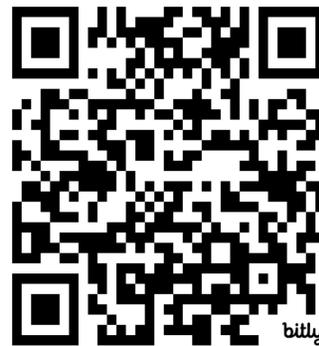


2024年度

線形代数学I

数理学科



↑講義ノートおよび講義スライド

富谷昭夫*

最終更新日: 2024年7月18日

概要

このノートは、東京女子大学における線形代数学Iの講義ノートである。ベクトル、行列、連立方程式、掃き出し法、正方行列、正則行列、逆行列、行列式などを取り扱う。

- 開講時間、開講教室: 前期・水曜1限、6211

目次

1	第01回: 線形代数学への導入	15
1.0	ガイダンス	15
1.1	大学数学の注意	23
1.2	今日やること	24
1.3	線形代数学とは	25
1.4	ベクトルとは?	28
1.5	ベクトルの相等	34
1.6	ベクトルの演算	35
1.7	行列の定義	47
1.8	行列の演算	52

1.9	行列はベクトルをたばねたもの	56
1.10	今回のまとめ	58
2	第02回: 行列の演算	60
2.1	今日やること	60
2.2	行列とベクトルの積	61
2.3	行列の積	80
2.4	今回のまとめ	92
3	第03回: 正方行列と逆行列、正則行列	94
3.1	今日やること	94
3.2	正方行列 (復習)	98
3.3	単位行列 (復習)	99

3.4	線形代数の「線形」の意味	101
3.5	逆行列	103
3.6	正則行列	110
3.7	いろいろな行列の名前	117
3.8	お話: 量子計算入門	120
3.9	今回のまとめ	123
4	第04回: 連立方程式と行列	125
4.1	今日やること	125
4.2	係数行列と拡大係数行列	131
4.3	加減法と行の基本変形	134
4.4	基本変形と行列積	139
4.5	階段行列	141

4.6	行列の階数 (ランク)	142
4.7	ランクの特性	146
4.8	線形写像の中でのランク	147
4.9	今回のまとめ	148
5	第05回: 連立一次方程式の解法1	150
5.1	今日やること	150
5.2	行基本変形 (復習)	150
5.3	連立一次方程式が解ける条件	154
5.4	解の存在条件の説明	160
5.5	連立方程式の解の存在の分類	167
5.6	連立一次方程式に対する掃き出し法	168
5.7	線形方程式の応用の話	176

5.8	今回のまとめ	179
6	第06回: 連立一次方程式の解法2	180
6.1	授業内試験の案内	180
6.2	ランクについて	181
7	第07回: 授業内試験	186
8	第08回: 授業内試験の振り返り	186
8.1	テストの解説	187
8.2	ブロック行列と行列積	188
8.3	代数学?	192

9	第09回: 正方行列と逆行列2	199
9.1	今日やること	199
9.2	逆行列の定義 (復習)	200
9.3	行列によるベクトルの変換	202
9.4	逆行列と連立方程式の関係	216
9.5	お話: 連立方程式と機械学習	226
9.6	今回のまとめ	231
10	第10回: 置換と互換、行列式	233
10.1	今日やること	233
10.2	置換	236
10.3	あみだくじ	239
10.4	置換の図示の演習	242

10.5	置換の積	244
10.6	あみだくじとしての積	246
10.7	置換の積の演習	249
10.8	互換	250
10.9	置換と互換	250
10.10	置換の符号	253
10.11	符号の演習	254
10.12	行列式の定義	256
10.13	おまけ: Python による逆行列の求め方	257
10.14	今回のまとめ	262
11	第11回: 行列式1	264
11.1	今日やること	264

11.2	復習問題	266
11.3	置換 (復習)	267
11.4	行列式の定義 (再掲)	271
11.5	2次正方行列の行列式	273
11.6	2次正方行列の行列式の図的な意味	285
11.7	3次正方行列の行列式	289
11.8	行列のランクと行列式の関係	296
11.9	ベクトルの外積	297
11.10	今回のまとめ	303
12	第12回: 行列式2	306
12.1	今日やること	306
12.2	復習	307

12.3	4次の正方行列に対する行列式	309
12.4	余因子	312
12.5	余因子展開	322
12.6	今回のまとめ	329
13	第13回: 行列式の性質	332
13.1	今日やること	332
13.2	行列式の性質	333
13.3	クラメールの公式	351
13.4	余因子行列	353
13.5	逆行列	354
13.6	今回のまとめ	359

14	第14回: 講義内試験	361
15	第15回: まとめと展望	363
15.1	試験解説	363
15.2	抽象的な線形代数	364
15.3	内積空間	375
15.4	固有値・固有ベクトル	379
15.5	行列多項式	385
15.6	対角化	386
15.7	スペクトル分解	388
15.8	線形代数の先	393
15.9	まとめ	399

付録	400
A 記号	400
B 代数学の基本定理	402
C トレース	408
D 固有値・固有ベクトル	409
E ケーリーハミルトンの定理	411
F 行列の不変量	413
G ゲルシュゴリンの定理	413
H スペクトル分解	415
I 特異値分解	415
J 行列指数関数	416
K リー群	417

L	ペロン=フロベニウスの定理	419
M	ノルム	419
N	逆行列と余因子行列	421
O	群論	427
P	線形方程式と正則化	428
Q	線形代数の歴史	430
R	ページサマリー	432

Part 1

第01回: 線形代数学への導入

1.0 ガイダンス

1.0.1 自己紹介

自己紹介: 富谷昭夫

素粒子物理 + 機械学習



書籍



[1] <https://cometscome.github.io/DLAP2020/>

[2] <https://compphyspringschool2024.github.io/homepage2024/>
https://hohno0223.github.io/comp_phys_spring_school2023/

研究分野 素粒子物理(理論)の数値計算 (格子QCD)

主な論文 https://scholar.google.co.jp/citations?user=LKVqy_wAAAAJ

Detection of phase transition via convolutional neural networks

A Tanaka, A Tomiya ニューラルネットを使った相転移検出
Journal of the Physical Society of Japan 86 (6), 063001

Digital quantum simulation of the schwinger model with topological term via adiabatic state preparation

B Chakraborty, M Honda, T Izubuchi, Y Kikuchi, A Tomiya 量子コンピュータで場の理論計算
arXiv preprint arXiv:2001.00485

略歴

2006 - 2010: 兵庫県立大学理学部

2015 : 大阪大学にて博士号取得 (素粒子理論)

2015 - 2018 : 華中師範大学・ポスドク (中国、武漢)

2018 - 2021 : 理研/BNL・ポスドク (米国、NY)

2021 - 2024 : 大阪国際工科専門職大学・任期なし助教

2024 - : 東京女子大学・専任講師

研究費

学術変革A 計画班A01代表 

富岳成果創出  

若手 「デジタル量子計算を用いたゲージ理論の相構造の研究」

基盤C 「対称性を考慮したNNによる有効モデル構築」



その他: DLAPセミナー[1]、計算物理春の学校 [2] の運営

映画シン仮面ライダー監修 YouTube物茶出演・ゆる哲学ラジオ監修

第29回日本物理学会論文賞 第14回素粒子メダル奨励賞

1.0.2 学生に対する評価・科目認定条件

科目評価方法は、基本的に中間試験(授業内試験)と期末試験により行う。

1.0.3 2単位の意味

この講義(に限らず)、講義は2単位あるものがある。それは大学で授業を受けるだけでなく、**家での勉強の時間を含めての単位数**である。そのため試験は家で勉強している事を前提に課される¹。

1.0.4 使用教科書・参考書

教科書は、

1. 「やさしく学べる線形代数」、共立出版、石村園子 [1]

教科書は毎回持ってきてください (演習に使うので)。授業には本講義ノート
を主に用いる。ちなみに「[1]」という記号は、引用を表し、この講義ノート
の最後の一覧がある。

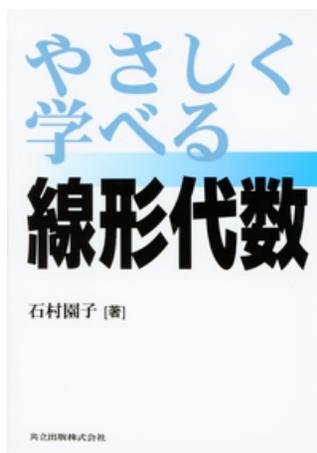


図 1: 教科書 [1]。

参考書は

1. 「線型代数入門」、東京大学出版会、齋藤正彦 [2]
2. 「キーポイント: 行列と変換群」、岩波書店、梁成吉 [3]
3. 「入門線形代数」、培風館、三宅敏恒 [4]
4. 「1冊でマスター 大学の線形代数」、技術評論社、石井 俊全 [5]
5. 「線形代数学」、日本評論社; 新装版、川久保 勝夫 [6]
6. 「線形代数30講」、朝倉書店、志賀 浩二 [7]
7. 「線形という構造へ」、紀伊國屋書店、志賀 浩二 [8]
8. 数学ガール (各種) [9, 10, 11, 12]
9. キーポイント線形代数、岩波書店、薩摩他 [13]

適宜追加する。こちらは好きなのを読んでほしい。

1.0.5 持ち物

この講義では講義ノート(講義スライド)を主に使うが、演習問題を出すので紙(ノートなど)とペン(ボールペンなど)を持ってきてほしい。また演習につかうので前述の通り、教科書を持ってきてほしい。なお、講義ノートと講義スライドは内容は同じである。

パソコン等を持ってきていると講義ノート(講義スライド)が見やすいと思う。

1.0.6 方針

1. 演習を通して、具体的に理解する
2. 証明はあまりやらない
3. 各自、自分で問題を解くこと(数学は自分で考えないとできるようにはなりません)

1.0.7 今後の授業予定

講義は水曜1限。シラバスを入れ替えて、下記のような順序で行う予定である。

1. 線形代数学への導入・ガイダンス 4/10
2. 行列の演算 (行列積) 4/17
3. 正方行列と逆行列 4/24
4. 連立一次方程式と行列・ランク 5/1
5. 連立一次方程式の解法1 5/8
6. 連立一次方程式の解法2 5/15
7. 授業内試験 5/22
8. ふりかえり 5/29
9. 正方行列と逆行列2 6/5
10. 置換と互換、行列式 6/12
11. 行列式1 6/19
12. 行列式2 6/26
13. 行列式の性質 7/3
14. 逆行列の存在条件 7/10
15. まとめ 7/17

日程やスケジュールは変更の可能性があるため、休講などの情報に注意すること。

1.0.8 講義の約束

1. 飲み物、飲んでいいです。
2. トイレもご自由にどうぞ。
3. 真剣な話をしているときは真剣に聞いて下さい。
4. レポートの写しや、試験時のカンニングには厳正に対処します。
5. 「単位ください」というお願いは聞きません。しっかり勉強してください。

1.1 大学数学の注意

高校までの数学と異なり、大学からの数学では少し異なる点があるので注意。

1. 記法が本によって異なる (同じ意味でも違う記号を使う場合がある)
2. 用語も統一されておらず、揺れがある場合がある
3. 似た言葉でも全く異なる意味にもなる
4. 高校ほど演習の時間を授業の時間内にとってくれない場合がある
5. 決して演習が必要ないわけではなく、むしろもっと必要

1.2 今日やること

1. ~~ガイダンス~~
2. 線形代数とは
3. ベクトル
4. 行列の導入

1.3 線形代数学とは

線形代数学 (Linear algebra) は²、数学的にはいくつかの異なった視点を持つ理論だと言える。線形代数学は、一文字略して「線形代数」と呼ぶことも多い。

異なる視点を挙げてみると

1. 連立方程式の理論
2. 線形変換の理論 (ベクトルなど図形の話)
3. 次元と次元圧縮の理論 (次元定理・スペクトル分解)

であり、これらに共通する枠組みを提供する理論である。

初学者にとっては、これらが渾然一体となってしまう、難しい印象を与える。また、無味乾燥なイメージを与えるか、連立方程式という中学校で習うものを(ある意味で)やり直すわけで、役立つイメージもつかない。しかしながら、**線形代数はおそらく数学の中では最も役立つ部門と言ってもよく、しっかり身につけておくことで先々に役立つ(はずである)。**

役立つ応用先は挙げれば切りがないが例えば

1. 機械学習・データサイエンス: 主成分分析、ニューラルネット

2. 物理: 力学、特殊相対性理論、量子力学
3. 数学: 微分方程式、群論と表現論、多様体論、ランダム行列理論
4. 古典和歌を埋め込みベクトルで分析³

などがあるが、これらの基礎となる。中でも、量子力学は線形代数そのものといっても良いくらいである。そのため、興味のある者はきっちりと習得しておくが良い。他には数学の理論的基礎となるので、キーワードをきっちりと抑え、基本的な計算を習得しておくほうが良い。

直感的にいうと役立つ理由は、線形代数が「多次元のことを扱う規則」だからである。人間は直感を働かせても3次元以上のものを想像するのは難しい。また想像できたとしても正しく推論するのはかなり難しい。一方で線形代数は n 次元でも成立するルールなので、有限次元であれば次元に関係なく、物事を正しく推論することを可能とする。(なんと(条件にも依るが)無限次元でも使えることもある!)

線形代数学の主な登場人物は、

1. ベクトル
2. 行列

の2つであり、この2つを「よく理解する」というのが線形代数の目的である⁴。

線形代数学については前期と後期に分かれて1年間学ぶことになる。学ぶ内容は、前期がベクトルと行列、連立一次方程式、行列式(デターミナント, determinant) についてであり、後期は抽象的なベクトル空間論になる。

この講義では実数を成分としてもつベクトルと行列のみを扱うが、複素数を要素とするように拡張することは他の書籍⁵を参照のこと(ほぼ同じである)。

線形代数は広大な分野であり、様々な教科書が出ている。それぞれ異なった視点で議論されており、基礎論的なところから応用向けまで、様々ある。もし、講義で指定している教科書で分かりづらかったら別の本も見てみると良い。また講義でカバーできる範囲は狭いため、この講義を踏み台に線形代数の学習を続けてほしい。

1.4 ベクトルとは？

早速、線形代数の主役の一つであるベクトルを導入しよう。世の中には数字を並べたものがたくさんある。たとえば、成績表を考えてみる。

科目	国語	理科	数学
点数	70	80	75

(1)

これは数が集まったデータと言える。

このままでも良いが、この表をたとえ数だけ取り出しても

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 70 \\ 80 \\ 75 \end{bmatrix} \quad (2)$$

のようになるが、順番さえ守っていれば意味が通じる (例えば他の人の成績と比べられる)。このように書いたものを**ベクトル (Vector)**と呼ぶことにしよう⁶。特に数を縦に並べたものを**縦ベクトル**や**列ベクトル (Column vector)**と呼ぶ。

一般に、列ベクトルとは n 個の数を縦に並べて書いたものとして、とりあ

えず

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

のように定義することにする。 v_1 や v_2 、 $v_i \in \mathbb{R}$ を**ベクトルの成分**と呼ぶ (\in は属すると読む。つまりベクトルの要素 v_i は実数というのの略記)。そして成分の数 n を**ベクトルの次元** (Dimension of a vector) と呼ぶことにしよう (ベクトル空間、一次独立などの概念を習ったとき、この定義が不十分であることが明らかになる。当面は問題にならないが気に留めておくこと)。この講義では列ベクトルのことを、単にベクトルと呼ぶ。先程の

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 70 \\ 80 \\ 75 \end{bmatrix} \quad (4)$$

は3次元のベクトルである。

また**行ベクトル** (Row vector) とは n 個の数を横に並べて書いたものとして、とりあえず定義することにする。

$$\vec{v}^T = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \quad (5)$$

この右辺のように数を横に並べたものを行ベクトルという。ここで \top は転置記号 (Transposing symbol) であり、列ベクトルを行ベクトルに、行ベクトルを列ベクトルに変化させる演算子である (決して、 T 乗ではない、念の為)。転置は2回適用すると元に戻るものとする。

$$(\vec{v}^\top)^\top = \vec{v} \quad (6)$$

転置を単体で考える意味は無いが、後々に便利になる。転置には別の記法もあり、

$$\vec{a}^\top = {}^t\vec{a} \quad (7)$$

もあるが、本講義では、 \vec{a}^\top という記法で統一する。

3次元以下のベクトルは、**デカルト座標系** (Cartesian coordinate system、カーテシアン座標⁷、いわゆる直交座標系) で図示することができる。たとえば、2次元ベクトル

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

の場合には図示することができる。

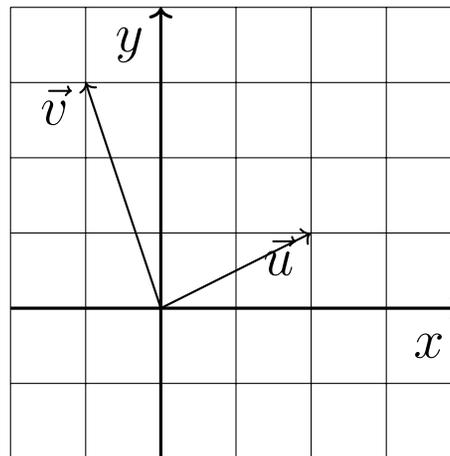


図 2: 直交座標系での図示。

1.4.1 有向線分との違い

有向線分という始点位置を気にするものと比べると、ベクトルは始点終点の絶対的な位置を気にしない。つまり平行移動したものも同じベクトルとみなす。

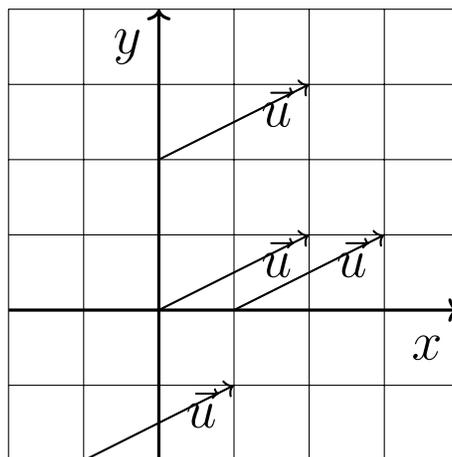


図 3: 平行移動して重なるベクトルは同じ。有向線分としてはすべて異なるものである。

演習 例 32、練習問題 32 を解いてみよ (77 ページ)

1.4.2 特別なベクトル

ベクトルには、ゼロベクトル、基底ベクトル(基本ベクトルともいう)と呼ばれる特別なベクトルたちがいる。

ゼロベクトルは例えば2次元の場合には、

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

である。 n 次元でも同様である。

また2次元の場合には基底ベクトルは2種類あり、

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

である。 n 次元の場合には n 個あり、

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

となる。つまり、 \vec{e}_i なら i 番目の成分が1であり、その他の成分は0である。

次元 n が $n > 3$ の場合、必ずしも図示はできないが、図示はできなくても良い (工夫したら図示できる、考えてみよ)。

1.5 ベクトルの相等

ベクトルが同じであるとは、成分の数が同じでかつ、すべての成分が等しいことと定義する。式で書くと

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_i = v_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12)$$

ただし \vec{u} 、 \vec{v} は共に n 次元ベクトルである。

(ここでなぜこんな当たり前のことを書いているのだ、と思う人もいるかも知れない。大学の数学は定義をしっかりとし、すべてを(なるべく)明示的に書き、論理をはっきりさせるのだ。人によって違う理解をしないようにするためである。)

1.6 ベクトルの演算

1.6.1 ベクトルのスカラー倍 (図として)

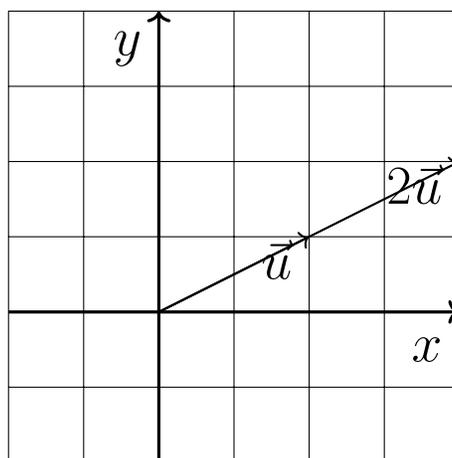


図 4: 長さが2倍のベクトル。

ベクトルのスカラー倍は、掛ける数が1より大きいときには、図的には矢印を伸ばせば良い。0より大きく、1以下の場合には縮めることになる。

また、0より小さい数をかける場合には、反対側に伸ばすことになる。

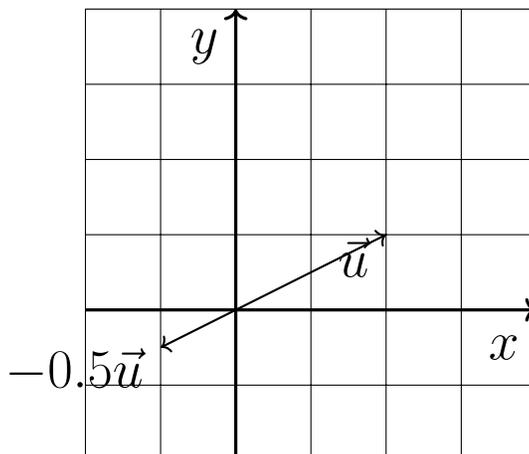


図 5: 長さが $-1/2$ 倍のベクトル。

1.6.2 ベクトルのスカラー倍 (成分として)

ベクトルのスカラー倍を成分として見ると、成分ごとに掛け算なり割り算なりをすることに対応する。たとえば

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

とすると、

$$0.5\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

と対応する。

1.6.3 ベクトルの和 (図として)

ベクトルを矢印としてつないだものを、ベクトルの和と呼ぶことにしよう。例えば先程の例だと以下のようなになる。

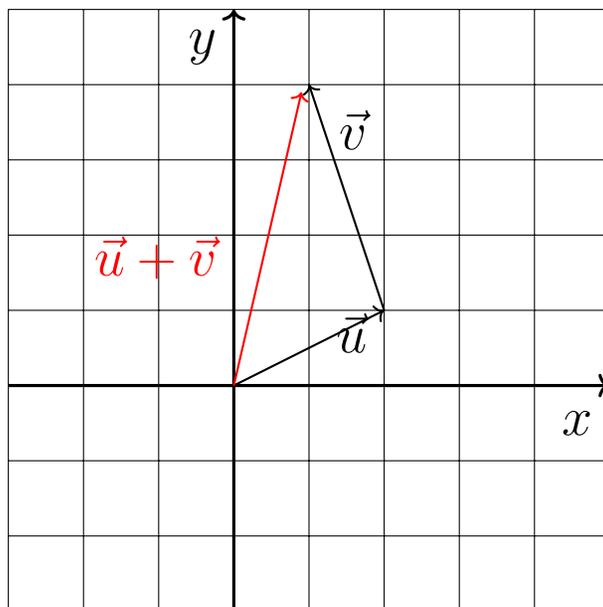


図 6: ベクトルの和の図。 $\vec{u} + \vec{v}$ を図示している。(\vec{v} の向きが左向きになっていることに注意せよ)

ベクトルの符号を反転することを使うと同様に差も定義することができる。

1.6.4 ベクトルの和 (成分として)

和と差の計算は、もちろん成分としても計算できる。たとえば

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

とすると、

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 1 \\ 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

となる。さっきの図としての計算と同じことを納得しておくこと。

演習 例33、練習問題33を解いてみよ (教科書80ページ)

1.6.5 ベクトルの内積

2つの実数に対して積が考えられたように、2つのベクトルにも積が考えられる。ベクトルに対しての積にはいくつかの種類がある⁸。ここでは、**ベクトルの内積 (Inner product)**を考えていこう。

まず一般に n 次元ベクトルとする。このとき2つのベクトルに対しての内積は、

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_{n-1} v_{n-1} + u_n v_n \quad (17)$$

となる。2次元ベクトルの場合には、

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^2 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (18)$$

となる。同じ成分同士の積の足し算となる。例として実際に計算してみる。先程の

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

(わかりやすさのために第1成分に網掛けをした) の内積を見てみると、

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 1 \times 3 = -2 + 3 = 1 \quad (20)$$

となる。成分番号が同じもの同士を掛け、足すわけである。

ここは読まなくても良い: なおベクトルの外積 (Cross product, Outer product) というのもあり、外積は $\vec{v} \times \vec{u}$ などとかく。このため、ベクトルの内積を「 \cdot 」ではなく「 \times 」と書くのは間違いである⁹。ベクトルの外積をクロス積と呼ぶことがあり、それに対して内積はドット積 (Dot product) とも呼ばれる。

演習 例36、練習問題36を解いてみよ (教科書84ページ)

1.6.6 ベクトルの長さ

ベクトルは大きさを持った矢印として図示が出来たので**ベクトルの長さ** (Length of vectors) を定義してみよう。天下りの的だが、ベクトルの長さを自分自身との内積を用いて定義する。まず n 次元ベクトルを \vec{u} とすると、長さの2乗は

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i u_i \quad (21)$$

と定義する。特に2次元ベクトルの場合には、長さの2乗は、

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 \quad (22)$$

となる。つまり長さは、

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (23)$$

となる。これは三平方の定理の応用とも見れる。

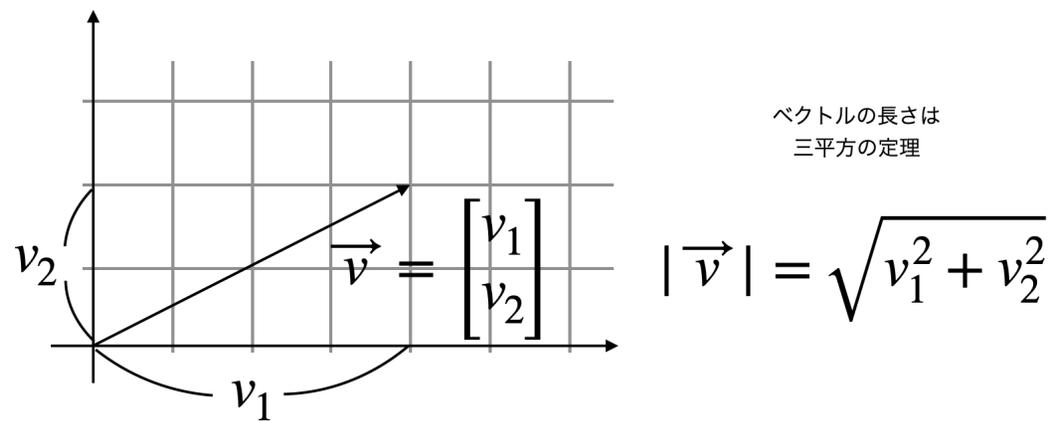


図 7: ベクトルの長さ。成分に対する三平方の定理となっている。

また、1次元の場合に長さは、 $\vec{u} = (u_1)$

$$\sqrt{|\vec{u}|^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2} = |u_1| \quad (24)$$

となり大きさ (絶対値) を与えるので、もっともらしい定義である。
 n 次元のときのベクトルの長さは、

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i u_i} \quad (25)$$

と自分自身との内積のルートを取ったものになる¹⁰。

演習 例35、練習問題35を解いてみよ (教科書83ページ)

1.6.7 ベクトルのなす角と直交性

ベクトル \vec{u} とベクトル \vec{v} の内積のコサイン公式

$$\cos \theta \equiv \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \quad (26)$$

を使うと、次元の高いベクトルでもベクトルの間の角度を定めることができる。ただし $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

この公式から、ベクトル \vec{u} とベクトル \vec{v} の内積がゼロの場合、 \vec{u} が \vec{v} は直交しているという。このことから、内積はベクトル同士の類似度としてみるることができる。数学的には、以下の内積のコサイン公式から理解できる。

たとえばデータサイエンスの文脈では、2つの異なるデータの類似度は、コサイン公式によって測られ、**コサイン類似度** (Cosine similarity) と呼ばれている。ここでいう2つのベクトルは、たとえば顧客のデータであり、顧客の類似度などを測ることができる。

コサイン公式は、2つのベクトルに対して $\cos \theta = -1$ から $\cos \theta = 1$ までを対応させる公式である。 $\cos \theta = 1$ なら完全に類似しており、 $\cos \theta = -1$ なら逆の向きを向いているベクトルとなっている。 $\cos \theta = 0$ なら無相関という意味になる (ちょうど90度で直交するベクトルとなっている)。

演習 例37、練習問題37を解いてみよ (教科書86ページ)

1.6.8 内積とベクトルの転置

内積を転置記号を使って書くことができる。

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

というベクトルの内積は、

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{u}^\top \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (28)$$

と書くことがある。この転置記号を用いた書き方は、次回に学ぶ行列の積の計算との相性が良い。

線形代数のコツ

余談ではあるが、線形代数(ないし大学数学)を理解するコツは、具体と抽象を行き来することである。線形代数の場合、 n 次元ベクトルが出てきてわからなくなったら2次元に戻って、具体計算や図示をしてみると良い。

1.7 行列の定義

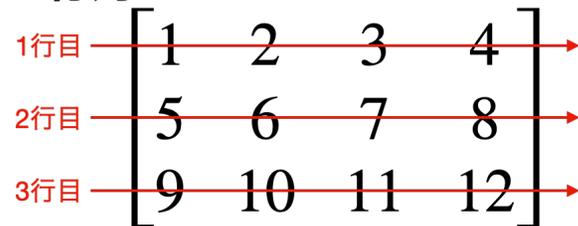
行列 (Matrix, 複数形は Matrices) とは、ベクトルのように数を並べたものである。行列の場合、ベクトルのように1列に並べるのだけではなく平面的に長方形のように並べる。例えば

$$[17 \ 9 \ 2], \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

などのことをいう。これから線形代数で取り扱う主役の1つである。最初と最後のものはベクトルに見えるが、実際ベクトルは行列とみなしても良い。

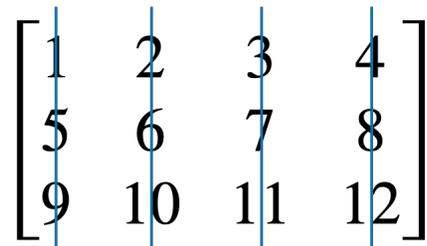
行列の縦方向の数字の数を「列の長さ」といい、縦の数字を集めて列という。一方で行列の横方向の数字の数を「行の長さ」といい、横の数字を集めて行という。

3x4 行列



3つの行

行



4つの列

列

1列目 2列目 3列目 4列目

図 8: 行列の覚え方。

1.7.1 行列、行列成分の書き方

行列は、 A や B などの大文字のアルファベットで書かれることが多い。そしてその成分を a_{ij} などと2つの添字そえじで表される (i, j の動く範囲については下の小節で説明する)。行列と行列の成分は異なる概念であるが、行列の成分 a_{ij} を持つ行列 A であることを明記する場合、

$$A = [a_{ij}] \quad (30)$$

と書く。添字は「**行**番号 (i)、縦の位置」「**列**番号 (j)、横の位置」の順である。間違えやすいので注意せよ。

1.7.2 行列の型

行列には、かた型と呼ばれる概念がある。それは

- 縦に何個数字があるか (列の長さ)
- 横に何個数字があるか (行の長さ)

である。列の長さを N 、行の長さ M として

$$(N, M) \text{ 行列, } N \times M \text{ 行列} \quad (31)$$

などという。もう一度書くと

$$(\text{縦の大きさ}) \times (\text{横の大きさ}) \quad (32)$$

である。

例えば列の長さを $N = 3$ 、行の長さ $M = 2$ をもつ行列 A を考える。 $A = [a_{ij}]$ として

$$3 \left\{ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \quad 3 \times 2 \text{ 行列} \quad (33)$$

である。ここで a_{ij} の i という前側についている添字は縦方向 (列方向) の添字 (番号) であり、 j という後ろ側の添字は横方向 (行方向) の添字 (番号) である。

後ほどきちんと扱うが、 $n \times n$ 行列は**正方行列** (Square matrix) と呼ばれる。これはちょうど正方形の形である。左上から右下にむかう成分、成分を $[a_{ij}]$ とすると a_{11} 、 a_{22} 、 a_{33} 、などは**対角要素** (Diagonal elements) と呼ばれ、その他の要素は**非対角要素** (Off diagonal elements) と呼ばれる。

列の数と行の数が異なる行列は**矩形行列** (Rectangular matrix) とよばれる。

先に述べた通り、実のところベクトルも行列の一種だとみなせ、多くの演算が共通する。しかし後で見ていく通り、役割が異なるため、異なったものとして扱っていく。

演習 例1、練習問題1を解いてみよ (教科書3ページ)

1.8 行列の演算

1.8.1 行列の和と差、スカラー倍

行列は型が同じであれば和と差が定義できる。行列の和や差は、ベクトルと同じく成分同士の計算をする。例えば、 3×2 行列で見ると和は、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。成分同士の和である。差は、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} \end{bmatrix} \quad (35)$$

となる。他の型の行列でも同様である。

ベクトルと同じく、行列にも**スカラー倍** (Scalar multiplication) もある。スカラー倍は、実数をすべての成分に掛けることになる。例えば 3×2 行列と

実数を c を掛けると

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \\ ca_{31} & ca_{32} \end{bmatrix} \quad (36)$$

となる。

演習 例2、練習問題2を解いてみよ (教科書5ページ)

1.8.2 結合法則、交換法則、ゼロ行列

行列の和と差は A 、 B 、 C を同じ型の行列として以下の性質を満たす。

1. 和と差の結合法則

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (37)$$

をみます。差も同様である。

2. 和と差の交換法則

$$A + B = B + A, \quad A - B = -B + A, \quad (38)$$

つまり和と差は順序を変えても良い

和と差を考える上で**ゼロ行列** (Zero matrix) というのも重要となる。ゼロ行列とは、要素がすべて0の行列であり、

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

のようなものである。ゼロ行列は、 O と書くことが多い。もし行列の型を明示するなら、 $O_{n \times m}$ などと書く場合もある。

演習 例3、練習問題3を解いてみよ(教科書7ページ)

1.9 行列はベクトルをたばねたもの

行列は、ベクトルをたばねたものとしてみることができる。例えば、 4×3 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \quad (40)$$

とすると、

$$A = \begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12} & a_{13}] \\ [a_{21} & a_{22} & a_{23}] \\ [a_{31} & a_{32} & a_{33}] \\ [a_{41} & a_{42} & a_{43}] \end{bmatrix} \quad (41)$$

という様な行ベクトルのたば (縦方向に積んだ行ベクトルのかたまり) と見てもよいし、

$$A = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (42)$$

のように列ベクトルのたばと見ても良い。これは次回、行列に対して積を定義するとき役に立つ。今回の内容でも、和と差、スカラー倍がこの見方と矛盾がないのが分かる。

一般に行列をブロックに区切ったものを**ブロック行列** (小行列とも言う) という。

1.10 今回のまとめ

今回はベクトルと行列を導入した。特に列ベクトルと行ベクトルを導入し、ベクトルの和と差、ベクトルの内積を導入した。

行列は型があることも学んだ。行列に対しての和と差も定義し、計算した。

次回は、行列に対して掛け算を定義する。特に、行列ベクトル積と行列行列積を導入し、計算する。

Notes

¹ https://www.mext.go.jp/a_menu/koutou/daigaku/04052801/003.htm

² 線型代数と書くこともある。

³ https://note.com/yhkondo/n/nd321604729cd?sub_rt=share_pw

⁴ もう少し高い視点で見れば、どちらも線形演算が成立する数学的オブジェクトであり、線形性の成立する範囲内での具体的なベクトル空間における理論とも言える。

⁵ たとえば線型代数入門 (齋藤正彦) など。

⁶ 実はこの定義は、あまり正しくないが当面は気にしなくて良い。ベクトルは変換性を用いて定義され、成分は本体ではない。端的に言うと、図を使って作れる幾何ベクトルが本質的であり、成分は基底の変換を行うと値が変わるため本質的でないためである。わからない者は現時点では気にしなくて良い。

