

相対論的流体方程式の数値的解法 II¹

水田晃

高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 理論センター

要旨：前回は基礎方程式である相対論的流体方程式から出発し，音波モード，エントロピーモードという特性速度で運ばれる特性量の考え方を導入した．同じ族の特性線が集まることによって衝撃波面など不連続面が出現することを示した．今回はこの考え方を基に隣接する計算セル間で Riemann 問題を考えることによって，数値流束を評価し，流体方程式の時間発展解を得る，いわゆる Godunov タイプのスキームに関して解説をしていく．今回は数値解法を中心となる数値流束に関して相対論的流体方程式に適用されたいつかの方法について紹介する．

7 数値計算スキーム

流体方程式は非線型な双曲形連立偏微分方程式である．特に圧縮性流体を数値計算で取り扱う場合には，衝撃波面などの不連続面を再現しなくてはならない．数値的振動を避け安定性も要求される．これまでに数多くのスキームが考案されており，それぞれ長所と短所がある．計算グリッドの取り方には

- 物質と共に計算グリッドが動く Lagrange 法
- 計算グリッドを空間に固定して計算する Euler 法

がある．Lagrange 法は 1 次元的な運動では Euler 法と遜色がなく，接触不連続面²が自動的に追えるなどの長所がある．しかし，多次元問題では流体が渦を生成したりすることによってグリッドが複雑に回り込み煩雑になり，re-map と呼ばれる計算グリッドを再定義するような作業が必要になってしまう．空間多次元の問題を考えるためには，扱いが比較的簡単な Euler 法について考える．

数値流体計算のスキームは主に航空宇宙工学の分野で非相対論的流体方程式を数値的に解くために考案され改良が加えられてきた．前回示したように圧縮性の流体では衝撃波面が出現するためにごくわずかではあるが粘性を導入する必要がある．隣接する計算セル³間の圧力勾配が大きい場所に陽的

¹本連載は前回と今回の 2 回の予定であったが，ページ数の都合上数値解法部分を 2 度に分け全 3 回とさせていただきます

²種類の物質の境界面．粘性が無い場合，両者は混じり合わず時間発展した後も界面が定義できる．

³計算グリッドによって区切られた区間を本稿では (計算) セルと呼ぶ．1 次元問題では線分，2 次元問題では四角形，3 次元問題では直方体となる．

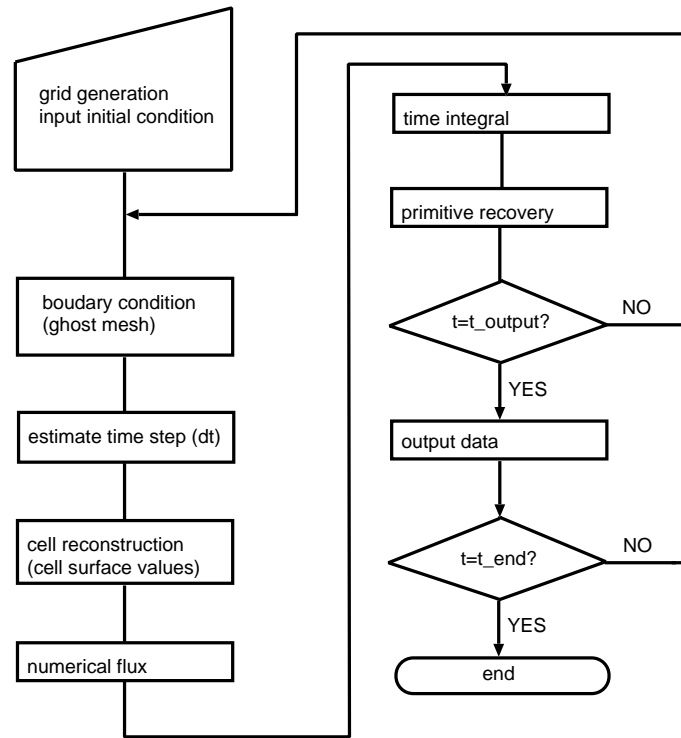


図 6: 流体コードのフローチャート. 時間精度 1 次の場合.

に粘性を導入するスキームが黎明期から考案されている．基礎方程式にはない数値的な粘性であるため，人工粘性と呼ばれるものである．

相対論的流体方程式に対しても 1970 年代から Wilson (1972) らによって人工粘性による手法がとられていたが数値振動がおきやすかった．Koide et al. (1996), Koide (2003) は，2 段階 Lax-Wendroff 法に人工粘性を加えた一般相対論的磁気流体コードを開発し，90 年代後半からブラックホール周りの降着円盤の数値シミュレーションを行ったが，ローレンツ因子に関しては 4 ~ 5 程度のものまでしか扱えなかった．人工粘性は圧力勾配，速度勾配の大きさに応じて拡散的な項を加え衝撃波面を形成させるものである．流体方程式は波の伝搬方程式であるため，一度生じた数値的な振動はなかなか減衰しない．数値振動を抑えるために大きな人工粘性を用いると不連続面は拡散的になり，高ローレンツ因子を伴うような現象では衝撃波面での大きな圧力勾配が再現できずこのような問題を扱えなかった．本稿では現在広く使われている近似 Riemann 解法を用いた数値計算法を中心に述べる．

詳細を述べる前に具体的なフローチャートは図 6 に示したようになる．流体方程式に従って時間発展を考えるとということは初期値境界値問題であるため，始めに計算グリッドの生成，初期条件の入力の後，境界条件を与えながら時間ステップを進めていくルーチンに入る．途中，必要に応じてデータアウトプットが入り，終時刻に達すると計算は終了する．計算スキームに大きく依存する部分はルーチン中の“cell reconstruction”，“numerical flux”の部分である．数値解法の内容を説明した後，この 2 つのステップに対するいくつかの数値計算スキームを紹介する．

ここで，いくつか教科書，review 論文を挙げておく．

圧縮性流体に関する数値計算法の教科書

1. 流体力学の数値計算法，藤井孝藏，東京大学出版会 (1994)
(1,2 刷の errata - <http://flab.eng.isas.ac.jp/member/fujii/kaisetsu.htm>)
2. 数値解析の基礎—偏微分方程式の初期値問題 – 山口昌哉，野木達夫，共立出版 (1969)，復刊版 (2009)
3. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Randall J. LeVeque, Cambridge University Press (2002)
4. Numerical Computation of Internal and External Flows I, II, Charles Hirsch, Butterworth-Heinemann (vol. I 2nd ed.) (2007), Wiley (vol. II 1st ed.) (1990)
5. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction, Eleuterio F. Toro , (3rd Ed.), Springer (2009)

相対論的流体の数値解法に関する Review 論文

6. Numerical Hydrodynamics in Special Relativity, Jose Maria Marti and Ewald Müller, Living Reviews in Relativity, vol. 6, no. 7 (2003)
7. Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity, Jose A. Font, Living Reviews in Relativity, vol. 11, no. 7 (2008)

8 方程式の差分化

時間ステップのルーチン部分を概観するため，天下りのではあるが差分式を考える．簡単のため空間 1 次元で考える．前回示したように流体方程式は粘性，熱伝導を無視すれば，相対論的か非相対論的かにかかわらず保存形で書き下すことができ，連立非線型偏微分方程式である．流体方程式において，時間偏微分，空間偏微分にかかる項をまとめてベクトル形式で定義すると，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (88)$$

