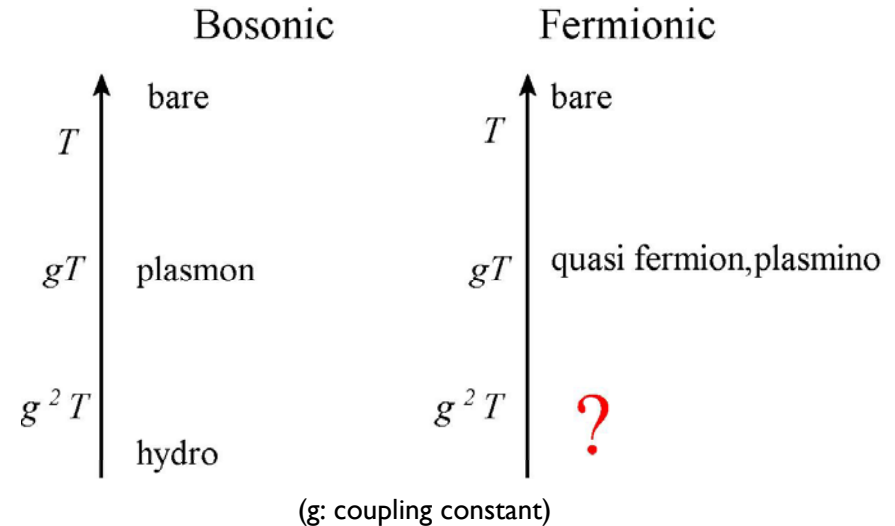
How about **fermionic** sector in infrared region ( $\ll g^2 T$ )?

This region was not investigated because of infrared singularity.

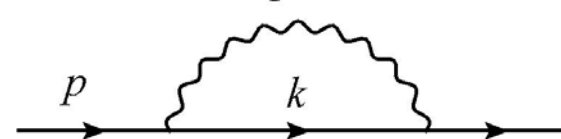
(An naïve perturbation, called Hard Thermal Loop (HTL) approximation, is infrared divergent)

→ Resummation is necessary.

(cf: resummation is necessary also in computing transport coefficient: S. Jeon, PRD **52**, 3591 (1995)  
Y. Hidaka, T. Kunihiro, to be submitted.)