⁷ ルネ・デカルトの名前に依る。デカルトはデ・カルトなので、名前からカーテシアンという。

⁸ ベクトルの積として、内積の他には外積、クロネッカー積、アダマール積などがある。

⁹ もちろんそんな記号を使っても良いには良いが、他人が読めなくなってしまうので絶対にやめたほうがいい。

¹⁰ 逆に、長さ (ノルム) が与えられたとき、内積を誘導する。これを「極化恒等式」<https://bit.ly/3vPoDZd> と言うらしい。フォン・ノイマンらの仕事。結構新しくてびっくりした。

Part 2

第02回: 行列の演算

2.1 今日やること

今日は、行列とベクトルの積、および行列と行列の積の計算を行う。行列とベクトルの積は図的には、ベクトルの変換とみなすことができる。つまり、ベクトルを矢印として見たとき、回転させたり、反転させたり、伸び縮みさせることができる。

一方で行列と行列の積は図的な描写は難しいが、今後、様々な場面が出てくる。とくにベクトルを変化させるものを合成する (写像の合成) というものの雛形となっており、応用上も数学としても大切である。

復習演習 例36、練習問題36を解いてみよ (教科書84ページ)

復習演習 例2、練習問題2を解いてみよ (教科書5ページ)

2.2 行列とベクトルの積

まず最初に行列とベクトルの積の計算を行う。行列とベクトルの積はベクトル同士の内積の拡張とみなせる。

2.2.1 ベクトルの内積(復習)

ベクトルの内積は、

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{u}^\top \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (43)$$

と書くことが出来た。同じ番号の成分を掛けてすべて足すのがベクトルの内積であった。

以下で重要となるので確認しておくが、ベクトルの内積はベクトルの長さが同じでなければ定義されない。たとえば、 $[u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$ と $[v_1 \ v_2]^\top$ といった別の長さを持ったベクトルの間に内積は定義されない。

2.2.2 行列とベクトルの積の定義

天下りのだが、行列とベクトルの積を定義しよう。

まずは2次元で見てみる。2×2行列と2次元ベクトルを考える。行列とベクトルの積は

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{2 \times 2 \text{ 行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{2 \text{ 次元ベクトル}} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix}}_{2 \text{ 次元ベクトル}} \quad (44)$$

と定義される。行列とベクトルをかけると結果はベクトルになる。成分を見てみると、ベクトルの添字と行列の成分の後ろ側の添字が揃っていることに注意せよ。これは内積と同じである。

実際「行列とベクトルの積」という操作は、内積を集めたもの、と見ることがができる。行列を行ベクトルのたばとしてみると、行列ベクトル積は

$$\begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12}] \\ [a_{21} & a_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ [a_{21} & a_{22}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\text{ベクトルの内積が並んだもの}} \equiv \left. \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix} \right\} 2 \text{ 次元ベクトル} \quad (45)$$

とベクトルの内積が並んでいるように見える。 2×2 行列と2次元ベクトルとかけると2次元ベクトルとなる。

2次元ベクトルにかける行列は、 2×2 でなくても良く、たとえば 3×2 行列に対して、

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}}_{3 \times 2 \text{ 行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{2 \text{ 次元ベクトル}} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 \end{bmatrix}}_{3 \text{ 次元ベクトル}} \quad (46)$$

などでも良い。こちらも内積を集めたものとしてみて良い。こちらもやはり内積としてみることができ、

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12}] \\ [a_{21} & a_{22}] \\ [a_{31} & a_{32}] \end{bmatrix}}_{3 \times 2 \text{ 行列}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{2 \text{ 次元ベクトル}} = \underbrace{\begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ [a_{21} & a_{22}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ [a_{31} & a_{32}] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\text{内積が並んだもの}} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 \end{bmatrix}}_{3 \text{ 次元ベクトル}} \quad (47)$$

である。内積を取るベクトルの次元があっていることに注意せよ。

行列ベクトル積をベクトルの内積として見る見方は2次元以上のベクトル

に対しても成立する。3次元ベクトルに対して、たとえば 2×3 行列に対して、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

結果は2次元ベクトルとなる。

行列とベクトルの積は、次元があっていないと計算できない。たとえば、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (49)$$

と

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

の積 $A\vec{v}$ は 定義できない¹¹。一般に $N \times M$ 行列と掛けることができるベクトルは M 次元ベクトルである。

例題 以下の行列ベクトル積を計算せよ
定義通り (内積と違って) 計算すれば良い。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 & 3] \\ [3 & 2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 & 3] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [3 & 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

演習 以下の行列ベクトル積を計算せよ
演習 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

演習 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

演習 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

演習解答 演習1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} \quad (55)$$

演習2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (56)$$

演習3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (57)$$

2.2.3 行列ベクトル積の成分表示

成分表示で行列ベクトル積 (Matrix vector product) 見てみる。 A を $N \times M$ 行列とし、成分を a_{ij} とする。また M 次元ベクトルを \vec{v} として成分を v_j とする。このとき行列とベクトルの積は、

$$A\vec{v} \Leftrightarrow [A\vec{v}]_i = \sum_{j=1}^M a_{ij}v_j = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots \quad (58)$$

と定義される。ただし $i = 1, \dots, N$ である。行列の後ろ側の添字とベクトルの次元があっていないと掛け算が定義出来ないのが分かると思う。しかも内積の定義と良く似ている (実質同じ) であることも分かると思う。

2.2.4 行ベクトルと行列の積

上では行列と列ベクトルの掛け算を考えたが、行ベクトルと行列を掛けることもできる。たとえば、 A を $N \times M$ 行列とし、成分を a_{ij} とする。また N 次元の列ベクトルを \vec{v} として成分を v_i とする。 \vec{v}^\top は行ベクトルとなる。このとき掛け算は、

$$\vec{v}^\top A \quad (59)$$

のような形で計算できる。成分で書くと、

$$\vec{v}^\top A \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N v_i a_{ij} \quad (60)$$

となる。本講義ではあまりこちらは扱わない¹²。

2.2.5 正方行列

詳しくは後ほど扱うが、前にも出てきた通り

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (61)$$

のように正方形になっている、 $n \times n$ 行列を n 次の正方行列と呼ぶ。この例は3次の正方行列である。

2.2.6 単位行列・スカラー行列

単位行列 (Unit matrix) とは、対角の要素に1、その他の要素がゼロの正方行列で

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

のようなものである。 $n \times n$ 行列の場合、 E_n と書いたり、大きさが重要でない場合には、 E や I と書くことが多い (E は、ドイツ語の Einheitsmatrix(アイン・ハイツ・マトリックス)の略と言われている、 I はidentity matrixの略である)。

単位行列にベクトルをかけてもベクトルは変更されない。例えば、2次元ベクトルを $\vec{v} = [v_1 \ v_2]^T$ とする。2次の単位行列にかけると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times v_1 + 0 \times v_2 \\ 0 \times v_1 + 1 \times v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

となる。

単位行列のように、対角要素に同じ数が入っている正方行列をスカラー行

列 (Scalar matrix) という。たとえば、

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{7} \end{bmatrix} \quad (64)$$

のようなものである。これらは単位行列のスカラー倍になっている。

2.2.7 対角行列

対角要素に異なる数が入っており、非対角要素が0の正方行列を**対角行列** (diagonal matrix) という。たとえば

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad (65)$$

などである。対角行列は対角要素のみを書いて、 $\text{diag}(1, -1)$ などとも書かれる。

2.2.8 回転行列

ベクトルの長さを変えず角度を変化させる変換を表現する行列を**回転行列** (Rotation matrix) という¹³。2次元の場合、

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (66)$$

のように書くことができる。典型的な値を見ておくと $\theta = 0$ なら

$$R(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

と単位行列となる。 $\theta = \pi/2$ (90度) なら

$$R(\pi/2) = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (68)$$

という行列となる。

以下で行列の引き起こす変換の具体的な動きを見てみる。

2.2.9 行列とベクトルの積の図的な意味

行列をベクトルに掛けると、ベクトルを変化させる。これは図示して見るとよく分かる。以下で具体例を見てみよう。

考えるベクトルを $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする。

2.2.9.1 xy 軸の反転

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

これはベクトルに掛けると x 成分と y 成分を入れ替える。

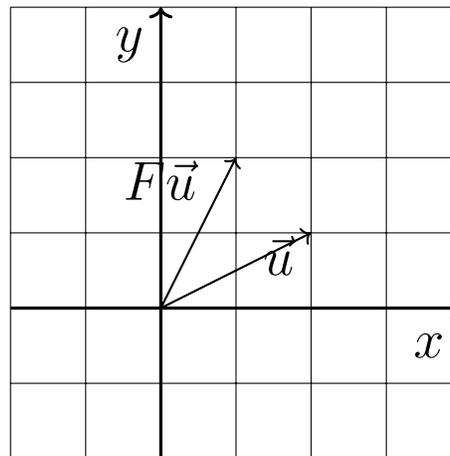


図 9: 行列 F で x 成分と y 成分を入れ替えた。 $x = y$ の対角線の線対称変換をしている。

2.2.9.2 拡大縮小

0より大きい数をスカラー倍、もしくはスカラー行列を掛けるとベクトルが伸び縮みする。例えば、

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (70)$$

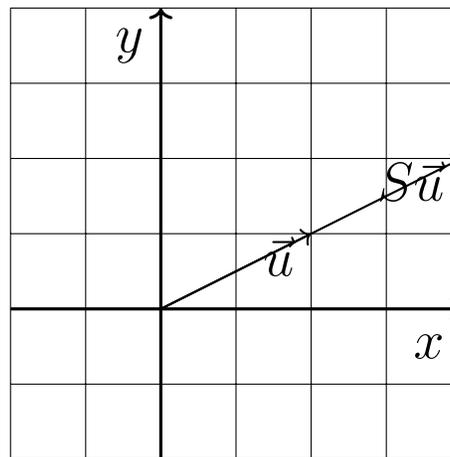


図 10: S で大きさを変えた

2.2.9.3 回転

2次元の場合、回転行列は

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (71)$$

のように書くことができるのだった。これをベクトルに掛けると角度 θ だけベクトルを回転させる。

つまり $\vec{u} = [u_1, u_2]^T$ とかくとき、

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{u}' = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = R(\theta)\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta \\ u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (72)$$

である。これはベクトル \vec{u} を角度 θ だけ回転する。

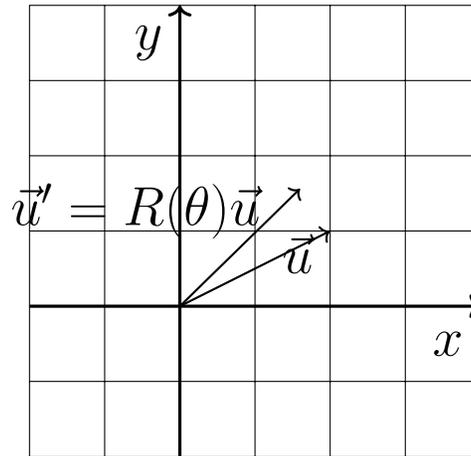


図 11: 行列 $R(\theta)$ で回転させた。2つのベクトルの間の角度は θ である。 $\vec{u} = [2, 1]^T$ である。

2.3 行列の積

ここでは行列と行列の積を定義しよう。行列は、ベクトルを変化させるもの(写像)であった。高校数学の用語では写像の合成は合成関数という名前がついていたが、数学的に行列の積は、写像の合成という側面を持つ(が気にしなくて良い。将来、群論という理論を学ぶときに非常に役立つ)。

以下で行列と行列の積の定義し、性質を調べていく。

2.3.1 行列と行列の積の定義

まずは成分を用いて数式として書き下しておく(行列の型については後述する)。行列 $A = [a_{ij}]$ 、行列 $B = [b_{ij}]$ とする。このとき行列の積は

$$AB = C \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1} a_{ik} b_{kj} \quad (73)$$

と定義される。内側の添字についての和になっている¹⁴。これを具体例で掛け算の様子を見ておこう。

2.3.2 行列の積の例

まず行列積の計算例を見てみよう。行列 A を 2×3 行列、行列 B を 3×2 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

として行列積 AB を見てみる。

行列と行列の積は、内積を組み合わせたものとしてみることができるのでそれを見てみよう。 A を行ベクトルを集めたもの、

$$A = \left[\begin{array}{c} [1 \ 2 \ 2] \\ [3 \ 4 \ 2] \end{array} \right], \quad (75)$$

B を列ベクトルを集めたもの

$$B = \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (76)$$

としてみる。このとき2つの行列の積 AB は、見やすくするため成分に色をつ

けてみてもと

$$AB = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}^B, \quad (77)$$

$$= \begin{bmatrix} [1 & 2 & 2] \\ [3 & 4 & 2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [2] & [3] \\ [4] & [5] \\ [1] & [2] \end{bmatrix}, \quad (78)$$

$$= \begin{bmatrix} [1 & 2 & 2] & [2] & [1 & 2 & 2] & [3] \\ [1 & 2 & 2] & [4] & [1 & 2 & 2] & [5] \\ [1 & 2 & 2] & [1] & [1 & 2 & 2] & [2] \\ [3 & 4 & 2] & [2] & [3 & 4 & 2] & [3] \\ [3 & 4 & 2] & [4] & [3 & 4 & 2] & [5] \\ [3 & 4 & 2] & [1] & [3 & 4 & 2] & [2] \end{bmatrix} \quad (79)$$

となる (多項式の展開のように各ベクトルの内積のすべての組み合わせが出てくる!)

模式図的に書くと各ベクトルを書くと

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \text{上} \\ \text{下} \end{bmatrix}}^A \overbrace{\begin{bmatrix} \text{左} & \text{右} \end{bmatrix}}^B = \begin{bmatrix} \text{上} \cdot \text{左} & \text{上} \cdot \text{右} \\ \text{下} \cdot \text{左} & \text{下} \cdot \text{右} \end{bmatrix} \quad (80)$$

という様なベクトルの内積の集まりになる。

結論として今の行列積 AB の計算は、内積計算を繰り返し行って

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 1 & 1 \times 3 + 2 \times 5 + 2 \times 2 \\ 3 \times 2 + 4 \times 4 + 2 \times 1 & 3 \times 3 + 4 \times 5 + 2 \times 2 \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 17 \\ 23 & 33 \end{bmatrix} \quad (82)$$

となる。

行列 A を 2×3 行列、行列 B を 3×2 行列であったが、一般に行列 A が $M \times N$ 行列、行列 B が $N \times M'$ 行列となるように内側の次元が等しい場合にのみ行

列積 AB が定義できる (これは内積として見てみると内積が定義できるために必要な条件となっている)。計算結果は、 $M \times M'$ の行列になる。

これは模式的に書くと

$$(M \times N \text{ 行列}) \times (N \times M' \text{ 行列}) = (M \times M' \text{ 行列}) \quad (83)$$

のようになる。(図12を参照)

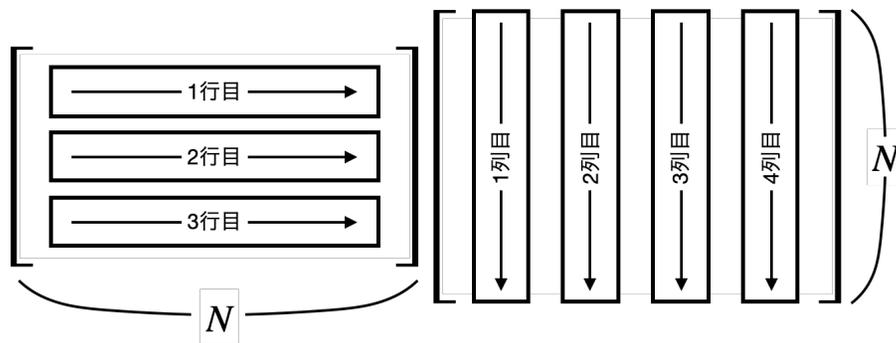


図 12: 行列積の図示

演習1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ として、 AB と BA を計算せよ。 AB と BA は等しいか?

演習2 $A = [-2 \ 1 \ 3]$ 、 $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、 $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ とする。 A 、 B 、 C の型

を答え、以下の行列の積のうちで計算可能なものを選び出し、計算せよ。積が定義されない場合は理由を述べよ。

(1) AB (2) BA (3) AC (4) BC (5) CB (6) CBA

演習 例4、練習問題4を解いてみよ(教科書9ページ)

演習1解答 $AB = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $BA = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ となり、 $AB \neq BA$ である。

演習2解答 A は 1×3 、 B は 3×1 、 C は 2×3 である。(1) AB 、(2) BA 、(5) CB 、(6) CBA が計算可能である。(3) AC (1×3 と 2×3 の積)と(4) BC (3×1 と 2×3 の積)は型があっていないため積が定義されない。

(1) $[11]$ 、(2) $\begin{bmatrix} 6 & -3 & -9 \\ -4 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 、(5) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 、(6) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 、

2.3.3 結合法則、交換法則

行列の積は、以下の性質を満たす。 A 、 B 、 C を行列積が定義される行列として

1. 結合法則。

$$A(BC) = (AB)C \quad (84)$$

3つの掛け算がある場合、どちらを先にやっても良い。

2. **非**交換法則。行列の積は特別な場合を除いて

$$AB \neq BA, \quad (85)$$

となる。**行列の積は順番に依存しうる！**

3. 分配法則。 A 、 B 、 C を以下の積が定義されている行列として

$$(A + B)C = AC + BC \quad (86)$$

が成り立つ。

である。

非交換法則の例として、 N 次正方行列 A 、 B を考えて、 $(A + B)^2$ を計算してみる。分配法則を利用して

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \quad (87)$$

となる。実数の場合には $AB = BA$ となるが行列ではそうとは限らない。

2.3.4 ゼロ因子

行列ではゼロ行列でないが、掛けるとゼロ行列になるものがある。たとえば

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

となる。これら、 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のようなものを**ゼロ因子** (Zero divisor) と言う。一般に $A \neq O, B \neq O$ だが $AB = O$ が成り立つとき、 A と B をゼロ因子という。

これは少しおもしろい性質で、実数とは異なる性質を持っていることになる。例えば $3x = 0$ という式があった場合には $x = 0$ しか解が無いが、行列の場合にはそうとは言えないことになる。

演習 例5、練習問題5を解いてみよ (教科書11ページ)

2.3.5 回転行列と加法定理

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (89)$$

を回転行列というのだった¹⁵。これは、2次元ベクトルに掛けると、ベクトルを回転させる。

2つの回転行列を掛けてみよう。2次元ベクトルを角度 α だけ回転させる回転行列 $R(\alpha)$ 、角度 β だけ回転させる回転行列 $R(\beta)$ をかけ合わせることを考える。

$$R(\alpha)R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (90)$$

この $R(\alpha)R(\beta)$ は、ベクトルを β だけ回転させたあと、 α だけ回転させる操作を意味する。

これの答えは、式の意味から $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ となるべきである。なぜなら角度 β だけ回転したあと、 α 回転すると、結果として角度 $(\alpha + \beta)$ だけ回転するからである。それを書いておくと、

$$R(\alpha + \beta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \quad (91)$$

一方で、行列積の定義に従って計算すると、

$$R(\alpha)R(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (92)$$

を得る。 $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ と等値して要素同士を比較すると、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (93)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (94)$$

を得る。これは三角関数の加法定理である。行列積と回転行列の性質を認めればこのように加法定理を導くことができる(逆に言えば、このような性質を保つために行列の積を定義したとも言える)。

2.4 今回のまとめ

今回は、行列とベクトルの積、行列と行列の積を導入した。行列とベクトルの積や行列と行列の積もベクトルの内積の応用として考えることができた。行列をベクトルに掛けると、ベクトルは向きや大きさが変わる。そういう演算を行う主体が行列なのであった (演算子や作用素というものの一種である)。

行列同士の掛け算はそういった演算を組み合わせることに相当する。最後に行列積と回転行列を応用し、加法定理がでてくるのを見た。次回は正方行列、逆行列などを導入し、より深い線形代数の世界を見ていく。**行列積は非常に重要なため、しっかり復習し、慣れておくこと。**

Notes

¹¹ もっとも、普通の意味での行列ベクトル積以外の積なら定義可能であるが、今の文脈では役に立たない。

¹² Python や C++ などプログラミングするときにはこちらが基本となる。列ベクトル行ベクトル、どちらでも基本的な構造は同じであるが見た目の慣れ、のようなものは必要である。

¹³ 2次元のベクトルの長さを変えない行列の集合を $O(2)$ (オーツー) という。また、そのなかでも反転を含まない部分集合を $SO(2)$ (エスオーツー) という。同様に d 次元にも定義される。

¹⁴ やはりこれも内積と同じ構造をもつことを以下で見る。

¹⁵ なぜこの形に書けるのか、それには深い理由がある。

Part 3

第03回: 正方行列と逆行列、正則行列

3.1 今日やること

今回は行列の積に関連する話題として、逆行列を導入する。また逆行列に対応して正則行列も導入する。正則行列は線形代数でかなり重要な役割を果たす。

復習演習 以下の行列ベクトル積を計算せよ
演習1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (95)$$

復習演習 以下の行列積を計算せよ
演習2

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (96)$$

復習演習 例4、練習問題4を解いてみよ(教科書9ページ)

復習演習 総合演習1-1の大問1大問2を解いてみよ(教科書17ページ)

復習演習 以下の行列積を計算せよ
演習3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (97)$$

演習解答 演習1の解答

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} \quad (98)$$

復習演習 以下の行列積を計算せよ
演習2の解答

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 7 \end{bmatrix} \quad (99)$$

復習演習 以下の行列積を計算せよ
演習3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (100)$$

3.2 正方行列(復習)

$n \times n$ の行列を n 次の**正方行列** (Square matrix) と呼ぶ。例えば、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad (101)$$

などである。

矩形行列くけいに比べ、正方行列については基礎的なところで頻出し、わかっていることも多く良い性質もあるので今後中心的に取り扱っていく。

3.3 単位行列(復習)

単位行列 (Unit matrix) とは、対角の要素に1、その他の要素がゼロの正方行列で

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (102)$$

のようなものであった。 $n \times n$ 行列の場合、 E_n と書いたり、大きさが重要でない場合には、 E や I と書く。この講義では、 E_n や E という書き方を主にすることにする。

演習 例6、練習問題6を解いてみよ(教科書13ページ)

3.3.1 クロネッカーのデルタ

単位行列の成分を表す際、

$$E = [\delta_{ij}] \quad (103)$$

と書くことがある。ここで右辺の δ_{ij} は

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (104)$$

であり、**クロネッカーのデルタ** (Kronecker delta) と呼ばれるものである。

n 次の単位行列 $E = [\delta_{ij}]$ と行列 $A = [a_{ij}]$ の積は要素として

$$EA \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} \quad (105)$$

と積がかける。

3.4 線形代数の「線形」の意味

ここで線形代数の線形の意味を少し説明しよう。関数(数を数に対応付ける関係のこと)を $f(x)$ として、2つの実数の変数 x_1 と x_2 と定数 c に対して

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(cx_1) = cf(x_1) \quad (106)$$

となる関係を満たすとき、 $f(x)$ を線形な関数であるという。もったいぶった書き方をしたが、これは1次元のときには

$$f(x) = ax \quad (107)$$

を満たす比例の関係のことである(定数項を含むと線形にならない、なぜか考えてみよ¹⁶⁾)。

写像(関数の一般化) $f(\vec{x})$ を用意し、2つのベクトルを \vec{x}_1 、 \vec{x}_2 と定数 c に対して

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2), \quad f(c\vec{x}_1) = cf(\vec{x}_1) \quad (108)$$

となる関係を満たすとき、 $f(\vec{x})$ を線形であるという。線形写像は、行列 A を用いて

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad (109)$$

とかける¹⁷。つまり、線形代数とは比例関係の一般化であるといえる。比例関係は最も簡単な関数関係であり、(いずれ微積分で習うとおり) テイラー・マクローリン展開の重要な位置を占めることになる (微分とは線形近似のことと言って良い)。

比例関係であれば、例えば $y = ax$ と書けている場合、 $a \neq 0$ であれば x から y が $x = x/a$ と計算できる。一方で $\vec{y} = A\vec{x}$ の場合、 \vec{y} から \vec{x} が決まるだろうか。これには以下の逆行列が必要となる。

3.5 逆行列

正方行列には、掛けると単位行列になる対となる行列が存在することがあり、これを**逆行列** (Inverse matrix) と呼ぶ。

逆行列は整数や実数に対する逆数、たとえば5に対する $1/5$ などに対応する。 A が正方行列であっても、逆行列は存在するとは限らない。以下でまずは逆行列が存在する例から少し見てみよう。

3.5.1 非対角要素のない行列の逆行列

たとえば正方行列 D を対角要素のみ持つ行列

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (110)$$

とするとき、逆行列 D^{-1} (ディー・インヴァースと読む) は

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (111)$$

となる。これは計算してみると

$$DD^{-1} = E \quad (112)$$

であることが確かめられる。 E は単位行列である。対角要素しかない行列(スカラー行列)では、逆行列は対角要素が逆数になる。

演習 上記の D に対して DD^{-1} を計算することで $DD^{-1} = E$ を確かめよ

3.5.2 非対角要素もある行列の逆行列

つぎに A を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (113)$$

とするとき、逆行列 A^{-1} (エー・インヴァースと読む) は

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (114)$$

となる。これは計算してみると

$$AA^{-1} = E \quad (115)$$

であることが確かめられる。

演習 上記の A に対して AA^{-1} を計算することで $AA^{-1} = E$ を確かめよ

3.5.3 一般の2次正方行列に対する逆行列

一般に 2×2 行列 A が

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (116)$$

のとき、逆行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (117)$$

と計算できる。この逆行列の公式は覚えておくと便利である。

重要な事実として

$$2\text{次正方行列の場合 } ad - bc = 0 \text{ のとき、逆行列は存在しない} \quad (118)$$

この公式がなぜ成立するか、なぜ「 $ad - bc = 0$ のとき、逆行列は存在しない」かという理由は (第14回の講義) で解説する。また一般の正方行列の逆行列も (第14回の講義) で解説する。

例題

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (119)$$

これは正方行列であるが、逆行列はあるか？ あれば A^{-1} を求めよ。そして、もし存在すれば逆行列であることを AA^{-1} を計算することにより確かめよ。

例題の回答

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (120)$$

$ad - bc$ を計算すると、 $3 \times 1 - 4 \times 2 = 3 - 8 = -5 \neq 0$ であり、逆行列が存在する。逆行列の公式

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (121)$$

に代入して、

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (122)$$

となる。

演習 問題1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (123)$$

これは正方行列であるが、逆行列はあるか？ あれば A^{-1} を求めよ。ヒントはさっきの公式である。そして、もし存在すれば逆行列であることを AA^{-1} を計算することにより確かめよ。

問題2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (124)$$

これは正方行列であるが、逆行列はあるか？ あれば A^{-1} を求めよ。そして、もし存在すれば逆行列であることを AA^{-1} を計算することにより確かめよ。

問題3

2次元の場合、回転行列は

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (125)$$

のように書くことができるのだった。この逆行列を公式を使って求めよ。ただし答えは、逆回転になるはずで $R(-\theta)$ となるはずである。そして逆行列であることを確かめよ。

演習 例7、練習問題7を解いてみよ(教科書15ページ)

演習 総合演習1-1の大問3を解いてみよ(教科書17ページ)

演習1解答 問題1

$ad - bc$ を計算すると $4 - 4 = 0$ となるため逆行列は存在しない。

問題2

先の逆行列公式に当てはめると、

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (126)$$

なお、 $A = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ なので係数が逆数になって、行列部分は元通りになっている。

問題3

略。計算すれば出てくる。ただし $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 、 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ に注意せよ。

3.6 正則行列

すべての行列が逆をもつとは限らないといったが、逆行列をもつ行列のことを**正則行列** (Regular matrix) と呼ぶ。正則行列の詳しい定義は後ほど行う (第14回の講義)。

以下では、正則行列といえば逆行列をもつ正方行列のことを指す。

3.6.1 積の逆行列の性質

ここで逆行列と積の性質を見ておく。 A と B を正則行列とする。このとき積の逆は

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (127)$$

となり、順序も入れ替わる。証明は以下の通りである。

積の逆行列の性質の証明

$C = AB$ 、 $X = B^{-1}A^{-1}$ とおく。このとき、 $ABB^{-1}A^{-1} = CX$ を計算すると

$$CX = (AB)(B^{-1}A^{-1}), \quad (128)$$

$$= A \underbrace{BB^{-1}}_{=E} A^{-1}, \quad (129)$$

$$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E \quad (130)$$

となる。

一方で $B^{-1}A^{-1}AB = XC$ は、

$$CX = (B^{-1}A^{-1})(AB), \quad (131)$$

$$= B \underbrace{AA^{-1}}_{=E} B^{-1}, \quad (132)$$

$$= BEB^{-1} = BB^{-1} = E \quad (133)$$

となる。つまり $CX = XC = E$ である。つまり $X = C^{-1}$ である。よって

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (134)$$

である。

3.6.2 行列の転置

ここでは**行列の転置** (Transpose of matrix) を導入しよう。以前やったベクトルの転置の拡張である。わかりやすさのために右上を網掛けしておき

$$A = \begin{bmatrix} a & \boxed{b} \\ c & d \end{bmatrix} \quad (135)$$

としたとき、右上と左下を入れ替えた行列を A^T と書いて

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ \boxed{b} & d \end{bmatrix} \quad (136)$$

を**転置行列** (Transposed matrix) という。またこの操作を**転置** (Transpose) と呼ぶ。

この操作は 3×3 以上にも拡張でき、

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad (137)$$

としたとき、転置した行列を A^T と書くと、

$$A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \quad (138)$$

となる。つまり対角成分に対して折り返す操作である。

くけい
矩形行列でも転置を取ることができ、

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad (139)$$

のときには、

$$A^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \quad (140)$$

となる。

一般の行列 A に対しては、

$$A = [a_{ij}] \quad (141)$$

と書くとき、

$$A^T = [a_{ji}] \quad (142)$$

が転置を取った行列である (つまり添字が入れ替わる)。一般的に $M \times N$ 行列の転置を取ると $N \times M$ 行列となる。

演習 以下の転置を計算せよ

演習 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (143)$$

演習 2

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (144)$$

演習解答 以下の転置を計算せよ

演習 1

$$A^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (145)$$

演習 2

$$B^{\top} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (146)$$

3.7 いろいろな行列の名前

ここでは便利なように色々な行列の名前を列挙しておこう¹⁸。

3.7.1 対称行列

A を行列としたとき、 $A = A^T$ となる行列を**対称行列** (Symmetric matrix) という。

例

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (147)$$

は転置をとっても元に戻る。

3.7.2 歪対称行列

A を行列としたとき、 $A = -A^T$ となる行列を**歪対称行列** (Skew symmetric matrix) という。

例

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (148)$$

は転置をとると、符号が反転する。歪対称行列の対角要素は必ずゼロである。

3.7.3 直交行列

$B = A^T$ としたとき、 $AB = E$ となる行列を**直交行列** (Orthogonal matrix) という。これはつまり、転置を取ったら自身の逆行列になる行列である¹⁹。

簡単な例は単位行列であり、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (149)$$

は定義を満たしている。簡単でない例は例えば

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (150)$$

は定義を満たしている (この行列には名前がついており、**アダマール行列** (Hadamard matrix) と呼ばれており、量子コンピュータの文脈で出てくる。下記参照)。

3.8 お話: 量子計算入門

ここで線形代数の応用例として量子コンピュータにおける計算の一部を見てみよう。もちろんすべてを説明するには半年の講義が必要なため、あくまで概観である。

まず、**量子ビット** (キュービット、Qubit) を導入しよう。これは、

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (151)$$

という記号で書かれるベクトルである。変な記法であるが便利のため良く使われる。量子計算においてこのようなベクトルは、量子状態や状態と呼ばれる。左辺の記号は、**ディラックのブラケット** (Dirac's bracket symbol) と呼ばれる記号である。

量子計算において、状態の**重ね合わせ** (Superposition) というのが重要である。これはベクトルの足し算 (格好良く線形結合と呼ばれる) で表され、2つの定数 a, b をもちいて、

$$a|0\rangle + b|1\rangle \quad (152)$$

と書けるとき、状態は重ね合わせであるという。

量子計算で重ね合わせ状態を作るには、アダマール行列を使う。これは量子ゲートとして、アダマールゲートとして実現される。つまり、 $|0\rangle$ に対してアダマール行列 H を掛けると、

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (153)$$

と重ね合わせを作る演算となっている。同様に $|1\rangle$ に対しても重ね合わせを作ることができ、

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (154)$$

である。また $H^2 = E_2$ となり、今の場合には2回繰り返すと元の状態に戻せる。

量子計算においては、直交行列 (の複素数バージョンであるユニタリー行列) が非常に決定的な役割を果たす。もっといえばユニタリー行列を様々組み合わせさせて計算を行うのが、量子計算とも言える²⁰。おすすめの教科書は、

1. 難しめ、包括的: 「量子コンピュータと量子通信」(特に2巻)、オーム社、Michael A. Nielsen (著), Isaac L. Chuang (著), 木村 達也 (翻訳)
2. 普通、量子計算は載ってないが量子論はわかりやすい: 「量子力学10講」、名古屋大学出版、谷村省吾

である。

3.9 今回のまとめ

今回は、正方行列、逆行列、正則行列、単位行列などを取り扱った。

逆行列については、具体例をみた。今後の授業で一般論や計算法を見ていくことになる。

最後に量子計算の初歩を導入した。線形代数の応用例としての量子計算に少しだけ触れられたのではないかと思う。

Notes

- ¹⁶ 線形変換に切片に対応する定数を含めた変換を**アフィン変換 (Affine transformation)**という。
- ¹⁷ 証明は参考書参照のこと
- ¹⁸ 複素版である、エルミート行列やユニタリー行列なんてのもあるが、性質は実数版と似通っている。
- ¹⁹ 複素版の直交行列はユニタリー行列と呼ばれている。
- ²⁰ 実際には射影演算も必要である。射影は量子計算においては射影測定という状態の確定に関係している。

Part 4

第04回: 連立方程式と行列

4.1 今日やること

今回は、前回からの話とがらっと変わり、連立方程式と行列の関係を説明し、拡大係数行列を導入する。今後数回の講義の基本、線形代数の重要な側面、となるのでしっかり理解してほしい。

ここでの連立方程式は連立した多変数の1次方程式の集まりを指す。数理的な条件は、1次式として書けることも多く、その複数の条件を同時に満たすときの変数の組を見つけるために連立方程式を用いるのである。

中学校のときには、ほとんどの例で2元連立方程式などだったと思うが、以後数回で n 個の変数、 m 個の式のとときに何が起こるか、どのようなときに解けるのか、解は一意的なのか、などを考察することになる。

復習演習 例7、練習問題7を解いてみよ(教科書15ページ)

復習演習 以下の行列ベクトル積を計算せよ
演習 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (155)$$

復習演習 以下の行列積を計算せよ
演習 2

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (156)$$

復習演習 問題 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (157)$$

これは正方行列であるが、逆行列はあるか？ あれば A^{-1} を求めよ。ヒントはさっきの公式である。そして、もし存在すれば逆行列であることを AA^{-1} を計算することにより確かめよ。

問題2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (158)$$

これは正方行列であるが、逆行列はあるか？ あれば A^{-1} を求めよ。そして、もし存在すれば逆行列であることを AA^{-1} を計算することにより確かめよ。