と，かける．ここで， \mathbf{u} , \mathbf{f} は縦ベクトルであり，それぞれ，

$$\mathbf{u} \equiv (\rho W, \rho h W^2 v, \rho h W^2 - p - \rho W)^T, \quad (89)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) \equiv (\rho W v, \rho h W^2 v^2 + p, \rho h W^2 v - \rho W v)^T, \quad (90)$$

と定義され，それぞれ保存量ベクトル (あるいは状態ベクトル)，流束ベクトルと呼ぶ⁴．式 (88) において，ベクトルの第一成分が連続の式 (式 (8))，第二成分が運動量保存の式 (式 (9))，第三成分がエネルギー保存の式 (式 (11)) に対応する．

\mathbf{f} の各成分は \mathbf{u} の各成分で陽に書き下せないが， \mathbf{u} , \mathbf{f} は共に基本量 $w(\rho, p, v)$ の関数であり，陰的に関係付けることができる．

⁴添字の T は転置行列であることを示す

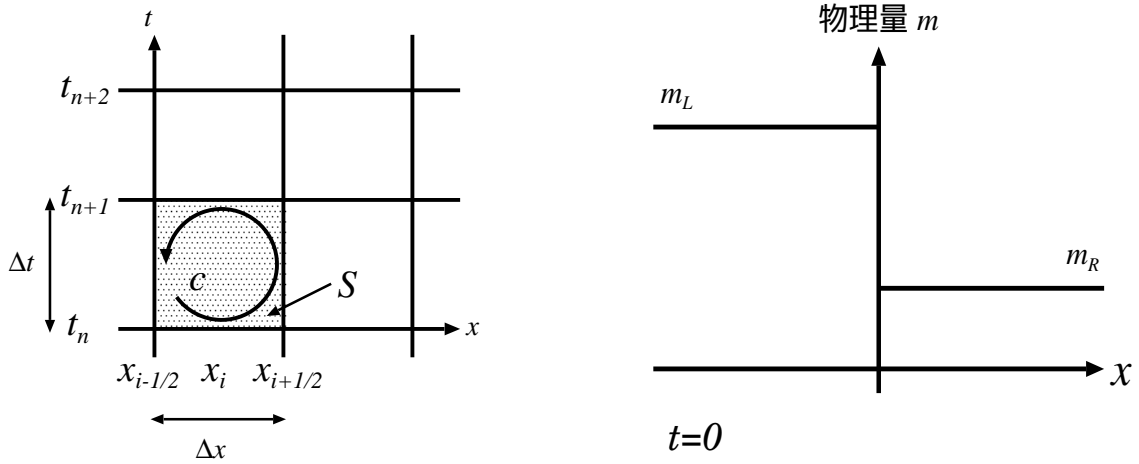


図 7: 計算格子と積分経路 (左), Riemann 問題における初期値 (右)

流体を離散化された時間空間領域で数値的に扱う為、方程式の差分を取る。空間偏微分に対して、前進、後退あるいは中心差分などが考えられるが、微分形の差分式を取ると、不連続面では偏微分が発散してしまうため先にあげたように衝撃波面が存在する所で特別な扱いが必要となってくる。以下のように不連続面を含んでも成り立つ積分系での差分式を考える。

式 (88) の積分形の差分をとる。すなわち、2次元の時空間平面の任意の閉曲面で面積分し、Stokes の定理を用いて以下のような線積分に書き直す。

$$\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) dS = \oint_C (\mathbf{u} dx - \mathbf{f} dt) = 0. \quad (91)$$

ここで、積分区間を図 7 左のようにとると、

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2} - \tilde{\mathbf{f}}_{i-1/2}), \quad (92)$$

のような差分式を得る。 $\Delta x, \Delta t$ はそれぞれ、空間グリッド幅、時間ステップ幅である。本稿ではグリッド間隔が等間隔の場合に限って議論する。また、 Δt は後に述べる CFL 条件等から決められる。 \mathbf{u}_i^n の上付添字は時間を表し、下付添字は空間を表す。 \mathbf{u}_i は積分形の差分式をとる過程でも分かるように計算セル内の平均量として定義されている。つまり離散化する前の分布 $u(x, t)$ を用いて、

$$\mathbf{u}_i^n \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t = t_n) dx, \quad (93)$$

である。また、 $\tilde{\mathbf{f}}$ についている添字の $_{i+1/2}$ は、計算格子 (セル) と計算格子の間の面 (セル表面) での値であることを表す。また、 $\tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2}$ は計算格子を出入りする流束を表し、一般に数値流束 (numerical flux) と呼ばれている。 $\tilde{\mathbf{f}}_{i-1/2}, \tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2}$ を時間 n ステップ目の量で評価できれば、式 (92) の右辺は全て時間 n ステップ目の量で書き下すことができ、これは時間的陽解法である。本稿ではその場合に限って議論する。

圧縮性の流体方程式を保存形の積分で差分した場合の解法では、計算領域全体で空間積分した場合物理的保存量が丸め誤差の範囲内での保存が保証される。すなわち、

$$\sum_i \mathbf{u}_i^{n+1} \Delta x = \sum_i \left[\mathbf{u}_i^n \Delta x - (\tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2} - \tilde{\mathbf{f}}_{i-1/2}) \Delta t \right] = \sum_i \mathbf{u}_i^n \Delta x - (\tilde{\mathbf{f}}_{\text{imax}+1/2} + \tilde{\mathbf{f}}_{\text{imin}-1/2}) \Delta t. \quad (94)$$

和は計算領域全計算セルに対して行ない、 $i = \text{imin}, \text{imax}$ 番目のセルは計算領域の両端である。右辺の最後の2頁は Δt の間に左右の境界から計算領域にそれぞれ流入、流出する保存量であり、その影響を除けば、式(92)は丸め誤差の範囲内で保存量(質量、運動量、エネルギー)の保存が保証される差分式となっていること示している。また、積分形の差分式は Rankine-Hugoniot の関係式を満たすことから衝撃波面を正しく扱えるという利点がある。

差分式に現れる数値流束 \tilde{f} をどのように評価するかが問題となる。解析的、あるいは近似的 Riemann 解を用いて数値流束を評価するのが Godunov タイプのスキームである。Riemann 問題とは初期値問題の一つであり、図7右に示すように初期に2つの物理的状態があった場合の時間発展を考えるような問題である。流体方程式では衝撃波管問題として知られ、非線形方程式を解くことにより解析解が得られる(非相対論的流体に対しては文献 Toro (2009)、相対論的流体に対しては文献 Thompson (1986); Martí and Müller (1994) を参照)。ここで考えなくてはならない問題は大きく2つ挙げられる。

1. 数値流束を評価する際の Riemann 問題の初期値をどのように取るか

2. Riemann 問題の解として数値流束をどのように求めるか

スキームによって数値解法に異なる点ができるのは主にこの2点であり、それぞれフローチャートの“cell reconstruction”, “numerical flux” の部分に相当する。それぞれに数多くのスキームが提案され、その組み合わせが用いられている。計算コスト、計算精度、応用計算での数値的安定性などに一長一短があり一概にどのスキームがよいというわけではない。

9 数値流束

Godunov タイプのスキームではセル表面において Riemann 問題を考えることによって、その表面を通過する流束を求める。その求め方には解析解を用いる Godunov 法の他、近似 Riemann 解を用いる方法があり、それらにはここで紹介するような Roe スキーム、Marquina の流束式、HLL 流束、HLLC 流束、Central スキーム、MUSTA 流束などが挙げられる。以下では順にこれらのスキームの概念、数値流束の導出法を紹介する。