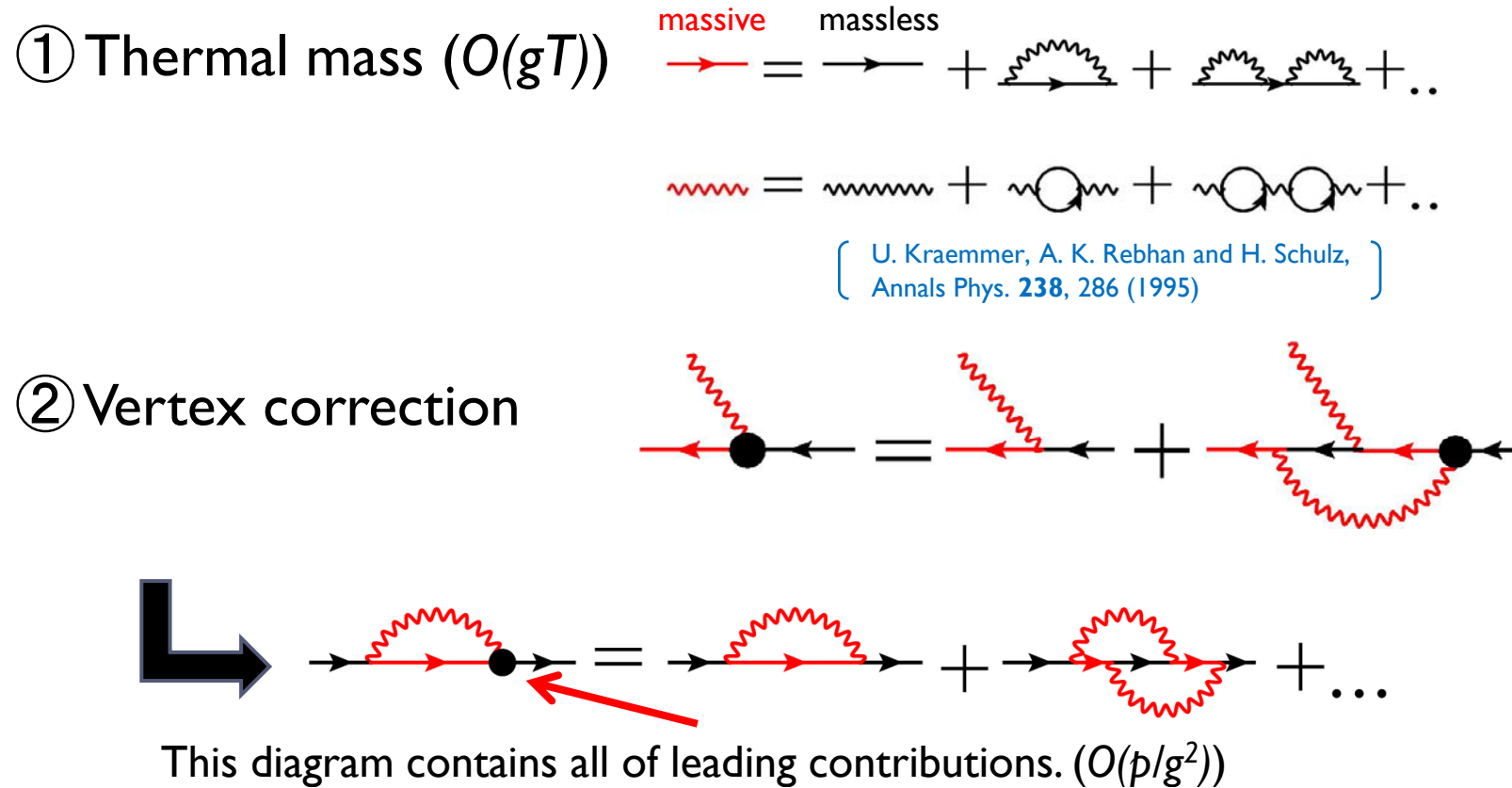


$$\frac{k}{k^2(k-p)^2} = \left( \frac{1}{(k-p)^2} - \frac{1}{k^2} \right) \frac{k}{2p \cdot k - p^2} \xrightarrow{p \rightarrow 0} \infty$$



# Resummation

QED, Landau gauge.

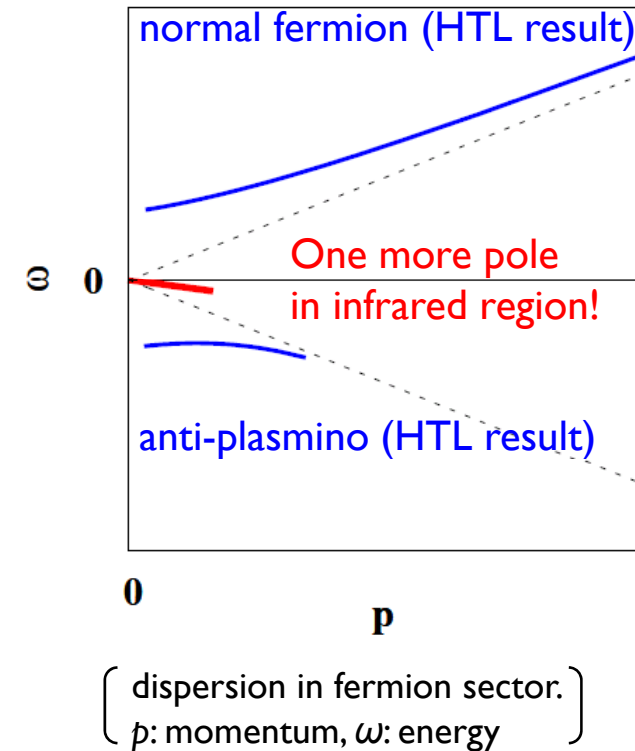


# Results

## One more pole appears!

- ▶ Dispersion:  $\omega = -|p|/3 < 0$   
(anti-fermion hole like?)  
(cf: anti-plasmino)

