

非平衡THERMO FIELD DYNAMICS における正準量子化に基づいた 相対論的中性スカラー場

2011年8月23日(火)

基研研究会「熱場の量子論とその応用」

水谷友一,

稲垣知宏^A, 中村祐介^B, 山中由也^B

広大理, 広大総^A, 早大基幹理工^B

Y.Mizutani, T.Inagaki, Y.Nakamura and Y.Yamanaka, (2011)arXiv:1105.5952.

導入

◆ Thermo Field Dynamics

Y.Takahashi and H.Umezawa (1974)

◆ 正準量子化に基づいて構築された実時間形式の熱場の量子論

◆ 振動子; tilde振動子の導入、 $\{a, a^\dagger\} \rightarrow \{a, a^\dagger\}, \{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\},$

$$\left[[a_p, a_k^\dagger] = [\tilde{a}_p, \tilde{a}_k^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}), \quad [a_p, \tilde{a}_k^\dagger] = 0, \right]$$

◆ 熱的Bogoliubov変換

$$\xi_p^\alpha(t) = B(n_p)^{\alpha\beta} a_p^\beta(t),$$

$$\bar{\xi}_p^\alpha(t) = \bar{a}_p^\beta(t) B^{-1}(n_p)^{\beta\alpha},$$

◆ 二重項表現

$$\bar{a}_p^\alpha = \begin{pmatrix} a_p^\dagger & -\tilde{a}_p \end{pmatrix}, \quad a_p^\alpha = \begin{pmatrix} a_p \\ \tilde{a}_p^\dagger \end{pmatrix},$$

◆ 熱的Bogoliubov行列

$$B(n_p) = \begin{pmatrix} 1 + n_p & -n_p \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

◆ ξ -振動子; $\left[[\xi_p, \xi_k^\dagger] = [\tilde{\xi}_p, \tilde{\xi}_k^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}), \quad [\xi_p, \tilde{\xi}_k^\dagger] = 0, \right]$

◆ 熱的真空状態; $\xi_p|\theta\rangle = \tilde{\xi}_p|\theta\rangle = 0,$

◆ hat-Hamiltonian; $\hat{H} = H - \tilde{H},$

・チルダ共役則

$$\left[A_1, A_2 \text{ ; 演算子、} c_1, c_2 \text{ ; c数} \right]$$

$$(A_1 A_2)^\sim = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2,$$

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)^\sim = c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2,$$

$$(\tilde{A})^\sim = A.$$

非平衡Thermo Field Dynamics

◆ Bogoliubov parameter;

Cf.有限温度系; Bose分布

非平衡系(空間一様な系)

時間依存する関数、 $n_p(t)$

T. Arimitsu and H. Umezawa (1985)

◆ 正準量子化に基づく場の導入

H.Umezawa and Y.Yamanaka (1988)

TFDに現れる場

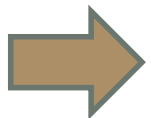
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_a^\alpha(x), \bar{\phi}_a^\alpha(x) ; a_p^\alpha, \bar{a}_p^\alpha \text{ 振動子で展開された場} \\ \phi_\xi^\alpha(x), \bar{\phi}_\xi^\alpha(x) ; \xi_p^\alpha, \bar{\xi}_p^\alpha \text{ 振動子で展開された場} \end{array} \right.$$

有限温度系と
等しい自由場; $\xi_p(t) \xrightarrow[\text{同時刻交換関係を保つ}]{\text{熱的 Bogoliubov 変換}} a_p(t)$

同時刻交換関係

$$[\bar{\phi}_\xi^\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\xi^\beta(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta^{\alpha\beta}.$$

$$[\bar{\phi}_a^\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_a^\beta(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta^{\alpha\beta}.$$



$a_p(t)$ のエネルギー固有値



$\dot{n}_p(t)$ の寄与

非平衡Thermo Field Dynamics

◆ 相互作用表示

◆ 摂動伝播関数

$$\left[u(t_x, t_y) = \exp \left(-i \int_{t_y}^{t_x} dt_s \hat{H}_I(t_s) \right), \right]$$

$$D_H^{\alpha\beta}(x, y) = \langle \theta | T[\phi_a^\alpha(x) \bar{\phi}_a^\beta(y) u(\infty, -\infty)] | \theta \rangle,$$

$\phi_a^\alpha(x), \bar{\phi}_a^\alpha(x) \longleftarrow$ 量子補正の影響を受ける

◆ 自己無撞着なくくりこみ条件；

$\dot{n}_p(t)$ を含むカウンター項で量子補正の一部をくりこむ

→ Boltzmann方程式が得られる

相対論的場に対する扱い方？

目的

- ◆ 正準量子化に基づいた非平衡Thermo Field Dynamics の方法を相対論的な中性スカラー場に応用し、自己無撞着なくくりこみ条件よりBoltzmann方程式を導出する。