問題3

2次元の場合、回転行列は

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (159)$$

のように書くことができるのだった。この逆行列を公式を使って求めよ。ただし答えは、逆回転になるはずで $R(-\theta)$ となるはずである。そして逆行列であることを確かめよ。

演習 例7、練習問題7を解いてみよ (教科書15ページ)

演習 総合演習 1-1 の大問 3 を解いてみよ (教科書 17 ページ)

演習 以下の転置を計算せよ

演習 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (160)$$

演習 2

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (161)$$

演習解答 演習1の解答

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix} \quad (162)$$

復習演習 以下の行列積を計算せよ
演習2の解答

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 7 \end{bmatrix} \quad (163)$$

演習1解答 問題1

$ad - bc$ を計算すると $4 - 4 = 0$ となるため逆行列は存在しない。

問題2

先の逆行列公式に当てはめると、

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (164)$$

なお、 $A = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ なので係数が逆数になって、行列部分は元通りになっている。

問題3

略。計算すれば出てくる。ただし $\cos(-\theta) = \cos \theta$ 、 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ に注意せよ。

演習解答 以下の転置を計算せよ

演習1

$$A^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (165)$$

演習2

$$B^{\top} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (166)$$

4.2 係数行列と拡大係数行列

今回は、連立方程式と行列の関係を見てみる。もともと行列の研究は、連立方程式の研究から生まれた。「行列」(matrix)の名前はシルベスター²¹が名付けた。

問題と説明を具体化するため、以下の連立方程式を考える。

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (167)$$

これは行列とベクトルの式として書くことができる。

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (168)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (169)$$

を**係数行列** (Coefficient matrix) と呼ぶ。さらに右辺も含めて書いた

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (170)$$

を**拡大係数行列** (Augmented coefficient matrix) と呼ぶ。連立一次方程式を拡大係数行列で書くと、文字の種類を気にしなくてよいし、また書く文字数も減り、経済的である。拡大係数行列は線が入っており、定数項と係数行列部とは区別があるが、全体を行列として扱って良い。

演習 例8、練習問題8を解いてみよ(教科書19ページ)

4.3 加減法と行の基本変形

線形代数をはじめとした数学においては、同値変形が非常に重要である。同値変形とは、もとに戻せる変形や操作のことである。

連立方程式を解く際には、代入法と加減法があったが、代入してしまうと元に戻せないが、足し引きは、逆の操作で元に戻せるため同値変形である。

加減法で解く例を見てみよう。先程の連立方程式を解いてみる。

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (171)$$

という式が与えられたとき、第2式を2倍すると、

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad (172)$$

となる。これは可逆な操作である。そして第1式から第2式を引くと、

$$\begin{cases} -y = 1 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \quad (173)$$

となる。第1式の2倍を第2式から引くと、

$$\begin{cases} -y & = 1 \\ 2x & = -2 \end{cases} \quad (174)$$

となる。最後に第一式に -1 を掛け、第2式に $1/2$ を掛け、第1式と第2式を入れ替えると、

$$\begin{cases} x & = -1 \\ y & = -1 \end{cases} \quad (175)$$

を得る。

上記の操作は、3つの「加減法の基本操作」という操作に分解できる。 M 本の式からなる連立方程式があったとき、 $m, m' = 1, \dots, M$ として基本操作は以下のとおりである。 $k \neq 0$ とする。

- m 式目を k 倍する。
- m 式目を k 倍し、 m' 式目に加える。
- m 式目と m' 式目を入れ替える。

この操作は、拡大係数行列を用いても行う事ができる。上記の操作を拡大係数行列に対して行ってみよう。今の拡大係数行列は、

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (176)$$

である。2行目を2倍すると、

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \quad (177)$$

そして1行目から2行目を引くと、

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \quad (178)$$

1行目の2倍を2行目から引くと、

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \quad (179)$$

最後に1行目に -1 を掛け、2行目に $1/2$ を掛け、1行目と2行目を入れ替えると、

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad (180)$$

となる。これを拡大係数行列でなく、係数行列として書くと、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (181)$$

となり、元の加減法による解法と同じであることが理解できると思う。

日本語を用いて書くのはまどろっこしいので、普通は以下のように数式と操作をまとめて以下のように書く。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2行目を2倍}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1行目から2行目を引く}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\text{1行目の2倍を2行目から引く}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1行目に-1を掛ける}} [\dots] \xrightarrow{\text{2行目に1/2を掛ける}} [\dots] \\ & \xrightarrow{\text{1行目と2行目を入れ替える}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (182)$$

$[\dots]$ は行列であるが紙面の都合上、省略した。拡大係数行列の左側が単位行列になっているが、連立方程式が解けているとき、このように左側が単位行列になる。

行の基本変形の結果は、異なる行列になるため、イコールで結んではいけない! 絶対に間違えないように。かならず矢印で結ぶ。

上記の操作は、3つの**行の基本変形** (Elementary row operations) という操作に分解できる。 $M \times N$ の拡大係数行列があるとき、 $m, m' = 1, \dots, M$ として以下のとおりである。 $k \neq 0$ とする。

- m 行目を k 倍する。
- m 行目を k 倍し、 m' 行目に加える。
- m 行目と m' 行目を入れ替える。

引き算は、 $k < 0$ を用いて足し算として実現できる。

連立一次方程式を解くというのは、拡大係数行列に対して行の基本変形をほどこし、単位行列を作る操作にほかならない。

演習 例9、練習問題9を解いてみよ (教科書23ページ)

演習 例10、練習問題10を解いてみよ (教科書24ページ)

4.4 基本変形と行列積

ここは難しいので必ずしも理解できなくても良い。後期でベクトル空間や同値などをやったときに見返してみると役立つかもしれない。

実は行基本変形は特殊な行列の積として書くことができる。たとえば、3次の正方行列に対するものを考えてみる。2行目を定数 c 倍する行基本変形は、

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (183)$$

とすれば良い。

基本変形する行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (184)$$

とし行の基本変形 (S をかける) を考える。

$$SA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (185)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (186)$$

のように実現できる。ここから $SA \neq A$ となるので行基本変形をイコールで結ぶのは間違いであることも分かる。

このように行基本変形を誘導する行列を**基本行列** (Elementary matrix) と呼んだりする。この他にも行の入れ替えや足し引きも基本行列としてかくことができる。

4.5 階段行列

行列の中で、ある行までは行番号が増えるに従って左端から連続して並ぶ0の数が増え、その行より下は成分がすべて0である行列を**階段行列** (Echelon form, 英語の方は、エシュロン・フォームと読み、フランス語由来らしい) という。

例としては、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (187)$$

のように階段になっているものである。

演習 例11、練習問題11を解いてみよ (教科書26ページ)

4.6 行列の階数 (ランク)

ある行列 A を行基本変形により階段行列へ変形したとき、0でない成分が残っている行の数を行列 A の**階数 (Rank, ランク)** といい、 $\text{rank } A$ と書く²²。なお事実として、行の基本変形ではランクは変わらない。

例としては、すでに階段行列へ変形できたとき、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (188)$$

だと、 $\text{rank } A_1 = 3$ 、 $\text{rank } A_2 = 2$ 、 $\text{rank } A_3 = 1$ となる。

$n \times n$ 行列の行列 A に対しランクを計算して $\text{rank } A = n$ となるとき、フルランクという。証明は割愛するがフルランクである行列は逆行列を持つ。

例題 次の行列を基本変形し、階段行列にすることでランクを求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (189)$$

例題の解法

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3行目に1行目の2倍を加える}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3行目から2行目を引く}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (190)$$

よって $\text{rank } A = 2$

演習 例12、練習問題12を解いてみよ (教科書29ページ)

演習 例13、練習問題13を解いてみよ (教科書30ページ)

演習 問1. 次の行列のランクを求めよ。

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (191)$$

問2. 次の行列のランクを求めよ。

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (192)$$

問3. 次の行列のランクを求めよ。

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (193)$$

演習解答 問1. 1

問2. 2

問2. 2

4.7 ランクの特徴

行列のランクには様々な性質がある。以下に証明抜きで事実を並べておこう。

1. $\text{rank } A = \text{rank } A^{\top}$ (転置してもランクは変わらない)
2. $\text{rank } A$ の値は、 A に入っているベクトルの独立な本数の最大値に等しい²³
3. n 次正方行列において $\text{rank } A = n$ なら逆行列を持つ

4.8 線形写像の中でのランク

ベクトル \vec{y} と \vec{x} 、行列 A あったとき、

$$\vec{y} = A\vec{x} \quad (194)$$

とかける関係を線形写像と呼んだ。このとき A のランクとはどういう意味をもつのだろうか。

実はこのランクは、 \vec{y} と \vec{x} の次元についての関係を与えている (次元定理。後期で習う)。もし、 A が正方行列であるとしよう。 \vec{y} と \vec{x} が n 次元ベクトルで、 A が $\text{rank } A = n$ となっているとき、 \vec{y} と \vec{x} は互いに行き来できる (逆行列があるのでそれによって行き来できる)。

ではランクが n より小さくなっていれば何が起きているのだろうか。これは、 \vec{y} が \vec{x} よりも (実質的な) 次元が小さくなっていることを意味している。つまり情報が落ちている、そのため逆行列 A^{-1} が存在せずに \vec{y} から \vec{x} に戻ることが出来ない²⁴。この現象は高次元ならではの現象であり、いろいろな話につながっていく (が、これは抽象ベクトル空間の話となり、前期では取り扱わない)。

4.9 今回のまとめ

今回は、行列と連立方程式の関係を見てきた。特に係数行列、拡大係数行列を導入した。

拡大係数行列に対する行の基本変形をすると、解くことができるが、これは連立方程式の加減法と同じことをより簡潔に書くものであった。

今回は、ランクと呼ばれる行列の性質を導入した。行列に対して基本変形を繰り返すことにより、階段行列を得て、そしてランクを計算することができる。

ランクは今回の内容だけではありがたみが良くわからないが、連立方程式の解の存在に対する条件を計算するために必須の道具である。

次回は、連立方程式の解法と解の存在を見ていく。

Notes

²¹ ジェームス・ジョセフ・シルベスター、19世紀イギリスの数学者。

²² あまり行列の階数とは言わず、ランクということが多い気がする。これは階数が回数と同じ音であり、分かりづらいからなのかもしれない。

²³ 独立とは一次独立のこと。後期でならう概念である。

²⁴ 内積が本質的に射影(成分を取り出す操作)であることを考えよう。すると行列を行ベクトルの集まりだと思えば、行列ベクトル積は、行列に入っている行ベクトルの射影を求めていることになる。 n 次正方行列に入っている一次独立なベクトルなベクトルの数が n より小さい場合には、射影によって情報が欠損してしまい、元に戻せなくなってしまう。

Part 5

第05回: 連立一次方程式の解法1

5.1 今日やること

今回は、前回に引き続き、連立方程式の理論的な側面を見ていく。具体的には、掃き出し法を導入し、掃き出し法を用いて連立一次方程式を解く。掃き出し法の計算は、前回学んだ行基本変形によって行う。

(連絡: 次次回は講義内試験です。試験範囲は後述。)

5.2 行基本変形(復習)

拡大係数行列は、3つの「行の基本変形」(Elementary row operations)で同値変形できるのだった。 $M \times N$ の拡大係数行列があるとき、 $m, m' = 1, \dots, M$ として以下のとおりである。 $k \neq 0$ とする。

- m 行目を k 倍する。
- m 行目を k 倍し、 m' 行目に加える。

- m 行目と m' 行目を入れ替える。

引き算は、 $k < 0$ を用いて足し算として実現できる。

復習演習 例9、練習問題9を解いてみよ(教科書23ページ)

復習演習 例13、練習問題13を解いてみよ(教科書30ページ)

復習演習 問1. 次の行列のランクを求めよ。

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (195)$$

問2. 次の行列のランクを求めよ。

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (196)$$

演習解答 問1. 1
問2. 2

5.3 連立一次方程式が解ける条件

しばらく連立一次方程式の話をしてきたが、ここでは連立一次方程式が解ける条件を結論から紹介しておこう。ちゃんとした説明は後で行うことにする。

中学校のときから連立一次方程式を学んできたが、実は連立方程式は解けるとは限らない。また解が唯一とも限らない。例えば、現実にかかる問題として(今日の最後にふれるような)生産量の問題がある。現実の問題から連立方程式を立てると、

$$\begin{cases} 15x + 10y = 35 \\ 21x + 14y = 7 \end{cases} \quad (197)$$

のような形の方程式が得られることもあると思う。この方程式は解けるだろうか? (実は解は無い)。これを理論的に調べていくのが線形代数の一つの役割である。

ここでは例え話をしよう。高校時代に2次方程式を学んだ。たとえば、

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (198)$$

という2次方程式が与えられたとしよう。この2次方程式は、実数解を持つと

は限らない。これを判別するには、以下の D を用いて判別できた。つまり

$$D = b^2 - 4ac \quad (199)$$

を**判別式** (Discriminant、ディスクリミナント) と呼んだ²⁵。 D が非負のときに実数解を持ち、 $D < 0$ のときに実数解を持たない。 D が非負のときをくわしくみると、 $D > 0$ ときには2つの異なる実数解をもち、 $D = 0$ ならば重解を持つ(2つの解が重なっている)。こういったことを連立方程式について行いたい。もっといえば、2次方程式には解の公式があったが、連立方程式の“解の公式”もあれば調べてみたい。以降の講義ではこれを理論的に調べていくことになる(第14回に解の公式に相当するものを取り扱う)。

話を連立方程式に戻す。ここでは解くべき連立方程式を一般的に、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \quad (200)$$

として考える (a_{ij} などに少し制限を加える必要があるがこれは教科書参照のこと)。つまり係数行列で書いて $A\vec{x} = \vec{b}$ とする。対応する拡大係数行列を $[A|\vec{b}]$

と書いたとき、

$$\text{rank } A = \text{rank } [A|\vec{b}] \quad (201)$$

を満たせば連立一次方程式は解を持つ²⁶。

すなわち

1. $\text{rank } A \neq \text{rank } [A|\vec{b}]$ ならば解が存在しない。
2. $\text{rank } A = \text{rank } [A|\vec{b}]$ ならば解が存在する。

となる。

また、未知数が n 個ある、解を持つ連立一次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ において

$$r \equiv \text{rank } A = \text{rank } [A|\vec{b}] \quad (202)$$

とする。つまり r はランクであり、以下で見るように方程式の持っている情報の数でもある。未知数の数 n と方程式の持っている情報の数 r の差

$$n - r \quad (203)$$

を方程式の自由度という。 $n = r$ であれば過不足なく未知数を決定できる (唯一解を持つ)。つまり、

$$\text{rank } A = \text{rank } [A|\vec{b}] = n \quad (204)$$

を満たせば連立一次方程式は唯一解を持つ。そして $n > r$ (方程式の持っている情報の数より、未知数の数が多い) とき、無数の解がある。つまり解が唯一に定まらず、任意のパラメータが残ってしまう。

まとめると、連立方程式の分類は図13のようになる。

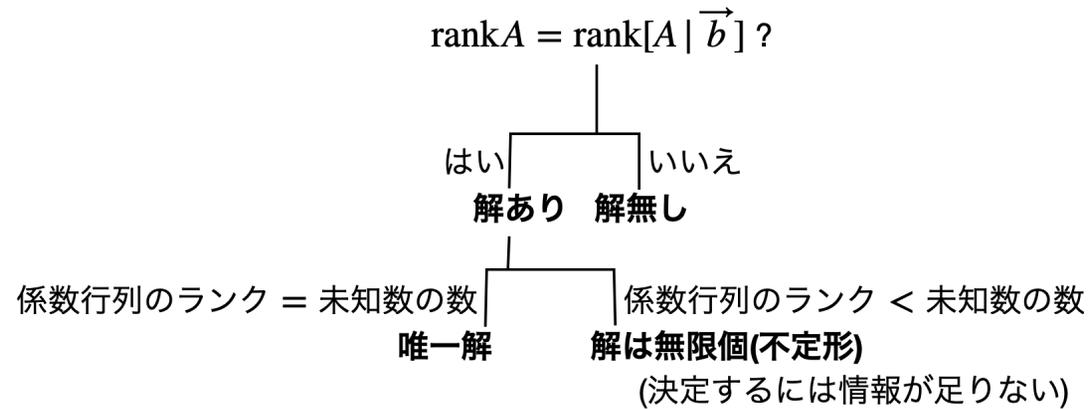


図 13: 連立方程式の解の存在の分類

2変数の2元連立方程式の場合には、各方程式が直線に対応するのであった。解の存在は、図14のように思っておけば良い。

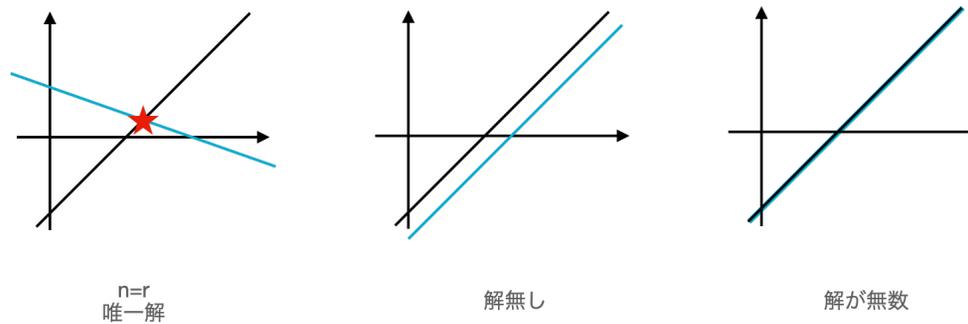


図 14: 連立一次方程式の解のパターン。左は、唯一解を持つときで、これは1点で交わる。真ん中は、解がないときで、交わらない。右は、重なってしまっ
て直線上のすべての点が解となっている。

以下では、具体的に存在条件がランクから出てくるかを見ていく。

5.4 解の存在条件の説明

ここでは教科書での例を具体化してみよう。未知数の数 $n = 3$ 個 (x_1, x_2, x_3)、式の数 $m = 5$ 本の連立 1 次方程式を考えて、解の存在条件を調べてみよう。ここで説明することは、二次方程式の判別式に対応する事柄である。

未知数の数 $n = 3$ 個 (x_1, x_2, x_3)、式の数 $m = 5$ 本のときの具体的に連立方程式を書いてみると、

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 = b_5 \end{cases} \quad (205)$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \quad (206)$$

としてみると、

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (207)$$

となる。

拡大係数行列を $[A|\vec{b}]$ が、以下のような $[C|\vec{d}]$ に変形できたとする。ただし C の成分は c_{ij} 、 \vec{d} の成分は d_i とする。各 d_i が 0 かどうかが重要なのだが、それはやってみなければわからない(以下で場合分けして見ていく)。

このとき拡大係数行列が、行の基本変形によって

$$[A|\vec{b}] \rightarrow \cdots \rightarrow [C|\vec{d}] = \left[\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 \end{array} \right] \quad (208)$$

と得られたとする。教科書の例で $r = 3$ として書いたことに対応している ($c_{11} \neq 0, c_{22} \neq 0, c_{33} \neq 0$ を仮定しておいたことに対応する)。つまり係数行列 C をみ

ると

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (209)$$

なのでランクが $r = \text{rank } C = 3$ となっている。基本変形で $A \rightarrow C$ となっているので、元々の係数行列 A のランクもわかり $\text{rank } A = \text{rank } C = 3$ となっている。次に拡大係数行列のランクを見ていこう。

変形後の C をつかって連立方程式の形に戻してみると、

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 & = d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 & = d_2 \\ c_{32}x_2 + c_{33}x_3 & = d_3 \\ 0 & = d_4 \\ 0 & = d_5 \end{cases} \quad (210)$$

拡大係数行列のランクは d_4, d_5 の値によるため、場合分けを考えてみる。

Case 1: $d_4, d_5 \neq 0$ のとき これは与式と矛盾する、たとえば同じ係数に対して $d_4 = 0$ かつ $d_4 \neq 0$ なので不合理である。すなわち、これはありえないパターンであり、解がない。

これをランクの言葉でいうと、拡大係数行列のランクで書き直しておこう。拡大係数行列のランクは $\text{rank } [C|\vec{d}] = r + 2 = 5$ となる。もちろん基本変形で変形しているので $\text{rank } [A|\vec{b}] = \text{rank } [C|\vec{d}] = 5$ となる。つまり

$$\text{「rank } [A|\vec{b}] \neq \text{rank } A \text{」 なら解はない。} \quad (211)$$

という事実がわかる。たとえ $d_4 = 0$ かつ $d_5 \neq 0$ としても不合理な状況となってしまう、解はない。係数行列のランクと拡大係数行列のランクが一致しない場合には解がない。

Case 2: $d_4 = d_5 = 0$ のとき これは与式と整合的である。連立方程式の式とあっている。つまりこれは(一意かは別にして)解があるといえる。

ランクの言葉でいうと、拡大係数行列のランクで $\text{rank } [C|\vec{d}] = r + 0 = 3$ となる。もちろん基本変形で変形しているので $\text{rank } [A|\vec{b}] = \text{rank } [C|\vec{d}] = 3$ となる。つまり

$$\text{「rank } [A|\vec{b}] = \text{rank } A \text{」 なら (唯一かは別にして) 解がある。} \quad (212)$$

という事実がわかる。

解があるときの一意性 さて、解があるときの一意性に関しても考えておこう。変形後の C をつかって連立方程式の形をもう一度みってみる。ただし $d_4 = d_5 = 0$ のときだけなのでそれらのための式は書かないようにする。すなわち

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 & = d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 & = d_2 \\ c_{33}x_3 & = d_3 \end{cases} \quad (213)$$

ちょうどランク「 $\text{rank} [A|\vec{b}] = \text{rank} A = r$ 」の本数である3本の式 ($r = 3$) が出てくる。変数の数が $n = 3$ であり、実質的な式の数である $r = 3$ という状況であり、これは中学校であってもしっかりとわかるように解くことができる。このとき、唯一解がある。

解はあるが一意でないときの場合 では、少し問題を変えて未知数の数が4つ、つまり $n = 4$ であった場合にはどうだろうか。もとの問題を

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 = b_5 \end{cases} \quad (214)$$

として考えてみる。さっきはなかった x_4 が新たに追加されたわけである。このとき、先ほどと同様に基本変形をして

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2 \\ c_{33}x_3 + c_{34}x_4 = d_3 \end{cases} \quad (215)$$

を得たとしよう。対応する拡大係数行列は階段行列なのでこれ以上簡単にはならない。これはつまり、たとえば $c_{33}x_3 + c_{34}x_4 = d_3$ などを変形しても「 $x_4 =$ (変数のない式)」にすることができない。このとき、どうすればいいかというと、(どの変数でも良いので一つ選んで) $x_4 = t_0$ (定数) と仮置きしてしまうのである。

すると未知数が3つ、式の数 (=Aのランク=3) が3本なので解くことができる。すなわち変数同士の関係をといて、変数を消去できる。しかし未知定数 t_0 が決まらないので、その分だけ解があることになり、解が無数 (いわゆる無限個) あることがわかる。このことは以下での具体例を見るとより明確に理解できるだろう。

5.4.1 なぜこんな条件を学ぶのか

さて、なぜこんな条件を学ぶのかをもう一度触れておく。2変数程度の連立方程式なら以下でも見る通り、パッと見で解けるかどうかわかったりする。しかしながら、線形代数が真に役立つのは、 n 次元でも成立する論理が必要なときである。たとえば顧客データの解析や高次元の数学の問題を考えるときには、 $n > 4$ の変数が出てくることも多々ある。そんなときには、上記のランクでの条件を知っていると条件を満たす解があるか、あれば唯一か、などを機械的に判別できることになる。

5.5 連立方程式の解の存在の分類

再掲するが、連立方程式の分類は図 15 の図のようになる。

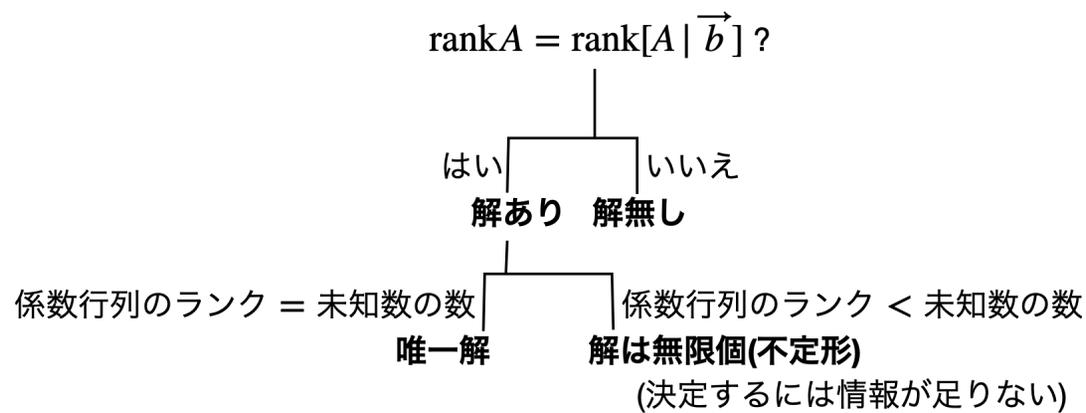


図 15: 連立方程式の解の存在の分類。ランクは実質的な方程式の本数である。

上記では具体例で示したが、この条件は教科書にある通り一般的にも成り立つ。連立方程式の解の様相を調べたければランクを確認する。

5.6 連立一次方程式に対する掃き出し法

ここでは、掃き出し法を用いて連立一次方程式を解く。前述の通り、連立一次方程式は解を持ったり、無限個の解をもつ場合がある。

掃き出し法を用いた解法は、あとの回(第9回)で出てくる逆行列を求める手法としても出てくるのでしっかり習得してほしい。掃き出し法 (Row reduction) はガウスの消去法 (Gauss' elimination) とも呼ばれる。

掃き出し法は、拡大係数行列に対して行の基本変形を繰り返し、左側の行列部分を階段行列、できる場合には単位行列にする作業のことを指す。

1次結合 ここで以下で用いる単語を導入しておく。2つ以上のベクトルを0で無い係数をかけて足し合わせる操作を**1次結合**もしくは、**線形結合**という。

たとえば、 $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の1次結合でかくと、

$$\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \quad (216)$$

と書ける。なぜなら、

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (217)$$

だからである。このようにスカラー倍の和で書くことを1次結合という。
例題を2つ見てから演習を行う。

例題1 (解のない連立方程式) ここでは、例題として

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad (218)$$

という連立方程式を考えてみる。明らかに1式目と2式目が矛盾しているため解が無いのだが、上に与えたランクでの条件からこれを見てみよう(対応する直線を平面に描いてみると切片だけが異なる2直線なので交わらないこともわかる)。

係数行列を A 、拡大係数行列を $[A|\vec{b}]$ と書くと

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [A|\vec{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \quad (219)$$

となる。

さて2行目から1行目を引くという行の基本変形を行うと、

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (220)$$

から $\text{rank } A = 1$ であることがわかる。同様に拡大係数行列に対しても基本変形を行うと

$$[A|\vec{b}] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (221)$$

となるため、 $\text{rank } [A|\vec{b}] = 2$ である。

つまり $\text{rank } A \neq \text{rank } [A|\vec{b}]$ であるため解がない。

例題 2 (解が無限個ある連立方程式) 次に例題として

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \quad (222)$$

という連立方程式を考えてみる。2式は矛盾していないが、明らかに1式目と2式目が実質的に同じである。これを上に与えたランクでの条件からこれを見よう (対応する直線を平面に描いてみると同じ直線であるため、交点が1点でなく、直線上のすべての点になっている。つまり無限個の解を持つ)。

係数行列を A 、拡大係数行列を $[A|\vec{b}]$ と書くと

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad [A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array} \right] \quad (223)$$

となる。

さて2行目から1行目の2倍を引くという行の基本変形を行うと、

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (224)$$

から $\text{rank } A = 1$ であることがわかる。同様に拡大係数行列に対しても基本変形を行うと

$$[A|\vec{b}] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (225)$$

となるため(さきと異なり)、 $\text{rank } [A|\vec{b}] = 1$ である。

つまり $\text{rank } A = \text{rank } [A|\vec{b}]$ であるため解を持つ。今2つの変数(未知数)があるが、 $\text{rank } A = \text{rank } [A|\vec{b}] < 2$ (変数の数)であるため、さっきの解説から解が無限個あることになる。

解を書き下してみよう。基本変形の結果を連立方程式として書いてみると、

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \end{cases} \quad (226)$$

となる(ランクが1なので1本しか式がない!)。ここで、 t を実定数とする。そして $x = t$ と決めてしまう。すると y もわかる。つまり $y = \frac{1}{2}(1 - t)$ である。

このため、解は

$$x = t, \quad y = \frac{1}{2}(1 - t), \quad (\text{ただし } t \text{ は任意定数}) \quad (227)$$

となる。(任意定数が決まらないので無限個の解があることになる。 t に何を入れても成立するわけである。)

ここまででも正解であるが、これは、ベクトルの式としても書けることを見しておく。つまり解を1次結合で書くと

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{2}(1 - t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (228)$$

となる。答えはどちらの形で書いても良い。

(おまけ問題: このベクトルを図示してみよ。連立方程式に入っている2つの式も同じ平面に書いてみるとどうか?)

演習 例 14、練習問題 14 を解いてみよ (教科書 36 ページ)

演習 例 15、練習問題 15 を解いてみよ (教科書 38 ページ)

演習1 以下の連立方程式を掃き出し法を用いて解け。解がない場合には解なしと答えよ。

$$\begin{cases} x + 2y - 2z & = 7 \\ x - y + 3z & = -4 \\ 2x + 3y + 2z & = 6 \end{cases} \quad (229)$$

演習2 以下の連立方程式を掃き出し法を用いて解け。解がない場合には解なしと答えよ。

$$\begin{cases} x + 3y - 4z & = -3 \\ 3x - 2y - z & = 2 \\ 2x - 5y + 3z & = 5 \end{cases} \quad (230)$$

演習3 以下の連立方程式を掃き出し法を用いて解け。解がない場合には解なしと答えよ。

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases} \quad (231)$$

演習4 (自由課題) ガウスの消去法とガウスジョルダン消去法を調べてみよう

演習1の解答

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (232)$$

演習2の解答

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t - 1 \\ t \end{bmatrix} \quad (t \text{は任意の実数}) \quad (233)$$

演習3の解答 解なし。

5.7 線形方程式の応用の話

ここでは、連立方程式の実社会への応用として、オペレーションズ・リサーチを取り上げよう²⁷。お話なので、軽く聞いてほしい。

問題としては、以下の状況を考える。

ともに原料 X と Y を使った 2 種類のジュース 1 と 2 がある。どちらも、10ml 当たり 3 円で販売される。ジュース 1 は、10ml 作るのに、原料 X を 2ml, 原料 Y を 3ml 必要とする。ジュース 2 は、10ml 作るのに、原料 X を 1ml, 原料 Y を 4ml 必要とする。原料 X と Y は、それぞれ 40ml, 100ml ある。作ったジュースはすべて売れるものとして、売り上げが最も大きくなるようにジュース 1 と 2 を作りなさい。

売上を L とする。ジュース 1 の生産量を $10x_1$ ml、ジュース 2 の生産量を $10x_2$ ml とする。このとき、ジュース 1 およびジュース 2 ともに 10ml あたり 3 円で販売されるので、

$$\text{売上 } L = 3x_1 + 3x_2 \quad (234)$$

である。この L を最大化する x_1 と x_2 を決定したい。ただし、原材料に限りがあるため、好き放題に作れるわけではない。

原材料の使用量は、

$$\text{原材料 X } 2x_1 + x_2, \quad (235)$$

$$\text{原材料 Y } 3x_1 + 4x_2, \quad (236)$$

である。これが上限以下なので、

$$\text{原材料 X } 2x_1 + x_2 \leq 40, \quad (237)$$

$$\text{原材料 Y } 3x_1 + 4x_2 \leq 100 \quad (238)$$

を満たさなければならない。もちろん生産量は負ではないので、 $x_1, x_2 \geq 0$ を満たす。

つまり、

$$2x_1 + x_2 \leq 40, \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 100, \quad x_1, x_2 \geq 0, \text{ という条件のもとで}$$

$$L = 3x_1 + 3x_2 \text{ を最大化せよ}$$

という問題を解けば良いことになる。

このままでは不等式が含まれており、線形代数の知識を使うのが難しい。

そこで補助変数 s_1 と s_2 を導入し、

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 40, \quad (\text{OR1})$$

$$3x_1 + 4x_2 + s_2 = 100, \quad (\text{OR2})$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0, \text{ という条件のもとで} \quad (\text{OR3})$$

$$L = 3x_1 + 3x_2 \text{ を最大化せよ}$$

と問題を変形する。(補助変数は、(OR1)の式と $s_1 \geq 0$ から消去できる。)

(OR1) と (OR2) は拡大係数行列を用いて

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 40 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 100 \end{array} \right] \quad (239)$$

とかける。(もちろん条件式 (OR3) はあるのだが、ひとまずはこれを解けば良い)。

この授業は線形代数の講義であるため、これ以上の解析は行わないが、このような生産の戦略を、条件の範囲内で行う、などの問題を解くときにも線形代数の知識は役立つのである。もし、問題のときかたに興味があるものは、https://orsj.org/wp-content/corsj/or60-12/or60_12_693.pdf を参照のこと。

5.8 今回のまとめ

今回は、掃き出し法を用いて連立一次方程式の解き方を学んだ。掃き出し法は、拡大係数行列に対して行の基本変形を繰り返すことで解を求めるというものだった。

さらに連立一次方程式の解の存在や一意性はランクで判別可能であることもみた。次々回のテストに備えて次回は、演習を行う。

Part 6

第06回: 連立一次方程式の解法2

テスト前の演習を行う。

6.1 授業内試験の案内

- 試験範囲: ベクトル、行列の演算、行基本変形、ランク、連立一次方程式(教科書: P76-87, P2-39)
- 勉強すべき問題: 今までの例題、演習問題。
- P87総合演習問題2-1, P17総合演習問題1-1, P44総合演習問題1-2 (大問1まで),

しっかり勉強しておいて下さい。ひねった問題をだすというよりは、上記の内容がしっかりマスター出来ているかを確認します。

6.2 ランクについて

講義内で扱ったランクであるが、わかりにくいという話があったので以下のようなことを考えたので説明しておく。

ランクを説明するために以下の行列を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (240)$$

この A のランクを求める。まず各行をベクトルとみなす。

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (241)$$

つまり、

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}^\top \\ \vec{b}^\top \\ \vec{c}^\top \end{bmatrix} \quad (242)$$

と行ベクトル (列ベクトルの転置) の集まりとみなす。行の基本変形を行い、階段行列を作る。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}^\top \\ \vec{b}^\top \\ \vec{c}^\top \end{bmatrix} \quad (243)$$

$$\xrightarrow{\text{3行目から1行目} \times 2 \text{ と 2行目を引く}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 - 2 \times 2 - 0 & 4 - 1 \times 2 - 2 & 1 - 0 \times 2 - 1 \end{bmatrix} \quad (244)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}^\top \\ \vec{b}^\top \\ \vec{c}'^\top \end{bmatrix} \quad (245)$$

つまり $\vec{c}' = \vec{0}$ である。結果は階段行列になっているので $\text{rank } A = 2$ である。

ここで行の基本変形をたどると、元の3行目 \vec{c} から $2\vec{a}$ と \vec{c} を引いて最後の3行目を作ったので

$$\text{3行目} = \vec{c}' = \vec{0} = \vec{c} - 2\vec{a} - \vec{b} \quad (246)$$

である。これを \vec{c} について解くと

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b} \quad (247)$$

となる。つまり元の3行目 \vec{c} は、残りの2つのベクトルだけを使った和として書けることになる。

3次の正方行列 A の中にある3本のベクトルの内、2本だけが「独立」であり、3本目は独立ではなく、2本の1次結合で表される(この独立という言葉は一次独立という言葉で後期の線形代数IIで取り扱われるはずである)。1次結合とは、ベクトルをスカラー倍して足し合わせることであった。