- ▶ Residue:  $O(g^2)$   
(cf: hydro mode:  $O(g^2)$ )



HTL results ( $\sim gT$ ) + Ours ( $\ll g^2T$ )  $\rightarrow$  3 collective modes

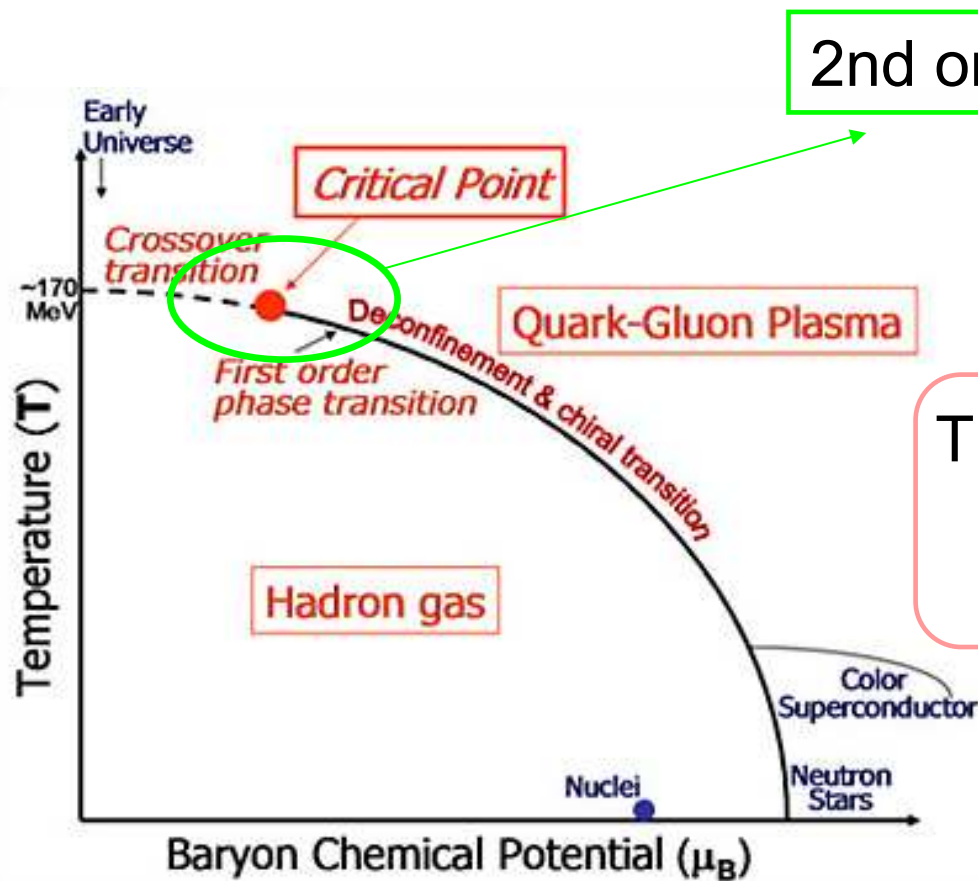


Critical Dynamics  
near QCD critical point  
based on Nonlinear Langevin equation

Y. Minami

T. Kunihiro

# QCD phase diagram



2nd order phase transition point



The correlation length diverges

$$\xi \rightarrow \infty$$

# The bulk viscosity near the QCD CP

$$\zeta \sim \xi^{0.17} \quad \xi \rightarrow \infty$$

F. Karsch, D. Kharzeev and K. Tuchin, Phys. Lett. B663 (2008), 217.

## • Refutable arguments

G. D. Moore and O. Saremi, J. High Energy Phys. 09 (2008), 015.

C. Sasaki and K. Redlich, Nucl. Phys. A832 (2010), 62.  $\zeta \rightarrow \text{finite}$

$$\zeta \rightarrow ?$$

# Critical behavior of transport coefficients

Nonlinear Langevin eq. + Renormalization group

- liquid-gas CP

NL Langevin eq.  $\rightarrow$  Extended Navier-Stokes eq.