相対論的場の導入

◆ ξ 振動子の張る場：有限温度系と同じ自由場で導入

$$\begin{cases} \phi_\xi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (\xi_p e^{-i\omega_p t_x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \xi_p^\dagger e^{i\omega_p t_x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \\ \pi_\xi(x) = (-i) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (\xi_p e^{-i\omega_p t_x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - \xi_p^\dagger e^{i\omega_p t_x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \end{cases}$$

◆ エネルギー固有値； $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$,

◆ 熱的二重項表現で表した中性スカラー一場

$$\begin{cases} \phi_\xi^\alpha(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ \begin{pmatrix} \xi_p \\ \bar{\xi}_p^\dagger \end{pmatrix} e^{-i\omega_p t_x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} \xi_p^\dagger \\ \xi_p \end{pmatrix} e^{i\omega_p t_x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right\} \\ = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ \xi_p^\alpha e^{-i\omega_p t_x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + (\tau_3 \bar{\xi}_p^T)^\alpha e^{i\omega_p t_x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right\}, \\ \pi_\xi^\alpha(x) = (-i) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left\{ \xi_p^\alpha e^{-i\omega_p t_x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - (\tau_3 \bar{\xi}_p^T)^\alpha e^{i\omega_p t_x} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right\}, \\ \bar{\phi}_\xi^\alpha \equiv \phi_\xi^{\beta\dagger} \tau_3^{\beta\alpha} = \phi_\xi^\beta \tau_3^{\beta\alpha}, \quad \bar{\pi}_\xi^\alpha = \pi_\xi^\beta \tau_3^{\beta\alpha}, \quad \leftarrow \left(\begin{array}{l} \text{Cf. } \bar{\xi}^\alpha = (\xi^\beta)^\dagger \tau_3^{\beta\alpha}, \\ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{array} \right) \end{cases}$$

◆ 同時刻交換関係； $[\bar{\phi}_\xi^\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_\xi^\beta(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta^{\alpha\beta}$,

$a_p(t)$ 振動子の時間依存性

◆ 正振動項の時間依存性; $\xi_p^\alpha(t) = \xi_p^\alpha e^{-i\omega_p t}$,

◆ 時間発展方程式: $\partial_t \xi_p^\alpha(t) = -i\omega_p \xi_p^\alpha(t)$,

↓ $\left[\text{熱的Bogoliubov変換; } \xi_p^\alpha e^{-i\omega_p t} = B(n_p(t))^{\alpha\beta} a_p^\beta(t), \right]$

$$\partial_t a_p^\alpha(t) = -i(\omega_p - i\dot{n}_p(t)T_0)^{\alpha\beta} a_p^\beta(t), \quad \left(T_0^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

➡ $\Omega_p^{\alpha\beta}(t) \equiv \omega_p \delta^{\alpha\beta} - i\dot{n}_p(t)T_0^{\alpha\beta},$

振動子の時間依存性: $a_p^\alpha(t_x) = \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \Omega_p(t_s) \right\}^{\alpha\beta} a_p^\beta.$

◆ 負振動項の時間依存性; $\partial_t \bar{\xi}_p^\alpha(t) = i\omega_p \bar{\xi}_p^\alpha(t).$

→ $\bar{a}_p^\alpha(t_x) = \bar{a}_p^\beta \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \Omega_p(t_s) \right\}^{\beta\alpha}.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{正振動項} \\ \text{負振動項} \end{array} \right\} \rightarrow \text{同じエネルギー固有値によって表される.}$
 1つの場にまとめる事が出来る.

相対論的中性スカラー場

◆ a 振動子の張る場

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_a^\alpha(x) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ a_p^\alpha(t_x) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + (\tau_3 \bar{a}_p(t_x)^T)^\alpha e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right\}, \\ \pi_a^\alpha(x) \equiv (-i) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} \left\{ a_p^\alpha(t_x) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - (\tau_3 \bar{a}_p(t_x)^T)^\alpha e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right\}, \\ \text{同時刻交換関係; } [\bar{\phi}_a^\alpha(t, \mathbf{x}), \pi_a^\beta(t, \mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta^{\alpha\beta}. \end{array} \right.$$

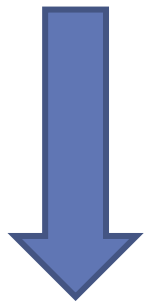
◆ ϕ_a^α 場 に対する非摂動ハミルトニアン

$$\begin{aligned} \hat{H}_Q = \int d^3\mathbf{x} & \left[\frac{1}{2} \bar{\pi}_a^\alpha(x) \left(1 - i \frac{\dot{n}_{|\nabla_x|}(t_x)}{\sqrt{-\nabla_x^2 + m^2}} T_0 \right)^{\alpha\beta} \pi_a^\beta(x) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{\phi}_a^\alpha(x) \left(1 - i \frac{\dot{n}_{|\nabla_x|}(t_x)}{\sqrt{-\nabla_x^2 + m^2}} T_0 \right)^{\alpha\beta} (-\nabla_x^2 + m^2) \phi_a^\beta(x) \right]. \end{aligned}$$