9.1 Godunov 法

Riemann 問題の解析解を用いて数値流束を計算するのが Godunov 法 (Godunov, 1959) である。オリジナルのスキームでは各計算セル内では一定のプロファイルを考える。隣接する部分では物理量に跳びがある階段となり、各セル表面において、Riemann 問題を考え、その $\Delta t > 0$ 後の解からセル表面を通過する質量、運動量、エネルギー流束を計算し、数値流束とする。初期条件によって解には波の順序として図8のような4つのパターンが考えられる⁵。接触不連続面を挟んで左右に衝撃波あるいは膨張波が走る。膨張波は流体が断熱的にゆるやかに広がっていく時に生じ、図にあるように複数の特性線が発生する。

⁵片側、あるいは両側が真空の場合は除く

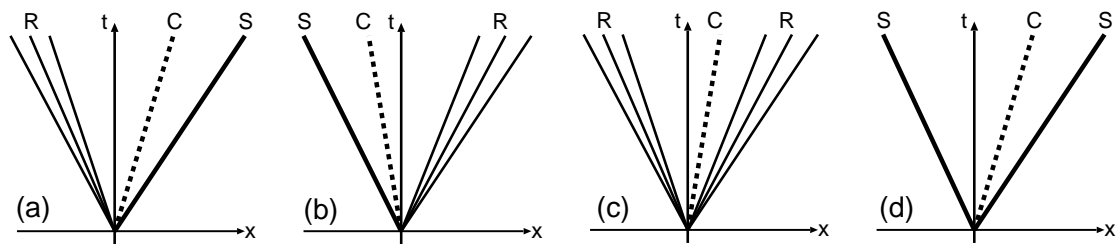


図 8: Riemann 問題における現実的に起こり得る解のパターン．太線は衝撃波 (S:Shock wave), 点線は接触不連続面 (C: Contact discontinuity), 細線族は膨張波 (R:Rarefaction fan) . (a) 左側に高圧物質, (b) 右側に高圧物質があり逆側に衝撃波を形成しながら膨張するような場合, (c) 左側は左向き, 右側は右向きに速度をもって膨張していくような場合 . (d) 左側は右向き, 右側は左向きに速度を持ち, 正面衝突によって左右に衝撃波が走る . 系全体が右, あるいは左に速度を持っていると, 各波全てが初期の不連続面の右側, 左側に生じる場合もありうる .

初期条件として左右の状態を与えると, どのパターンの解となるかは判定できる . 流体方程式における Riemann 問題の解は解析解が存在するが全体の空間プロファイルは単純には求まらず収束計算を要する .

例えば, 図 9 左のように初期に高圧の状態 1, 低圧の状態 5 があり, 図 9 右のように $t > 0$ で右側に衝撃波, 左側に膨張波が生じる場合は衝撃波面の速度を仮定すると Rankine-Hugoniot の関係から, 状態 4 の物理量が衝撃波面の速度の関数として記述される . 接触不連続面と衝撃波面間の物理量は一定となる . もう一方が膨張波の場合, その先端の位置は初期の C_+ の特性速度で決まる . そこから断熱的曲線を考える . 仮定した衝撃波の速度を変えながら, 両側から内へ解をつないでいき, 圧力, 速度一定の条件が満たされるような解を探すことになり, 繰返し計算が必要となる . このような問題は特に衝撃波管問題とも呼ばれ, 円筒中に薄膜で区切って 2 状態をおき, 薄膜を電気火花等で破り再現するような実験も行われる . 図 9 は密度の概要を示したもので, 図 9 右の 1,5 の状態が初期の状態を保っている部分である . 2 の領域は断熱的に膨張している部分, 接触不連続面と衝撃波面に囲まれた 4 の部分は, 初期に右の状態であった物質が衝撃波によって圧縮された物質である . 3 の部分は断熱膨張の部分と接触不連続面をつないでいる部分である .

Riemann 問題の解が求まると, セル境界での $t > 0$ の物理量が得られる . この物理量を用いて流束を求め, それを数値流束とするのが Godunov 法である . 初期不連続面であるセル表面での解を w_a とすると⁶,

$$\tilde{f}_{\text{Godunov}} = f(w_a), \quad (95)$$

である . 相対論的流体方程式に対しては, Martí and Müller (1996) によって導入された . 1 次元コードは Martí and Müller (2003) で公開されている .

⁶方程式はスケール変換 $(x, t) \rightarrow (Ax, At)$ に対して不変であり, 解の形は自己相似解と呼ばれる x/t によらない形でかかれる . 初期不連続面は $x = 0$ であり, $\Delta t > 0$ の解の値は $x = 0$ においては Δt に依らない

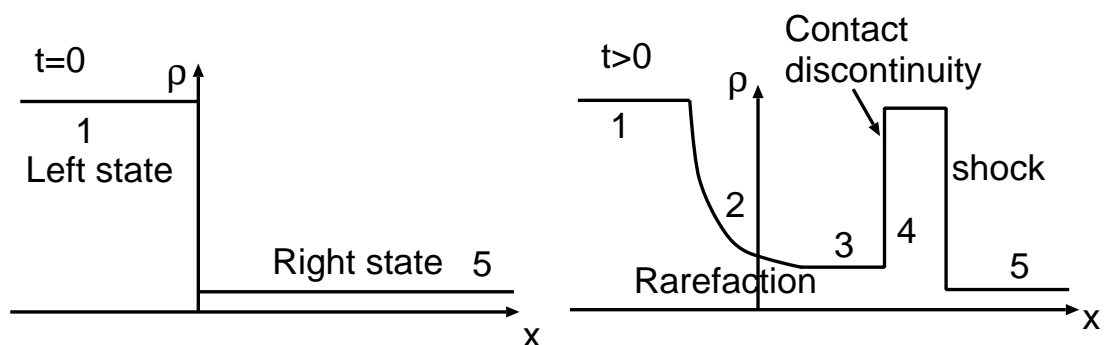


図 9: 衝撃波管問題の初期値と解．初期に状態 1,5 の 2 状態があり (左), $t > 0$ で 5 つの状態となる (右)．状態 1,5 は初期状態のまま波による変化が到達していない部分, 状態 2 は断熱的に膨張している部分 (Rarefaction), 接触不連続面と衝撃波に囲まれた状態 4 は初期の右の状態 (状態 5) が衝撃波による圧縮で掃き集められた部分, 状態 3 は状態 2,4 をつなぐ部分である．状態 3,4 の間では密度の跳びは許されるが, 速度, 圧力は一定となる．

9.2 近似 Riemann 解法

Godunov 法は解析解を用いるため精度はよいが, 解を求めるために繰り返し計算をしなければならず計算時間がかかるという欠点がある⁷．また, 各時間ステップで Riemann 問題を考えその解から数値流束を求めるということ自体が近似であるために, Riemann 解自身にそれほどの精度は要求されない．そこで, Riemann 問題を比較的計算時間をかけずに近似的に計算する方法が考え出された．以下では, 近似 Riemann 解法を用いて数値流束を求めるスキームについて述べ, いくつかのスキームに関して説明する．

これらの手法は 1990 年代になって相対論的流体方程式の数値解法として適用されはじめ, 相対論的流体方程式を保存量でかいた時の複雑な流束 Jacobian 行列に対しての左右固有ベクトルの導出, 保存量から基本量の導出などの困難が克服され, 広く用いられるようになった．そして, ローレンツ因子が数百の流体や強い衝撃波を含むような流体に対しても非常に精度良く解けるようになった．

