

相対論的流体力学における オンサーガーの相反関係

南 佑樹（京大理）

日高 義将（理研）

もくじ

- 導入

相対論的流体力学

オンサーガーの相反関係

- 相対論的流体力学における

オンサーガーの相反関係

- まとめ

相対論的流体力学

粒子数、エネルギー、運動量の保存則

$$\partial_{\mu} N^{\mu} = 0 \quad \partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

粒子流: $N^{\mu} = nu^{\mu} + \nu^{\mu}$

エネルギー

運動量テンソル: $T^{\mu\nu} = (e + P)u^{\mu}u^{\nu} - Pg^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}$

$\nu^{\mu}(n, e, u^{\mu}), \tau^{\mu\nu}(n, e, u^{\mu})$: 散逸項
→いろいろ提案されてるがどれがいいのか、わからない。

Ref. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, (1959). C. Eckart, Phys. Rev. **58**, 919 (1940).
W. Israel and J. M. Stewart, Ann. Phys. (N.Y.) 118, 341 (1979).

フレーム

→ 流速の不定性

- ランダウフレーム

$$u^\mu \propto u_\nu T^{\mu\nu} \quad \text{エネルギー流}$$

- エッカルトフレーム

$$u^\mu \propto N^\mu \quad \text{粒子流}$$

等価？

ランダウフレーム  エッカルトフレーム

本当に等価か？

音波の減衰率

$$\Gamma_s^{Lan} \neq \Gamma_s^{TKO}$$

フレームによって可観測量が違う。

ランダウ方程式

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, (1959).

TKO方程式

(エッカルトフレーム)

K. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi,
Phys. Lett. B 646 (2007), 134.

cf.

$$\Gamma_s^{Lan} = \Gamma_s^{NR} - c_s^2 T_0 \left(\frac{2\lambda \alpha_P}{n_0 C_P} - \frac{\lambda}{e_0 + P_0} \right)$$

$$\Gamma_s^{TKO} = \Gamma_s^{NR} - \frac{\alpha_P c_s^2}{2n_0 C_p} (\lambda T_0 + 3\zeta')$$

Y.M. and I. Kunihiro, Prog. Theor. Phys. **122**, 881 (2009).

線形領域

平衡状態近く
の線形ゆらぎ



- ・見通しがいい。
- ・フレームの違いが見れる。

線形ランダウ方程式

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \delta \vec{v} - \lambda \left(\frac{n_0 T_0}{e_0 + P_0} \right)^2 \nabla^2 \left(\frac{\mu}{T} \right)$$

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} = -(e_0 + P_0) \nabla \cdot \delta \vec{v}$$

線形TKO方程式

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \delta \vec{v}$$

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} = -(e_0 + P_0) \nabla \cdot \delta \vec{v} + \lambda \nabla^2 T + 3\zeta' \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v})$$

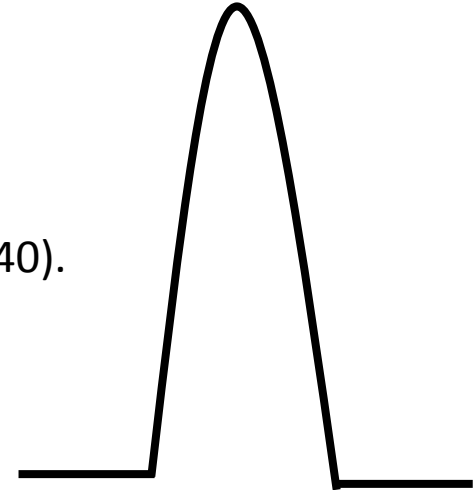
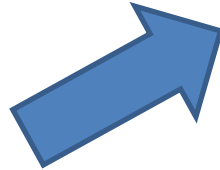
安定性

W. A. Hiscock and L. Lindblom, Phys. Rev. D 31, 725 (1985).

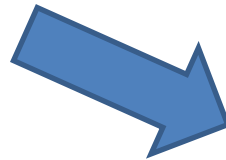
エックハルト方程式

C. Eckart, Phys. Rev. **58**, 919 (1940).

平衡状態近く
の線形ゆらぎ



発散！



ランダウ方程式

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, (1959).

緩和



オンサーガーの相反関係(1)

平衡状態 → 時間反転不変

詳細つり合い

ある過程: $A \rightarrow B$  逆過程: $\tilde{B} \rightarrow \tilde{A}$



オンサーガーの相反関係

L. Onsager, Phys. Rev. **37**, 405 (1931).

相対論的流体でも満たさなければならない。

オンサーガーの相反関係(2)

線形緩和則

熱力学ポテンシャル

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_{irr} = - \sum_j L_{ij} \frac{\delta(\beta H)}{\delta A_j}$$

不可逆変化

オンサーガー係数

A_j : 巨視変数のゆらぎ 流体の場合: $n, e, \vec{v}$

cf. 平衡分布: $P_{eq}(A) \propto \exp[-\beta H(A)]$

オンサーガーの相反関係(3)

L. Onsager, Phys. Rev. **37**, 405 (1931).

H. B. G. Casimir, Rev. Mod. Phys. **17**, 343 (1945)

相反関係

$$L_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j L_{ji}$$

$$\epsilon_j = 1 \text{ or } -1$$

時間反転した変数: $\tilde{A}_j = \epsilon_j A_j$

cf.

$$\tilde{n} = n, \quad \tilde{e} = e, \quad \tilde{v} = -v$$

目的

相対論的流体方程式

$$\partial_\mu N^\mu = 0$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

が相反関係

$$L_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j L_{ji}$$

を満たすか調べる。

調べる方程式

ランダウフレーム

ランダウ方程式

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, (1959).