NETFDのハミルトニアン

◆ NETFDのhat-Hamiltonian;

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int},$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{有限温度系の非摂動ハミルトニアン、} \\ \hat{H}_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \bar{\pi}_a^\alpha(x) \pi_a^\alpha(x) + \frac{1}{2} \bar{\phi}_a^\alpha(x) (-\nabla_x^2 + m^2) \phi_a^\alpha(x) \right], \\ \text{相互作用ハミルトニアン; } \hat{H}_{int} \end{array} \right.$$

$$\hat{H} = \hat{H}_Q + \hat{H}_I. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{非摂動ハミルトニアン; } \hat{H}_Q = \hat{H}_0 - \hat{Q}, \\ \text{相互作用ハミルトニアン; } \hat{H}_I = \hat{H}_{int} + \hat{Q}, \end{array} \right.$$

◆ 熱的カウンタ一項; $\hat{Q} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \bar{\pi}_a^\alpha(x) i \frac{\dot{n}_{|\nabla_x|}(t_x)}{\sqrt{-\nabla_x^2 + m^2}} T_0^{\alpha\beta} \pi_a^\beta(x) \right.$

$$\left. + \frac{1}{2} \bar{\phi}_a^\alpha(x) i \frac{\dot{n}_{|\nabla_x|}(t_x)}{\sqrt{-\nabla_x^2 + m^2}} T_0^{\alpha\beta} (-\nabla_x^2 + m^2) \phi_a^\beta(x) \right].$$

自己無撞着なくりこみ条件

◆ 熱的伝播関数

H.Chu and H.Umezawa (1995)

$$D_H^{\alpha\beta}(x, y) = \langle \theta | T[\phi_a^\alpha(x) \bar{\phi}_a^\beta(y) u(\infty, -\infty)] | \theta \rangle$$

$$= B^{-1}(n_{|\nabla_x|}(t_x)) \begin{pmatrix} D_H^{11}(x-y) & d^{12}(x, y) \\ 0 & D_H^{22}(x-y) \end{pmatrix} B(n_{|\nabla_y|}(t_y)),$$

$$d^{12} \propto \langle \theta | \xi_H \tilde{\xi}_H | \theta \rangle \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{有限温度系; on-shell条件の下で摂動のLOは消える} \\ \cdot \text{熱的カウンター項も寄与} \end{array} \right.$$

◆ 自己無撞着なくりこみ条件

$$\lim_{t_x \rightarrow t_y} \left[\text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \times \text{---} \right]^{12} = 0,$$

熱的カウンター項 $\ni \dot{n}_p(t)$

→ Boltzmann 方程式

スカラー4点相互作用模型

◆ ハミルトニアン

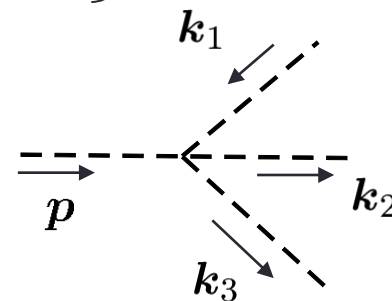
$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi_a(x) \pi_a(x) + \frac{1}{2} \phi_a(x) (-\nabla_x^2 + m^2) \phi_a(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right],$$

◆ 考慮した量子補正: 2-loopまで

$$\left(\text{---} \text{---} \text{---} \right)^{\alpha\beta}$$

◆ Boltzmann 方程式

$$\begin{aligned} \dot{n}_p(t_x) = & (-1) \frac{\lambda^2}{2} \int_{-\infty}^{t_x} dt_s \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{8\omega_p \omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} \\ & \times \left[\cos\{(\omega_p + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3})(t_x - t_s)\} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \right. \\ & \times \left\{ n_p(t_s) n_{k_1}(t_s) (1 + n_{k_2}(t_s)) (1 + n_{k_3}(t_s)) - (1 + n_p(t_s)) (1 + n_{k_1}(t_s)) n_{k_2}(t_s) n_{k_3}(t_s) \right\} \\ & \left. + \dots \right]. \end{aligned}$$



→ 2体2体散乱に対応するBoltzmann方程式が得られる

まとめ

- ◆ 非平衡Thermo Field Dynamics において相対論的な中性スカラー場を定義し, 熱的カウンター項を導入した.
- ◆ 4点スカラー場相互作用モデルから導かれた2-loop 量子補正項に対して, 熱的カウンター項を用いた自己無撞着なくくりこみ条件を課すことにより, Boltzmann方程式の導出を行った.
- ◆ 課題
 - ◆ 相対論的Dirac場に対する非平衡Thermo Field Dynamics の構築.
 - ◆ 空間に対して非等方な系への拡張.