- QCD CP

Extended Landau eq. + Renormalization group

# Results

- QCD CP

The bulk conductivity:  $\zeta \sim$  計算中

The thermal conductivity:  $\lambda \sim \xi^{0.95}$

The shear viscosity:  $\eta \sim \xi^{0.052}$

# Relativistic Dissipative Hydrodynamics with Conserved Currents and Onsager Reciprocal Relations

Akihiko Monnai

Department of Physics, The University of Tokyo

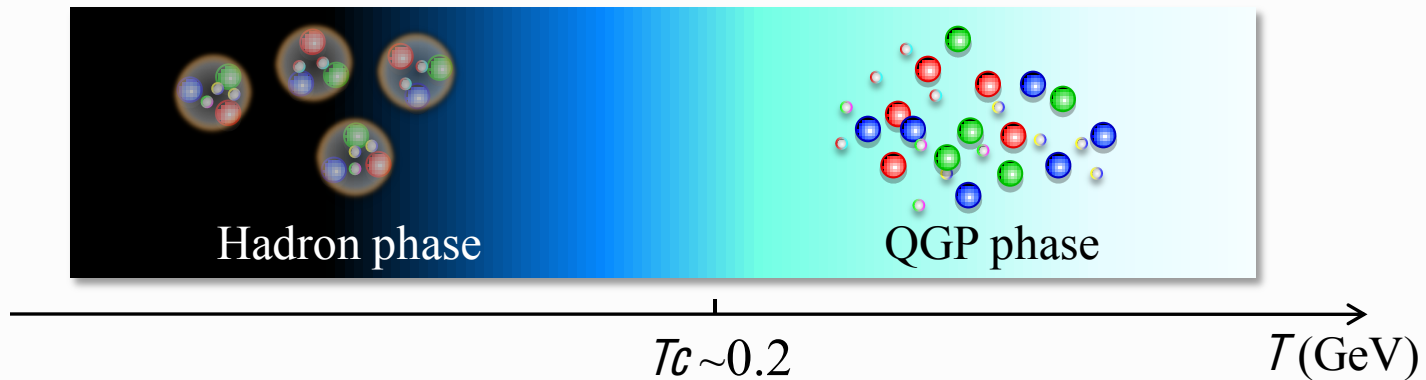
Collaborator: Tetsufumi Hirano

**Thermal Quantum Field Theory and Their Applications 2010**

Aug 30<sup>th</sup> - Sep 1<sup>st</sup> 2010, Yukawa Institute for Theoretical Physics

# Introduction

- Quark-gluon plasma (QGP) at relativistic heavy ion collisions



- RHIC experiments (2000-)

$$\sqrt{s_{NN}} = 200(\text{GeV})$$

Well-described in **relativistic ideal hydrodynamic models**

⇒ Discrepancies when lattice-based EOS is used; viscous effects?

- LHC experiments (2009-)

$$\sqrt{s_{NN}} = 5500(\text{GeV})$$

Asymptotic freedom -> *Less strongly-coupled* QGP?

⇒ **Relativistic dissipative hydrodynamics** is the key

# Overview

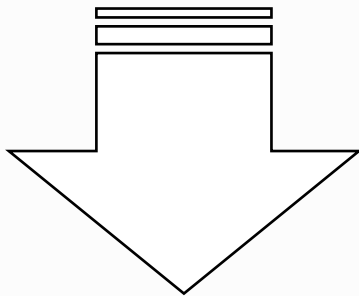
- We formulate dissipative hydrodynamics for systems with **multi-component/conserved currents** (e.g. QGP)

## START

Energy-momentum conservation  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

Charge conservations  $\partial_\mu N_J^\mu = 0$

Law of increasing entropy  $\partial_\mu s^\mu \geq 0$



Moment equations

$$\partial_\alpha I^{\mu\nu\alpha} = Y^{\mu\nu} , \quad \partial_\alpha I_J^{\mu\alpha} = Y_J^\mu$$