9.3 Roe スキーム

Roe スキームは Roe (1981) によって非相対論的流体方程式の数値解法として提案されたもので方程式を局所的に線形化し, 風上差分の考えを用いて数値流束の評価式を与える．風上差分の概念を理解するには線形移流方程式の場合を考える．すなわち,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (96)$$

ただし c は定数． $f = cu$ として, 積分形の差分式を考えると

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{i+1/2} - \tilde{f}_{i-1/2}). \quad (97)$$

⁷Godunov 法が提案され 1990 年代あたりまでは計算コストが気にされていたが, 近年は計算速度が向上し, 解の精度と計算コストの面を考えた時に優れている点もある

解析解は $u(x, t) = u(x - ct, 0)$ であり，波の情報が正方向からか，負の方向から伝わってくるかは c の符号に依存することを考慮すると，

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \begin{cases} f_i & = cu_i & \text{if } c \geq 0, \\ f_{i+1} & = cu_{i+1} & \text{if } c < 0, \end{cases} \quad (98)$$

とすればよい．これは波が伝わってくる側の情報だけを選択的に流束に用いることから，風上差分と呼ばれる．しかし，数値計算を行なう際に移流速度 c の符号を if 文で判定すると計算コストがかかるため，以下のようにまとめる．

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1} - |c|(u_{i+1} - u_i)). \quad (99)$$

このように表記すると，右辺の最初の 2 項が注目しているセル表面に対して左右の状態の流束の代数平均となっており，中心差分をとった形になっている．残りの 2 項は単純な差分の考えでは出てこない項であり，左右の保存量 (u) の差に比例した項となっている．この部分が数値粘性としてはたらくことになる．左右の状態の跳びが大きい場合に大きな粘性が導入される．実際に，この数値流束を式 (97) に代入し変形すると，

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{\Delta x} (\tilde{f}_{i+1/2} - \tilde{f}_{i-1/2}) \\ &= -\frac{1}{2\Delta x} \{ (f_i + f_{i+1} - |c|(u_{i+1} - u_i)) - (f_{i-1} + f_i - |c|(u_i - u_{i-1})) \} \\ &= -\frac{1}{2\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{\Delta x |c|}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (100)$$

左辺は式 (96) の時間偏微分の項を差分化したものである．右辺の最後の式では最初の 2 項が式 (96) の空間偏微分項 $\partial(cf)/\partial x = \partial f/\partial x$ を右辺に移項し差分化したものに相当し，残りの項は式 (96) には対応したものがないが， $\partial^2 u/\partial x^2$ を差分化したものに係数が付いているとみなすことができる．これは式 (60) で導入した拡散項に相当し，最後の 2 項が数値粘性となっていることがわかる．流束式である、式 (99) の右辺の最後の 2 項に起因するもので，付加的項が数値粘性としてはたらいっていることがわかる．このように積分形の差分式に対して風上差分を課すと粘性項が自然に出てくることは，Godunov タイプのスキームが他のものより優れている理由の一つである．

では，この風上差分の考えを流体方程式に応用することを考える．連立方程式になるというだけでなく，非線形であるため同じ族の特性速度でもセル表面の左右で異なってくる．そこで左右の状態からセル表面上での平均値を求め，それを用いて数値流束を導出するというのが Roe のアイデアである．このセル表面での平均量のことを Roe 平均と呼び，流体方程式を “Constant Matrix” \tilde{A} を用いて以下のように線形化できるための要求を満たすように取られる．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (101)$$

\tilde{A} は左右の状態 $\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_L$ の関数 ($\tilde{A} = \tilde{A}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$) であり，任意の左右の状態 $\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_L$ に対して以下の条件を満たすものが Roe 平均となる．

- $\mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) = \tilde{A}(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_L) (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)$
- $\tilde{A}(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_L)$ は実固有値と線形独立な固有ベクトルを持つ

- $\tilde{A}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = A(\mathbf{u})$

ただし，最後の条件に出てくる右辺の行列は Jacobian 行列 ($A \equiv \partial f / \partial \mathbf{u}$) である．これを満たすような Roe 平均は空間 3 次元の場合，相対論的流体方程式では，

$$\tilde{w} = \frac{w_L + w_R}{k_L + k_R}, \quad (102)$$

$$w = \left(ku^0, ku^1, ku^2, ku^3, k \frac{p}{\rho h} \right), \quad (103)$$

$$k^2 = \rho h, \quad (104)$$

から計算される (Eulderink and Mellema, 1995)). Roe 平均を用いて数値流束は以下のように求められる．

$$\tilde{f}_{\text{Roe}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \Sigma_n |\tilde{\lambda}_n| \tilde{\alpha}_n \tilde{\mathbf{r}}_n \right), \quad (105)$$

ただし $\tilde{\alpha}_n \equiv \tilde{\mathbf{l}} \cdot (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)$ である．添字の L, R はそれぞれセル表面から見て左側，右側の状態を示す．ここでチルダ付きの量は Roe 平均によって記述される量である． λ_i は空間偏微分の項に関する Jacobian 行列 ($\partial f / \partial \mathbf{u}$) を考えた時の固有値であり，1 次元系では，

$$\lambda_0 = v, \quad (106)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{v_x \pm c_s}{1 \pm v_x c_s}, \quad (107)$$

と得られ，これらは各特性速度に相当する．また，これらの固有値に対する左右固有ベクトルが $\mathbf{l}_i, \mathbf{r}_i$ である．相対論的流体方程式に対する空間 3 次元の系での Jacobian 行列の固有値，固有ベクトルの導出法に関しては，11.1 節で扱う．

これらの固有値を対角成分に持つ行列を Λ とし，Jacobian 行列を対角化し， $A = Q\Lambda Q^{-1}$ と書く⁸，流体方程式の両辺から Q^{-1} を掛けて

$$Q^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \Lambda Q^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (108)$$

のように書くことができ， Q^{-1} が時間的空間的に変化しないという近似を用いると，

$$\frac{\partial (Q^{-1} \mathbf{u})}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial (Q^{-1} \mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad (109)$$

Λ は対角行列であるからこれは式 (96) と同じ形の 3 本の方程式からなりたっている．つまり各特性線の各族に対する独立な 3 本の方程式に分解することが可能となる．式 (105) における $\tilde{\alpha}_n$ は各独立な 3 本の方程式にした時に，各特性量の跳びにあたるもので，式 (99) の最後の 2 項に相当する量となっている．Roe の流束式も左右の状態の流束の平均 (中心差分) と，数値粘性に相当する付加的な項からなっている．Jacobian 行列が一定として局所的に方程式を線形化し，時間積分を行うため，これを Jacobina 行列の凍結と呼ぶ．これは各特性線の族毎に方程式を分離したことに相当し，Roe スキームは各特性線の族に対する方程式を近似的に線形化した上で線形方程式の風上差分の考えを用いて解く手法である．

⁸行列 Q は 11.1 で述べる Jacobian 行列の固有ベクトルを求める時に出てくる行列 R に相当し，右固有ベクトルを並べたものである．行列 Q^{-1} は左固有ベクトルを並べたもの (L に相当) で， $RL = E$ と規格化されている