この論理を追いかけると、 n 次正方行列 A のランク $\text{rank } A = r$ が n でなく、 n より小さい数になっていれば、いつでも $n - r$ 本のベクトルが r 本のベクトルの和として書けることになる。

講義では説明していないが、 $\text{rank } A = \text{rank } A^T$ なので今の議論は列ベクトルとしても成立する。

結局のところ、ランクとは行列の中に入っている独立なベクトルの本数であると言える。何本のベクトルが「独立」であるかは基本変形で変えることができない(なぜならば基本変形ではベクトルの1次結合を取り直しているだけであるからである。このあたりは後期の内容であるので割愛する。)。後期では、写像の Im や Ker をつかった次元定理にも顔をお出すため非常に重要である。

連立方程式の可解条件は、連立方程式として説明したが、ここではベクトルとして見てみた。

Notes

²⁵ 判別式という用語は1851年にイギリス人数学者ジェームス・ジョセフ・シルベスターによって造り出されたようだ。この後、行列式(determinant)という用語を習うが、これもシルベスターによる。行列式は、連立方程式の解の存在にとって重要である。さらに、行列式を用いて判別式を書くこともできる。 n 次方程式の解の存在条件と、連立方程式の解の存在条件が関連しているというのは面白い。

²⁶ くわしい理論的な理由は参考書を参照のこと。

²⁷ https://orsj.org/wp-content/corsj/or60-12/or60_12_693.pdf をもとにした。

Part 7

第07回：授業内試験

試験範囲：ベクトル、行列の演算、行基本変形、ランク、連立一次方程式

Part 8

第08回：授業内試験の振り返り

テストの解説、その他の補足を行う。

8.1 テストの解説

テストの解説などを行う。

8.2 ブロック行列と行列積

これまでの講義でブロック行列については、すこしだけ説明した。ここではブロック行列の積に関する性質を書いておこう。

まずブロック行列を復習する。 A を 4×5 行列とする。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \quad (248)$$

これを区分にわけて書くことにする。(以下のブロック行列を表す記号は一般的な記号ではないので注意) $B^{(2,3)}$, $D^{(2,2)}$ を 2×3 行列、 $C^{(3,2)}$, $F^{(1,2)}$ を2つの 2×2 行列とすると、行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{(3,3)} & C^{(3,2)} \\ D^{(1,3)} & F^{(1,2)} \end{bmatrix} \quad (249)$$

のようにかける。ただし、

$$B^{(3,3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad C^{(3,2)} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}, \quad (250)$$

$$D^{(1,3)} = [a_{41} \ a_{42} \ a_{43}], \quad F^{(1,2)} = [a_{44} \ a_{45}] \quad (251)$$

とした。ここで $B^{(3,3)}, C^{(3,2)}, D^{(1,3)}, F^{(1,2)}$ という A を構成する 4 つの行列をブロック行列という。

ブロック行列には面白い性質がある。2つの行列 X と Y を考えよう。ただし行列の型は、積 XY が定義されているとする。 X と Y をそれぞれブロック行列に分けておく。ただし X の列の分割と Y の行の分割が同じであるとする。このとき、積 XY はブロック行列を要素として積を計算して良い。

具体的な例を見てみよう。2つの積が定義できる行列 X と Y を以下のように置く。

$$XY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (252)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (253)$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right] \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right], \quad (254)$$

$$= \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} [1 \ 2] \\ [0 \ 1] \end{array} \begin{array}{l} [0 \ 1] \\ [1 \ 0] \end{array} + \begin{array}{l} [3 \ 4] \\ [0 \ 1] \end{array} \begin{array}{l} [-2 \ 3] \\ [3 \ -2] \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} [1 \ 2] \\ [0 \ 1] \end{array} \begin{array}{l} [0 \ 1] \\ [1 \ 0] \end{array} + \begin{array}{l} [3 \ 4] \\ [0 \ 1] \end{array} \begin{array}{l} [1 \ 0] \\ [0 \ 1] \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{l} [5 \ 6] \\ [1 \ 0] \end{array} \begin{array}{l} [0 \ 1] \\ [1 \ 0] \end{array} + [7 \ 8] \begin{array}{l} [-2 \ 3] \\ [3 \ -2] \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} [5 \ 6] \\ [1 \ 0] \end{array} \begin{array}{l} [0 \ 1] \\ [1 \ 0] \end{array} + [7 \ 8] \begin{array}{l} [1 \ 0] \\ [0 \ 1] \end{array} \right) \end{array} \right], \quad (255)$$

$$= \left[\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 16 & 14 \end{bmatrix} \end{array} \right], \quad (256)$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 14 & 8 & 12 & 10 \\ 18 & 12 & 16 & 14 \end{bmatrix} \quad (257)$$

この積は、ブロックを行列の要素だとおもって積を計算できる。

文字で書いた例を見てみよう。2つの積が定義できる行列 X と Y を以下のように置く。

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}, \quad (258)$$

ただし X の列の分割と Y の行の分割が同じであるとする。このとき、

$$XY = \begin{bmatrix} AP + BR & AQ + BS \\ CP + DR & CQ + DS \end{bmatrix}, \quad (259)$$

のようにブロック行列を (非可換な) 要素とみて計算して良い。

8.3 代数学？

線形代数の線形とはなにかはすでに講義で述べた。では代数学とはなにかを考えてみよう。

たとえば、以下の規則を満たす系 $\{A, E, O\}$ を考えてみよう。 n をある自然数として、

$$AE = EA = A, \quad E^2 = E, \quad (260)$$

$$A + O = A, \quad AO = OA = O \quad (261)$$

$$A^n = O \quad (262)$$

となるような、ものを考えてみる (ルールが多いように見えるが、それは厄介事を避けるためである)。ただし分配法則や結合法則などは満たすとしておく。

そこで

$$K = (E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-2} + A^{n-1}) \quad (263)$$

はどうなるだろうか。分配法則を満たすのでこれは、

$$K = E(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-2} + A^{n-1}) - A(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-2} + A^{n-1}), \quad (264)$$

$$= EE + EA + EA^2 + \cdots + EA^{n-2} + EA^{n-1} - AE - AA - AA^2 - \cdots - AA^{n-2} - A \quad (265)$$

となる。ここで

$$EE = E^2 = E, \quad EA = A, \quad AE = A, \quad AA = A^2 \quad (266)$$

などを用いると、

$$K = E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} - A - A^2 - \cdots - A^{n-1} - \underbrace{A^n}_{=0}, \quad (267)$$

と整理できる。同じ色のところは消えて、 $A^n = 0$ なので、

$$K = E \quad (268)$$

となる。

さて、ここまでで、 A や E が行列であることは利用していない。これは行列でなくても(262)などのルールさえ認めておけば、 K は求めることができる。

このように、実体はなにかわからなくても、その間にルールを定めておけば計算はでき、有用な結論が得られる事がある。このような“変数”の間にルールを定めて、演算規則から導かれる定理を調べる分野を「代数学」という。線形代数学は、代数学の要素は少ないが上記のような代数学の側面がある。

代数学の大きな基盤の1つに「群論」がある。群論 (Group theory) は以下のような数学的な対象を論じる分野である。

ある集合 G とその要素間に定義された演算 \star の組 (G, \star) が群 (Group) であるとは、以下の4つの規則を満たす時である。

1. $g_1, g_2 \in G$ のとき、2つの要素間にある演算 \star が定義されており、 $g_1 \star g_2 \in G$ をみたす (これを演算が閉じているという)。
2. 演算は $(g_1 \star g_2) \star g_3 = g_1 \star (g_2 \star g_3)$ を満たす。これを結合法則 (Associativity) という。括弧の中を先に計算しても良いということである。
3. $e \in G$ と $g \star e = e \star g = g$ を満たす要素がある。つまり演算をすると、必ず相手になる要素が存在する。この e を単位元という。

4. $g \star g' = e$ となる g' があり、そのような g' を g^{-1} とかく。つまり集合内のそれぞれの要素 g に対し演算をすると、必ず単位元 e になる対となる要素が存在する。これを逆元といい g^{-1} と書く。

ここで集合 G が何かや演算 \star の正体などは、どうでも良い。とにかく、上記の4つの条件を満たす G と \star のペアを群という。これは有理数に対しての掛け算(整数に対する足し算)の抽象化になっている(クイズ: 自然数という集合と足し算は群にならない、なぜだろう?²⁸)。

群では要素間に定義された演算は1つあれば良い。2つ考える場合には環^{かん}(Ring)と呼ばれる代数構造を考えることになる。

たとえば、今まで習ってきた正方行列とそれらの間の行列積は群をなす。また集合 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ も掛け算に対して群をなす。整数の間の足し算も群として取り扱える。

このような抽象的なルールはなんの役に立つのだろうか。それは、群のルールから導くことができる規則(それは定理と呼ばれる)は、具体的な正方行列の群や \mathbb{Z}_2 に対しても成立する。なので応用範囲の広い定理を得ることができる。たとえば、「代数演算と根号だけでは、代数方程式の解の公式は、5次以上では存在しない」というアーベル・ルフィニの定理、特にガロア理論では群は大活躍する。

また物理学や化学とも関連が深い。それは対称性との関連である。物体の

間に働く対称性変換は、群をなす。たとえば並進変換は並進変換群をなす。上記で得られた群の定理は物理学や化学においても成立する。群と線形代数学の知識 (ベクトル空間、後期で習う) を用いると、たとえば化学的な性質を調べたりすることができる。また物理においては、4つの根源的な力 (強い力、弱い力、電磁気力、重力) を調べる手立てにしたり、物質の性質を調べる強力な道具になる。

いずれにしても、線形代数学に含まれているエッセンスは、将来学ぶ様々な分野で役立つものである。

(情報科学に関しては、代数的な側面より、むしろベクトル空間・固有値や解析的な性質が役立つ)

8.3.1 決闘で死んだ数学者

「5次以上の方程式では、解の公式が(加減乗除と根号の範囲で)存在しない」、これを証明したエヴァリスタ・ガロアは、フランス革命時代に10代を過ごした若者だった²⁹。彼は天才ながらも大学受験に2回失敗していた。志望校は2回までしか再受験を許しておらず、そこで人生の歯車が狂ってしまった。

彼はそんな中、苦勞の末に5次以上の一般の場合には解の公式が(加減乗除と根号の範囲で)存在しないことを独力で証明した。そして論文を当時の著名な数学者に送るが2度も論文を(自分に関係がない場所での)事故によって紛

失された。彼の人生はこの様に苦難に満ちていた。

20歳のある日、ある女性に恋をするがそれが元で決闘を申し込まれてしまう。決闘前夜、友人に研究中の課題(20世紀や現代に続く、大切な研究だった)を手紙という形で残した。

そして翌日、決闘で受けた銃弾が元で20歳で亡くなった。泣きじゃくる弟に看取られていたが、「泣かないでくれ。二十歳で死ぬのには、ありったけの勇気が要るのだから！」と残したとされる。

彼の構想は今では「ガロア理論」や「群」と呼ばれ、様々な場面で応用されている。微分方程式に関して、どのタイプの微分方程式が解けるか、という部分は「微分ガロア理論」と呼ばれるものが今でも研究されている(らしい³⁰)。

詳細については、以下を参照されたい。

1. 彼の人生について: 「ガロア 天才数学者の生涯」、加藤 文元 (著)
2. 5次以上の場合に代数方程式の解の公式が無いこと: 「数学ガール・ガロア理論」、結城 浩 (著)
3. 微分ガロア理論(難しい): 「リッカチのひ・み・つ」、井ノ口 順一 (著)

数学ガールはお話としても面白い。

Part 9

第09回: 正方行列と逆行列2

9.1 今日やること

今回は逆行列の具体的な計算法を学ぶ。逆行列の数学的に明示的な定義は、いくつか道具の準備が必要なので後の回にまわすことにする。

逆行列とは、正方行列 A に対して $AA^{-1} = E$ を満たす A^{-1} のことであった (エー・インヴァースと読む)。ただし E は単位行列である。 A によっては存在しないこともあるが、存在するときの計算法を導入する。計算法としては、連立一次方程式の解法として使った掃き出し法 (行の基本変形) を用いることができる。

復習演習 例 12、練習問題 12 を解いてみよ (教科書 29 ページ)

9.2 逆行列の定義 (復習)

n 次正方行列 A に対して、ある n 次正方行列 X が E_n を単位行列として

$$AX = E_n \quad (269)$$

を満たすとき、 X を A の逆行列と言って、^{エー・インヴァース} A^{-1} と書く³¹。つまり、

$$AA^{-1} = E_n \quad (270)$$

である。

ちなみに定義の A と X を入れ替えたもの、つまり定義を

$$YA = E_n \quad (271)$$

としたとしても、 X と Y は同じであり、 $Y = X = A^{-1}$ となる。なぜなら、(269) から (271) を引いてみると

$$XA - YA = O_n \quad (272)$$

となり、両辺に A^{-1} を右から掛けると、

$$X \underbrace{AA^{-1}}_{=E_n} - Y = O_n \quad (273)$$

移項してみると、 $X = Y$ であることがわかる。

2次元のときには、行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (274)$$

のときは、 A^{-1} があるときには、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (275)$$

とかけるのだった。逆行列は、 $ad - bc = 0$ (分母が0) のときには存在しないことも学んでいた。

ここで考えたい問題は、 $n \times n$ 行列の逆行列どう計算すればよいか、である。この問題の前に、逆行列の様相を見ておこう。具体的には、

1. 線形変換としての行列、逆行列
2. 連立方程式における逆行列

を見ておく。直感を掴むために役立つであろう。

9.3 行列によるベクトルの変換

最初の方の講義でも話したが、行列は色々な側面があるのであった。例えば、連立方程式の可解性の理論や、ベクトルを変換するもの、であった。ここではベクトルを変換するものとしての行列をみて、ランクとの関係を見る。そして逆行列のイメージを確固たるものにする。

以下の例では、図示する関係上、二次元ベクトルとして書くが、一般論として成立することを忘れないでほしい。

9.3.1 線形な変換

ここで線形変換を思い出そう。線形変換とは、2次元ベクトル \vec{v} に対して、2次正方行列 A を掛けて $\vec{u} = A\vec{v}$ とする変換である。 \vec{u} は新たなベクトルとして得られるわけである。

線形変換の特性から以下がわかる。変換元のベクトル $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ は、 $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を使って

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_x + v_2\vec{e}_y \quad (276)$$

のように基底ベクトルを使って展開することができる。

ここで $\vec{u} = A\vec{v}$ なので v_1 と v_2 が実数であることを用いて

$$\vec{u} = A\vec{v}, \tag{277}$$

$$= A(v_1\vec{e}_x + v_2\vec{e}_y), \tag{278}$$

$$= Av_1\vec{e}_x + Av_2\vec{e}_y, \tag{279}$$

$$= v_1(A\vec{e}_x) + v_2(A\vec{e}_y), \tag{280}$$

すなわち、それぞれの基底ベクトル \vec{e}_x, \vec{e}_y の A での変化を追えば、実質的な変化が追えることになる。(ちなみに、これは線形性の恩恵である。世の中は非線形な現象がたくさんあるが多くの場合、テイラー・マクローリン展開を用いれば線形な問題として捉えられる)。

9.3.2 フルランク

ここでは行列として

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (281)$$

を考えてランクと線形変換を見る。

まず行の基本変形をしてランクを求めてみる。2行目から1行目の3倍を引くと階段行列にでき、

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (282)$$

となる。つまりランクは2となる ($\text{rank } A = 2$)。2 × 2の行列 (2次正方行列) なので、これは**フルランク (Full rank)**と呼ばれる。逆に $n \times n$ 行列のランクが $n - 1$ 以下のとき、ランクが落ちているという。

ついでに $ad - bc$ も求めておくと、 $ad - bc = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -1 \neq 0$ となっている。

フルランク A の行列が基底ベクトル \vec{e}_x と \vec{e}_y にもたらず変形を図で見よう。

行列ベクトル積を考えると、

$$A\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (283)$$

であるのでこれを図示する。

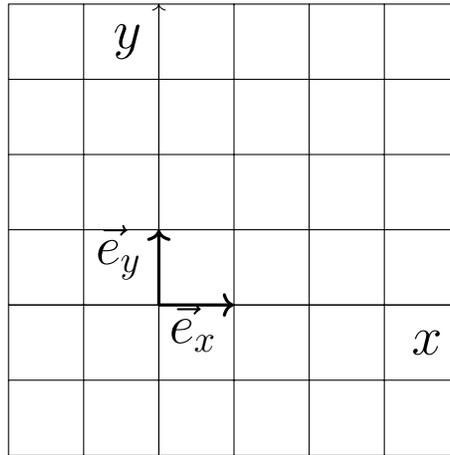


図 16: 線形変換の準備。基底ベクトル。

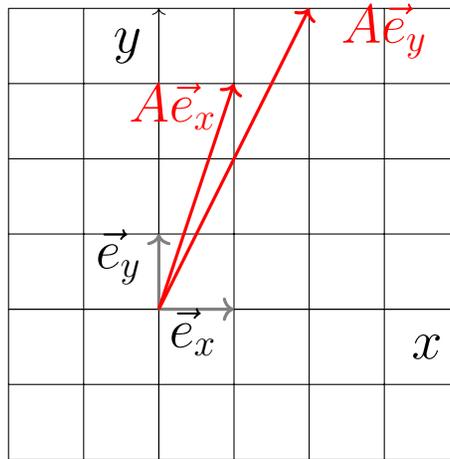


図 17: フルランク A による線形変換。基底ベクトルの順番が入れ替わっているが、2本の異なるベクトルが、別のベクトルに移されている。つまり、逆にたどれる (全単射)。余裕のあるものは示してみよ。2つのベクトルが (逆向きを除いて) 別の方向を向いている時、2つのベクトルは**一次独立である**という (Linearly independent)。ちなみに $ad - bc < 0$ なら、このように順番が入れ替わる。

式でも、もう一度確認しておこう。 $\vec{u} = A\vec{v}$ なので v_1 と v_2 が実数であることを用いて

$$\vec{u} = A\vec{v}, \tag{284}$$

$$= v_1(A\vec{e}_x) + v_2(A\vec{e}_y), \tag{285}$$

となるのだった。変化後の基底ベクトルを $\vec{\varepsilon}_x = A\vec{e}_x$ 、 $\vec{\varepsilon}_y = A\vec{e}_y$ と書くと、

$$\vec{u} = A\vec{v}, \quad (286)$$

$$= v_1\vec{\varepsilon}_x + v_2\vec{\varepsilon}_y, \quad (287)$$

である。 $\vec{\varepsilon}_x \neq \vec{\varepsilon}_y$ なのでこれ以上まとめることができない。 \vec{v} が2つの異なったベクトルの和であり、また \vec{u} も2つの異なったベクトルの和として書かれる。

2本の異なるベクトルが2本の異なるベクトルに写されるので、 A による変換は、逆変換も構成できる。つまり逆行列も存在する。実際、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (288)$$

である。

この事実を証明抜きに標語的に書けば、

n 次正方行列が A がフルランク ($\text{rank } A = n$)

$\Leftrightarrow \vec{v}$ が最大 n 本の独立なベクトルに分解でき、 $A\vec{v}$ も n 本の独立なベクトルに分解できる

\Leftrightarrow 逆行列がある

となる (いま必要十分性は証明していないが省略する)。また2次するとき $ad - bc \neq 0$ となる。これが行列がフルランクであるときの特徴である。

9.3.3 ランクが落ちている行列

さて、次にランクが落ちている行列についても見ておこう。ここで

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (289)$$

を考えてランクと線形変換を見る。

まず行の基本変形をしてランクを求めてみる。2行目から1行目の2倍を引くと

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (290)$$

となる。つまりランクは1となる ($\text{rank } B = 1$)。2 × 2の行列 (2次正方行列) なので、これは、ランクが落ちている。

ついでに $ad - bc$ も求めておくと、 $ad - bc = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$ となっている。

ランク落ちの B の行列が基底ベクトル \vec{e}_x と \vec{e}_y にもたらず変形を図で見よう。

行列ベクトル積を考えると、

$$B\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (291)$$

であるのでこれを図示する。

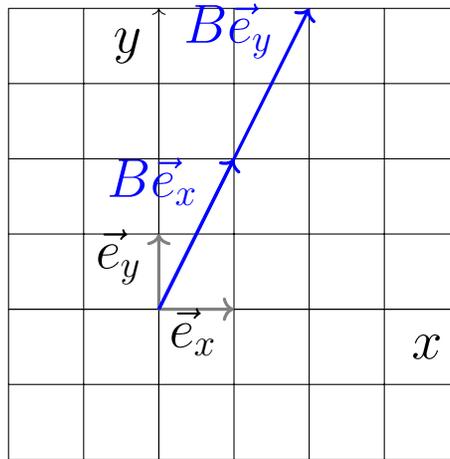


図 18: ランク落ち行列 B による線形変換。2本の異なる基底ベクトルが、(実質的に)同じベクトルに移されている。同じ向きを向いてしまっており、変換後から逆にたどれない。全単射性が壊れている (逆変換、逆写像を構成できない)。(実質的に)同じベクトルのとき、2つは**一次独立でない (Linearly dependent)** という。

式でも確認しておこう。 $\vec{w} = B\vec{v}$ とする。 B は上記のランク落ち行列である。さきほどと同様に v_1 と v_2 が実数であることを用いて

$$\vec{w} = B\vec{v}, \quad (292)$$

$$= B(v_1\vec{e}_x + v_2\vec{e}_y), \quad (293)$$

$$= Bv_1\vec{e}_x + Av_2\vec{e}_y, \quad (294)$$

$$= v_1(B\vec{e}_x) + v_2(B\vec{e}_y), \quad (295)$$

となる。 B で移した先の基底ベクトルを $\vec{e}_x = B\vec{e}_x$ 、 $\vec{e}_y = B\vec{e}_y$ と書くことにする。図で見た通り、2つのベクトルは長さが違うだけなので、ある実定数を c として $\vec{e}_y = c\vec{e}_x$ とかける。

このときベクトル \vec{w} は

$$\begin{aligned} \vec{w} &= B\vec{v}, \\ &= v_1\vec{e}_x + v_2c\vec{e}_x, \end{aligned} \quad (296)$$

$$= (v_1 + v_2c)\vec{e}_x, \quad (297)$$

$$= \tilde{c}\vec{e}_x, \quad (298)$$

ただし $\tilde{c} = v_1 + v_2c \in \mathbb{R}$ である。これはただの数なので、逆にたどれなくなっている(2次元のベクトルとして分離して求めることができない)。 B の逆行列 B^{-1} は存在しない。

この事実を証明抜きに標語的に書けば、

n 次正方行列が B がランク落ち ($\text{rank } B < n$)

$\Leftrightarrow B\vec{v}$ も n 本の独立なベクトルに分解できない

\Leftrightarrow 逆行列がない

となる (いま必要十分性は証明していないが省略する)。2次するとき $ad - bc = 0$ となる。これがランク落ちの場合の特徴である。

9.3.4 次元定理

ここは、難しいので理解しなくても良い (線形代数IIで習うであろう)。ある $n \times n$ の行列 C を固定して考える。この行列 C に対して、 $C\vec{x} = \vec{0}$ を満たす部分空間 (部分集合でかつ、ベクトル空間とみなせるもの。 $C\vec{x} = \vec{0}$ を満たすすべての \vec{x} のなす集合) をもつ場合、それを行列 C を核、**カーネル** といって、その部分空間を $\ker C$ と書く。

また、あるベクトル \vec{v} が最大 m 個の独立なベクトルの線形結合 (係数をつけて足すこと) でかけるとき、そのベクトルは m 次元であるという。そのベクトルの基底で表せる集合を V とかき、 $\dim V = m$ と書く (これが本来の次元の定義である)。

行列 C が $n \times n$ の行列だったことに注意しておく

$$\text{rank } C + \dim \ker C = n \quad (299)$$

が成り立つ。これを次元定理と呼ぶ。上記の例で見たランク落ち行列 B では、基本変形をすると、0でない行が1本 ($\text{rank } B = 1$)、0の行が1本 ($\dim \ker B = 1$) であった。この和が2であったのが次元定理を表していた。この手の内容は、線形代数IIで習うと思うので、今は雰囲気だけ見ておけば良い(テストには出ない)。

逆行列を持つ行列を正則行列せいそくと呼ぶが、行列 C が正則行列であるための必要十分条件は、 $\dim \ker C = 0$ となることもわかる(ランクの計算のときに0の行がない時に対応している)。

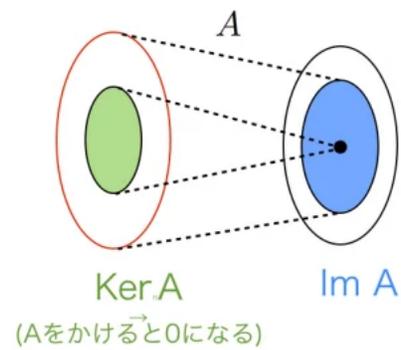


図 19: 次元定理。 <https://manabitimes.jp/math/1077> より引用。

さて、つぎに $n \times n$ 行列の逆行列の計算法をみたいが、さらに少し寄り道して連立一次方程式との関連を見ておく。

9.4 逆行列と連立方程式の関係

9.4.1 逆行列と連立方程式の関係

連立方程式を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (300)$$

と書くとしよう。 $A = [a_{ij}]$, $\vec{x} = (x \ y)^\top$, $\vec{b} = (b_1 \ b_2)^\top$ と書くと、与式は行列ベクトル積を用いて

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (301)$$

とかけるのだった。

連立方程式を解く、とは $x = (x, y$ を含まない式), $y = (x, y$ を含まない式) と変形することであり、この授業では掃き出し法で $\vec{x} = \dots$ とすることだった。 A の逆行列 A^{-1} が存在するときには、与式の両辺に A^{-1} を左からかけると、

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad (302)$$

となる。左辺は、 $A^{-1}A\vec{x} = E\vec{x} = \vec{x}$ であるので

$$\vec{x} = \underbrace{A^{-1}\vec{b}}_{\text{既知}} \quad (303)$$

である。右辺は既知である。つまり逆行列が存在すれば連立方程式は一撃で解けてしまうことになる。**逆行列を求めることは、対応する連立方程式を解くことと等価である。**それは以下の説明でも理解できる。

ここで心に止めてほしいのだが、連立方程式には解が無いこと、解が無数ある場合もあった。このときに逆行列がどうなっているのか、その疑問はしばらく後の回で明らかになる。

つぎに一般的な n 次正方行列での逆行列の求め方を説明する。

9.4.2 掃き出し法による逆行列の求め方

ここは、非常に重要である！今まで連立方程式を解く方法として掃き出し法を学んできた。正方行列が与えられたとき、逆行列は掃き出し法を用いて計算することができる。

ここでは、なぜ掃き出し法で逆行列が計算できるかを説明する。 A^{-1} が A の逆行列であるとは

$$AA^{-1} = E \quad (304)$$

という式を満たすことであった。 A^{-1} を $A^{-1} = X = [x_{ij}]$ と仮置きして観察してみる。具体的に 2×2 行列の場合、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}}_{=X=A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (305)$$

これは、 X を列ベクトルと分解すると以下のように見ることができる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} \right] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \quad (306)$$

2次正方行列と2次正方行列の積は、行列ベクトル積を2回考えるのと同じであった。

つまり今の場合には別の2つの連立一次方程式が入っているように見える。
つまり

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (307)$$

という同じ係数行列を持つ2つの連立方程式になっている。 x_{11} と x_{21} が入った1つ目の連立方程式、 x_{12} と x_{22} が入った2つ目の連立方程式の2つを解けば、逆行列を求められることになる。

一方で次の数学的な事実もわかる。**同じ係数行列は、同じ基本変形をすると同じ行列に変形される**。つまり、これを使えば掃き出し法を用いて同時に連立一次方程式を解くことで逆行列を求めることができることが分かる。二度手間は避けることができる。

逆行列を求めるために拡大係数行列の定義を拡張して、2つの連立方程式をまとめて、

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{array} \right] \text{ と } \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{まとめる}} \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (308)$$

のように書くことにする。そして以下のように2つの連立方程式を同時に解くことにする。

ここでは拡大係数行列を用いた解き方をみる。解きたい2つの連立方程式はまとめて

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (309)$$

と書けるのだった。この左側を行の基本変形で単位行列にすれば、右側には逆行列が現れることになる。なぜならば、左側の連立方程式が解けているので右側には逆行列を掛けた基本ベクトルを並べた行列になっているはずだからである。

これを模式的に書くと

$$[A|E] \xrightarrow{\text{基本変形}} [E|A^{-1}] \quad (310)$$

である。Aをうまく行基本変形してEにできれば良い。(ここ、少し話が難しいが理解してほしい。わからなければとりあえず以下に進んで計算できるようになること)

ここでは掃き出し法をもちいて逆行列を求めてみよう。

例題1 以下の行列の逆行列を基本変形で求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (311)$$

例題 1 解答 行の基本変形をもちいて逆行列を求める。拡大係数行列の左側を単位行列まで変形する。

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\text{2行目から1行目を引く}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{1行目に2行目の3倍を足す}} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\text{2行目を}-1\text{倍する}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (312)$$

よって A の逆行列は、

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (313)$$

である。

今までは、2次正方行列の逆行列について説明したが、3次以上でも同様である。それを実際に確認しよう。

例題2 以下の行列の逆行列を求めよ。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (314)$$

例題2解答 行の基本変形をもちいて逆行列を求める。拡大係数行列の左側を単位行列まで変形する。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2行目から1行目を引く、2行目}-1\text{をかける}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\text{1行目から2行目の3倍を引く}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\text{3行目から1行目の3倍を引く}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 6 & -9 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{\text{3行目から2行目を引く}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 5 & -8 & 1 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow{\text{3行目に } -1/8 \text{ をかける}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/8 & 1 & -1/8 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow{\text{1行目から3行目の3倍を引く}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/8 & 0 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/8 & 1 & -1/8 \end{array} \right] \tag{315}
\end{aligned}$$

よって B の逆行列は、

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 0 & 3/8 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5/8 & 1 & -1/8 \end{bmatrix} \tag{316}$$

である。

演習 1 上記の例題 1 の A に対して 2 行 2 列のための逆行列公式を用いて A^{-1} を計算し、一致することを確認せよ。また、上記の A^{-1} を A にかけて、単位行列になることを確認せよ。

演習2 上記の例題2の B^{-1} を B にかけて、単位行列になることを確かめよ。

演習3 $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ

演習4 $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ

演習 例16、練習問題16を解いてみよ(教科書42ページ)

演習 例17、練習問題17を解いてみよ(教科書43ページ)

演習 3 解答 $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

演習 4 解答 $D^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 8 \\ 23 & 3 & -25 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9.5 お話: 連立方程式と機械学習

機械学習においても連立方程式は重要な立ち位置にある。ここでは教師あり学習を見てみることで、連立方程式の活用例を見てみよう。

教師あり学習とは、ある x を与えたときに対応する y を予測するような枠組みのことを指す。たとえば x を顔画像などだとして、 y がその人の名前などとして、顔画像から名前を当てるような枠組みとなる。ただしこの例は難しいため、以下では x も y もただの数とする。

まずデータの集まり(データセット)を

$$D = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\} \quad (317)$$

としておく。つまり n 個の数が与えられているとする。

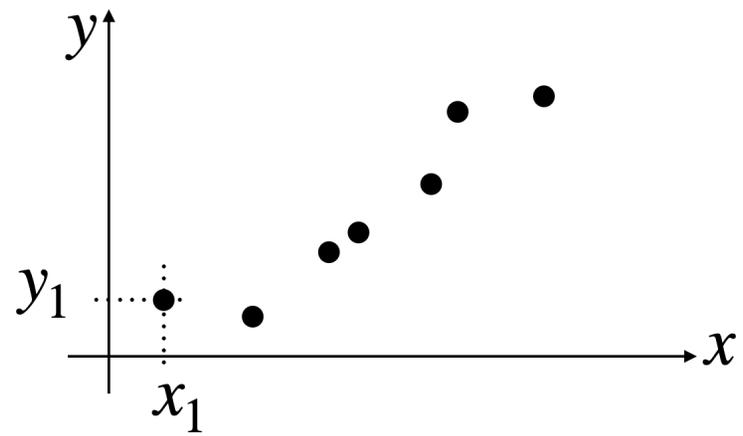


図 20: データの分布。 n 個のペアのデータがある。

データが直線に分布していそうなので、

$$f(x) = ax + b \quad (318)$$

にしたがって分布していると仮定し、 a と b をデータから決めよう。

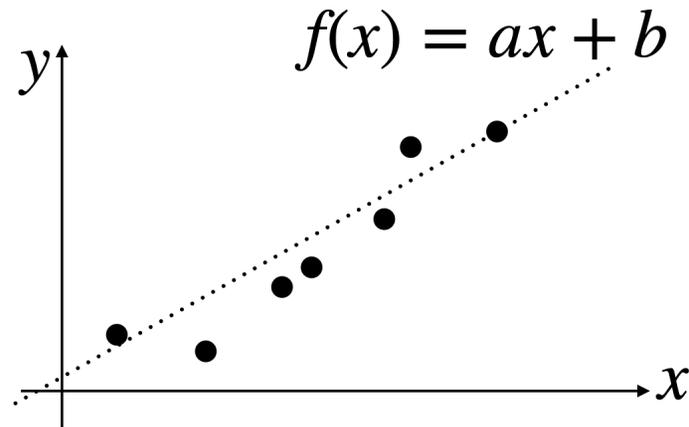


図 21: データの分布。 n 個のペアのデータがある。

そして、データと直線の差の2乗の和を誤差関数と呼び、

$$E = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \quad (319)$$

と置く。この E を a と b を調整して最小化する。最小化するには a もしくは b

による微分が0になれば良く³²、

$$E \text{ の } a \text{ 微分} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (320)$$

$$E \text{ の } b \text{ 微分} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (321)$$

となる。かなりゴチャゴチャしてみえるが右辺の総和記号 Σ がついているところはデータからだけ決まる定数である。なので

$$c_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad c_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad c_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad c_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (322)$$

とおく (覚えなくても良いがそれぞれ名前がある量である。例えば c_2 は平均である)。つまりこの置き換えで、

$$E \text{ の } a \text{ 微分} = ac_1 + bc_2 - c_3 \quad (323)$$

$$E \text{ の } b \text{ 微分} = ac_2 + b - c_4 \quad (324)$$

となる。データが与えられれば c_1, c_2, c_3, c_4 が求まる。

E は a の二次関数であり、また b でも二次関数になって³³おり、このときには微分が0になれば最小化できるので、

$$\begin{cases} c_1 a + c_2 b & = c_3 \\ c_2 a + b & = c_4 \end{cases} \quad (325)$$