*Generalized* Grad's moment method

$$\delta f^i = -f_0^i (1 \pm f_0^i) (p_i^\mu \sum_J q_i^J \varepsilon_\mu^J + p_i^\mu p_i^\nu \varepsilon_{\mu\nu})$$

## GOAL

EOM for dissipative currents  $\Pi, W^\mu, \pi^{\mu\nu}, V_J^\mu$

➤➤ Onsager reciprocal relations: **satisfied**



# Results

## ■ Dissipative hydrodynamic equations

$$\begin{aligned}
 \Pi &= -\zeta \nabla_\mu u^\mu - \zeta_{\Pi \delta e} D \frac{1}{T} + \sum_J \zeta_{\Pi \delta n_J} D \frac{\mu_J}{T} - \tau_\Pi D \Pi + \sum_J \chi_{\Pi \Pi}^{aJ} \Pi D \frac{\mu_J}{T} + \chi_{\Pi \Pi}^b \Pi D \frac{1}{T} + \chi_{\Pi \Pi}^c \Pi \nabla_\mu u^\mu + \chi_{\Pi \pi} \pi_{\mu\nu} \nabla^{(\mu} u^{\nu)} \\
 &+ \sum_J \chi_{\Pi W}^{aJ} W_\mu \nabla^\mu \frac{\mu_J}{T} + \chi_{\Pi W}^b W_\mu \nabla^\mu \frac{1}{T} + \chi_{\Pi W}^c W_\mu D u^\mu + \chi_{\Pi W}^d \nabla^\mu W_\mu + \sum_{J,K} \chi_{\Pi V_J}^{aK} V_\mu^J \nabla^\mu \frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi_{\Pi V_J}^b V_\mu^J \nabla^\mu \frac{1}{T} + \sum_J \chi_{\Pi V_J}^c V_\mu^J D u^\mu + \sum_J \chi_{\Pi V_J}^d \nabla^\mu V_\mu^J \\
 W^\mu &= -\kappa_W \left( \frac{1}{T} D u^\mu + \nabla^\mu \frac{1}{T} \right) + \sum_J \kappa_{W V_J} \nabla^\mu \frac{\mu_J}{T} - \tau_W \Delta^{\mu\nu} D W_\nu + \sum_J \chi_{W W}^{aJ} W^\mu D \frac{\mu_J}{T} + \chi_{W W}^b W^\mu D \frac{1}{T} + \chi_{W W}^c W^\mu \nabla_\nu u^\nu + \chi_{W W}^d W^\nu \nabla_\nu u^\mu + \chi_{W \pi}^e W^\nu \nabla^\mu u_\nu \\
 &- \sum_J \tau_{W V_J} \Delta^{\mu\nu} D V_\nu^J + \sum_{J,K} \chi_{W V_J}^{aK} V_J^\mu D \frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi_{W V_J}^b V_J^\mu D \frac{1}{T} + \sum_J \chi_{W V_J}^c V_J^\mu \nabla_\nu u_\nu + \sum_J \chi_{W V_J}^d V_J^\nu \nabla_\nu u^\mu + \sum_J \chi_{W V_J}^e V_J^\nu \nabla^\mu u_\nu \\
 &+ \sum_J \chi_{W \pi}^{aJ} \pi^{\mu\nu} \nabla_\nu \frac{\mu_J}{T} + \chi_{W \pi}^b \pi^{\mu\nu} \nabla_\nu \frac{1}{T} + \chi_{W \pi}^c \pi^{\mu\nu} D u_\nu + \chi_{W \pi}^d \Delta^{\mu\nu} \nabla^\rho \pi_{\nu\rho} + \sum_J \chi_{W \Pi}^{aJ} \Pi \nabla^\mu \frac{\mu_J}{T} + \chi_{W \Pi}^b \Pi \nabla^\mu \frac{1}{T} + \chi_{W \Pi}^c \Pi D u^\mu + \chi_{W \Pi}^d \nabla^\mu \Pi \\