9.4 Marquina の流束式

Roe スキームでは衝撃波捕獲条件等を満たすように平均がとられていることで、高精度となっている。しかし、このような“Godunov タイプ”のスキームでは、空間多次元で衝撃波面が空間メッシュにほぼ平行に進む場合に、カーバンクル(carbuncle)現象と呼ばれる数値的擾乱がおきることが知られている Quirk (1994)。カーバンクル現象は多次元問題で一様媒質中を伝搬するプレーン衝撃波面を計算する場合に、衝撃波面がある空間軸にほぼ平行な時に吹き出物のような構造が生じる現象である。衝撃波面に平行な方向に数値拡散が十分にはいないのが原因と言われている。このような問題を避けるには、現段階では数値流束をより拡散的なものにする以外にない。Marquina の流束式 (Donat and Marquina, 1996) はこのような観点から考案された流束を求めるスキームである。

求めたいセル表面の左右の保存量ベクトル \mathbf{u}_l , \mathbf{u}_r で与えられた時、局所的な特性量の変化 (local characteristic variables) ω や流束 (fluxes) ϕ は

$$\omega_l^k = \mathbf{l}^k(\mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{u}_l, \quad \phi_l^k = \mathbf{l}^k(\mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}_l), \quad (110)$$

$$\omega_r^k = \mathbf{l}^k(\mathbf{u}_r) \cdot \mathbf{u}_r, \quad \phi_r^k = \mathbf{l}^k(\mathbf{u}_r) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}_r). \quad (111)$$

で与えられる。

そして、それぞれの k に対して $\lambda_k(\mathbf{u})$ がセルの左右で符号を変えないときは

$$\phi_+^k = \phi_l^k, \quad \phi_-^k = 0, \quad \text{for } \lambda_k(\mathbf{u}_l) > 0, \quad (112)$$

$$\phi_+^k = 0, \quad \phi_-^k = \phi_r^k, \quad \text{for } \lambda_k(\mathbf{u}_l) < 0, \quad (113)$$

それ以外は

$$\phi_+^k = \frac{\phi_l^k + \alpha^k \omega_l^k}{2}, \quad (114)$$

$$\phi_-^k = \frac{\phi_r^k - \alpha^k \omega_r^k}{2}, \quad (115)$$

$$\text{但し, } \alpha_k = \max\{|\lambda_k(\mathbf{u}_l)|, |\lambda_k(\mathbf{u}_r)|\}, \quad (116)$$

となるような ϕ_+ , ϕ_- を定義する。これらを用いてセル表面での Marquina の流束式は、

$$\tilde{\mathbf{f}}_{\text{Mar}} = \sum (\phi_+^k \mathbf{r}^k(\mathbf{u}_l) + \phi_-^k \mathbf{r}^k(\mathbf{u}_r)). \quad (117)$$

となる。このスキームの利点は Roe スキームの Roe 平均のように解きたい方程式に特化した量などがなく、任意の双曲形システム方程式に応用できる点である。流体の方程式であれば状態方程式が変わっても簡単に適用できる。

連立偏微分方程式の場合では複雑なので

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (118)$$

のような形をした 1 本の非線型方程式の場合について考える。この場合の特性速度 λ は

$$\lambda = \frac{\partial f(u)}{\partial u}, \quad (119)$$

である。 u_i^{n+1} の状態を求めるときには時刻 $t = t_n$ での $i-1, i, i+1$ のセルの状態より求めることになる。各セル表面において左右の λ の取りうる符号の組み合わせは 4 通りあり

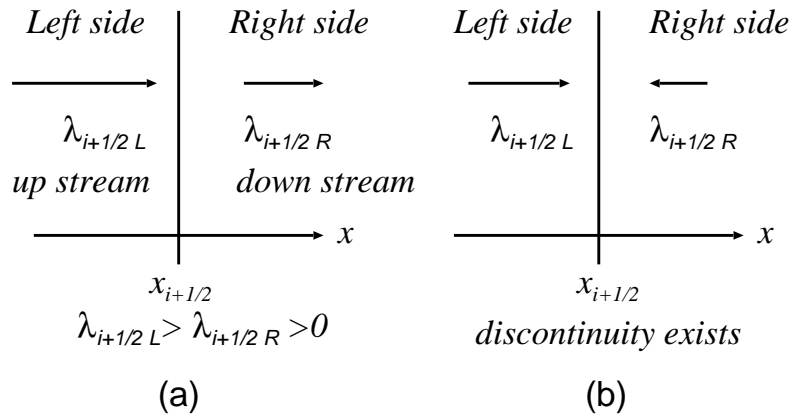


図 10: (a) 特性速度: +, + (符号を変えない時) . (b) 特性速度: +, - (符号が変化するとき) .

- 特性速度 λ が $\{+, +\}$ の時 (図 10a に対応) .

$$\tilde{f}_{i+1/2} = f_i, \quad (120)$$

これは風上差分をとったことになる . λ が $\{-, -\}$ の時も同様に風上差分となる .

- 特性速度 λ が $\{+, -\}$ の時 (図 10b に対応) . この時 $[i, i + 1]$ 間には不連続面があると考えられ、次の様に \tilde{f} を求める .

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1} - \alpha(u_{i+1} - u_i)) \quad (121)$$

$$\alpha = \max\{|\lambda_i|, |\lambda_{i+1}|\},$$

この流束は local-Lax-Friedrichs と呼ばれる流束である . 特性速度 λ が $\{-, +\}$ の時も同様である .

この 1 本の方程式に対するスキームから連立方程式系への拡張は、 n 個の局所的な特性速度の場の重ね合わせとして行っていると考えられる .

理想気体のような次数 1 のシステム方程式の場合には、Marquina の流束式は特性速度の全ての組の符号が変わらない時には、Steger-Warming の流束式と一致する .

Marquina の流束式は同次でない方程式にも応用できる点でより一般的な方法である . Roe スキームでは、セル表面の平均値を出してから固有ベクトルに代入したのと同じ、Marquina の流束式はセル左右の状態それぞれに対して左右の固有ベクトルが必要となり、その分だけ計算コストがかかる .

9.5 HLL 法, HLLC 法

HLL 法は Harten, Lax, van Leer によって提案されたスキームである . Riemann 問題を考える際には図 9 に示したような波のパターンが生じる . 両端に広がる波 (C^\pm 族) のみに注目し、特性速度の中でも最大のものを S_R , 最小のものを S_L とする . その内側の構造は無視し一様だと考え、かつ、特性速度は時間積分をする間近似的に一定と考えると図 11 左のように 2 つの直線である特性線によって区切られた 3 状態からなると考えられる . $S_R \leq 0$ の場合、全ての波は初期の不連続面の左側に集まる .