という a と b に関する連立方程式を解けば良いことになる。行列ベクトル積の形で書くと、

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (326)$$

であり、つまり逆行列を用いて、

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (327)$$

と解けるはずである (a, b はここから求まっている)。この手法を最小二乗法という。

近年の深層学習においては、最小二乗法で最小化は出来ないが、それでも線形代数の技術は内部で大量に使われている³⁴。

9.6 今回のまとめ

今回は、掃き出し法を用いて逆行列を求める手法を学んだ。逆行列は、連立方程式の解法としても重要であり、理論的にも実用的にも重要なものである。

最後に機械学習、特に教師あり学習の基本的な部分を導入した。そこでも線形代数が役立つ様子を見れたのではないかと思う。

次回は、行列の特徴を表す量である「行列式」を導入するための準備を行う。

Notes

²⁸ 答: 逆元が無いから

²⁹ また、同時代に同様の定理を示したアーベルも若くして亡くなっている。

³⁰ 僕もよく知らない。微分ガロア理論の創始者のソフィス・リーは、このあたりの考察からリー群、回転対称性を一般化したもの、を考案したらしい。

³¹ 数学用語では和訳より、英語読みのほうが良い場合が結構ある。たとえば後で出てくる行列式はデターミナントと呼ぶ場合が多いし、跡もトレースと呼ぶことが多い。

³² 本当は偏微分、 $\frac{\partial E}{\partial a}$ などであるがここはごまかしておく。

³³ これを拡張した概念に凸関数というものがある。

³⁴ たとえば、「ディープラーニングを支える技術」、技術評論社、岡野原大輔、など。

Part 10

第10回: 置換と互換、行列式

10.1 今日やること

今回は逆行列の存在条件を調べるための手法の導入を行う。逆行列の存在は、**行列式** (Determinant、**デターミナント**) によって調べることができる。2次正方行列で $ad - bc$ と呼んでいたものであるが、今回と次回、次々回で、一般的な正方行列での行列式を計算する手法を学ぶ。

今回は、行列式の一般的な定義に必要な**置換** (Permutation) と**互換** (Transposition) を導入し、行列式の定義を提示する。この回は、教科書に載っていないが重要なので一回を費やして行う。

行列式は行列の「大きさ」を表すような数であり、人間で言うところの身長のように特徴の一つを表す量となる。行列式を調べることで行列自身の性質を調べることができる。

復習演習1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ としたとき、逆行列を求めよ。

復習演習2 $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求め、それが逆行列であることを確かめよ。

復習演習3 $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求め、それが逆行列であることを確かめよ。

復習演習 1 解答 略

復習演習 2 解答 $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

復習演習 3 解答 $D^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 8 \\ 23 & 3 & -25 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10.2 置換

今回は、連立一次方程式の可解条件やベクトルの変換が可逆になる条件（つまり逆行列の存在条件）に重要な、「行列式」を導入する。そのために、置換 (Permutation) という概念を導入することにする。実際の行列式の計算は次回以降に行う。

線形代数における置換とは、 n 個のものを並び替える操作を記号として表示したものである。以下で見るように積も導入される。

例を見てみよう。たとえば4つの数がある順序に並べ替える置き換え

- 「1は、4に置き換える」
- 「2は、2に置き換える」
- 「3は、1に置き換える」
- 「4は、3に置き換える」

を考え、以下のように書くことにする。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (328)$$

この σ を(数学的な意味での)置換という。括弧の中に数字が並んでいるという行列と同じ様な記法であるが、行列ではないことに注意せよ(つまり和を考えたりは出来ない。後述するが、行列積とは異なるタイプの積が成立する)。

置換を写像(つまり関数)として見ることもできる。これは関数記号に合わせて

- 「1は、4に置き換える」： $\sigma(1) = 4$
- 「2は、2に置き換える」： $\sigma(2) = 2$
- 「3は、1に置き換える」： $\sigma(3) = 1$
- 「4は、3に置き換える」： $\sigma(4) = 3$

のように対応し書くことができる。順列と置換は対応するため、 n 次の置換は全部で $n!$ 個あることになる。

たとえば、2個のものの入れ替えを考えると入れ替えるやり方は、 $2! = 2$ 通りある。実際、2次の置換は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (329)$$

の2通りある(これは一般的な記号ではない。また σ の名前はこの講義のみであり、 σ_1 がどれかは本に依る)。

考えづらいが、1個のものの入れ替えは1通りと定義しておくことにしよう(入れ替えない、という入れ替え方が1通りあるともいえる)。

3次の置換は6つ ($3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$)ある。その6つは、

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{330}$$

である(σ の名前はこの講義のみであり、 σ_1 がどれかは本に依る)。4次以上の置換は書かないが階乗で増えていく。

10.3 あみだくじ

置換は、あみだくじに対応している。たとえば3次の置換の

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (331)$$

を考えてみよう。これは、

- 1を3に置き換える
- 2を1に置き換える
- 3を2に置き換える

という置換である。

これは、以下のあみだくじと等価である事がわかる。

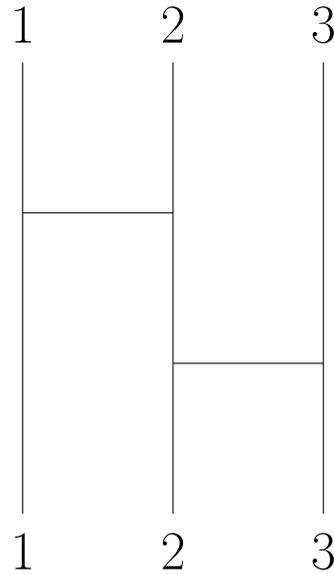


図 22: あみだくじ。置換 $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ と等価になっている。写像の図とも見れる。置換は全単射である。つまり逆写像も存在する (逆にたどるだけである)。なお同じ置換を表すあみだくじは多数存在する。

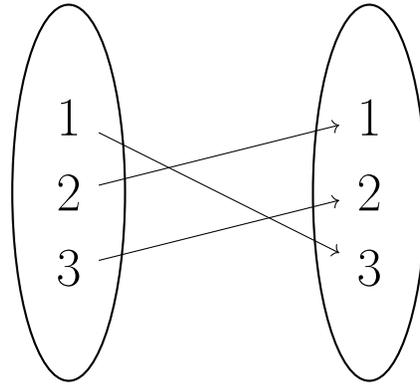


図 23: 置換 $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を集合間の写像として書いたもの。

10.4 置換の図示の演習

演習1 3次の置換 σ_4 に対するあみだくじをかけ。

演習2 3次の置換 σ_3 に対するあみだくじをかけ。

演習3 3次の置換 σ_1 に対するあみだくじをかけ。

演習4 3次の置換 σ_6 に対するあみだくじをかけ。

解答は省略。

演習4のヒント σ_4 のあみだくじのしたに σ_2 のあみだくじをつないでみよ。

10.5 置換の積

置換には置換の積が定義できる。これは入れ替えを2回連続して作用させれば良い。3次の置換を例に見てみると、

$$\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (332)$$

これは、後ろ側 (右から左) から読み、

- 1を2に置き換え
- 2を1に置き換え
- 3を3に置き換え

のあと、

- 1を1に置き換え
- 2を3に置き換え
- 3を2に置き換え

結局、トータルでは、

- 1を3に置き換え
- 2を1に置き換え
- 3を2に置き換え

と置き換えることになる。これは σ_5 であり、つまり、

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\sigma_3(\text{こちらから考える})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma_5} \quad (333)$$

である。

10.6 あみだくじとしての積

置換の積は、あみだくじをつなぐことに対応している。たとえば3次の置換

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (334)$$

の2乗を考えてみよう。この積は、

$$\sigma_5\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (335)$$

となる。これは、

$$\sigma_5\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (336)$$

となる。

これは、以下のあみだくじと等価である事がわかる。

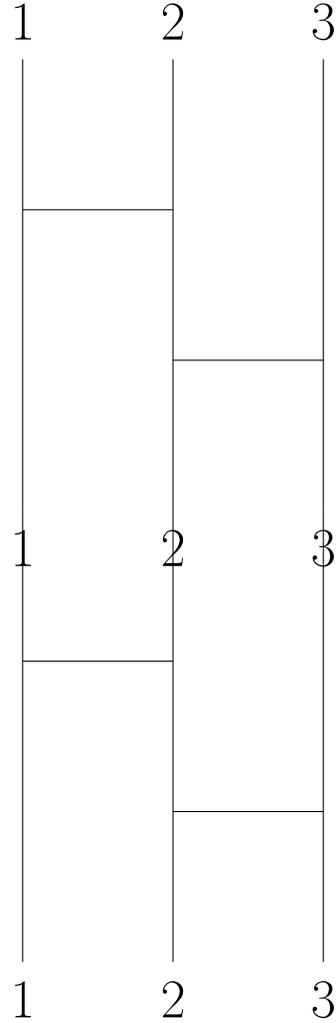


図 24: つないだあみだくじ。合成した置換 $\sigma_5\sigma_5$ (置換の積) と等価になっている。写像の合成の図とも見れる。これは全単射である。

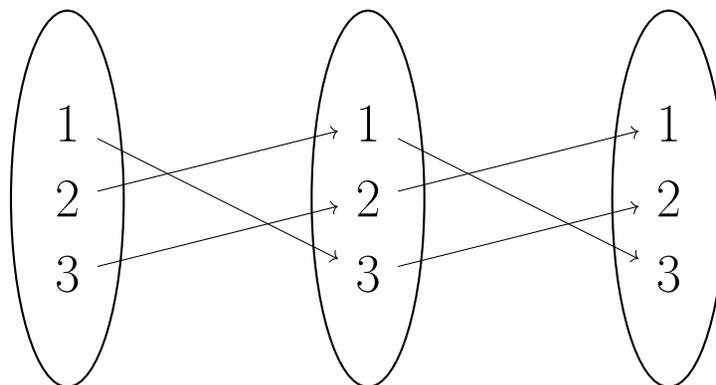


図 25: 合成した置換 $\sigma_5\sigma_5$ (置換の積) を写像の合成として描いた図。全射でかつ単射であることがわかる。また逆にたどれるため、逆写像も存在する。

10.7 置換の積の演習

演習 3次の置換に対して $\sigma_5\sigma_3$ を計算せよ。あみだくじを書いて納得せよ。

演習 3次の置換に対して $\sigma_3\sigma_5$ を計算せよ。あみだくじを書いて納得せよ。 $\sigma_5\sigma_3$ と $\sigma_3\sigma_5$ を比較し、結果が同じか異なるか述べよ。

演習 3次の置換に対して $\sigma_5\sigma_2$ を計算せよ。あみだくじを書いて納得せよ。

演習 3次の置換に対して $\sigma_3\sigma_3$ を計算せよ。あみだくじを書いて納得せよ。
解答は省略。

10.8 互換

2つの要素を入れ替える操作を**互換**(Transposition)と呼ぶ。たとえば、3と5を入れ替える操作を

$$(3\ 5) \tag{337}$$

のように書く。

また互換には積が定義されている。これは、「3と5を入れ替える操作」のあと、「2と6を入れ替える操作」を合わせて

$$(2\ 6)(3\ 5) \tag{338}$$

のように書く (つまり右から左に読む)。

10.9 置換と互換

互換を組み合わせると置換を表現できる。たとえば以下のような6次の置換を考えよう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{339}$$

という置換は、

$$(2\ 6)(3\ 5) \quad (340)$$

という互換の積とおなじ結果を与える。

この講義では証明しないが、実は全ての置換は、互換の積に分解することができる。ただし分解の仕方は一意ではない。つまり一般には同じ置換を与える互換の積が何種類も存在する。

具体例で見てみよう。3次の置換、

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (341)$$

を考える。これは互換として

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3)(1\ 2) \quad (342)$$

と分解できる。

演習 3次の置換 σ_3 を互換の積に分解せよ

演習 3次の置換 σ_4 を互換の積に分解せよ

解答1 3次の置換 σ_3 を互換の積に分解すると、 $(1\ 2)$

解答2 3次の置換 σ_4 を互換の積に分解すると、 $(1\ 2)(2\ 3)$

10.10 置換の符号

ある置換を σ とする。その σ を互換の積に分解したとしよう。 σ が x 個の互換に分解できた時、 $(-1)^x$ を置換の符号という³⁵。これを

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^x \quad (343)$$

とかく。この符号が1になるものを偶置換、符号が -1 となるものを奇置換と呼ぶ。それぞれ互換の積の数が偶数、奇数に対応する。本講義では省略するが、置換の分解の仕方によらず $\operatorname{sgn}(\sigma)$ は不変であることが知られている。

例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (344)$$

という置換は、2つの互換の積

$$(2\ 6)(3\ 5) \quad (345)$$

に分解できる(等価な)ため、符号は $(-1)^2 = 1$ である。互換への分解は一意ではないが、符号は一意になる。

10.11 符号の演習

演習1 3次の置換 σ_2 を符号を計算せよ

演習2 3次の置換 σ_3 を符号を計算せよ

演習3 3次の置換 σ_4 を符号を計算せよ

演習4 3次の置換 σ_5 を符号を計算せよ

演習5 高難易度問題: 関数 $f(x)$ が $f(xy) = f(x)f(y)$ を満たす時、 $f(x)$ を準同型写像であるという。 $\text{sgn}(\sigma_3\sigma_5)$ 等を計算し、符号が準同型であることをあみだくじから納得せよ。

解答

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1, \text{ なぜなら } \sigma_2 = (2\ 3)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_3) = -1, \text{ なぜなら } \sigma_3 = (1\ 2)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_4) = +1, \text{ なぜなら } \sigma_4 = (1\ 3)(1\ 2)$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_5) = +1, \text{ なぜなら } \sigma_5 = (1\ 2)(2\ 3)$$

10.12 行列式の定義

詳しい話は次回に行うが、 N 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (346)$$

に対して行列式 (Determinant、デターミナント) を

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{N,\sigma(N)} \quad (347)$$

と定義する。 S_N は N 個の並び替えに関する置換すべての集合、そして $\operatorname{sgn}(\sigma)$ は σ の符号である。行列式は連立一次方程式に対する判別式(のようなもの)に対応する³⁶。つまり、行列式は与えられた連立一次方程式が解けるか、解けないかなどの情報を与える。また、 A が逆行列をもつか (逆変換ができるか) の情報も持つ。この定義式は非常に難しいが、次回に具体例でみていく。

10.13 おまけ: Pythonによる逆行列の求め方

ばいそん Pythonはプログラミング言語であり、GoogleのサービスであるGoogle Colab こらぼ上で自由に無料で使うことができる。詳しくは、<https://aiacademy.jp/media/?p=1037>などを参照のこと。Google colabは、<https://colab.research.google.com/?hl=ja#create=true>からアクセスできる。なお、Googleアカウントが必要である。Google colabでなくても、自分のパソコンにPythonをセットアップすれば以下は実行可能である。

本セクションでは、Pythonと しんぼい Sympy ライブラリを用いた逆行列の計算方法について説明する。具体的な行列の例を用いて、逆行列が存在する場合の計算プロセスを実演する。

10.13.1 逆行列の計算

まず行列を定義し、その逆行列を計算する。以下のコードを Google Colab 上で実行することにより、行列 A の逆行列 A^{-1} を求める。

```
1 import sympy as sp
2
3 # 行列 A の定義
```

```
4 A = sp.Matrix([
5     [3, 4],
6     [2, 5]
7 ])
8
9 # 逆行列の計算
10 A_inv = A.inv()
11
12 # 逆行列の表示
13 print("A = ", end="")
14 display(A)
15 print("")
16 print("A^{-1} = ", end="")
17 display(A_inv)
```

計算された逆行列を元の行列と掛け合わせ、単位行列が得られるかを検証する。この検証は、計算が正しく行われたことを確認するために重要である。

```
1 # A と A_inv の積を計算
2 product = A * A_inv
3
```

```
4 # 積の行列を表示
5 print("A と A_inv の積は:")
6 display(product)
```