 V_J^\mu &= \sum_K \kappa_{V_J V_K} \nabla^\mu \frac{\mu_K}{T} - \kappa_{V_J W} \left( \frac{1}{T} D u^\mu + \nabla^\mu \frac{1}{T} \right) - \sum_K \tau_{V_J V_K} \Delta^{\mu\nu} D V_\nu^K + \sum_{K,L} \chi_{V_J V_K}^{aL} V_K^\mu D \frac{\mu_L}{T} + \sum_K \chi_{V_J V_K}^b V_K^\mu D \frac{1}{T} + \sum_K \chi_{V_J V_K}^c V_K^\mu \nabla_\nu u^\nu + \sum_K \chi_{V_J V_K}^d V_K^\nu \nabla_\nu u^\mu + \sum_K \chi_{V_J V_K}^e V_K^\nu \nabla^\mu u_\nu \\
 &- \tau_{V_J W} \Delta^{\mu\nu} D W_\nu + \sum_K \chi_{V_J W}^{aK} W^\mu D \frac{\mu_K}{T} + \chi_{V_J W}^b W^\mu D \frac{1}{T} + \chi_{V_J W}^c W^\mu \nabla_\nu u_\nu + \chi_{V_J W}^d W^\nu \nabla_\nu u^\mu + \chi_{V_J W}^e W^\nu \nabla^\mu u_\nu \\
 &+ \sum_K \chi_{V_J \pi}^{aK} \pi^{\mu\nu} \nabla_\nu \frac{\mu_K}{T} + \chi_{V_J \pi}^b \pi^{\mu\nu} \nabla_\nu \frac{1}{T} + \chi_{V_J \pi}^c \pi^{\mu\nu} D u_\nu + \chi_{V_J \pi}^d \Delta^{\mu\nu} \nabla^\rho \pi_{\nu\rho} + \sum_K \chi_{V_J \Pi}^{aK} \Pi \nabla^\mu \frac{\mu_K}{T} + \chi_{V_J \Pi}^b \Pi \nabla^\mu \frac{1}{T} + \chi_{V_J \Pi}^c \Pi D u^\mu + \chi_{V_J \Pi}^d \nabla^\mu \Pi \\
 \pi^{\mu\nu} &= 2\eta \nabla^{(\mu} u^{\nu)} - \tau_\pi D \pi^{(\mu\nu)} + \sum_J \chi_{\pi \pi}^{aJ} \pi^{\mu\nu} D \frac{\mu_J}{T} + \chi_{\pi \pi}^b \pi^{\mu\nu} D \frac{1}{T} + \chi_{\pi \pi}^c \pi^{\mu\nu} \nabla_\rho u^\rho + \chi_{\pi \pi}^d \pi^{\rho(\mu} \nabla_\rho u^{\nu)} + \chi_{\pi \Pi} \Pi \nabla^{(\mu} u^{\nu)} \\
 &+ \sum_J \chi_{\pi W}^{aJ} W^{(\mu} \nabla^{\nu)} \frac{\mu_J}{T} + \chi_{\pi W}^b W^{(\mu} \nabla^{\nu)} \frac{1}{T} + \chi_{\pi W}^c W^{(\mu} D u^{\nu)} + \chi_{\pi W}^d \nabla^{(\mu} W^{\nu)} + \sum_{J,K} \chi_{\pi V_J}^{aJ} V_J^{(\mu} \nabla^{\nu)} \frac{\mu_K}{T} + \sum_J \chi_{\pi V_J}^b V_J^{(\mu} \nabla^{\nu)} \frac{1}{T} + \sum_J \chi_{\pi V_J}^c V_J^{(\mu} D u^{\nu)} + \sum_J \chi_{\pi V_J}^d \nabla^{(\mu} V_J^{\nu)}
 \end{aligned}$$



1. **Cross terms** satisfy Onsager reciprocal relations
2. **Relaxation terms** can make the formalism causal
3. Frame-independent