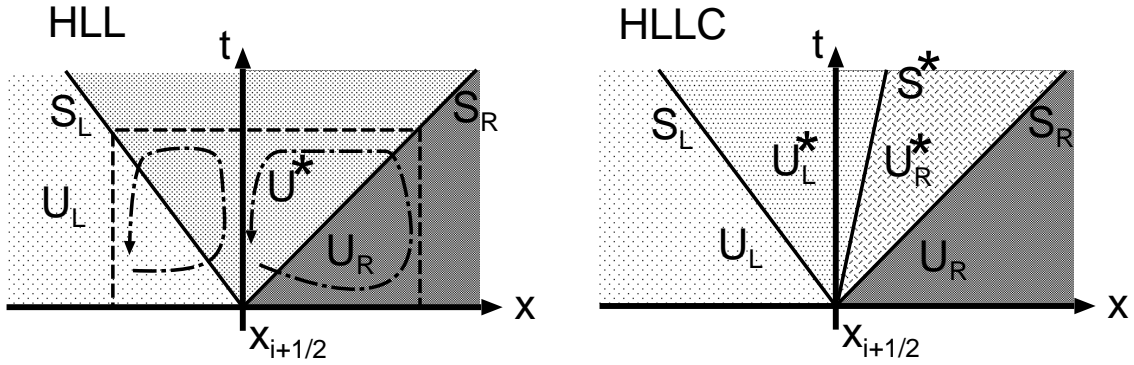


図 11: HLL スキーム, HLLC スキームの概念図. 特性線によって分けられる領域内部は一樣だと近似する. HLL スキームでは接触不連続面 (C^0) の族による構造を無視し, C^\pm 族による特性線のみを考え, 3つの状態を考える. HLLC スキームでは接触不連続面 (C^0) の族によって状態が4つに分類されるとする.

この場合は $\tilde{f} = f_R$ とする. $S_L \geq 0$ の場合, 全ての波は初期の不連続面の右側に集まる. この場合は $\tilde{f} = f_L$ とする. $S_L < 0, S_R > 0$ の場合は中間状態が初期の不連続面をまたぐような場合に相当する. この場合, 差分式 (式 (92)) を導出したように図 11 左の2つの領域で面積分を考え Stokes の定理を用い点線の経路で線積分に直すと S_L の符号が負であることに注意してそれぞれ, 中間状態 u^*, f^* を用いて,

$$-S_L \Delta t u_L - f^* \Delta t + S_L \Delta t u^* + f_L \Delta t = 0, \quad (122)$$

$$S_R \Delta t u_R - f_R \Delta t - S_R \Delta t u^* + f^* \Delta t = 0, \quad (123)$$

を得る. これらから中間状態 u^* を消去することによって,

$$f^* = \frac{S_R f_L - S_L f_R + S_R S_L (u_R - u_L)}{S_R - S_L}, \quad (124)$$

を得る. f^* を消去することによって, u^* も得ることができが, 上記で得られた f^* と $f(u^*)$ は一般に一致しない.

以上をまとめて, HLL 流束は,

$$\tilde{f}_{\text{HLL}}^* = \frac{S_R^+ f_L - S_L^- f_R + S_R^+ S_L^- (u_R - u_L)}{S_R^+ - S_L^-}, \quad (125)$$

とかける. ただし, $S_R^+ = \max\{0, S_R\}$, $S_L^- = \min\{0, S_L\}$ である. この数値流束は Roe スキームや Marquina の流束式のように特性線の各種族毎に分解して風上を考慮するようなことはしない. また, 中間構造を無視しているためその中に存在する接触不連続面が考慮されていない. そのため実際の問題でも衝撃波面の捕獲はうまくいくが, 接触不連続面は非常になまった拡散的な構造となってしまう. 相対論的流体方程式に対しては, Schneider et al. (1993) によって適用された. S_R, S_L の評価には様々なヴァリエーションが考えられるが, Roe 平均を用いる方法を特に HLLC 法と呼ぶ (Einfeldt (1988)). 相対論的流体方程式に対する Roe 平均は当時得られていなかったため, Schneider et al. (1993) では代数平均が用いられた. 実際には, 左右の状態の特性速度を比べ, 最大, 最小の速度を得てもよく,

HLL スキームは 2000 年代にはいってコーディングの容易さから磁気流体コードに適用されるようになった。

HLL 流束は特性速度の最大値，最小値を見積もるだけで簡単に導出が可能であり，コーディングも非常にシンプルである．その反面，接触不連続面の捕獲には弱い．そこで，HLL 法で無視されていた接触不連続面も考慮しようと HLL 法を改良したスキームが提案された．Toro による HLLC 法 (Toro et al., 1994) である．C は (Contact) の略であり，接触不連続面の捕獲が改善されている．

図 11 左のように HLL 法では 3 分割されていた領域が図 11 右のように 4 分割される．HLL 法に比べ，未知の領域が一つ増え u_L^*, u_R^* となり， f_L^*, f_R^*, S^* の未知変数に対して既知の u_L, u_R, S_L, S_R を用いて流束を表現するには中間の 2 状態をつなぐ関係式が必要となる．中間状態の間にある不連続面は接触不連続面であることから， $p_L^* = p_R^*, v_{xL}^* = v_{xR}^* = S^*$ が課される．しかし，これだけでは条件が足りないため，未知の 2 状態のそれぞれに対して，保存量 $u^* = (D^*, m^*, E^*)$ と v_x^*, p^* を用いて流束 f^* が以下のようにかけると仮定する．

$$f^* = \begin{pmatrix} D^* v_x^* \\ m_x^* v_x^* + p^* \\ m_y^* v_x^* \\ m_x^* \end{pmatrix}. \quad (126)$$

HLL 法の導出と同様に各領域で面積分から線積分になおした式から中間状態の条件を求め，上記の条件を用いるとそれぞれ，中間状態の流束 f_L^*, f_R^* 代数的に得ることができ，HLLC 流束は，

$$\tilde{f}_{\text{HLLC}} = \begin{cases} f_L, & \text{if } S_L \geq 0, \\ f_L^*, & \text{if } S_L \leq 0 < S^*, \\ f_R^*, & \text{if } S^* \leq 0 < S_R, \\ f_R, & \text{if } S_R \leq 0, \end{cases} \quad (127)$$

となる．上記のように HLL 法，HLLC 法いずれのスキームも Roe スキームや Marquina の流束式のような Jacobian 行列の固有ベクトルを必要としない．HLL 法は中間状態を一様として扱うため適用する方程式に依らず適用できるが，中間状態を考慮する HLLC 法は方程式が変わると⁹その都度中間状態を求め直す必要がある．相対論的流体方程式に関する定式化は Mignone and Bodo (2005) で行われた．

9.6 Central スキーム

HLL 法よりも，もっとシンプルなスキームとして Central スキームがあげられる．非相対論的流体方程式に対して Kurganov and Kolgan (2000) らが導入し，相対論的流体方程式に対しては Del Zanna and Bucciantini (2002), Lucas-Serrano et al. (2004), そして，Shibata and Font (2005) らが適用した．

$$\tilde{f}_{\text{CENTRAL}} = \frac{1}{2} (f(u_L) + f(u_R) - a^*(u_R - u_L)) \quad (128)$$

ただし， a^* は左右全ての特性速度のなかで最大の大きさもので $a^* = \max\{|\lambda_{iL}|, |\lambda_{iR}|\}$ ．この形は Marquina の流束式で考えた，式 (121) と同様の形をしており，各特性線毎に分類せず，local-Lax-Friedrichs 流束を拡張したことになる．後に述べる高次空間補間と共に適用すると衝撃波だけでなく，接触不連続面もよい精度で捕獲できている (Lucas-Serrano et al., 2004) ．

⁹例えば非相対論的流体方程式か相対論的流体方程式か等

9.7 MUSTA

最後に紹介する MUSTA(MUlti STAge) 流束は上記で紹介した流束とは若干異なったアプローチによって導かれるスキームである．非相対論的流体方程式に対して Toro and Titarev (2006) が提唱し，QGP のシミュレーションのために Kikola et al. (2006) らによって相対論的流体方程式にも適用された．手法は数値拡散の少ない Lax-Wendroff 法と数値拡散の大きい Lax-Fridrich 法という古典的な 2 つの手法をカップルさせ，仮の保存量を更新していくという作業ををくり返し，Godunov の流束に近づけるというもので，両者の欠点を補う手法となっている．くり返し計算を無限に行うと，MUSTA 流束は Godunov の流束に収束すると考えられ，実際の計算では，1-2 度のくり返し計算でよい結果が得られている．