以上により、SymPy を用いた逆行列の計算方法を学び、その厳密性と有用性について理解を深めることができた。この手法は、特に数値誤差を避けたい場合に有効である。

実行結果は、[図 26](#)である。

```
✓ [10] 1 import sympy as sp
0秒 2
3 # 行列 A の定義
4 A = sp.Matrix([
5     [3, 4],
6     [2, 5]
7 ])
8
9 # 逆行列の計算
10 A_inv = A.inv()
11
12 # 逆行列の表示
13 print("A = ",end="")
14 display(A)
15 print("")
16 print("A^{-1} = ",end="")
17 display(A_inv)

↔ A =

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$


A^{-1} =

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$


✓ [7] 1 # A と A_inv の積を計算
0秒 2 product = A * A_inv
3 # 積の行列を表示
4 print("A と A_inv の積は:")
5 display(product)

↔ A と A_inv の積は:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

図 26: 逆行列計算の実行結果

10.14 今回のまとめ

今回は、行列の特徴を表す量の一つである「行列式」の定義に必要な、置換と互換を学んだ。

置換は順序の入れ替えであり、互換は2つの数字の入れ替えであった。すべての置換は互換の積に分解できるが、その因子の数が置換の符号という形で出てきた。

最後に行列式の定義だけを示した。次回は小さな行列に対する行列式を具体的に計算し、行列式の計算に馴染むことにする。

連絡 来週(2024/06/19)の講義は教員の参観あります。つまり、他の教員が見に来ます。

Notes

³⁵ うまく式で書くと、 $\text{sgn}(\sigma) = \frac{\prod_{i < j} \sigma(i) - \sigma(j)}{\prod_{i < j} i - j}$ となる。

³⁶ 2次方程式の判別式は実数解の有無だけでなく、個数まで教えてくれた。一方で行列式は「解の有無の識別能力」はあるが、個数までは教えてくれない。個数を見るにはランクなどの情報が必要となる。

Part 11

第11回: 行列式1

11.1 今日やること

今日は**行列式** (Determinant、デターミナント)を導入する。行列式は行列の性質を表すものである。

以前にも言った通り**行列** (Matrix)の名前は19世紀の数学者シルベスターに依る (1858年)。もともと行列の研究は、連立方程式の研究から生まれたようである (歴史については[14] やこの講義ノートの付録 Qを参照のこと³⁷)。

そもそも行列式自体は、17世紀の数学者ライプニッツ、独立して日本の関たかかず孝和³⁸によって研究されていたようである³⁹。行列式の研究は、のちに線形変換の研究と合流した。

シルベスター以前の線形代数は、連立方程式に興味の主眼があり行列式 (determinant = 決定するもの、決定要因) の方に重きが置かれていた。そして matrix (行列と訳された⁴⁰) は、それを生み出すもの (母体・基盤、ラテン語の Mater (英語の Mather と同語源) から派生したラテン語の matrix) は、むしろ後で出てきた概念である。線形代数に出てくる概念の起源は古い⁴¹ が、線形代数が線

形代数として独立した分野となったのは、19世紀後半から20世紀初頭にかけてと数学全体としてはかなり最近のことであり、日本の大学で(いわゆる)基礎科目の仲間入りしたのは、戦後とさらに最近である⁴²。現在では、

線形代数は数学や情報、物理学等にとってなくてはならない科目

である。

行列式に話を戻そう。現代的な視点としては、行列式は行列の性質を反映した数字・量であり、二次方程式に対する判別式のようなものである。ランクでも連立方程式の解があるか等は判別できたが、ランクとも関連する概念であることは今日の講義で少し触れる。

行列は数字がたくさん並んでおり複雑であるが、行列式は(計算後には)1つの数字なので見やすい。これは人間を識別するときに、個人の様々な特徴でなく、「身長」やBMI等という特徴的な数字に着目するようなものである。身長だけではその人は判別しきれないが、ある程度の様子はわかることになる。

11.2 復習問題

復習問題1 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (348)$$

とする。この行列を行の基本変形し、ランクを求めよ。また $ad - bc$ を調べて逆行列が存在すれば公式を用いて逆行列 A^{-1} を求めよ。

復習問題2 行列 B を

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (349)$$

とする。この行列を行の基本変形し、ランクを求めよ。また $ad - bc$ を調べて逆行列が存在すれば公式を用いて逆行列 B^{-1} を求めよ。

11.3 置換(復習)

行列式の定義には置換が必要なので、前回やった置換とその符号を思い出しておく。置換とは、 n 個のものを並び替える操作を言う。たとえば4つの数がある順序に並べ替える置換

- 「1は、4に置き換える」
- 「2は、2に置き換える」
- 「3は、1に置き換える」
- 「4は、3に置き換える」

を考え、以下のように書くことにする。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (350)$$

σ を置換という。これは「あみだくじ」として見れることも前回を見た。

また置換の符号というものも学んだ。つまり、ある置換を σ とする。このとき互換の積に分解して x 個の互換に分解できたとき、 $(-1)^x$ を置換の符号と

いうのだった。これを

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^x \quad (351)$$

とかく。ここで

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (352)$$

は何も動かさない置換 (恒等置換) であるが、この場合は偶置換として $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ とする。

例題 置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (353)$$

の符号を求めよ。

例題の解法 3,5を入れ替えるのと、2,6を入れ替えるという2つの互換の積

$$(2\ 6)(3\ 5) \quad (354)$$

に分解できるため、符号は $(-1)^2 = 1$ である。

復習演習1 置換 σ_1, σ_2 を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (355)$$

とする。この符号 $\text{sgn } \sigma_1, \text{sgn } \sigma_2$ を求めよ。

復習演習2 3次の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を符号を計算せよ。

復習演習1解答 -1。なぜなら互換 $(1\ 2)$ 1つでかけるから。納得できないなら、あみだくじを書いてみるべし。

復習演習2解答 1。なぜなら互換 $(2\ 3)(1\ 2)$ という分解をもち、2つの互換で書けるため。納得できないなら、あみだくじを書いてみるべし。入れ替えの回数を数えよ。

11.4 行列式の定義 (再掲)

行列式は連立一次方程式に対する判別式に対応する。つまり行列式は与えられた連立一次方程式が唯一解をもつか、どうかの情報を与える。

前回の最後に提示した定義をもう一度書く。 N 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (356)$$

に対して行列式 (Determinant、**デターミナント**) を

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \underbrace{a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{N,\sigma(N)}}_{N \text{ 個}} \quad (357)$$

と定義する。 S_N は N 個の並び替えに関する置換すべての集合⁴³、そして $\operatorname{sgn}(\sigma)$ は σ の符号である。その定義から、行列式は正にも負にも0にもなる。右辺の総和は $N!$ 項ある。行列式は**ライプニッツ** (G. Leibnitz) によって2次、3次が与えられ⁴⁴、**コーシー** (Augustin Louis Cauchy) によって一般の定義(421)

があたえられた。入れ替えが $N!$ 個あるため、 $N = 1, 2, 3$ 以上だととんでもなく面倒である。

今回は、具体的に次数を定めて $N = 2, 3$ の行列式を見ていく。それより大きい行列式は次回以降に取り扱うことにする。

11.5 2次正方行列の行列式

まず、2次正方行列の行列式をみる。行列式を求めるには、行列に対して

1. 置換
2. 置換の符号

が必要である。

2次の置換は2つ ($2! = 2$) しかなく、

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (358)$$

である。またそれぞれの符号は $\text{sgn}(\sigma_1) = 1$ と $\text{sgn}(\sigma_2) = -1$ である。

これを用いて2次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (359)$$

に対して行列式を計算する。行列式の定義の中の和は $2! = 2$ 個の項があり、具

体的には和は $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ なので置換 σ_1 と σ_2 に対して行う必要があり、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)}, \quad (360)$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{1,\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)}, \quad (361)$$

$$= \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_1)}_{=1} \underbrace{a_{1,\sigma_1(1)}}_{=a_{1,1}} \underbrace{a_{2,\sigma_1(2)}}_{=a_{2,2}} + \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_2)}_{=-1} \underbrace{a_{1,\sigma_2(1)}}_{=a_{1,2}} \underbrace{a_{2,\sigma_2(2)}}_{=a_{2,1}}, \quad (362)$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (363)$$

となる。これは一見すると見慣れない形であるが、文字の取り方を変えると印象も変わる。もし行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (364)$$

と書くと、さっきの公式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ から行列式は、

$$\det A = ad - bc \quad (365)$$

となる。これは2次の逆行列の公式の分母に現れたものであり、逆行列の存在条件を与えるのだった。なんでこの形が良いかは、すぐ後で連立方程式との関連で明らかになる。

$\det A = ad - bc$ の計算法として(2次の正方行列に対する) **サラスの公式** (Sarrus' rule) という公式がある。これは、[図 27](#)である。

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

[図 27](#): 2次正方行列に対するサラスの公式。右に降りるのは掛けて+、左に降りるのは掛けて-をつける。たすき掛けともいう。

書籍によっては、行列式 $\det A$ を $|A|$ のように書く場合があるが、本講義では、 $\det A$ と書くことにする。 $|A|$ と書くと絶対値のように見えるが先に述べた通り、**行列式は負にもなることに注意せよ。**

例題

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (366)$$

の行列式 $\det A$ を計算せよ。

(解) これは、2次正方行列に対するサラスの公式 $\det A = ad - bc$ を用いれば良い。すなわち、

$$\det A = 3 \times 1 - 4 \times 2 = 3 - 8 = -5 \quad (367)$$

であるため、 $\det A = -5$ である。

演習 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (368)$$

のランクと行列式を計算せよ。

演習 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (369)$$

のランクと行列式を計算せよ。

演習 3

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (370)$$

としたとき、 A の転置を A^T とかく。このとき行列式 $\det A^T$ を求め、 $\det A$ と比較せよ。

演習 例 18、練習問題 18 を解いてみよ (教科書 46 ページ)

演習 4

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (371)$$

とする。そして $\det A \neq 0$ として A の逆行列を A^{-1} とかく。このとき行列式 $\det A^{-1}$ を求め、 $(\det A)^{-1}$ と比較せよ。

演習1解答 $\text{rank } A = 2$ 。 $\det A = 8 - 2 = 6$

演習2解答 $\text{rank } A = 1$ 。 $\det A = 0$ 。 一般にランク落ちの行列の行列式は0となる。

演習3解答 $\det A^T = \det A$ 。 一般に一致する。 以下で 3×3 でも確認する。

演習4解答 逆行列公式にしたがって計算すれば良い。 すると $\det A^{-1} = 1/\det A$ となる。 これは $\det A$ が0でない限り、一般の行列でも成立する。

11.5.1 連立方程式の解の公式: クラメールの公式

ここでは歴史的な文脈をふまえて行列式と連立方程式の関係を見てみる。つまり連立方程式における「判別式」と「解の公式」を見てみることにする。

行列式は、連立方程式との関連から導入されたと述べた。一般論は後の回に述べることにするが、ここでは深く関連が分かる例を紹介する。次の一般的な連立方程式を考えてみる。

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (372)$$

ここで a_{ij} は実数である。 x, y は決定すべき係数である。この「解の公式」を求めてみよう。これは行列として

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} \quad (373)$$

とかけた。ここでは、連立方程式の形で加減法を用いて解いてみよう (もちろん掃き出し法で解くのと等価である)。

y の項を消し、そのあと $x = \dots$ の形にすることを考える。 y の項を消すた

め、第1式に a_{22} 、第2式に a_{12} をかけると

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2 \end{cases} \quad (374)$$

となる。今の第1式から第2式を引くと、第1式は、

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x + \underbrace{(a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22})}_{=0}y = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad (375)$$

つまり、

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad (376)$$

となる。ここで、 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A \neq 0$ を仮定すると、 x について解けて

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (377)$$

となる。 y も同様なので、これで一般の係数の1次方程式が解けてしまった。しかもこれは更にまとめることができる。

式(377)は2次の行列式の公式をつかって

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \quad (378)$$

のように統一的にかける。 y も同様に計算できてまとめると、

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad (379)$$

を得る。分子は、1個目の解を求めるときには1列目を連立方程式の定数部分に置き換え、2個目の解を求めるときには2列目を連立方程式の定数部分に置き換える。これを**クラメールの公式** (Cramer's rule) という。これが連立一次方程式に対する「解の公式」である。分母に係数行列の行列式 $\det A$ が現れていることからわかるように、行列式 $\det A$ の値は連立方程式が唯一に解けるかどうかの条件を与える (0なら解が無い、無限個解がある)。

一般には、 n 次正方行列 A とそれを含む連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に対して

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (380)$$

として

$$x_k = \frac{\det(A \text{ の } k \text{ 番目の列を } \vec{b} \text{ に置き換えた行列})}{\det A} \quad (381)$$

が成り立つ。これが一般のクラメールの公式であり、連立一次方程式に対する「解の公式」である⁴⁵。一般バージョンは後ほどの回 (第14回) で改めて扱う。

クラメールの公式は(2次方程式の)解の公式に、よく似た働きをする。この解の公式とは、 $ax^2 + bx + c = 0$ という2次方程式が与えられたとき、

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \quad (382)$$

となるものだった。ここで D は**判別式 (Discriminant)** と呼ばれるものであった。ルートの中が正、負、ゼロで実数解の有無や個数が変わるのだった。連立方程式の場合、 $\det A$ が0だと分母が0となるため、解の有無が変わる。そういった意味でも似ているものである。

またクラメールの公式は解の公式と同じく計算量が多くなるため、**実際上解くには掃き出し法が便利**である (2次方程式も因数分解のほうが速い点も似ている)。クラメールの公式は理論的な話としてはわかりやすいため導入した。

行列式は連立方程式の解法のみならず、以下で見る通り図形的な意味がある。そして線形代数を超えてそれは多変数関数の積分の計算 (**ヤコビアン, Jacobian**) それらは微分方程式の計算 (**ロンスキアン, Wronskian**) などにも応用される。

演習 クラメールの公式を用いて次の連立方程式を解け

$$\begin{cases} 4x - 3y = -9 \\ 3x - 7y = 17 \end{cases} \quad (383)$$

演習の解答 係数行列と切片を

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 17 \end{bmatrix} \quad (384)$$

とするとき、 $\det A = -28 + 9 = -19$ となる。分子を計算する。

$$\det \left[A \text{で1列目を} \vec{b} \text{に置き換えた行列} \right] = \det \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 17 & -7 \end{bmatrix} = 114 \quad (385)$$

クラメールの公式より、 $x = 114/(-19) = -6$ 。 y も同様に計算できる。よって $x = -6$ 、 $y = -5$

11.6 2次正方行列の行列式の図的な意味

ここでは、2次正方行列の行列式の図的な意味を見てみよう。一言でいうと、行列式は行列内に含まれているベクトルの「掃く面積」に対応する。

2つのベクトルを

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \quad (386)$$

と用意する。今は重なってないし、反対向きでもないことを仮定している。

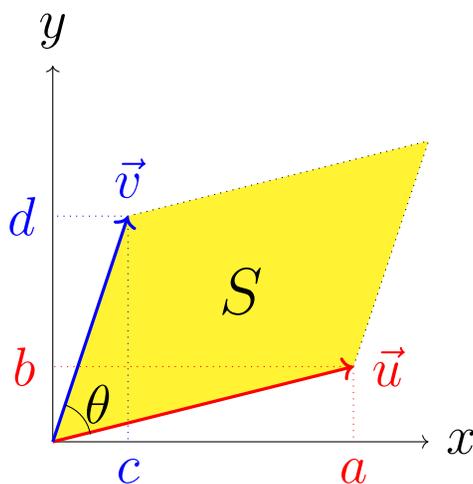


図 28: 2次正方行列の中の2つのベクトル。

なす角を内積の公式から θ とおいておく⁴⁶ (以下で見るように具体的に θ を求める必要はなく、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の関係さえわかれば良い)。

そしてその2つのベクトル(の転置)を並べた行列を A とする。

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}^\top \\ \vec{v}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a & b] \\ [c & d] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (387)$$

この行列 A の行列式はサラスの公式から $\det A = ad - bc$ である。

高校で習った通り⁴⁷、2つのベクトルがなす平行四辺形の面積 S は、

$$S = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta \quad (388)$$

である。今の場合には $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ であるので⁴⁸

$$S = |\vec{u}||\vec{v}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (389)$$

と分かる。内積を用いた $\cos \theta$ の表式 $\cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v} / (|\vec{u}||\vec{v}|)$ から

$$S = |\vec{u}||\vec{v}| \sqrt{1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2}}, \quad (390)$$

$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \quad (391)$$

この式をすべて成分で書き直すと、

$$S = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \quad (392)$$

$$= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 2abcd} \quad (393)$$

$$= \sqrt{a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd} \quad (394)$$

となり、整理すると

$$S = \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc| \quad (395)$$

を得る。つまり2次正方行列 A に対する $\det A$ は実質的に面積⁴⁹を求めている⁵⁰ ($\det A$ には符号がついているので絶対値をとると面積になる、というのが正しい)。あとでもう一度言及するが、3次以上でも体積や超体積に関連する量となっている。

ここからわかることもある。すなわち、 $\det A = 0$ だとすると、中に含まれている2本のベクトルが重なっていることになる(もしくは正反対を向いている)。つまり、(実質的に)同じ方向を向いていることになる。

11.6.1 ベクトルの独立性 (興味のある者だけで良い)

(ここは前期の内容に関係ないので飛ばして良い)

2次正方行列 A の行列式 $\det A$ は、中に入っている2本のベクトルがなす平行四辺形の面積を計算する、とのことだった。これを応用するとベクトルの独立性を判定することができる。詳しい定義はここでは行わないが、ベクトルの独立という概念がある (正確には線形独立)。たとえば、 x 方向の基底ベクトル $\vec{e}_x = [1 \ 0]^\top$ 、 y 方向の基底ベクトル $\vec{e}_y = [0 \ 1]^\top$ がある。これらは直交している。これは内積をもちいて $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y$ となることからわかる。一方でもう少し拡張した意味で独立という概念があるのである。

例えば、 $\vec{e}_1 = [0.5 \ 0.5]^\top$ 、 y 方向の基底ベクトル $\vec{e}_2 = [-0.5 \ 1]^\top$ は、直交していないが2つのベクトルに係数を足し合わせる (これを線形結合という) と、任意の2次元ベクトルを表現できる。そのため、この2つのベクトルは、任意の2次元ベクトルを生み出す事ができる。この様なベクトルの組を一次独立である、という。この一次独立性を調べるためには、行列式を用いることができる。つまり、 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 で行列を作り、行列式を計算したとき、もし0でなければその2つは独立であると言える。これは2つのベクトルのなす平行四辺形が潰れていないことを意味するため、線形結合をとることで2次元ベクトルを表現することができるからである。

11.7 3次正方行列の行列式

次に3次の正方行列に対する行列式を見てみる。これにも置換と置換の符号が必要となるのでまず見てみる。

前回やった通り、3次の置換は6つ ($3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$) がある。その6つは、

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{396}$$

であった。符号は前回確認したとおり、

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_3) = -1,\tag{397}$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_4) = 1, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_5) = 1, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1,\tag{398}$$

である。

3次正方行列の行列式を求めていくが、定義に戻って確認してみよう。3次の正方行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\tag{399}$$

とする。このときの行列式は

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} \quad (400)$$

となる。 S_3 は3個の並び替えに関する置換すべての集合、そして $\operatorname{sgn}(\sigma)$ は σ の符号である。和は $3! = 6$ 項ある。これを書き下すと、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)}, \quad (401)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} a_{3,\sigma_1(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{1,\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} a_{3,\sigma_2(3)} \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\sigma_3) a_{1,\sigma_3(1)} a_{2,\sigma_3(2)} a_{3,\sigma_3(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_4) a_{1,\sigma_4(1)} a_{2,\sigma_4(2)} a_{3,\sigma_4(3)} \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\sigma_5) a_{1,\sigma_5(1)} a_{2,\sigma_5(2)} a_{3,\sigma_5(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_6) a_{1,\sigma_6(1)} a_{2,\sigma_6(2)} a_{3,\sigma_6(3)}, \end{aligned} \quad (402)$$

これらの符号をみると

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_1)}_{=1} a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} a_{3,\sigma_1(3)} + \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_2)}_{=-1} a_{1,\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} a_{3,\sigma_2(3)} \\ &\quad + \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_3)}_{=-1} a_{1,\sigma_3(1)} a_{2,\sigma_3(2)} a_{3,\sigma_3(3)} + \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_4)}_{=1} a_{1,\sigma_4(1)} a_{2,\sigma_4(2)} a_{3,\sigma_4(3)} \\ &\quad + \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_5)}_{=1} a_{1,\sigma_5(1)} a_{2,\sigma_5(2)} a_{3,\sigma_5(3)} + \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma_6)}_{=-1} a_{1,\sigma_6(1)} a_{2,\sigma_6(2)} a_{3,\sigma_6(3)}, \end{aligned} \quad (403)$$

つまり

$$\begin{aligned} \det A = & a_{1,\sigma_1(1)}a_{2,\sigma_1(2)}a_{3,\sigma_1(3)} + a_{1,\sigma_4(1)}a_{2,\sigma_4(2)}a_{3,\sigma_4(3)} \\ & + a_{1,\sigma_5(1)}a_{2,\sigma_5(2)}a_{3,\sigma_5(3)} - a_{1,\sigma_2(1)}a_{2,\sigma_2(2)}a_{3,\sigma_2(3)} \\ & - a_{1,\sigma_3(1)}a_{2,\sigma_3(2)}a_{3,\sigma_3(3)} - a_{1,\sigma_6(1)}a_{2,\sigma_6(2)}a_{3,\sigma_6(3)}, \end{aligned} \quad (404)$$

となる。煩雑で覚えきれそうにない。そこで3次の行列式を求めるには3次の正方行列に対する**サラスの公式** (Sarrus' rule) が役立つ。こちらにも逆行列の存在条件を与える (逆行列は前々回のとおり、掃き出し法で求める)。

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - ibd - afh$$

図 29: 3次正方行列に対するサラスの公式。2次の場合と同じく**右に降りるのは掛けて+**、**左には掛けて-**をつける。

なお、4次以上に対してはサラスの公式は成立しない4次以上の場合には、行列を書いて斜めに掛けても行列式の値にはならない！そのため、4次以上の場合には行列式の定義に立ち返って計算するか、次回紹介する余因子による展開を用いる必要がある。

しかし、行列式の計算は次数が高くなると急激に面倒になる (n 次正方行列なら、 $n!$ 個の項が出てくる。たとえば4次なら $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 項出てくるし、5次だと $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 項も出てくる。6次なら720項である)。現実的には定義に従った計算は、間違えずに手で計算するのはかなり難しい。そのため上手い計算法を考える必要があり、次回扱う。

ちなみに3次以上の正方行列に対する行列式も図形的には(超)立体の体積に対応するが詳しい説明は割愛する。以下では3次正方行列に対する行列式を計算する。

例題

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (405)$$

とするとき、 $\det A$ を計算せよ。

例題の解答 3次の正方行列に対する行列式なのでサラスの公式が使える。そこでサラスの公式を用いると、右に降りるのは掛けて+、左に降りるのは掛けて-をつけて足す。すなわち

$$\begin{aligned} \det A &= 4 \times 2 \times 1 + 1 \times 4 \times 0 + 3 \times 1 \times 4 \\ &\quad - 4 \times 4 \times 4 - 1 \times 1 \times 1 - 3 \times 2 \times 0, \end{aligned} \quad (406)$$

$$= -45 \quad (407)$$

とわかる。

演習1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (408)$$

とするとき、 $\det A$ を計算せよ。

演習 2 3次の正方行列を A とおく。 A^T を A の転置行列とする。このとき、 $\det A^T$ を計算し、 $\det A$ と比較せよ。

演習 例 19、練習問題 19 を解いてみよ (教科書 47 ページ)

演習1解答 $\det A = 9$

演習2解答 $\det A^T = \det A$ 。一般的に転置した行列の行列式は元の行列の行列式と一致する。

11.8 行列のランクと行列式の関係

これまでの講義で行の基本変形を用いて行列のランクを求めるというのを長らくやってきた。 n 次の正方行列のランクが n であるとき、フルランクであるといい、逆行列が存在するということも説明した。

行列のランクは、中に含んでいるベクトルが何本独立か (ざっくりいうと何本が別の向きを向いているか⁵¹) を表す指標となっている。「独立」という話は後期の授業で取り扱われるはずである。

一方で、先程の図示でも見たように行列式は内部に含まれているベクトルが作る図形の「面積」(一般の次元では体積や超体積)をあらわす。行列のランクと行列式の間には密接な関係がある。すなわち、 A を n 次の正方行列としたとき、

n 次正方行列 A がフルランクである ($\text{rank } A = n$)

$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ が唯一解を持つ

$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ は自明な解 ($\vec{x} = \vec{0}$) のみ持つ

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\Leftrightarrow A^{-1}$ が存在する (A は正則行列)

(証明は [4] をみてもらうとして) これらは同値である。

11.9 ベクトルの外積

ここでは行列式の応用として、ベクトルの外積 (Cross product) を見てみる。物理学、特に電磁気学では非常に有用である⁵²。

高校でも習った通り、ベクトルには内積というものが定義された。では外積ってあるのかな？ というのは自然な問であると思う。

ここでは、そのベクトルの外積を以下のように導入する。3次元空間での2本のベクトル

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (409)$$

を考えよう。そして3つの基底ベクトル $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ も導入しておく。このとき、ベクトルの外積を

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (410)$$

と定義する。

具体的にサラスの公式を用いて展開すると、

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (411)$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_x + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_y + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_z \quad (412)$$

そして $\vec{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 、 $\vec{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を使うと結局

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \quad (413)$$

となる。つまり3次元ベクトルに対してのベクトルの外積の計算結果はベクトルとなる。

このままでは、よくわからないので特別な場合を見てみよう。特に3次元空間内の2次元ベクトルとして

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (414)$$

を考える。2つのベクトルは、 $x - y$ 平面の上のベクトルとなる。

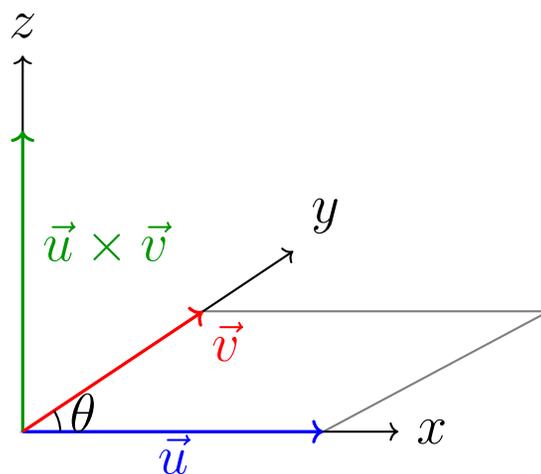


図 30: ベクトルの外積 (415) の図示。外積は、外積を計算する2本のベクトルと異なる方向を作り出す。

このときベクトルの外積は、

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \quad (415)$$

となる。これをサラスの公式で展開すると、 \vec{e}_z のところだけが残って

$$\vec{u} \times \vec{v} = (ad - bc)\vec{e}_z \quad (416)$$

となる(電磁気学での右ねじの法則が出てくる)。ベクトルの外積は電磁気学等で重要となる。

このあとの授業には出てこないが、ベクトルの外積を用いると、以下の2つの積も定義できる。1つは、スカラー三重積

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

であり、もう1つは、ベクトル三重積

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

である。これらは物理(特に電磁気学)で重宝する。もう出てこないのので出てきたときに思い出せば良い。

ベクトルの外積は、**外積代数** (Exterior algebra) として一般化される。詳しくは⁵³等を参照のこと。微分幾何(や進んだ一般相対論)で出てくる微分形式とも関連が深い。それらは、[15]を参照のこと。

今の特別なベクトルの外積は、2次の行列式に比例している。先程の2次正方行列の行列式の図示は、この性質を利用していた。

また3次の行列式の計算をしていたわけだが、結果として2次の行列式が出てきた。これは偶然ではなく、高次の行列の行列式には、特定の形で低次の行列の行列式が埋め込まれている。これは余因子展開ということがらに関連しているが、これに関しては次回以降に見ていくことになる。

11.10 今回のまとめ

今回は、2次と3次の正方行列に対する行列式を定義から見た。2次、3次の正方行列に対してはサラスの公式を用いて(少々面倒だが)計算することが出来た。

行列式は、線形方程式がうまく解けるか(唯一解を持つか)どうかを示す量であることをクラメールの公式で見た。それだけでなく、様々な事柄につながる重要な数学的な概念である⁵⁴。

他にも行列式は、行列の中に入っているベクトルの作る(立体)図形の面積(超体積)であった。これも重要な見方である。

今回は3次の式までをみた。しかし次回見るように4次以上の正方行列の行列式の計算には、サラスの公式(たすき掛け)を使うことができない。一方で定義をもちいての計算は、実際上難しく、うまい計算法が必要がある。これは次回に取り扱う余因子展開が有用である。

Notes

³⁷ 線形代数の歴史については、Wikipedia <https://w.wiki/4cRU> も詳しい。

³⁸ <https://otonanokagaku.net/issue/edo/vol3/index04.html>

³⁹ 天地明察という小説・映画で関孝和は触れられる。彼は、異世界転生者ばりの天才である。

⁴⁰ 「真島秀行,」藤澤利喜太郎の事績の功罪について: 生誕150年を記念して(数学史の研究)」、数理解析研究所講究録、vol. 1787、pp.169-182、2012」に行列式と訳された経緯が書いてある。また行列や行列式と訳したのは、高木貞治らしい<http://shochandas.xsrv.jp/mathhistory.htm>。

⁴¹ たとえば連立方程式に関する考察など。

⁴² それまではどうやら行列式や四元数の理論、ベクトルなどを話していたようだ(数理解析研究所講究録1317巻2003年190-204や<https://cir.nii.ac.jp/crid/1050845762544200448>)。

⁴³ 置換のなす群(群については付録参照)を**対称群**(Symmetric group)という。このsymmetricの頭文字から S とかいた。

⁴⁴ ただし歴史的には関孝和のほうがはやかったのは述べたとおりである。

⁴⁵ ただし係数行列が正方行列で書ける場合に限るのであるが。

⁴⁶ $\cos \theta = \vec{u} \cdot \vec{v} / |\vec{u}| |\vec{v}|$ である。

⁴⁷ <https://www.try-it.jp/chapters-6150/sections-6262/lessons-6275/>

⁴⁸ 今、 θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ と取っている(2つのベクトルのなす角は、 180° 以下)。このときには $\sin \theta$ は非負である。

⁴⁹ 抽象ベクトル空間の理論では、ベクトルの1次独立という概念を習うが、 $\det A$ は非常に役立つ。下記の小節参照のこと。

⁵⁰ 正確には符号があるので符号付き体積と呼ばれるものになっている。この符号は、 \vec{u} からみて \vec{v} が右にあるか、左にあるかのような、ある種の向きを指定している。

⁵¹ 正確には一次独立か。

⁵² 古典電磁気学は、数学・幾何学におけるファイバー束の理論の例になっている。物理学ではゲージ理論と呼ばれるものである。

⁵³ <https://www.eng.niigata-u.ac.jp/~nomoto/download/df.pdf>や<https://hooktail.sub.jp/differentialform>
[ExteriorAlgebra/](#)

⁵⁴ 行列の(座標)変換に対して不変量になっている。つまり座標変換によらない量になっている。また、固有方程式を与えるための重要なステップとなる。幾何学における特性類の定義にも用いるなど、もともとの由

来を離れて重要な意味を帯びている。<https://zenn.dev/xiangze/articles/d88995d4f10ca3> や和達氏の本 <https://amzn.asia/d/6Nttxus> などが参考になる。

Part 12

第12回: 行列式2

12.1 今日やること

今回は一般の次元に対する行列式を計算する。具体的には**余因子 (Cofactor)**という概念を導入し、一般の次元に対する行列式を計算する。特に、余因子展開 (Cofactor expansion) を用いて計算する。ここで導入する余因子は逆行列の定義にも用いるのでしっかり身につけてほしい。

前回も述べたが行列式は、行列の性質を反映した数字であり、二次方程式に対する判別式のようなものであった。行列は数字がたくさん並んでおり複雑であるが、行列式は1つの数字なので見やすい。これは人間を識別するとき「身長」という特徴的な数字に着目するようなものである。身長だけではその人は判別しきれないが、ある程度の様子はわかることになる。行列式も同様に、情報を落としてはいるがそのおかげで色々と情報が見やすく、取り出すことができる。

12.2 復習

演習 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (417)$$

のランク $\text{rank } A$ と行列式 $\det A$ を計算せよ。

演習 2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (418)$$

とするとき、 $\det A$ を計算せよ。

演習 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (419)$$

とするとき、 $\det A$ を計算せよ。

演習 1 解答 $\text{rank } A = 2$ 。 $\det A = 7$

演習 2 解答 $\det A = -45$

演習 3 解答 $\det A = 9$

12.3 4次の正方行列に対する行列式

前回には、3次までの行列式を見てきたが、4次の行列式を考えてみよう。一般の行列式の定義を思い出すと、 N 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (420)$$

に対して行列式は

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \underbrace{a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{N,\sigma(N)}}_{N \text{ 個}} \quad (421)$$

であった。2次の行列式は、 $2!$ 個の項を足し上げるため $2! = 2$ 項の和を計算し、3次の行列式は $3!$ 個の項を足し上げるため $3! = 6$ 項の和を計算した。4次の行列式は、 $4! = 24$ 項の和を計算する必要がある。

2次と3次の計算の計算には、サラスの公式を使うことができた。

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - ibd - afh$$

図 31: サラスの公式。2次3次の場合は**右に降りるのは掛けて+**、**左には掛けて-**をつける。2次は $2! = 2$ 項、3次は $3! = 6$ 項、である。

サラスの公式では計算過程から分かる通り、一番上の行の要素数の2倍だけ項が出てくる (一番上の行の各要素を2回ずつ使うので)。たとえば2次の場合だと、一番上の行の要素は2つあり、その2倍の4項出てくる。3次の場合だと、一番上の行の要素は3つあり、その2倍の6項出てくる。それぞれ行列式の定義からわかる項数と一致している。そのため、サラスの公式が成立した。

4次以上? さて、4次の場合にサラスの公式を用いるとどうなるだろうか。この場合には一番上の行の要素は4つあり、その2倍の8項出てくることになる。本来、4次の行列式は $4! = 24$ 項の和を計算する必要があるため、全然項が足りないことになる。5次以上でも同様である。

そのため、(前回も指摘した通り)4次以上に対してはサラスの公式は成立しない。つまり4次以上の場合には、行列を書いて斜めに掛けても行列式の値にはならない！

大きい行列に対しての行列式を定義から計算するには、置換を間違いなく列挙しなければならず、現実的ではない。これには次に紹介する余因子展開が便利である。

12.4 余因子

正方行列には、行列式を用いて**余因子** (Cofactor) という概念を考える事ができる⁵⁵。この余因子を用いて行列式を展開したり、逆行列を定義したりできる。逆行列の定義は次回に行う。

12.4.1 余因子の動機: 2次正方行列の行列式と3次正方行列の行列式の関係

ここで唐突だが、一般の3次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (422)$$

に対してその行列式を考える。

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (423)$$

これはサラスの公式をつかって展開できるが、以下の要素に着目し、工夫してみる。

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (424)$$

サラスの公式を考えると、右に降りるのは+で左に降りるのは-なので

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad (425)$$

が成り立つことがわかる (すこし考えてみてください)。

ここで第二項の列を入れ替え、順序をもとの行列と同じように並ぶようにすると

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad (426)$$

をえる。ただし2次の行列式の列を入れ替えると全体の符号が入れ替わるのでこれを利用した (サラスの公式で計算したあと符号をくくりだしてから行列式の形にしたと思っても良い)。

つまり、右辺では行列式の内いくつかを無視したものを使って展開した。これはつまり元の行列全体を書いて、その中で計算しないものを a のように斜線を入れて書くと、

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} \quad (427)$$

となる。右辺では、斜線が入っていない部分だけを成分だと思って行列式を計算する。

ここで行列式 A は(要素) \times (符号付きの行列式) という形に展開された。そこで以下のように後者の部分を

$$\tilde{a}_{11} \equiv + \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (428)$$

$$\tilde{a}_{12} \equiv - \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (429)$$

$$\tilde{a}_{13} \equiv + \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad (430)$$

と定義する。すると、 $\det A$ は、

$$\det A = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \quad (431)$$

と展開できる。今現れた \tilde{a} を**余因子 (Cofactor)**といい、以下でもう一度ちゃんと定義する。この展開を**余因子展開 (Cofactor expansion)**や**ラプラス展開 (Laplace expansion)**という。以下で見るが、一般的にも同様に行列式を展開できる。また余因子は逆行列の定義にも用いる。

実は、別の要素を使っても展開できる。再び一般の3次正方行列を考える。そして1列目で展開する(やり方は後で説明するが、サラスの公式で展開したあと、くくったと思っておく)と、

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (432)$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad (433)$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21} \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad (434)$$

ここで余因子を

$$\tilde{a}_{21} = - \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (435)$$

$$\tilde{a}_{31} = + \det \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix}, \quad (436)$$

と定義すると、 $\det A$ は

$$\det A = a_{11} \tilde{a}_{11} + a_{21} \tilde{a}_{21} + a_{31} \tilde{a}_{31} \quad (437)$$

とできる。

以下では、余因子 \tilde{a}_{ij} の一般的定義を見ていこう。

12.4.2 余因子の定義

余因子は正方行列に対して定義できる。まず「 i 行目と j 列目を除いた行列」の行列式を D_{ij} とする。それに「 $(-1)^{i+j}$ をかけたもの」を「 (i, j) の余因子」と定義する。式で書くと

$$\tilde{a}_{ij} \equiv (i, j) \text{の余因子}, \quad (438)$$

$$= (-1)^{i+j} \times D_{ij} \quad (439)$$

$$= (-1)^{i+j} \times (\text{「}i\text{行目と}j\text{列目を除いた行列」の行列式 } D_{ij}) \quad (440)$$

である。以下で再び具体例を見ておこう。

12.4.3 2次正方行列の余因子

例えば2次正方行列の

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (441)$$

を考えて余因子 \tilde{a}_{ij} を求めてみよう。 i と j を指定する必要があるので、例としてまず $i = 1, j = 1$ の余因子を考える。このとき、「 i 行目と j 列目を除いた行

列」は、1行目と1列目を除けばよいので、除く部分に斜線を入れておくと

$$\text{1行目と1列目を除いた } A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (442)$$

となる。この行列式は、残っている a_{22} である。符号部分は $(-1)^{1+1} = 1$ である。よって余因子 \tilde{a}_{11} は

$$\tilde{a}_{11} = (\text{符号}) \times (\text{残り部分の行列式}) = a_{22} \quad (443)$$

となる。

次に $i = 1, j = 2$ の余因子を考える。このとき、「 i 行目と j 列目を除いた行列」は、1行目と2列目を除けばよいので

$$\text{1行目と2列目を除いた } A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{bmatrix} \quad (444)$$

であり、この行列式は、残っている a_{21} である。符号部分は $(-1)^{1+2} = -1$ である。よって余因子 \tilde{a}_{12} は

$$\tilde{a}_{12} = -a_{21} \quad (445)$$

となる。ほかも同様に計算できる。

12.4.4 3次正方行列の余因子

次に3次正方行列の

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (446)$$

を考えて余因子 \tilde{a}_{ij} を求めてみよう。

例としてまず $i = 1, j = 1$ の余因子を考える。このとき、「 i 行目と j 列目を除いた行列」は、1行目と1列目を除けばよいので、除く部分に斜線を入れておくと

$$\text{1行目と1列目を除いた } A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (447)$$

となる。残りの部分を C とすると

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = C \quad (448)$$

となる。 C の行列式はサラスの公式から

$$\det C = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \quad (449)$$

である。符号部分は $(-1)^{1+1} = 1$ である。よって余因子 \tilde{a}_{11} は

$$\tilde{a}_{11} = (\text{符号}) \times (\text{残り部分の行列式}) \quad (450)$$

$$= a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \quad (451)$$

となる。

次に $i = 1, j = 2$ の余因子を考える。このとき、「 i 行目と j 列目を除いた行列」は、1 行目と 2 列目を除けばよいので

$$\text{1 行目と 2 列目を除いた } A = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (452)$$

つまり斜線部を除くと

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = C \quad (453)$$

として、この C の行列式はサラスの公式から、

$$\det C = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \quad (454)$$

である。符号部分は $(-1)^{1+2} = -1$ である。よって余因子 \tilde{a}_{12} は

$$\tilde{a}_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \quad (455)$$

となる。

演習 例20、練習問題20を解いてみよ(教科書49ページ)

12.5 余因子展開

余因子を用いて行列式を再帰的に定義することもできる。これは一般に余因子展開 (Cofactor expansion) と呼ばれているものである。ピエール＝シモン・ラプラス (Pierre-Simon Laplace) が提唱したものである⁵⁶。

12.5.1 行列式の余因子展開 (3次)

3次の行列式の余因子展開は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ a_{31} & & \end{pmatrix} \times (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ \hline \hline \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & a_{32} & \end{pmatrix} \times (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{13} \\ a_{21} & & a_{23} \\ \hline \hline \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & a_{33} \end{pmatrix} \times (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ \hline \hline \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

この行で展開

図 32: 余因子展開、行の展開

列での展開も可能である。

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{21} \det \begin{pmatrix} & & \\ a_{12} & a_{13} & \\ & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} & & \\ a_{12} & a_{13} & \\ a_{22} & a_{23} & \end{pmatrix}$$

この列で展開
2x2の行列式
2x2の行列式
2x2の行列式

図 33: 余因子展開、列の展開

同様に n 次正方行列に対しても列でも行でも展開できる。

12.5.2 一般の行列式の余因子展開

余因子 \tilde{a}_{ij} を用いると一般の行列式の余因子展開ができる。