エッカルトフレーム

エッカルト方程式 → 不安定

C. Eckart, Phys. Rev. **58**, 919 (1940).

TKO方程式 → 安定

K. Tsumura, T. Kunihiro and K. Ohnishi, Phys. Lett. B **646** (2007), 134.

K.Tsumura and T.Kunihiro, Phys. Lett. B **668**, 425 (2008).

線形ランダウ方程式

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \delta \vec{v} - \lambda \left(\frac{n_0 T_0}{e_0 + P_0} \right)^2 \nabla^2 \delta \left(\frac{\mu}{T} \right)$$

$$\frac{\partial \delta e}{\partial t} = -(e_0 + P_0) \nabla \cdot \delta \vec{v} + \text{散逸なし}$$

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \delta \vec{v})$$

相
対
論
的
効
果

添え字 δ : ゆらぎ

添え字 0 : 平衡値

λ : 熱伝導率

η : ずれ粘性率

ζ : 体積粘性率

オンサーガー係数の読み取り方

熱力学ポテンシャル必要

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_{irr} = - \sum_j L_{ij} \frac{\delta(\beta H)}{\delta A_j}$$

線形流体方程式から

ex.

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \delta \vec{v} - \lambda \left(\frac{n_0 T_0}{e_0 + P_0} \right)^2 \nabla^2 \delta \left(\frac{\mu}{T} \right)$$

熱力学ポテンシャル

時間反転性から

$$H(\delta n, \delta e, \delta v) = H(\delta n, \delta e) + H(\delta v)$$

グランドカノニカル分布
の粗視化から

$$H(\delta v) = \frac{A}{2}(\delta v)^2$$

A. Onuki, Phase Transition Dynamics (2007).

$$\frac{\delta(\beta H)}{\delta n} = -\delta\left(\frac{\mu}{T}\right) \quad \frac{\delta(\beta H)}{\delta e} = -T_0^2 \delta T$$

オンサーガー係数(1)

ランダウフレームの場合

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{nn} = \lambda \left(\frac{n_0 T_0}{e_0 + P_0} \right)^2 \nabla^2 \\ L_{vv}^{ij} = \frac{T_0 A^{-1}}{e_0 + P_0} \left[\delta_{ij} \partial_i \partial_j + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \partial_i \partial_j \right] \end{array} \right.$$

$$L_{vv}^{ij} = L_{vv}^{ji}$$

相反関係を満たしている。

オンサーガー係数(2)

エッカルトフレームの場合

TKO方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{ev}^{TKO} = 3T_0 A^{-1} \zeta' \frac{\partial}{\partial t} \nabla \\ L_{ve}^{TKO} = \frac{T_0^2 \lambda}{e_0 + P_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \end{array} \right.$$



$$L_{ev}^{TKO} \neq L_{ve}^{TKO}$$

相反関係を破る！

エッカルト方程式でも

$$L_{ev}^{Eckart} \neq L_{ve}^{Eckart}$$

まとめ

	相反関係
ランダウ方程式	○
TKO方程式	×
エッカルト方程式	×

エッカルトフレームは
時間反転性
がおかしい？

今後の展望

- 相反関係を破る理由の解明
- 二次の流体方程式はみたすのか？
- 線形領域でその他の性質

おわり



ランダウは間違えない？

Back up

$$\begin{aligned}
-\beta H_{hyd}(\delta e, \delta n) = \int d\mathbf{r} & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial e^2} \right) (\delta e(\mathbf{r}))^2 + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial e \partial n} \right) (\delta e(\mathbf{r})) (\delta n(\mathbf{r})) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial n^2} \right) (\delta n(\mathbf{r}))^2 \right]
\end{aligned}$$

A. Onuki, Phase Transition Dynamics (2007).

$$P_{gr a}(\Gamma) = \frac{1}{\Xi} \exp[-\beta \hat{H}(\Gamma) + \beta \mu \hat{N}(\Gamma)]$$

$$P(E,N)=\int d\Gamma \delta(\hat{H}-E)\delta(\hat{N}-N)P_{gr a}(\Gamma)$$

$$\begin{aligned} -\beta H_{hyd}(\delta e,\delta n) = \int d\boldsymbol{r} [& \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial e^2} \right) (\delta e(\boldsymbol{r}))^2 + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial e \partial n} \right) (\delta e(\boldsymbol{r})) (\delta n(\boldsymbol{r})) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 s}{\partial n^2} \right) (\delta n(\boldsymbol{r}))^2] \end{aligned}$$