導出ではまず， $l = 0$ ステップ目の保存量 (u_L^0, u_R^0) をそれぞれ， $u_L^0 = u_L, u_R^0 = u_R$ とおく．

l ステップ目の左右の保存量ベクトルから l ステップ目の流束ベクトルを以下のように評価する．

$$f_R^l = f(u_R^l), \quad f_L^l = f(u_L^l), \quad (129)$$

$$u_{i+1/2}^l = \frac{1}{2} (u_L^l + u_R^l) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_R^l - f_L^l), \quad (130)$$

$$f_{M1}^l = f(u_{i+1/2}^l), \quad (131)$$

$$f_{M2}^l = \frac{1}{2} \left(f_L^l f_R^l - \frac{\Delta x}{\Delta t} (f_R^l - f_L^l) \right), \quad (132)$$

$$f_{i+1/2}^l = \frac{1}{2} (f_{M1}^l + f_{M2}^l), \quad (133)$$

式 (131) が 2 段階 Lax-Wendroff 法による流束に対応し，式 (132) が Lax-Fridrich 法による流束の導出に対応する．式 (133) はこれらの 2 つの流束の平均を取っている．ただし，ここでは MUSTA 流束を求めるための l ステップ目の情報によるもので，実際に時間積分などを行っているわけではない． l が規定のくり返し回数に達していれば，これを数値流束とする．達していない場合は，この流束を用いてもう一度保存量を求める．

$$u_L^{l+1} = u_L^l - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^l - f_L^l), \quad (134)$$

$$u_R^{l+1} = u_R^l - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_R^l - f_{i+1/2}^l), \quad (135)$$

この作業は一見時間積分しているように見え，Riemann fan(特性線)の展開を行っている．この $l+1$ ステップ目の更新された保存量を用いて再び，流束を導出して規定のくり返し計算回数まで計算を行う．

このスキームは，隣り合うセル同士の流速度が逆向きで離れていくような希薄な状態が生まれる場合の計算に強いとされる．相対論的流体方程式に適用する場合は， $l+1$ ステップ目の保存量が求まると，後述の基本量の導出がその都度必要であり，計算コストがかかる点が欠点である．

9.8 数値流束のまとめ

この節では数値解法の中でも重要となる数値流束の導出法を紹介した．計算の精度，計算速度，コーディングのしやすさなどの観点でそれぞれのスキームには一長一短があり，一概にどのスキームがよいとは言い難い．それぞれのスキームの特徴をまとめると，

- Godunov 法は解析解を用いるもので最も厳密であるが、解析解の導出に収束計算が必要であり、一般的な解析解の得られていない磁気流体方程式では用いることができない。
- Roe スキームは近似 Riemann 解を用いるスキームの一つであり、方程式を局所的に時間空間で Jacobian 行列を凍結し、方程式を線形化することによって、各特性線の族毎に風上差分を適用するものである。他の近似 Riemann 解よりも数値拡散が少なくカーブクル現象や数値振動などがおきやすい。
- Marquina の流束式は Roe スキームの数値拡散の少なすぎるという欠点を補うために開発された近似 Riemann 解法である。セルの左右で特性速度の符号が反転する時に選択的に数値粘性項を導入する。
- HLL 法は、線形化した特性線を考え、各特性線によって区分された領域内の構造は一様と考え、流束を評価する近似 Riemann 解法である。左右一番外側に伸びる特性線のみを考え、その内部構造を一切無視して流束を評価する。流体方程式では C^0 族の特性線が考慮されないため、接触不連続面がなまってしまうが、特性速度の最大、最小値が分かれば、任意の保存形方程式系に適用することができ、コーディングが簡単である。
- HLLC 法も HLL 法と同様に線形化した特性線を考えるが、HLL 法では考慮されなかった C^0 族によって作られる構造は考慮し、領域を 4 つに区分する。これによって接触不連続面の構造がきれいに捕らえることができるようになる。未知の中間状態を 2 つ考えるために、中間状態を結びつける関係式が必要となってくるため、異なった方程式に対して適用する場合はその都度数値流束を求める必要がある。
- Central スキームは最も簡単であり、特性速度の中で大きさが最大のものを持って流束を評価する。
- MUSTA 流束は、Lax-Wendroff 法と Local-Fridrich 法という古典的な 2 種類の手法をカップルさせ、くり返し計算によって Godunov 流束に近づけようとする手法である。数値拡散が少なすぎる、大きすぎるという 2 種類のスキームの欠点を相補している。相対論的流体方程式ではくり返し計算を行う度に計算コストのかかる保存量から基本量を導かなくてはならず計算コストがかかってしまう。

数値流束に関する研究は日進月歩で進んでおり、今後も新しいスキームが開発され相対論的流体方程式に適用されることが期待される。我々はそれぞれのスキームの個性を理解した上で目的の計算にあったスキームを選択する必要がある。

10 空間多次元への応用

これまで空間 1 次元で考えてきたがここで空間多次元への応用を考える。多次元の Riemann 問題を解くことは一般に困難である。1 次元でみた特性曲線は 2 次元問題では時間方向に伸びる Mach 円錐と呼ばれる曲面となる。ここで用いる方法は、基本的には各空間方向を別々に考え、それぞれの方

向の数値流束を独立して計算し，時間積分をするというものである．空間 3 次元の時，方程式が

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{f}^3}{\partial x^3} = \mathbf{0}, \quad (136)$$

とかかっているならば差分式は以下のようにかける．

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j,k}^{n+1} &= \mathbf{u}_{i,j,k}^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x^1} (\tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2,j,k}^1 - \tilde{\mathbf{f}}_{i-1/2,j,k}^1) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\tilde{\mathbf{f}}_{i,j+1/2,k}^2 - \tilde{\mathbf{f}}_{i,j-1/2,k}^2) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x^3} (\tilde{\mathbf{f}}_{i,j,k+1/2}^3 - \tilde{\mathbf{f}}_{i,j,k-1/2}^3). \end{aligned} \quad (137)$$

各空間方向の流束 Jacobian 行列， $\partial \mathbf{f}^1 / \partial \mathbf{u}$ ， $\partial \mathbf{f}^2 / \partial \mathbf{u}$ ， $\partial \mathbf{f}^3 / \partial \mathbf{u}$ に対して固有値，固有ベクトルを求め，各計算格子の面を通過する数値流束を求め，最後に積分をすることになる．流体方程式の場合，空間が 1 次元から 2,3 次元へと拡張されると，解くべき流体方程式の数は 3,4,5 と増えるため，流束 Jacobian 行列は， 3×3 ， 4×4 ， 5×5 の正方行列となる．

保存量ベクトル \mathbf{u} と，流束ベクトル \mathbf{f}^1 ， \mathbf{f}^2 ， \mathbf{f}^3 は以下のようにかける．

$$\mathbf{u} = (\rho W, \rho h W^2 v^1, \rho h W^2 v^2, \rho h W^2 v^3, \rho h W^2 - p - \rho W)^T, \quad (138)$$