列での展開 n 次正方行列を A とする。まずは第 k 列で展開すると

$$\det A = a_{1k}\tilde{a}_{1k} + a_{2k}\tilde{a}_{2k} + a_{3k}\tilde{a}_{3k} + \cdots + a_{nk}\tilde{a}_{nk} = \sum_{i=1}^n a_{ik}\tilde{a}_{ik} \quad (456)$$

行での展開 第 r 行で展開すると

$$\det A = a_{r1}\tilde{a}_{r1} + a_{r2}\tilde{a}_{r2} + a_{r3}\tilde{a}_{r3} + \cdots + a_{rn}\tilde{a}_{rn} = \sum_{j=1}^n a_{rj}\tilde{a}_{rj} \quad (457)$$

これらの証明は今回は割愛する (一般に成立する)。

12.5.2.1 行列式の余因子展開の具体例

行列式の余因子展開の例を見てみよう。まず、いちばん簡単な場合を見てみよう。例えば2次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (458)$$

とする。すると行列式は、

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (459)$$

である。これはもちろんサラスの公式より $\det A = 4 - 6 = -2$ である。
これをあえて、1行目で余因子展開する。

$$\det A = 1 \times (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{bmatrix}, \quad (460)$$

$$= 1 \times 1 \times 4 + 2 \times (-1) \times 3 = -2 \quad (461)$$

次に3次正方行列の例を見てみる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (462)$$

の行列式を余因子展開で見してみる（もちろん、3次までならサラスの公式のほうが効率が良い）。 A の要素を a_{ij} として、ここでは1列目で展開する。

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad (463)$$

右辺の赤字を軸に展開をおこなうと、

$$\begin{aligned} &= \underbrace{a_{11}}_{=1} (-1)^{1+1} \det \underbrace{\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \emptyset & 4 & 5 \\ \cancel{3} & 6 & 7 \end{bmatrix}}_{\text{2次の行列式}} \\ &+ \underbrace{a_{21}}_{=0} (-1)^{2+1} \det \underbrace{\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \emptyset & 4 & \cancel{5} \\ \cancel{3} & 6 & 7 \end{bmatrix}}_{\text{2次の行列式}} \\ &+ \underbrace{a_{31}}_{=3} (-1)^{1+3} \det \underbrace{\begin{bmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \emptyset & 4 & 5 \\ \cancel{3} & \emptyset & \cancel{7} \end{bmatrix}}_{\text{2次の行列式}} \end{aligned} \quad (464)$$

$$= 1 \times \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + 3 \times \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -14 \quad (465)$$

となる。

余因子展開のコツは、0の要素が多い列や行を見つけ、その列や行を中心に展開するのが良い。なぜなら、 $a_{ij}\tilde{a}_{ij}$ と展開したときに a_{ij} が0となる場合には0にできる部分が増えるからである。

演習 例21、練習問題21を解いてみよ(教科書51ページ)

演習 例22、練習問題22を解いてみよ(教科書52ページ)

演習(難) 例23、練習問題23を解いてみよ(教科書54ページ)

12.6 今回のまとめ

今回は、高次の行列式を低次に落とすための「余因子展開」を学んだ。

余因子とは、行列の中、特定の行と列を1つずつ除き行列式を計算し、符号を付けたものであり、それを用いて行列式を展開することができる。

これにより、どんなに高次でも余因子展開を繰り返すことで、3次や2次に落とせ、系統的に計算することができる。

次回は、余因子、行列式の詳細な性質を調べ、逆行列に関する推察を行う。

今後の予定

- 第12回(6/26): (今回)余因子と行列式の余因子展開、大きな行列の行列式
- 第13回(7/3): 行列式の一般的な性質、余因子を用いた逆行列の定義
- 第14回(7/10): **期末試験** (試験範囲は第1回から第13回までのすべてです)
- 第15回(7/17): まとめ(テスト解説)と展望(線形代数IIへの伏線)

救済レポート 中間試験の点が気になるものは、救済レポートを考えています。希望者のみ。期末試験の模擬試験問題(ホームページ上にある)の内、大

問3、大問6、大問7、大問8を解くこと。A4にとき、科目名、学籍番号、名前をかき、左上をホッチキスをとめて提出せよ。7/10の講義時間まで(くらい)に提出すること。配点はほぼなし、救済用。

Notes

⁵⁵ 「余」という用語は、英語の Co- に対応する。たとえば cosine (コサイン)、余弦などである。残りの部分というような意味であろうか。

⁵⁶ ピエール＝シモン・ラプラスについては、Wikipediaが<https://w.wiki/56Vj> 詳しい。個人的に面白く感じたので見てみることを進める。

Part 13

第13回: 行列式の性質

13.1 今日やること

前回までに、行列の性質を反映した量である行列式を導入した。特に前回は余因子と余因子展開を導入した。今回の最終目標は、行列式の利用して複雑な行列式の上手い求め方を調べていくことと、逆行列の定義を抑えることである。

復習演習 例20、練習問題20を解いてみよ(教科書49ページ)

復習演習 例21、練習問題21を解いてみよ(教科書51ページ)
(今回は演習が多めなので、演習時間は短めです、すみません。)

13.2 行列式の性質

あとで説明するが、まず重要な行列式の性質を6つ列挙しておく。

- **【性質1】** 与えられた行列に対する行列式の値とその転置行列に対する行列式の値は等しい。
- **【性質2】** 2つの列(または、2つの行)を入れ替えると行列式の値は-1倍される。
- **【性質3】** 2つの列(または、2つの行)が等しい行列の行列式の値は0である。
- **【性質4】** 行列式のある列(または、ある行)を k 倍すると、行列式の値も k 倍になる。
- **【性質5】** 1つの列(または行)の要素が2つの数の和で書けていたとする。このとき対応する行列式は、その行列を2つに分けた行列式の値の和になる。
- **【性質6】** 行列式の1つの列(もしくは行)に他の列(もしくは行)の何倍かを加えても行列式の値は変わらない。

あとでもう一度説明するが、【性質4】と【性質5】は合わせて多重線型性 (multilinearity) と呼ばれる性質である。【性質3】は【性質2】から導かれる。また【性質6】は、【性質3】から【性質5】をまとめたものであり、入れ替えを除いた行の基本変形に対して行列式の値が不変であることを示す。

13.2.1 行列式の性質

上記の行列式の性質は、一般の n 次正方行列に対して成立するが、ここでは2次の正方行列を例に行列式の性質を見ておこう (演習はもっと大きな行列でも見る)。サラスの公式から行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (466)$$

に対する行列式は、

$$\det A = ad - bc \quad (467)$$

である。

【性質1】 与えられた行列に対する行列式の値とその転置行列に対する行列式の値は等しい。

まず転置は、対角要素以外を入れ替えればよいので

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad (468)$$

である。サラスの公式からただちに

$$\det A^T = ad - cb = \det A \quad (469)$$

とわかる。

転置操作は行と列を入れ替えるため、以下で行列式に対する列の変形は行の変形と等しいことがわかる。

【性質2】 2つの列(または、2つの行)を入れ替えると行列式の値は-1倍される。

2つの列を入れ替えた

$$A' = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \quad (470)$$

を考えてみよう。この行列式は、

$$\det A' = bc - ad = -(ad - bc) = -\det A \quad (471)$$

となる。**【性質1】** から行についても成立する。

【性質3】 2つの列(または、2つの行)が等しい行列の行列式の値は0である。

これは **【性質2】** から、2つ等しい列があれば0である。また **【性質1】** から行についても成立する。

【性質4】 行列式のある列(または、ある行)を k 倍すると、行列式の値も k 倍になる

直接的に示すことができる。例えば2列目を k 倍してみると、

$$\det \begin{bmatrix} a & kb \\ c & kd \end{bmatrix} = a(kd) - (kb)c = k(ad - bc) = k \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (472)$$

どの列でも成立する。また **【性質1】** から行についても成立する。

演習 例24、練習問題24を解いてみよ(教科書57ページ)

演習 例25、練習問題25を解いてみよ(教科書59ページ)

演習 3×3 行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad (473)$$

としたとき、【性質1】、【性質2】、【性質4】をサラスの公式を用いて確かめよ。ただし転置行列 A^T は

$$A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \quad (474)$$

であり、行と列を入れ替える。
解答は略。

話を2次正方行列に戻して説明を続けよう。

【性質5】 1つの列(または行)の要素が2つの数の和で書けていたとする。このとき対応する行列式は、その行列を2つに分けた行列式の値の和になる。

これは行列式

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{bmatrix} \quad (475)$$

を考えると、

$$\det \begin{bmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix} \quad (476)$$

となるという主張である。まず、これは行列の和としては成立していないことに注意せよ (行列の和なら全成分が足されているはず)。

主張を確かめてみよう。これは直接的に右辺と左辺をそれぞれ計算して

$$\text{(左辺)} = \det \begin{bmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{bmatrix} = (a + a')d - b(c + c'), \quad (477)$$

$$= ad + a'd - bc - bc', \quad (478)$$

$$(右辺) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix} = (ad - bc) + (a'd - bc') \quad (479)$$

とわかる。よって等しい。各列ごとに成立し、また行でも成立する。

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c + c' & d + d' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix} \quad (480)$$

証明は転置行列の行列式が同じことからしたがう。

【性質6】 行列式の1つの列(もしくは行)に他の列(もしくは行)の何倍かを加えても行列式の値は変わらない。

これは今までの性質から示すことができる。たとえば、

$$\det \begin{bmatrix} a + kb & b \\ c + kd & d \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (481)$$

を見てみよう。

$$\det \begin{bmatrix} a + kb & b \\ c + kd & d \end{bmatrix} \stackrel{\text{【性質5】}}{=} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} kb & b \\ kd & d \end{bmatrix}, \quad (482)$$

$$\stackrel{\text{【性質4】}}{=} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + k \det \begin{bmatrix} b & b \\ d & d \end{bmatrix} \quad (483)$$

$$\begin{aligned} \text{【性質3】} \\ \underline{=} \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + k \times 0 \end{aligned} \quad (484)$$

$$= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (485)$$

さらに付録B.4で説明してあるとおり、多重線型性(【性質5】)と交代性(【性質2】)を満たす様な、ベクトルを引数にとる関数は定数倍を除いて行列式になる⁵⁷。

13.2.2 行列式の基本変形

ここまで、行列式の性質を見てきた。それを応用すると、行列式に対して基本変形が(ほぼ)成立することがわかる。ほぼといったのは、行の入れ替えで行列式の符号が入れ替わる点が異なる。まとめると

1. 行の入れかえ (これで行列式の符号が逆になる)
2. ある行から定数をくくりだすことができる (これで行列式の値は不変)
3. ある行に0でない数を掛け、別の行に加えることができる (これで行列式の値は不変)

列についても同様である。

演習 例 26、練習問題 26 を解いてみよ (教科書 61 ページ)

演習 (難) 例 27、練習問題 27 を解いてみよ (教科書 62 ページ)

演習 (難) 例 28、練習問題 28 を解いてみよ (教科書 64 ページ)

13.2.3 積の行列式は行列式の積

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \quad (486)$$

これも 2×2 での証明をみて納得しておこう。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad (487)$$

とする。それぞれの行列式は、

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (488)$$

$$\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \quad (489)$$

$\det A$ と $\det B$ を掛けると、

$$\det A \det B = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}), \quad (490)$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}, \quad (491)$$

$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \quad (492)$$

である。

一方で、行列積は

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad (493)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \quad (494)$$

そしてこの行列式を考えると、

$$\det AB = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}), \quad (495)$$

$$= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\ - (a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} + a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}), \quad (496)$$

これを整理すると、

$$\det AB = a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} \\ + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \quad (497)$$

赤の部分は相殺する。つまり、

$$\det AB = a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{21}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \quad (498)$$

となり、

$$\det A \det B = a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \quad (499)$$

と一致する。よって(2次正方行列の場合には少なくとも)、 $\det A \det B = \det AB$ となる。一般の行列に対しても成立する。

13.2.4 単位行列に対する行列式

$$\det E = 1 \quad (500)$$

定義から計算すると対角要素のみの積が残ることから分かる。

13.2.5 逆行列の行列式は行列式の逆

証明は、上記の性質を使う。 A を正則行列 (逆行列を持つ行列、実は $\det A \neq 0$ ある) とし、 $B = A^{-1}$ とおく。一方で

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \quad (501)$$

であったので、 $B = A^{-1}$ をつかうと

$$\det(\underbrace{AA^{-1}}_{=E}) = (\det A)(\det A^{-1}) \quad (502)$$

となる。左辺の行列は単位行列 E であり、行列式は1である。なので

$$1 = (\det A)(\det A^{-1}) \quad (503)$$

を得る。よって両辺を $\det A$ で割ると

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (504)$$

となる。逆行列 A^{-1} を持つ行列を**正則行列** (Regular matrix) という。

13.2.6 ファンデルモン行列式

数学や理論物理では、特定の形の行列式が現れることがあるので知っている
と便利である。 n 個の実変数 x_1, x_2, \dots, x_n を用意したとき、

$$\det V = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (505)$$

となる。これをファンデルモン行列式 (Vandermonde's determinant) と
呼ぶ。表記揺れで、ヴァンデルモン行列式とも呼ばれる⁵⁸。

まず確かめるために2次の場合で具体形を見ておく。

$$K = \det V = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} = x_2 - x_1 \quad (506)$$

成立している。3次でも、

$$K = \det V = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix} = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \quad (507)$$

となる (興味のあるものは確かめよ。展開してもわかるし、以下のように調べても良い)。具体形から、文字の入れ換えに対する反対称性がわかるが、これは行列式の列の交換に対応することもわかる。

4次のファンデルモント行列式 サラスの公式によらず成立するか確かめるために4次の場合で具体形を見ておく。

$$K = \det V = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{bmatrix} \quad (508)$$

まず、行列式に対する基本変形をする。1列目を $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ にしたい。最初は、具体的には4行目を操作する。4行目から3行目に x_1 掛けて引く。この操作で行列式の値が変わらないため、

$$K = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 - x_1^3 & x_2^3 - x_2^2 x_1 & x_3^3 - x_3^2 x_1 & x_4^3 - x_4^2 x_1 \end{bmatrix}, \quad (509)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^2 & (x_3 - x_1)x_3^2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{bmatrix}, \quad (510)$$

次に、3行目から2行目に x_1 掛けて引く。この操作で行列式の値が変わらないため、

$$K = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 - x_1^2 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_4^2 - x_1x_4 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^2 & (x_3 - x_1)x_3^2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{bmatrix}, \quad (511)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & (x_4 - x_1)x_4 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^2 & (x_3 - x_1)x_3^2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{bmatrix}, \quad (512)$$

次に、2行目から1行目に x_1 掛けて引く。この操作で行列式の値が変わらないため、

$$K = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & (x_4 - x_1)x_4 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^2 & (x_3 - x_1)x_3^2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{bmatrix}, \quad (513)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & (x_4 - x_1)x_4 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^2 & (x_3 - x_1)x_3^2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{bmatrix}, \quad (514)$$

行列 V の(1,1)成分の1に着目して(列の残りの成分が0なので)、余因子展開すると、3次正方行列の行列式になり

$$K = \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ (x_2 - x_1)x_2 & (x_3 - x_1)x_3 & (x_4 - x_1)x_4 \\ (x_2 - x_1)x_2^2 & (x_3 - x_1)x_3^2 & (x_4 - x_1)x_4^2 \end{bmatrix}, \quad (515)$$

となる。

1. 1列目から $(x_2 - x_1)$ をくくって

2. 2列目から $(x_3 - x_1)$ をくくって、

3. 3列目から $(x_4 - x_1)$ をくくって

すると、

$$K = (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{bmatrix}, \quad (516)$$

となる。後半の行列式部分は、3次のファンデルモント行列式であるので、結果が使えて(!)、

$$K = (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \times \underbrace{(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_2)}_{\det(\dots)}, \quad (517)$$

$$= (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1), \quad (518)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_j - x_i) \quad (519)$$

となる。一般の n でも数学的帰納法から証明できる。

13.2.7 応用上への注意

これらの性質は、応用上かなり重要である。なぜなら $\det U \neq 0$ となる行列 U を用いると、

$$D = U^{-1}AU \quad (520)$$

という A と B があったとする (この関係にある行列を相似であるといい、相似変換という)。上の性質 $\det AB = \det A \det B$ を使うと

$$\det D = \det A \quad (521)$$

と分かる。 $U^{-1}AU$ は A の相似変換と呼ばれるが、これは物理で言うところ演算子のユニタリー発展に相当する。また微分幾何学における不変量とも深い関係がある。

13.3 クラメールの公式

ここでクラメールの公式 (Cramer's rule) を復習しよう。クラメールの公式は、連立方程式を解くための手法であり、2次方程式でいうところの解の公式に対応する。ただしクラメールの公式は実用的でなく、理論的な考察の際に出てくる公式である。

3次の連立方程式を例にクラメールの公式を具体的に見ていこう。解きたい連立方程式を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (522)$$

としよう。このとき、

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det A_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \det A_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}, \quad (523)$$

のように係数行列 A の列を定数項に置き換えたものを定義する。このときに

解は、

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}, \quad (524)$$

と得られる。これをクラメールの公式という。一般の n 元連立方程式の場合でも成立する。この式をみると、 $\det A = 0$ の場合 (同値な条件としてランクが落ちている場合) に連立一次方程式が「解けない」というのも明らかだろう。2 次の場合にも同様に A を 2 次正方行列として

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \quad (525)$$

とできる。ただし

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \det A_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}, \quad (526)$$

演習 例31、練習問題31を解いてみよ (教科書73ページ)

13.4 余因子行列

ここで逆行列の準備のため、余因子行列を導入する。行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (527)$$

に対して、 a_{ij} 成分の余因子を \tilde{a}_{ij} と書く。このとき、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \quad (528)$$

を余因子行列と呼ぶ。ここでは3次のものを導入したが、教科書にあるとおり一般の場合にも成り立つ。転置を使って定義していることに注意せよ。

演習 例29、練習問題29を解いてみよ(教科書67ページ)

13.5 逆行列

さて、ここからは逆行列の話を行う。 A^{-1} が A の逆行列であるとは

$$AA^{-1} = E \quad (529)$$

という式を満たすことであった。 A^{-1} を $A^{-1} = X = [x_{ij}]$ と仮置きして観察してみる。具体的に 2×2 行列の場合、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}}_{=X=A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (530)$$

これは、 X を列ベクトルと分解すると以下のように見ることができる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} \right] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \quad (531)$$

2次正方行列と2次正方行列の積は、行列ベクトル積を2回考えるのと同じであった。

つまり今の場合には別の2つの連立一次方程式が入っているようにみえる。

つまり

$$(い) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (532)$$

$$(ろ) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (533)$$

という同じ係数行列を持つ2つの連立方程式になっている。 x_{11} と x_{21} が入った1つ目の連立方程式、 x_{12} と x_{22} が入った2つ目の連立方程式の2つを解けば、逆行列を求められることになる。一般の行列でも同様に考えられる。つまり n 次正方行列の場合には、 n 個の連立方程式を考えれば良い。ここまでは復習である。

さて連立方程式が解ければ逆行列が求まることはわかった。そしてクラメールの公式、つまり行列式を使うと、連立方程式が解けるのだった。組み合わせると、行列式を使うと逆行列が求まることになる。実はこれが逆行列の具体形を与える。さて2次の場合に話を続けよう。

ではクラメールの公式から、(い)と(ろ)の連立方程式は解けて、

$$(い) \quad x_{11} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad x_{21} = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad (534)$$

$$(い) \quad x_{12} = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad x_{22} = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \quad (535)$$

となる。分母は共通した4つの数字が出てくる。

$$(い) \quad x_{11} = \frac{a_{22}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad x_{21} = \frac{-a_{21}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad (536)$$

$$(い) \quad x_{12} = \frac{-a_{12}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad x_{22} = \frac{a_{11}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \quad (537)$$

分子をよく見てみると、余因子と符号があっている。つまり、

- $\tilde{a}_{11} = a_{22}$
- $\tilde{a}_{12} = -a_{21}$
- $\tilde{a}_{21} = -a_{12}$
- $\tilde{a}_{22} = a_{11}$

なので、

$$(い) \quad x_{11} = \frac{\tilde{a}_{11}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad x_{21} = \frac{\tilde{a}_{12}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad (538)$$

$$(い) \quad x_{12} = \frac{\tilde{a}_{21}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, \quad x_{22} = \frac{\tilde{a}_{22}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \quad (539)$$

これを行列の形にまとめると、

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv \tilde{A}} \quad (540)$$

\tilde{A} は余因子行列と呼ばれる行列になるが、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix}^{\top} \quad (541)$$

と転置で定義されていることに注意せよ。

まとめると (2次正方行列に限って見たが、一般に)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} \quad (542)$$

となる。論理を思い出すと、

1. n 次の逆行列は、 n 個の連立方程式を解けばもとまる。
2. n 個の連立方程式を解くにはクラメールの公式をつかう。
3. 基底ベクトルを含んだクラメールの公式をつかうと、余因子が出てくる (余因子展開と同じ)。
4. 分母は共通なのでくくり出せて、結果、 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$ を得る。

もう一度具体的に2次正方行列の場合に見てみると、

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (543)$$

これは逆行列公式そのものである！

演習 例30、練習問題30を解いてみよ (教科書70ページ)

13.6 今回のまとめ

今回は行列式のより詳細な性質を見て、さらに適用することで行列式の計算を行ってきた。また、逆行列の定義を行った。

次回は講義内試験である。試験範囲は、予告の通り、第1回から第13回までである。模擬問題をよく解いて、しっかり勉強すること。

Notes

⁵⁷ どうやら 19 世紀の数学者カール・グスタフ・ヤコブ・ヤコビ (Carl Gustav Jacob Jacobi) が証明したようだ。

⁵⁸ 18 世紀のフランスの数学者

Part 14

第14回：講義内試験

講義内試験。範囲は第1回から第13回の内容すべて⁵⁹。授業アンケート。

Notes

⁵⁹ ベクトルの問題はサービスである。

Part 15

第15回: まとめと展望

今回は試験解説を通して今までのまとめを行う。また抽象ベクトル空間への導入を行う。

15.1 試験解説

一部解説。残りは解答例を後でアップロードします。まだ採点できていません。

15.2 抽象的な線形代数

ここからは、線形代数学の本領とも呼べる、抽象的な線形代数について概観する。内容については後期でしっかり学ぶ。線形代数Iの講義との関連をみるため、適宜演習を含む。

15.2.1 線形代数IIへ

線形代数Iの講義の最初で、次元の定義はベクトルの成分の数といった。これはあまり良くない定義である。なぜなら、以下のような場合を考えてみよう。今、2つのベクトル

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (544)$$

からなる集合、

$$V = \{\vec{u}, \vec{v}\} \quad (545)$$

を考えてみよう。Vは何次元のベクトルを持っていると言えるだろうか？

成分の数は4つあるが、1つは0であるため、これは4次元と言うより、3次元である。このような議論をするときには、「実質的に何次元か」という問題を考えたくなる。もともとの定義のように、直感的な定義を**素朴な定義**と呼んだりする⁶⁰。

他にも次のような問題がある。たとえば、2つのベクトル $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ があつたとき、2つを足すと

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{bmatrix} \quad (546)$$

となるのだった。また、スカラー倍も許されていた。

一方で、2つの行列、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (547)$$

があつたとき、2つを足すと、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, \quad (548)$$

ベクトルと同じく、スカラー倍も許されていた。

これらは共通の性質があるように思える。上手く計算規則をまとめておきたい。覚えるルールは少ないほうがいいからである。そこで抽象的にルールを決め、それをベクトルと呼ぶことで様々なものをベクトルとみなすことができる (実は関数すらベクトルとみなせる)。

一般に、数学では以下のアプローチを取ることが多いようである。

1. (素朴に定義する。例えば矢印としてのベクトル。線形代数I)
2. (素朴な定義から性質を色々と調べる。線形代数I)
3. 素朴な定義での不満なところを見直して定義できないかを考える。
4. 性質を条件に読み替え、要素に条件をつけ集合を定める。
5. 他の対象に性質を適用する。

15.2.2 一般化

遠山啓は、一般向けの書籍「連続と無限」[16]の中で以下のように述べている (超おすすめなので一読を勧める。僕も大学生の頃に読みました)。

このような推理のスイッチバックは数学者の常套手段であって、通常は「AはBなり」という命題を逆転して「BはAなり」という命

題に移るとい形式をとることが多い．第二の命題におけるAは名称はもとのAと同じだが，内容ははるかに豊富になっていることが多いわけである．19世紀において最も有能で最も活動的であった数学者ヤコービ（1804- 51）は「常に逆転せよ」と教えているくらいである．

スイッチバックとは、[図34](#)である。この精神に従ってベクトルを定義し直してみよう。



[図 34](#): スイッチバック。「A点からB点にいたり，今度はB点で反転してAの方向に逆戻りする．しかし，同じAに戻るのではなく，Aより高いA' という地点に達する．」[\[16\]](#)。

次の文を読むためには、^{たい}体という言葉が必要である⁶¹。体 (Field) とは、実数の一般化である。 K が^{たい}体と言われたら実数だと思って考えれば良い。複素数も体の一種であり、どちらでも成り立つことを言い分けるのが面倒なため、体ということにする。

次にベクトルを定めるが、そのために集合を先に定義しておく。

定義 (ベクトル空間) K を^{たい}体とする。空でない集合 V が K 上ベクトル空間 (線形空間, vector space) であるとは、 V 上に以下の8つを全てみたす演算 $+$ と K 倍が定義されている集合のことである。 $a, b, 1 \in K$ と $u, v, w \in V$ として、

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. $u + v = v + u$
3. $0 \in V$ が存在して、任意の $u \in V$ に対して、 $u + 0 = 0 + u = u$ となる。
4. 任意の $u \in V$ に対して、 $u + u' = u' + u = 0$ となる $u' \in V$ が存在する。
特にこの u' を $-u$ とかく。
5. $(a + b)u = au + bu$

$$6. a(u + v) = au + av$$

$$7. (ab)u = a(bu)$$

$$8. 1u = u$$

ただし、 $a, b \in K$ とした。また、上記の K を \mathbb{R} にしたとき、これを \mathbb{R} 上ベクトル空間 (実ベクトル空間) という。上記の K を \mathbb{C} にしたとき、これを \mathbb{C} 上ベクトル空間という。ベクトル空間の要素をベクトルと呼ぶ (ここでスイッチバックしている)。

さて、どうだろうか。まずもって気が狂ったかと思うくらいよくわからない文章である。ベクトルを抽象的に定義できたのだが、もはや矢印のイメージは消えてしまった (なので変数の上の矢印も外してしまった)。しかも小難しい割に当たり前のことを言っているように思える。これがむしろ大学数学 (現代数学) の入口である。明示的なルールを元にして、今までの素朴な定義では満足できなかった点を改良し、またベクトルと思えなかったものすらベクトルとみなすことで、ベクトルで考えた定理を別の対象にも適用できる。

このアプローチだと、

1. 今まで習ったこととの関係は?
2. 次元って何なの?

3. 行列は？

などの疑問が出てくる。もっともである。しかし、今の抽象的アプローチでもちゃんとベクトルの次元が定義できる。しかも考察対象を広げることできる。これは以下で見る。

定義(線形結合) n を正の整数とする。そして $v_1, v_2, \dots, v_n \in V, c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ とする。このとき、

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \tag{549}$$

をベクトルの線形結合と呼ぶ。

定義(一次従属・一次独立) n を正の整数とする。また $v_1, v_2, \dots, v_n \in V, c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ とする。このとき、

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0 \tag{550}$$

をみたま c_1, c_2, \dots, c_n の組が $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ のみのとき、 v_1, v_2, \dots, v_n は**一次従属** (Linearly dependent) であるという。

一次従属でないとき、 v_1, v_2, \dots, v_n は**一次独立** (Linearly independent) であるという。

一次従属であるというのは、ベクトルを矢印として見たときベクトルの先端が平面上にあることと言って良い。また一次独立であるとは、ベクトルを矢印として見たときベクトルの先端が平面上にない。

定義(基底) V を K 上ベクトル空間, $1 \leq n \leq \infty$ とする (すなわち無限も許す)。 $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ に対し, その任意の有限個が一次独立であり, かつ任意の $v \in V$ に対して, ある有限個の $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_l} \in V$ と $k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_l} \in K$ が存在して,

$$v = k_{i_1}v_{i_1} + k_{i_2}v_{i_2} + \dots + k_{i_l}v_{i_l}$$

とかけるとき, v_1, v_2, \dots, v_n を V の基底 (basis) という。

これは、標準的な基底ベクトルの定義の拡張になっている。なぜなら、直交性というキーワードなしに定義できている上、成分も明示されていない。この定義に基づくと、直交していないベクトルを持ってきても基底として扱うことができる。

線形代数Iで習ったことが役に立たないか、ということはまったくくない。たとえば、教科書の問題を見てみよう。

演習 例39、練習問題39を解いてみよう (96ページ)

演習 例40、練習問題40を解いてみよ (98ページ)

(おまけとして、例42、練習問題42 (103ページ) の様な問題もある。行列式は線形従属性の判定に使えることは覚えておくと良い。)

さて、これを用いて次元を定義しよう。

定義 (次元) ベクトル空間 V の基底の個数が $1 \leq n \leq \infty$ であるとき、 V の次元 (dimension) は n であるといい、

$$\dim V = n$$

とかく。これは V のなかのベクトルを集めてきたときに、取れる一次独立なベクトルの数の最大値に等しくなる。

面白いのは、ベクトルを上手い性質をもった集合としておき、一次独立を定義し、そのあと次元という概念が出てくる。

このように抽象的なベクトル空間を定める。嬉しいことは、ベクトルに対して成立する定理が他の対象にも使えることである。また別の対象では当たり前前に成り立っていることをベクトルに持ち込むことでよりいろいろなことが理解できる。

たとえば、行列は(ある種の)関数の表示の一種と思える。また双対ベクトル空間というものも導入でき、一気に見通しが良くなる。

他にも例えば n 次正方行列の集合は、ベクトル空間になる (興味あるものは確かめてみよ)。簡単にはスカラー倍や和を考えればわかるだろう。 n 次正方行列は矢印ではないが、矢印の様な性質を持つ。よくよく考えてみると、ベ

クトルの計算と行列の計算が似ているなど思っていたと思うが、これがきちんと定式化できたことになる。

一方で「抽象的でよくわからない」という意見ももつともである。そうときは、具体的な矢印としてのベクトルに戻ってきて、何が起こってるかを考えてみるべきである。

15.3 内積空間

さてベクトルを抽象的に定義した。これからも内積も抽象的に定義することができる。ここでは実ベクトル空間に限って説明しよう (つまり K は \mathbb{R} とする。複素の時は少し定義が異なる)。

ベクトル空間 V が内積空間であるとは、ベクトル空間 V の任意の2つ要素 (つまりベクトル) u, v と $c \in K = \mathbb{R}$ に対し、以下の性質を満たす2変数関数 $(u, v) \in \mathbb{R}$ が定義できるときを言う。

1. $(u + u', v) = (u, v) + (u', v)$
2. $(u, v + v') = (u, v) + (u, v')$
3. $(cu, v) = c \times (u, v)$
4. $(u, cv) = c \times (u, v)$
5. 任意の v に対して $(v, v) \geq 0$
6. 任意の0でない v に対して $(v, v) > 0$

これを内積の公理というが、こちらの中々に抽象的である。

今までのベクトルの内積がこれらの性質を持っていることも確かめることができる。これで嬉しいことはなんだろうか？ それは、 n 次正方行列のなすベクトル空間を内積空間にすることができること、などであろう (一般にベクトルっぽくないものをベクトルにして、内積を定める事ができる)。

フロベニウス内積 行列 $A = [a_{ij}]$ とするとき、 $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ を対角和(トレース)と呼ぶ。例えば、 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ なら $\text{tr}A = a + d$ である。

2つの2次正方行列 A と行列 B に対して、

$$(A, B)_F \equiv \text{tr}A^T B$$

を行列の内積(フロベニウス内積)と呼ぶ。またフロベニウスノルム(行列の「長さ」)を $|A|_F = \sqrt{(A, A)_F}$ とする⁶²。

演習1 フロベニウス内積をつかって

$$\cos \theta = \frac{(A, B)_F}{|A|_F |B|_F}$$

として、角度を定義する。このとき、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

に対し $\cos \theta$ を求め、 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 θ も求めよ。

演習2 フロベニウス内積が内積の公理を満たしているか確かめよ。

演習3 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ に対して、

$$(f, g)_H = \int_D f(x)g(x)dx \quad (551)$$

を**関数内積** (Functional inner product) と呼ぶ (ここで H はこの分野に重大な貢献をしたヒルベルト (Hilbert) の頭文字を取ったが一般的な記号ではない)。ここで D は関数の定義域とした。

関数内積の特殊な例として次を考えてみよう。ここで $D = \{x \mid -\pi \leq x \leq \pi\}$ として、三角関数に対する内積、

$$(\sin, \cos)_H = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, dx, \quad (\cos, \cos)_H = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx \quad (552)$$

を求めよ。また、この内積が内積の公理を満たしているか確かめよ。

補足 ノルムの定義は一意ではなく、多様である。行列ノルムに限ってもスペクトルノルム $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$ なども定義できる。ただし x はベクトルである。詳しくは、<https://w.wiki/Abnu> などを見ても良い。ベクトルのノルムについては、<https://w.wiki/Abnx>。関数の内積は、**フーリエ変換** (Fourier transform) という極めて重要なアイデアにつながる。

15.4 固有値・固有ベクトル

ここからは、素朴なベクトル・行列をつかって話を進めよう。天下りのだが、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (553)$$

という行列は、

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (554)$$

というベクトルにかけても、ベクトルを本質的に変化させない。まずこれがどういう意味か手を動かして調べてみよう。

演習1 $A\vec{u}$ 、 $A\vec{v}$ を計算し、ベクトルを求めよ。

演習2 それぞれ、長さはどれだけ変化するか求めよ。つまり、 $|\lambda| = |A\vec{v}|/|\vec{v}|$ のようにして倍率 λ を求めよ。

演習3 \vec{u} と $A\vec{u}$ を図示せよ。

演習 4 \vec{v} と $A\vec{v}$ を図示せよ。このように、行列 A にはそれに応じた固有のベクトルと固有の倍率 λ があることがある。

15.4.1 固有値・固有ベクトル

さて、適当な正方行列 A に対して、

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (555)$$

となるベクトル $\vec{v} \neq \vec{0}$ と複素数 λ ^{ラムダ} が存在することがある。 \vec{v} を固有ベクトル (eigenvector (アイゲンベクター)、これはドイツ語からの輸入である)、 λ を固有値 (eigenvalue (アイゲンバリュー)、これもドイツ語からの輸入である)、という。

これをみたく λ とベクトルを求めるには、 E を単位行列として

$$A\vec{v} - \lambda E\vec{v} = \vec{0}, \quad (556)$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}, \quad (557)$$

を解けばよいが、より効率的に解く方法がある。まず、 $(A - \lambda E)$ は逆行列を持ってはいけない。なぜなら、持っているとは仮定すると、 $(A - \lambda E)^{-1}$ を両辺にかけて $\vec{v} = \vec{0}$ を得るからであり、これは $\vec{v} \neq \vec{0}$ に矛盾する。

なので $(A - \lambda E)$ は逆行列を持たないので、

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (558)$$

となれば良い。ここから λ が定まる。つまり A が2次の正方行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ならば、

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \quad (559)$$

つまり

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (560)$$

となる⁶³。これは λ の2次方程式なので、複素数であれば必ず解ける(2つ出てくる)。 n 次正方行列でも同様に n 次方程式なので、複素数の範囲で解をさがすと、必ず解ける(**代数学の基本定理**, Fundamental theorem of algebra)。すなわち、固有値 λ が求まることになる。重解になるかは非常に重要である。また、固有ベクトル \vec{v} は固有値 λ から求めることができるがここでは割愛する。

演習 1(固有値) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ に対して固有値 λ を $\det(A - \lambda E) = 0$ を解くことで求めよ(2つある)。

演習2 (固有ベクトル) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値2つを $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ とする (λ_1 は小さい方の固有値とする)。 $(A - \lambda_1 E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{0}$ を解くことで、 x, y を求めよ。ただし1パラメータが決まらないので、パラメータを t とすること (t を除いた部分が固有ベクトルになっている)。

演習3 (固有ベクトル) λ_2 に対する固有ベクトルを求めよ。

固有ベクトルを使うと行列を分解することができることを以下で見る。これは後期以降にならう数理情報系すべての科目で重要である。

15.5 行列多項式

行列は加減乗ができるので多項式を作ることができる。たとえば A を正方行列として、

$$f(A) = A^2 + 2A - E \quad (561)$$

のような行列に対する2次関数を作ることができる。これは普通の2次関数の拡張であり、たとえば $A = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$ の様な対角行列であった場合には、

$$f(A) = \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (562)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^2 + 2x_1 + 1 & 0 \\ 0 & x_2^2 + 2x_2 + 1 \end{bmatrix} \quad (563)$$

となっている。しかし一般には非対角要素もあるため、より複雑な関数を表していることになる。このときには、対角化という操作が役立つことになる。

15.6 対角化

今見たように、行列の関数を考えると、かなり複雑であり、ちょっとわけが分からない。そこで都合の良い以下のようなものがないかと、考えてみる。2次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (564)$$

が対称行列 P をもちいて、

$$A = P^{-1}DP \quad (565)$$

と書けないかと考える。ただし $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ である。また λ_1 と λ_2 は固有値である。

さて、この D と A は実質的に同じ情報をもっている。しかも対角行列なので掛け算が非常に簡単である。

演習1 D^2 と D^3 を求めよ。

演習2 A^2 を D と P を用いて表せ。 $P^{-1}P = E$ を用いよ。ただし E は単位行列である。

こういった P が存在する条件も知られており、 A が対称行列であれば必ず存在する。 A が対称行列でなくても都合の良い P があることがある。このような正方行列を対角成分に固有値の入った行列に変換することを**対角化**(Diagonalization)という。

15.7 スペクトル分解

前節では、行列の関数を定義した。他にも A を正方行列として、

$$e^A, \log A, \sin A, \quad (566)$$

の様な関数を考えることもできる。この様なものを**行列関数** (Matrix function) という。 e^A はテイラー展開から定義可能だが、 $\log A$ はそうはいかない。

このときに使えるのが**スペクトル分解** (Spectral decomposition) である。これは、行列 A が**正規行列** (正則行列とは別物) であるときに使え、たとえば対称行列は正規行列である⁶⁴。1変数関数 $f(x)$ がわかっているとき、行列版の関数 $f(A)$ は、 n 次正方行列 A の固有値 λ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$ は固有値を区別するラベル) を用いて

$$f(A) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) P_k \quad (567)$$

と書く。ただし、

$$[P_k]_{ij} = (\vec{e}_k)_i (\vec{e}_k)_j \quad (568)$$

である。また、 $(\vec{e}_k)_i$ は規格化した固有ベクトル \vec{e}_k の*i*番目の成分を表す⁶⁵。たとえば、行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (569)$$

の固有ベクトルは $\lambda = -1$ と $\lambda = 3$ に対するものはそれぞれ、

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (570)$$

であったが、適当に係数をかけて大きさを1にしたのが規格化した基底ベクトルであり

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (571)$$

である。このとき行列 P_1 は、 $[P_1]_{ij} = (\vec{e}_1)_i(\vec{e}_1)_j$ から

$$[P_1]_{11} = (\vec{e}_1)_1(\vec{e}_1)_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}, \quad (572)$$

$$[P_1]_{12} = (\vec{e}_1)_1(\vec{e}_1)_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (-1) = -\frac{1}{2}, \quad (573)$$

$$[P_1]_{21} = (\vec{e}_1)_2(\vec{e}_1)_1 = \frac{1}{2} \times (-1) \times 1 = -\frac{1}{2}, \quad (574)$$

$$[P_1]_{22} = (\vec{e}_1)_2(\vec{e}_1)_2 = \frac{1}{2} \times (-1) \times (-1) = \frac{1}{2}, \quad (575)$$

つまり

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (576)$$

P_2 も同様である。今、基底ベクトルから作った P_k は $P_k^2 = P_k$ かつ $P_k^\top = P_k$ となる**射影行列** (Projection matrix) になっている⁶⁶。これにより、行列関数を部分空間 (部分集合でかつ、ベクトル空間) ごとに作ることができる。

演習 1 P_1^2 を計算し、 $P_1^2 = P_1$ を確かめよ。

演習 2 \vec{v} から \vec{e}_2 そして P_2 を構成し、 $P_2^2 = P_2$ を確かめよ。

演習 3 上記の $f()$ を恒等写像にとるとき、

$$A \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^2 \lambda_k P_k \quad (577)$$

が成り立つはずである。これをスペクトル分解 (Spectral decomposition) というが、これを確かめよ。ただし $\lambda_1 = -1$ と $\lambda_2 = 3$ そして

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (578)$$

だったことを思い出そう。

演習 4 $f(x) = \cos x$ と

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (579)$$

を用いて

$$\cos(A) = \cos \left(\sum_{k=1}^2 \lambda_k P_k \right) \quad (580)$$

を整理せよ。

ここでは略解を示す。

演習 2 $P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

演習 3 略。

演習 4 $\cos(A) = \sum_{k=1}^2 P_k \cos(\lambda_k)$ 。射影行列の性質 $P_k^2 = P_k$ が効く。

15.8 線形代数の先

ここでは線形代数学の応用先を見渡しておこう。決して理解は必要がないが、役に立つし必須であることを理解してほしい。

15.8.1 古典力学・振動波動

古典力学においても線形代数は必須である。ここに書ききれないほど使用事例がある。例えば、バネの連成振動や電磁波の伝播などは線形代数の知識を使わなければ理解できない。一般相対論にももちろん線形代数は必須である。

15.8.2 量子力学・場の量子論

量子力学は、大雑把に言って線形代数といっても良い。量子力学では習慣的にベクトルを ブサイ・ケット $|\psi\rangle$ と書くことがある。そして量子力学の方程式であるシュレーディンガー方程式は、

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (581)$$

とかける。ただし \hat{H} はエネルギーを表す演算子(行列)であり、ハミルトニアンと呼ばれる。 E はエネルギーであり、固有値である。量子力学の数多くの

問題は、固有値と固有ベクトルを求める操作に帰着される。固有ベクトル $|\psi\rangle$ は量子状態と呼ばれる。

15.8.3 ニューラルネットなどの機械学習

現在の人工知能関連技術(例えばChatGPT等)は、線形代数が基礎となっている。微分可能な非線形な関数(例えば)を $\sigma(x)$ とする。ニューラルネットの入力は(単語や画像をベクトル化した)ベクトルデータなので、それを \vec{x} とするとき、ニューラルネットとは、

$$f(\vec{x}) = \sigma(W_2\sigma(W_1\vec{x} + \vec{b}_1) + \vec{b}_2) \quad (582)$$

のような形で書ける関数である。行列 W_i とベクトル \vec{b}_i ($i = 1, 2$)は、任意パラメータを成分にもつ。これを調整するとほしい機能が実現され、これを学習という。ニューラルネットとは行列とベクトル、そして多変数関数で構成される合成関数である。

15.8.4 微分方程式、関数解析

微分方程式とは、関数とその微分が関係する方程式であり、自然科学や工学の多くの現象を数学的にモデル化するための重要なツールである。例えば、物

体の運動を記述するニュートンの運動方程式や、電気回路の動作を示すマクスウェルの方程式などがある。これらの方程式を解くためには、線形代数の知識が必要不可欠である。

まず、線形代数は微分方程式の解法において基本的な役割を果たす。例えば、線形常微分方程式 (ODE) の解は、特性方程式の固有値と固有ベクトルを求めることで得られる。この固有値問題は線形代数の基本的な問題の一つであり、行列の対角化やジョルダン標準形を用いて解決することができる。

また、偏微分方程式 (PDE) においても、線形代数の概念は重要である。例えば、ラプラス方程式や波動方程式などの解を求める際、フーリエ変換を用いる方法がある。フーリエ変換を行うことで、偏微分方程式は線形代数的な行列の問題に帰着し、数値的に解を求めることが容易になる。

関数解析も線形代数と密接に関連している。関数解析では、無限次元のベクトル空間 (関数空間) を扱い、その空間上での作用素の性質を研究する。例えば、ヒルベルト空間やバナッハ空間といった関数空間における内積やノルムといった概念は、線形代数におけるベクトル空間と類似している。また、自己共役作用素やコンパクト作用素のスペクトル理論は、有限次元の行列に対する固有値問題の一般化である。

これらのことから、線形代数の知識は微分方程式や関数解析の理解と応用において極めて重要である。線形代数を通じて、複雑な現象を数理モデルとして捉え、効率的に解を求めることが可能になるのである。

15.8.5 幾何学

微分幾何学 (Differential geometry) でも、基底や次元の概念は重要である。微分幾何学は、曲がった空間を取り扱う数学的な理論である。例えて言うなら地球の表面を考えてみよう。このとき、球面であるため、世界地図を歪みなく書くことができない (たとえばメルカトル図法)。しかし、地図帳のように区分に分割しておけば歪みのない地図を構成することができる。ここで地図帳の1ページ1ページは小さい地域の地図しか載っていないが、張り合わせると全体を復元できる。これが微分幾何学における多様体の考え方であり、地図帳の1ページ1ページがベクトル空間に相当する⁶⁷。足し合わせや引き算ができるベクトルの空間を地図帳の1ページだと思い、それを上手く張り合わせて全体の曲がったもの (多様体と呼ばれる) を再現する。微分幾何学は、一般相対性理論の理論的枠組としても使われる。

ホモロジーというトポロジー (Topology, 位相幾何学ともいう) の量では、線形代数、とりわけ基底に対する線形独立性が極めて重要である。

15.8.6 確率分布を用いた予測

確率分布を用いた予測は、未来の出来事を統計的に予測するための強力な手法である。この手法は、特定の状態から次の状態への遷移確率を考慮するこ

とで、システムの将来の挙動を予測する。代表的な方法の一つにマルコフ連鎖がある。

マルコフ連鎖は、ある状態から次の状態への遷移が、現在の状態のみに依存し、過去の状態には依存しないという特性を持つ確率モデルである。これを用いることで、システムが時間とともにどのように変化するかを予測することができる。

ここでは、カリフォルニアの天気をモデル化するために、2状態のマルコフ連鎖を例に考えてみる。状態1を「晴れ」、状態2を「雨」とする。この天気モデルでは、今日の天気に基づいて明日の天気を予測する。例えば、遷移確率行列を以下のように設定する。

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \quad (583)$$

ここで、行列の各要素 P_{ij} は、状態 j から状態 i への遷移確率を示す。例えば、今日が晴れである場合 (状態1)、明日も晴れである確率は0.8、雨である確率は0.2である。同様に、今日が雨である場合 (状態2)、明日晴れである確率は0.4、雨である確率は0.6である。

初期状態が晴れ (状態1) であると仮定すると、初期ベクトル \vec{v}_0 は以下のよ

うになる。

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (584)$$

1日後の天気の状態分布は次のように計算できる。

$$\vec{v}_1 = P\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad (585)$$

さらに、2日後の天気の状態分布は以下のように計算される。

$$\vec{v}_2 = P\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 \\ 0.2 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.72 \\ 0.28 \end{pmatrix} \quad (586)$$

つまり、このモデルでは2日後の天気は晴れ72%、雨28%であるといえる。このように、マルコフ連鎖を用いることで、未来の状態の状態分布を逐次的に計算することができる。これにより、例えばカリフォルニアの天気を日々予測することが可能となる。

また、マルコフ連鎖は、天気予測だけでなく、株価の変動や遺伝子配列の解析、自然言語処理 (GPT 等) など、さまざまな分野で応用されている。このような確率的手法は、不確実性を伴うシステムの予測において非常に有用である。

15.9 まとめ

ここまで、線形代数学Iの復習と線形代数学II、その先に関連する事柄に触れた。特にベクトル空間、線型独立、固有値、対角化を取り扱った。

線形代数学I (や、微積等も)、大学4年間で使う非常に重要な内容なのでしっかり身につけてほしい。

付録

ここでは本編にでてこないおまけ的なことを並べておく。基本的には僕の備忘録ではある。興味のあるものは読んだり調べたりしてみると良い。

A 記号

A.1 集合

1. \emptyset : 空集合。任意の集合は空集合を部分集合として含む
2. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ 。集合の包含をあらわす「 \subset 」
3. $1 \in \{1, 2, 3\}$ 。集合の要素をあらわす「 \in 」

A.2 数の集合

数の集合は、特別な集合として以下の記号を使うことが多い。

1. \mathbb{N} : 自然数 (Natural numbers)。 $\{1, 2, 3, \dots, \}$ とする。つまり 0 を入れない。

2. \mathbb{Z} : 整数数 (Natural numbers)。自然数の集合 \mathbb{N} に0、および負の数 $\{-1, -2, \dots\}$ を加えたもの。記号は、ドイツ語の数^{ツァーレン}を意味する *Zahlen* から。
3. \mathbb{Q} : 整数 (Rational numbers)。整数の比で書ける数。
4. \mathbb{R} : 実数 (Real numbers)。定義は難しいので割愛。整数係数の方程式の解になる数や、点列の極限で定義できる数を集めたもの。
5. \mathbb{C} : 複素数 (Complex numbers)。定義は難しいので割愛。整数係数の方程式の解になる数を構成できる。

A.3 行列の集合

本編では出てこないが、以下のような行列の集合を考えることもある。

1. $GL(n; \mathbb{C})$: $n \times n$ の複素数を要素として持つ行列の内、逆行列を持つ行列の集まり。General linear の略。
2. $GL(n; \mathbb{R})$: $n \times n$ の実数を要素として持つ行列の内、逆行列を持つ行列の集まり。General linear の略。
3. $SL(n; \mathbb{C})$: $n \times n$ の複素数を要素として持つ行列の内、行列式が1でかつ、逆行列を持つ行列の集まり。Special linear の略。

4. $SL(n; \mathbb{R})$: $n \times n$ の実数を要素として持つ行列の内、行列式が1でかつ、逆行列を持つ行列の集まり。Special linear の略。

B 代数学の基本定理

「高校数学の美しい物語」<https://manabitimes.jp/math/799> にある定理の証明が良さそうなので、ここでは簡単版を見ておく。

最高次数が $n = 1, 2, 3, \dots$ である以下の関数を考える。

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (587)$$

ここで仮定より $a_n \neq 0$ である。代数学の基本定理とは、「この関数が $f(x) = 0$ となる $x \in \mathbb{C}$ を重複をゆるすと n 個持っている」ということである。この事実は、代数学の基本定理と呼ばれている。

B.1 何が嬉しいのか

さて、この定理の何が嬉しいのだろうか？ それは、 $x \in \mathbb{C}$ で必ず解き切れるという保証である。例えば2次関数以上では複素数が必要となる⁶⁸。つまり、実数では解くことができず、数を拡張する必要があるのである。では50次方

程式を考えたとき、数をどこまで拡張がいるのだろうか？ 100次では？ これに答えるのが代数学の基本定理であり、複素数で十分である。複素数の係数を持つ n 次方程式は、複素数で解を尽くせ、それは n 個である。

B.2 証明(簡単版)

ここから証明を試みよう。まず、

$$g(x) = |a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \quad (588)$$

という絶対値を取った関数を考えてみると、 $|x| \rightarrow \infty$ では $a_n x^n$ が支配的になり、 $a_n x^n$ そして、 $g(x)$ はいくらでも大きくなる (x が原点から離れると、どんどん大きくなり、 $g(x)$ は発散する)。よって、ある大きな正の実数 C を適当に決めると、 $|x| > C$ のときには $g(x) > g(0)$ とできる。

$-C \leq x \leq C$ という閉区間をとる。すると最小値はかならずあるので (有界閉区間の連続関数は最大値・最小値を持つ)、 $g(x)$ の最小値を与える x を x_1 として、それが $-C \leq x \leq C$ の内側にあるとして良い。

ここで $g(x_1) = 0$ を示すために背理法を用いる。 $g(x_1) \neq 0$ を仮定する。 ϵ は正の小さな実数とする。そして $x = x_1 + \epsilon$ とおいて $g(x)$ に代入する。すると ϵ をうまくとると、 $g(x_1)$ より小さくできることが示せる。最小値であることと矛盾する。なので背理法により、 $g(x_1) = 0$ となる。すると因数定理によ

り、 $f(x) = (x - x_1)f_{n-1}(x)$ という形に因数分解できることになる。 $f_{n-1}(x)$ は、 $n - 1$ 次の多項式である。

同様に繰り返せば、

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \times \cdots \times (x - x_n) \quad (589)$$

という形にできる。

B.3 解があることと解の公式があることは異なる

ここで、解があることと解の公式があることは異なることに注意しよう。解の公式とはなんだろうか。解の公式は、一般の n 次方程式の解を係数の加減乗除と n 乗根の有限回の組み合わせで表現する式のことである。アーベル・ルフィニの定理という定理があって、主張はそれは $n \geq 5$ を超える n 次方程式には解の公式が無い、ということである。

B.4 多重線型、交代性、行列式

本編でも紹介した通り、 n 次元列ベクトルが n 本あったとき、多重線型で交代性(列の入れ替えで符号がでる)をみたす関数は、行列式の定数倍と等しい、ということを示してみよう。

ただし問題を具体的に見るために2次正方行列としよう。つまり行列 A を

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \end{array} \right] = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2] \quad (590)$$

というように2つの列ベクトルを並べたものとして、それぞれのベクトルを引数とする関数を考える。まず2次正方行列に対する行列式の定義は、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)}, \quad (591)$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (592)$$

であったこれを導く。

ベクトル2つを引数にとる関数 $f(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ を考える。多重線型なので、

$$f(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a}') = f(\vec{a}, \vec{a}') + f(\vec{b}, \vec{a}'), \quad (593)$$

$$f(\vec{a}, \vec{a}' + \vec{b}) = f(\vec{a}, \vec{a}') + f(\vec{a}, \vec{b}), \quad (594)$$

$$f(\vec{a}, c\vec{a}') = cf(\vec{a}, \vec{a}') \quad (595)$$

となる。また交代性とは、

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = -f(\vec{b}, \vec{a}) \quad (596)$$

である。

さて、証明してみよう。ベクトルを基底ベクトルで展開する。

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^2 a_{1i} \vec{e}_i = a_{11} \vec{e}_1 + a_{12} \vec{e}_2, \quad (597)$$

$$\vec{a}_2 = \sum_{j=1}^2 a_{2j} \vec{e}_j = a_{21} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 \quad (598)$$

ただし、

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (599)$$

である (実はこの証明には具体形は必要ない)。これを関数 $f(\vec{u}, \vec{v})$ に代入すると、

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = f\left(\sum_{i=1}^2 a_{1i} \vec{e}_i, \sum_{j=1}^2 a_{2j} \vec{e}_j\right) \quad (600)$$

ここで多重線型性を繰り返して使うと、和を外に出すことができ、

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{1i} a_{2j} f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \quad (601)$$

となる。さて、 $f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ は $i, j = 1, 2$ は4つの組み合わせを持つ。

1. $f(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$
2. $f(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
3. $f(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$
4. $f(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$

しかしながら、交代性より引数が等しい2つは0となる (入れ替えで符号がでるが、異なる符号をつけて等しい数は0しかない)。そして2つの入れ替えが符号を除いて等しいため、実質的に1つの数しかない。この定数を c とおくと、

1. $f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 0$
2. $f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = c$
3. $f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = -c$

$$4. f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0$$

つまり、 $f(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ は

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = a_{11}a_{21}f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_{11}a_{22}f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ + a_{12}a_{21}f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_{12}a_{22}f(\vec{e}_2, \vec{e}_2), \quad (602)$$

$$= a_{11}a_{21} \times 0 + a_{11}a_{22} \times c + a_{12}a_{21} \times (-c) + a_{12}a_{22} \times 0, \quad (603)$$

$$= c(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (604)$$

となる。これは定数 c を除いて2次正方行列の行列式にほかならない。よって多重線型性と交代性を満たす様な関数 $f(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ は、定数倍を除いて行列式になる。

C トレース

本編では行列式がでてきたが、トレースと呼ばれる概念もある。 $N \times N$ 行列の正方行列 A を考え

$$A = [a_{ij}] \quad (605)$$

とする。このとき、

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^N a_{ii} \quad (606)$$

をトレース (対角和、シュプール) と呼ぶ。対角和はその名の通り行列の対角成分を足したものをいう。行列はいくつかの不変量を持つが、トレースはその中でも重要なものの1つである。

D 固有値・固有ベクトル

$N \times N$ 行列の正方行列 A を考える。このとき、 N 次元ベクトルを \vec{v} 、複素数 λ とするとき、

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (607)$$

を満たす事がある。この式を固有方程式という。 λ は固有値、 \vec{v} は固有ベクトルと呼ばれる。

A が対称行列の場合、固有値は必ず実になり、異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交するように取れる。

固有値を求めるには、単位行列 E_N を利用し固有方程式を変形すると、 $\lambda\vec{v} = \lambda E_N\vec{v}$ より

$$(A - \lambda E_N)\vec{v} = \vec{0} \quad (608)$$

を得る。 $A - \lambda E_N$ は逆行列が存在するとすると、 $\vec{v} = (A - \lambda E_N)^{-1}\vec{0}$ が成立するが、これはおかしい。そのため $A - \lambda E_N$ は逆行列はもたず、

$$\underbrace{\det(A - \lambda E_N)}_{=\Phi(\lambda)} = 0 \quad (609)$$

を満たす。 $\Phi(\lambda) = 0$ は λ の N 次方程式であり、 λ が複素数なので必ず解を N 個持つ (代数学の基本定理)。

D.1 行列の対角化

n 次正方行列 A に対して固有値が $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ともとまっていたとき、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (610)$$

となるような直交行列 P が存在することがある。この様な形にできることを対角化可能であるといい、そうでないときを対角化不可能という。対称行列は対角化可能であることが知られている。右辺は、 $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ のように書くことがある。

E ケーリーハミルトンの定理

ケーリーハミルトンの定理とは、 n 次正方行列 A に対する固有方程式 $\Phi(\lambda) = 0$ 、これは λ の n 次式、の λ に形式的に A を代入すると、

$$\Phi(A) = O \quad (611)$$

となる事実である。

対角化可能な A に対して事実を示しておこう。 A は対角化可能なので

$$A = UDU^{-1} \quad (612)$$

となる直交行列 (もしくはユニタリ行列) U が存在する。 D は固有値が対角にならんだ対角行列

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (613)$$

である。固有多項式 $\Phi(\lambda)$ は、 n 次なので、

$$\Phi(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0 \quad (614)$$

と書くことができる。

$D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$ に注意すると、

$$\Phi(D) = D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_1D + c_0E = O \quad (615)$$

が成立することが確かめられる。 $D = U^{-1}AU$ を用いると、

$$(U^{-1}AU)^n + c_{n-1}(U^{-1}AU)^{n-1} + \cdots + c_1U^{-1}AU + c_0E = O \quad (616)$$

を得る。さらに

$$(U^{-1}AU)^k = U^{-1}A \underbrace{UU^{-1}}_{=E} \underbrace{AUU^{-1}}_{=E} \cdots \underbrace{UU^{-1}}_{=E} AU = U^{-1}A^kU \quad (617)$$

を用いると、

$$U^{-1}A^nU + c_{n-1}U^{-1}A^{n-1}U + \cdots + c_1U^{-1}AU + c_0E = O \quad (618)$$

となる。両辺の左から U そして右から U^{-1} を掛けて $UEU^{-1} = E$ と $UOU^{-1} = O$ を用いると、

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0E = O \quad (619)$$

を得る。この左辺は固有多項式に形式的に A を代入したものとなっている。

F 行列の不変量

<https://akinomyoga.github.io/memo/math/matrix-invariants.html> などを参照のこと。

G ゲルシュゴリンの定理

$n \times n$ 行列 A を考える。成分は a_{ij} である。ゲルシュゴリン円の半径を

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| = R_i \quad (620)$$

とする。ゲルシュゴリンの定理は、「複素平面上の a_{ii} を中心、半径 R_i というゲルシュゴリン円板の内側には少なくとも1つの固有値がある」ということを主張する。

証明 A の固有値 λ とそれに属する固有ベクトル \vec{v} を取り、固有ベクトル \vec{v} のうち絶対値が最大となる成分の番号 $i \in \{1, \dots, n\}$ ($|v_i| = \max_j |v_j|$) を選ぶと

$|v_i| > 0$ である(さもなくば $\vec{x} = \vec{0}$ である)。

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (621)$$

i 番目の成分に着目すると

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j = \lambda v_i \quad (622)$$

である。対角成分に着目すると

$$a_{ii}v_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}v_j = \lambda v_i \quad (623)$$

を得る。

$$\sum_{j \neq i} a_{ij}v_j = \lambda v_i - a_{ii}v_i \quad (624)$$

v_i で割って絶対値を評価する。

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{v_j}{v_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} \left| a_{ij} \frac{v_j}{v_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = R_i. \quad (625)$$

H スペクトル分解

n 次正方行列 A を考える。このとき、固有方程式

$$Av_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (626)$$

を見る。固有ベクトルを \vec{v}_i とするとき、

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i^\top \quad (627)$$

をスペクトル分解という。

ここで \otimes は、2つのベクトル $\vec{u} = [u_i]$ と $\vec{v} = [v_j]$ に対して、

$$\vec{v}_i \otimes \vec{v}_i^\top = u_i v_j \quad (628)$$

という行列を定めるための操作である (テンソル積と呼ばれる)。

I 特異値分解

任意の行列は、2つのユニタリ行列 (直交行列の複素数版) を用いて対角化できる。例えば正方とは限らない行列を A とするとき、 $A^\top A$ は対称な正方行

列となる。このとき、ユニタリー行列 U を用いて対角化することができ

$$U^{-1}A^{\top}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (629)$$

とかける。 AA^{\top} も対称な正方行列となるため対角化することができ、

$$V^{-1}AA^{\top}V = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (630)$$

となる。

つまり、

$$V^{-1}AU = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots) \quad (631)$$

のように定義することができる。この右辺の要素を特異値といい、この分解を特異値分解 (SVD, Singular value decomposition) という。

特異値分解はスペクトル分解の一般化としてみることができる。

J 行列指数関数

指数関数はテイラー展開を用いて定義することができ、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (632)$$

と定義できる。ここで x を正方行列 A に置き換えたとき、

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \quad (633)$$

を行列指数関数という。

K リー群

ここではリー群と呼ばれる特別な集合を紹介する。

K.1 パウリ行列, $\mathfrak{su}(2)$

3つの 2×2 の特別な行列があり、

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (634)$$

である。この3つは量子力学、量子コンピュータ、クォータニオン、場の量子論の文脈で非常に活躍する。これはリー代数と呼ばれるものの一種であり、

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sum_{k=1}^3 i\epsilon_{ij} \sigma_k \quad (635)$$

ただし $[A, B] = AB - BA$ という交換子である。また ϵ_{ij} は反対称テンソルであり $\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = 1$ であり、 $\epsilon_{21} = \epsilon_{32} = \epsilon_{13} = -1$ 、そして他の組み合わせはゼロである。

このパウリ行列を基底として、 a_i を実数としたとき

$$a_i \sigma_i \quad (636)$$

で張られるベクトル空間を $\text{su}(2)$ と呼ぶ。リー代数とよばれるものの一種になっている。

K.2 リー群

リー群を行列指数関数をつかって

$$g(a_1, a_2, a_3) = \exp\left[i \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i\right] \quad (637)$$

と書いたとき、 $g(a_1, a_2, a_3)$ がなす空間(集合)をSU(2)のリー群という。リー群はSU(2)以外にも存在し、分類もなされている。

L ペロン=フロベニウスの定理

$N \times N$ 行列の正方行列、特に成分がすべて正の行列を考える。このとき、成分がすべて正である唯一の固有ベクトルが存在しその固有値は1である。

M ノルム

M.1 ベクトルのノルム

ベクトルに対しては、長さを内積を通じて定義した。長さという概念を拡張するとノルムというものが得られる。

例えば、 n 次元ベクトル \vec{v} に対しては、

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (638)$$

を定義した。これは一般に l_2 ノルムと呼ばれ、

$$\|\vec{v}\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (639)$$

とも書く。別のノルムとしては絶対値ノルム

$$\|\vec{v}\|_{l_1} = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (640)$$

があり、これは一般に l_1 ノルムと呼ばれる。一般化したノルムは、 l_p ノルムと呼ばれ、

$$\|\vec{v}\|_{l_p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |v_i|^p} \quad (641)$$

となる (p には非負整数が入る⁶⁹)。また極限として ∞ ノルムもあり、

$$\|\vec{v}\|_{l_\infty} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |v_i| \quad (642)$$

である (絶対値最大の成分を取り出す)。一般にノルムとは長さのことだと思っ
て良い。

M.2 行列のノルム

行列の大きさも定めることができる。いちばん有名なノルムはフロベニウスノルムと呼ばれ、 n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2} \quad (643)$$

と定義するものである。他にも最大値ノルムなどがある。

N 逆行列と余因子行列

N.1 余因子展開

行列を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (644)$$

としたとき、行列式は

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (645)$$

とかける。1列目に着目し、そこで展開すると

$$\det A = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31} \quad (646)$$

を得る。一般の k 列の場合でも、

$$\det A = a_{1k}\tilde{a}_{1k} + a_{2k}\tilde{a}_{2k} + a_{3k}\tilde{a}_{3k} \quad (647)$$

$k = 1, 2, 3$ である。

一方で余因子行列は、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \quad (648)$$

と、余因子を要素に持ちつつも、転置を取っていることに注意せよ。

N.2 逆行列と余因子行列

i, j に対する余因子 \tilde{a}_{ij} とは、行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、 i 行 j 列を除いた A の行列式である。余因子行列 \tilde{A} とは、 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]^T$ である、右辺は転置を取ってあることに注意せよ。

具体的に3次正方行列 A に対して $\tilde{A}A$ を考えてみる。掛けた結果を $B = [b_{ij}]$ として

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (649)$$

B の i, j 成分では、 $n = 3$ として

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \tilde{a}_{ki} \quad (650)$$

である (行列積の定義と転置の定義を用いた)。最後の等号は、要素同士の積の入れ替えの可換性から従う。和を明示的に書くと

$$b_{ij} = a_{1j} \tilde{a}_{1i} + a_{2j} \tilde{a}_{2i} + a_{3j} \tilde{a}_{3i} \quad (651)$$

具体的には、2つの場合に分けられる。

1. $i = j$ (B の対角要素) のとき、

$$b_{ii} = a_{1i}\tilde{a}_{1i} + a_{2i}\tilde{a}_{2i} + a_{3i}\tilde{a}_{3i} \quad (652)$$

これは行列式の行での余因子展開になっているので

$$b_{ii} = a_{1i}\tilde{a}_{1i} + a_{2i}\tilde{a}_{2i} + a_{3i}\tilde{a}_{3i} = \det A \quad (653)$$

となる。つまり、 B は、

$$B = \begin{bmatrix} \det A & * & * \\ * & \det A & * \\ * & * & \det A \end{bmatrix} \quad (654)$$

という形なる。そして $*$ は以下で決定する。

2. $i \neq j$ (B の非対角要素) のときを見てみよう。

$$b_{ij} = a_{1j}\tilde{a}_{1i} + a_{2j}\tilde{a}_{2i} + a_{3j}\tilde{a}_{3i} \quad (655)$$

具体的に例えば、 $i = 1$ 、 $j = 2$ として

$$b_{12} = a_{12}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{31} \quad (656)$$

となる。これは同じ列を持つ行列に対しての展開になっている、すなわち、

$$\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (657)$$

の1列目の展開になっている（よく余因子の定義を確認して考えてみよ）。そして同じ列をもつ行列の行列式は0となる。

よって上記をまとめると、

$$b_{ij} = \begin{cases} \det A & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (658)$$

を得る。すなわち

$$\tilde{A}A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = \det A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \det A \quad (659)$$

となる。つまり、

$$\tilde{A}A = E \det A \quad (660)$$

を得る。

ここで $\det A$ について場合分けをする。

case 1: $\det A \neq 0$ (つまり A が正則) このときには、両辺に右から A^{-1} を形式的に掛け、両辺を $\det A$ で割り、右辺と左辺を入れ替えると、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} \quad (661)$$

を得る。

case 2: $\det A = 0$ (つまり A が非正則、特異) このときには、 $E \det A = 0$ なので

$$\tilde{A}A = 0 \quad (662)$$

を得る。つまり、その A に対してゼロ行列でない、ゼロ因子があることになる。

0 群論

空でない集合 G を考える。要素間の演算を \star とする。 G の要素を g_1, g_2, g_3 とし、以下をみたすとき、 (G, \star) の組を群という。

1. $g_1 \star g_2 \in G$ (演算に対して閉じている)
2. $(g_1 \star g_2) \star g_3 = g_1 \star (g_2 \star g_3)$
3. $e \in G, g \star e = e \star g = g$
4. $g \star g' = e, g' = g^{-1}$

積の演算が明らかなきときには、 G を群と呼んだりもする。

置換は数の入れ替えであることを学んだが、実は置換は群をなす。これは、入れ替え操作に単位元(入れかえないという操作)や、逆操作(逆に入れ替える操作)があることから分かるであろう。この群を**対称群** (Symmetric group) という。またこの部分群を置換群ともいう。

0.1 行列群と表現

逆行列を持つ正方行列は、行列積に対して群をなす。これを行列群という。たとえば $n \times n$ の実数の要素を持つ正則行列がなす群は、 $GL(n; \mathbb{R})$ と呼ばれる。

複素の要素を保つ場合には、 $GL(n; \mathbb{C})$ と呼ばれる。

$O^T = O^{-1}$ となる行列は直交行列と呼ばれるがこれも群をなす。これは直交群と呼ばれる。複素版は、ユニタリー群と呼ばれる。特殊ユニタリー行列 (行列式が1) に限っても群になっており、特殊ユニタリー群と呼ばれる。

一般の群から、行列群へ準同型写像があるとき、それを群の表現という。このときの準同型写像とは、

$$\rho(g_1 \star g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2) \quad (663)$$

のように群の積 \star を行列積として構造を保つ写像である。もちろん行列群から行列群への準同型写像も作ることができる。群の準同型写像には、準同型定理と呼ばれる非常に重要な定理があるがここでは割愛する。

P 線形方程式と正則化

連立方程式は、一般に**線形方程式** (Linear equation) と呼ばれる。 A は $n \times n$ の行列、 \vec{b} は右辺のベクトル、 \vec{x} は求めるべきベクトルとしておく。このとき

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (664)$$

としたとき、この方程式は $\det A \neq 0$ のときには、

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad (665)$$

となる。

誤差関数 (Error function、または損失関数、Loss function) を E としたとき、

$$E = \frac{1}{2}|A\vec{x} - \vec{b}|^2 \quad (666)$$

\vec{x} が線形方程式の解のときに E は最小化される。誤差関数は、

$$E = \frac{1}{2}(A\vec{x} - \vec{b}) \cdot (A\vec{x} - \vec{b}), \quad (667)$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{x}^\top A^\top - \vec{b}^\top)(A\vec{x} - \vec{b}), \quad (668)$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{x}^\top A^\top A\vec{x} - \vec{x}^\top A^\top \vec{b} - \vec{b}^\top A\vec{x} + \vec{b}^\top \vec{b}) \quad (669)$$

工事中

Q 線形代数の歴史

ここに簡単にではあるが線形代数の歴史をまとめておく [14].

表 1: 歴史

世紀	年	2024 年から何年前?	誰	何をした?	関連
紀元前 40 世紀	-4000	6024	バビロニア	2 変数の 1 次方程式系 (2x2)	行列式
紀元前 2 世紀	-200	2224	中国	3x3 の解法、九章算術	行列式
紀元前 2 世紀	-200	2224	中国	行列の表記初出 (単なる略記として登場)	行列と線形変換
17 世紀	1683	350	関孝和	解伏題之法にて (世界に先駆けて) 行列式を導入 (だが西洋数学には伝播せず)	行列式
17 世紀	1684	340	マクローリン	行列式を最初にまとめた文献「A treatise of algebra」	行列式
17 世紀	1693	331	ライプニッツ	行列式の定義と導入、方程式の近代的理論。	行列式
18 世紀	1750	274	クラメール	クラメールの公式 (nxn 系の一般解)	行列式
18 世紀	1772	252	ラプラス	ヴァンデルモンドの結果を拡張して n x n 行列の行列式を余因子展開した	行列式
19 世紀	1801	223	ガウス	Determinant を二次形式の判別式の意味で使用。	行列式
19 世紀	1801	223	ガウス	線形変換で行列式が 1 の物があることを証明	行列と線形変換
19 世紀	1811	213	ガウス	掃き出し法	行列式
19 世紀	1815	209	コーシー	行列式を体系的にまとめ、定義を与えた。det AB = det A det B など証明	行列式
19 世紀	1831	193	ガウス	ベクトルの先駆的な仕事 (複素数からの 2 次元ベクトルの導入)	ベクトル空間
19 世紀	1843	181	ケイリー	行列式を幾何学に応用	行列式
19 世紀	1843	181	ハミルトン	4 元数から、3 次元ベクトルを導入	ベクトル空間

世紀	年	2024 前?	から何年	誰	何をした?	関連
19世紀	1843	181		ハミルトン	4次元以上のベクトルを導入	ベクトル空間
19世紀	1843	181		ケイリー	高次元ベクトルを導入	ベクトル空間
19世紀	1844	180		ケイリーとグ レイヴズ	八元数を導入。ベクトル空間への 第一歩	線形独立性・基底・ 次元
19世紀	1844	180		グラスマン	n次元空間、部分空間、線形変換、 線形独立、次元などの導入。線形 代数の最初?	ベクトル空間
19世紀	1850	174		ケイリー	m x n 行列を導入	行列と線形変換
19世紀	1858	174		シルベスター	行列 (matrix) という用語を導入、 スカラー倍や逆行列なども導入	行列と線形変換
19世紀	1858	166		ケイリー	ケイリー・ハミルトンの定理を証 明 (証明は n=2,3. 一般も予想)	行列と線形変換
19世紀	1858	166		ケイリー	行列を1つの文字で書く。それま では要素別には書いていた。	行列と線形変換
19世紀	1862	162		ハミルトン	ケイリー・ハミルトンの定理を証 明 (証明は n=4)	行列と線形変換
19世紀	1868	156		ワイエルシュ トラス	ジョルダン標準形の発見	行列と線形変換
19世紀	1870	154		デデキント	行列式を整数論に応用	行列式
19世紀	1870	154		パース	多元環の要素を線形結合として形 式的に書いた。線形結合の導入	線形独立性・基底・ 次元
19世紀	1888	136		ペアノ	ベクトル空間の導入、現代的な次 元の定義等 (長い間無視された)	ベクトル空間
20世紀	1903	121		クロネッカー とワイエルシ ュトラス	行列式を公理的に定義した	行列式
20世紀	1918	106		ワイル	(ペアノの仕事を知らず?) ベクト ル空間の公理的な定式化	ベクトル空間
20世紀	1920	104		バナッハ	ベクトル空間の現代的な定義	ベクトル空間
20世紀	1930	94		ファン・デル・ ヴェルデン	エミー・ネーターのやり方 (加群) に従ってベクトル空間を導入	ベクトル空間

関孝和は、算聖とよばれた天才である⁷⁰。細かいことは、Wikipedia<https://w.wiki/3d4J>にあるとおり。お墓は、https://www.kanko-shinjuku.jp/spot/c004-vi-80/article_348.htmlにあるとおり東京にあるので訪れてみるべし。

R ページサマリー

- 第01回: 線形代数学への導入: 43 ページ
- 第02回: 行列の演算: 32 ページ
- 第03回: 正方行列と逆行列、正則行列: 29 ページ
- 第04回: 連立方程式と行列: 15 ページ+7 ページ
- 第05回: 連立一次方程式の解法1: 34 ページ
- 第06回: 連立一次方程式の解法2:
- 第07回: 試験
- 第08回: ふりかえり
- 第09回: 正方行列と逆行列2: 32 ページ
- 第10回: 置換と互換、行列式: 29 ページ
- 第11回: 行列式1: 39 ページ
- 第12回: 行列式2: 24 ページ
- 第13回: 行列式の性質: 27 ページ
- 第14回: 講義内試験: 0 ページ
- 第15回: まとめ

Notes

⁶⁰ 例えば、「素朴」な例として素朴集合論がある。

⁶¹ K はドイツ語の Körper (体) の略である。

⁶² 極化恒等式があるため、ノルムを定義しておけばそれを与える内積は誘導される。

⁶³ $f(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ を見てみると、 $a + d$ はトレース、 $ad - bc$ は行列式になっている。また、 $f(A) = O$ となる (ケーリー・ハミルトンの定理)。

⁶⁴ 例えば <https://manabitimes.jp/math/2847> 等参照のこと。

⁶⁵ 普通は、規格直交化しておく。

⁶⁶ 複素の場合は、エルミート共役[†]に条件を書き換える。

⁶⁷ 正確にはユークリッド空間であるが、細かいことはちょっと忘れておく。

⁶⁸ 正確には3次関数の解の公式には複素数が必要となる

⁶⁹ l_0 ノルムはゼロでない成分の数を返す。

⁷⁰ 関孝和は、存在が異世界転生もののチートっぽい。まず、和算に変数の概念を導入。鎖国していたのに、西洋に先駆けて余因子展開、行列式、微積分を見つけるなど、化け物である。円周率の計算も当時、世界で最高精度だったようだ。

索引

- 1 次結合, [168](#)
- Affine transformation, [124](#)
- Associativity, [194](#)
- Augmented coefficient matrix, [132](#)
- Augustin Louis Cauchy, [271](#)
- Carl Gustav Jacob Jacobi, [360](#)
- Cartesian coordinate system, [31](#)
- Coefficient matrix, [132](#)
- Cofactor, [306](#), [312](#), [315](#)
- Cofactor expansion, [315](#), [322](#)
- Column vector, [28](#)
- Cosine similarity, [45](#)
- Cramer's rule, [281](#), [351](#)
- Cross product, [41](#), [297](#)
- Determinant, [233](#), [256](#), [264](#), [271](#)
- Diagonal elements, [51](#)
- diagonal matrix, [73](#)
- Diagonalization, [387](#)
- Differential geometry, [396](#)
- Dimension of a vector, [29](#)
- Dirac's bracket symbol, [120](#)
- Discriminant, [283](#)
- Dot product, [41](#)
- Echelon form, [141](#)
- eigenvalue, [381](#)
- eigenvector, [381](#)
- Elementary matrix, [140](#)
- Elementary row operations, [138](#)
- Error function, [429](#)
- Exterior algebra, [302](#)
- Field, [368](#)
- Fourier transform, [378](#)

Full rank, [204](#)
Functional inner product, [377](#)
Fundamental theorem of algebra, [382](#)
G. Leibnitz, [271](#)
Gauss' elimination, [168](#)
Group, [194](#)
Group theory, [194](#)
Hadamard matrix, [119](#)
Inner product, [40](#)
Inverse matrix, [103](#)
Jacobian, [283](#)
Kronecker delta, [100](#)
Laplace expansion, [315](#)
Length of vectors, [42](#)
Linear algebra, [25](#)
Linear equation, [428](#)
Linearly dependent, [210](#), [370](#)
Linearly independent, [206](#), [370](#)
Loss function, [429](#)
Matrix, [47](#), [264](#)
Matrix function, [388](#)
Matrix vector product, [69](#)
multilinearity, [334](#)
Off diagonal elements, [51](#)
Orthogonal matrix, [118](#)
Outer product, [41](#)
Permutation, [233](#), [236](#)
Pierre-Simon Laplace, [322](#)
Projection matrix, [390](#)
Qubit, [120](#)
Rank, [142](#)
Rectangular matrix, [51](#)
Regular matrix, [110](#), [344](#)
Ring, [195](#)
Rotation matrix, [74](#)
Row reduction, [168](#)

Row vector, [29](#)

Sarrus' rule, [275](#), [291](#)

Scalar matrix, [72](#)

Scalar multiplication, [52](#)

Skew symmetric matrix, [117](#)

Spectral decomposition, [388](#), [391](#)

Square matrix, [51](#), [98](#)

Superposition, [120](#)

Symmetric group, [304](#), [427](#)

Symmetric matrix, [117](#)

Topology, [396](#)

Transpose, [113](#)

Transpose of matrix, [113](#)

Transposed matrix, [113](#)

Transposing symbol, [30](#)

Transposition, [233](#), [250](#)

Unit matrix, [71](#), [99](#)

Vandermonde's determinant, [345](#)

Vector, [28](#)

vector space, [368](#)

Wronskian, [283](#)

Zero divisor, [89](#)

Zero matrix, [54](#)

アダマール行列, [119](#)

アフィン変換, [124](#)

カーネル, [212](#)

カール・グスタフ・ヤコブ・ヤコビ, [360](#)

ガウスの消去法, [168](#)

キュービット, [120](#)

クラメールの公式, [281](#), [351](#)

クロス積, [41](#)

クロネッカーのデルタ, [100](#)

ケーリー・ハミルトンの定理, [433](#)

コサイン類似度, [45](#)

コーシー, [271](#)

サラスの公式, [275](#), [291](#)

スカラー倍, 52
スカラー行列, 72
スペクトル分解, 388, 391
ゼロ因子, 89
ゼロ行列, 54
ディラックのブラケット, 120
デカルト座標系, 31
デターミナント, 233, 256, 271
トポロジー, 396
トレース, 433
ドット積, 41
ピエール＝シモン・ラプラス, 322
ファンデルモント行列式, 345
フルランク, 204
フーリエ変換, 378
ブロック行列, 57
ベクトル, 28
ベクトルの内積, 40
ベクトルの外積, 41, 297
ベクトルの成分, 29
ベクトルの次元, 29
ベクトルの長さ, 42
ベクトルの間の角度, 45
ヤコビアン, 283
ライプニッツ, 271
ラプラス展開, 315
ランク, 142
ロンスキアン, 283
ヴァンデルモント行列式, 345
一次従属, 370
一次独立, 370
一次独立である, 206
一次独立でない, 210
互換, 233, 250
代数学の基本定理, 382
位相幾何学, 396
体, 368
余因子, 306, 312, 315
余因子展開, 315, 322

係数行列, 132
列ベクトル, 28
判別式, 155, 283
単位行列, 71, 99
回転行列, 74
固有ベクトル, 381
固有値, 381
基本行列, 140
外積代数, 302
多重線型性, 334
対称群, 304, 427
対称行列, 117
対角化, 387
対角行列, 73
対角要素, 51
射影行列, 390
小行列, 57
微分幾何学, 396
拡大係数行列, 132

掃き出し法, 168
損失関数, 429
核, 212
正則行列, 110, 344
正方行列, 51, 98
正規行列, 388
歪対称行列, 117
環, 195
直交行列, 118
矩形, 51
素朴な定義, 365
結合法則, 194
線形代数学, 25
線形方程式, 428
線形空間, 368
線形結合, 168
置換, 233, 236
群, 194
群論, 194

行の基本変形, 138
行ベクトル, 29
行列, 47, 264
行列の転置, 113
行列ベクトル積, 69
行列式, 233, 256, 264, 271, 433
行列式の値が不変, 334
行列式の図的な意味, 285
行列式の性質, 334
行列関数, 388
誤差関数, 429
転置, 113
転置行列, 113
逆行列, 103
重ね合わせ, 120
量子ビット, 120
関数内積, 377
階数, 142
階段行列, 141

非対角要素, 51

参考文献

- [1] 石村 園子. やさしく学べる線形代数. 共立出版.
- [2] 齋藤 正彦. 線型代数入門. 東京大学出版会.
- [3] 梁 成吉. キーポイント: 行列と変換群. 岩波書店.
- [4] 三宅 敏恒. 入門線形代数. 培風館.
- [5] 石井 俊全. 1冊でマスター 大学の線形代数. 技術評論社.
- [6] 川久保 勝夫. 線形代数学. 日本評論社, 新装版 edition.
- [7] 志賀 浩二. 線形代数 30講. 朝倉書店.
- [8] 志賀 浩二. 線形という構造へ. 紀伊國屋書店.
- [9] 結城 浩. 数学ガールの秘密ノート/ベクトルの真実. SBクリエイティブ.
- [10] 結城 浩. 数学ガールの秘密ノート/丸い三角関数. SBクリエイティブ.
- [11] 結城 浩. 数学ガールの秘密ノート/行列が描くもの. SBクリエイティブ.

- [12] 結城 浩. **数学ガールの秘密ノート/式とグラフ**. SBクリエイティブ.
- [13] 薩摩 順吉 and 四ツ谷 晶二. **キーポイント線形代数 (理工系数学のキーポイント 2)**. 岩波書店, 1992.
- [14] I. クライナー. **抽象代数の歴史**. 日本評論社, April 2011.
- [15] 和達 三樹. **微分・位相幾何 (理工系の基礎数学 10)**. 岩波書店, 1996.
- [16] 啓 遠山. **無限と連続—現代数学の展望**. Number 96 in 岩波新書 青版. 岩波書店, 東京, 5 1952.