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{u}) = (\rho W v^1, \rho h W^2 v^1 v^1 + p, \rho h W^2 v^1 v^2, \rho h W^2 v^1 v^3, \rho h W^2 v^1 - \rho W v^1)^T, \quad (139)$$

$$\mathbf{f}^2(\mathbf{u}) = (\rho W v^2, \rho h W^2 v^1 v^2, \rho h W^2 v^2 v^2 + p, \rho h W^2 v^2 v^3, \rho h W^2 v^2 - \rho W v^2)^T, \quad (140)$$

$$\mathbf{f}^3(\mathbf{u}) = (\rho W v^3, \rho h W^2 v^1 v^3, \rho h W^2 v^2 v^3, \rho h W^2 v^3 v^3 + p, \rho h W^2 v^3 - \rho W v^3)^T. \quad (141)$$

11 固有値，固有ベクトル

Roe スキーム，Marquina の流束式等の近似 Riemann 解を用いるスキームでは，保存形の流体方程式の流束 Jacobian 行列に対する固有値，左右固有ベクトルが必要である．

保存形の相対論的流体方程式に対する流束 Jacobian 行列は複雑であり，非相対論的流体方程式に対する導出のように直接導出することは困難である．以下に記述するように，基本量に対する相対論的流体方程式に対する Jacobian 行列を介して求めることになる．ここでは，基本量を使つての固有値，固有ベクトルの導出法を Font らの導出法 (Font et al., 1994) に従って述べ，Donat et al. (1998) に初めて掲載された固有値，左右固有ベクトルを再掲しておく．

11.1 固有値，左右固有ベクトルの導出法

空間 3 次元特殊相対論的流体方程式は以下のようにかける．

$$\frac{\partial \mathbf{f}^\mu(\mathbf{w})}{\partial x^\mu} = 0, \quad (142)$$

ここで， \mathbf{w} ， \mathbf{f}^0 ， \mathbf{f}^i はそれぞれ，基本量ベクトル，保存量ベクトル，流束ベクトルであり \mathbf{f}^0 はこれまで \mathbf{u} と書いてきたものと同じものである．

各 $f^\alpha(\mathbf{w})$ に関する Jacobian 行列 $B^\alpha(\mathbf{w})$ は

$$B^\alpha(\mathbf{w}) = \frac{\partial \mathbf{f}^\alpha(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}}, \quad (143)$$

であり，この行列は簡単に求めることができる． B^α を用いると，式 (142) は

$$B^\mu(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (144)$$

とかける．また，

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}^0(\mathbf{w}), \quad (145)$$

$$\mathbf{f}^i(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^i \circ (\mathbf{f}^0(\mathbf{w}))^{-1}, \quad (146)$$

であるから (ここで， \circ は，合成関数を表す) 保存形の方程式，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^0} + \frac{\partial \mathbf{f}^i(\mathbf{u})}{\partial x^i} = 0, \quad (147)$$

の \mathbf{f}^i に関する Jacobian 行列

$$A^i = \frac{\partial \mathbf{f}^i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \quad (148)$$

は，基本量のときの Jacobian 行列 B^α を用いて

$$A^i = B^i (B^0)^{-1}, \quad (149)$$

となる． B^α を導出するのは比較的簡単であるが $(B^0)^{-1}$ の導出は複雑である．しかし，必要なのは A^i の固有値 λ^j とその λ^j に対する左右固有ベクトル l^j, r^j のセットである．そこで， A^i, r^j, λ^j の満たす方程式

$$(A^i - \lambda^i E) r^i = 0, \quad (150)$$

より

$$(B^i - \lambda^j B^0) (B^0)^{-1} r^j = 0, \quad (151)$$

である．よって A^i の固有値 λ^j は，次の方程式の解である，

$$|B^i - \lambda^j B^0| = 0, \quad (152)$$

これより，固有値 λ^j を求める． λ^j が求まると，式 (151) より

$$r^{j*} = (B^0)^{-1} r^j, \quad (153)$$

が求まり，これより右固有ベクトル

$$r^j = B^0 r^{j*}, \quad (154)$$

が求まる．右固有ベクトルのセット $\{r^k\}$ が求められると，左固有値ベクトルのセット $\{l^k\}$ は

$$l^i \cdot r^j = \delta^{ij}, \quad (155)$$

と規格化されるようにとればよい．これは，右固有ベクトルのセットからなる右固有値行列 R と左固有ベクトルのセットからなる左固有値行列 L は，

$$RL = E, \quad (156)$$

を満たすようにとるということである．

11.2 固有値，左右固有ベクトル

ここでは x 方向に対する固有値，左右固有ベクトルを挙げておく． y 方向， z 方向に対する固有値，左右固有ベクトルは対称性から簡単に求まる．固有値 λ は

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{1 - v^2 c_s^2} \left(v^x (1 - c_s^2) \pm c_s \sqrt{(1 - v^2) \{1 - v^x v^x - (v^2 - v^x v^x) c_s^2\}} \right), \quad (157)$$

$$\lambda_0 = v^x \quad \text{三重解}, \quad (158)$$

となる．ここで，注目すべき事は非相対論的流体方程式に対する固有値には注目している方向（ここでは， x 方向）以外の流速は入ってこないのだが，相対論的流体方程式に対しては全ての方向の流速が固有値に入っている．これは方程式のなかにローレンツ因子があるためであり，そのため固有値にも影響している．また，系が完全に 1 次元系の時には，つまり $v^y = 0, v^z = 0$ の時には λ_{\pm} は

$$\lambda_{\pm} = \frac{v^x \pm c_s}{1 \pm v^x c_s}, \quad (159)$$

となる．これは， x 方向の流速 v^x と音速 c_s の合成である．また光速を越えることはなく因果律を満たしている．

固有ベクトルのセットは x 方向について

$$A_{\pm} \equiv \frac{1 - v^x v^x}{1 - v^x \lambda_{\pm}}, \quad (160)$$

として，

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{0,1} &= \left(\frac{1}{W}, v^x, v^y, v^z, 1 - \frac{1}{W} \right)^T, \\ \mathbf{r}_{0,2} &= (Wv^y, 2hW^2v^xv^y, h(1 + 2W^2v^yv^y), 2hW^2v^yv^z, 2hW^2v^y - Wv^y)^T, \\ \mathbf{r}_{0,3} &= (Wv^z, 2hW^2v^xv^z, 2hW^2v^yv^z, h(1 + 2W^2v^zv^z), 2hW^2v^z - Wv^z)^T, \\ \mathbf{r}_{\pm} &= (1, hWA_{\pm}\lambda_{\pm}, hWv^y, hWv^z, hWA_{\pm} - 1)^T, \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{0,1} &= \frac{W}{h-1} (h - W, Wv^x, Wv^y, Wv^z, -W), \\ \mathbf{l}_{0,2} &= \frac{1}{h(1 - v^x v^x)} (-v^y, v^x v^y, 1 - v^x v^x, 0, -v^y), \\ \mathbf{l}_{0,3} &= \frac{1}{h(1 - v^x v^x)} (-v^z, v^x v^z, 0, 1 - v^x v^x, -v^z), \\ \mathbf{l}_{\mp} &= (\pm 1) \frac{h^2}{\Delta} \begin{pmatrix} \lambda_{\mp,1} \\ 1 + W^2(v^2 - v^x v^x)(2h - 1)(1 - A_{\pm}) - hA_{\pm} \\ W^2v^y(2h - 1)A_{\pm}(v^x - \lambda_{\pm}) \\ W^2v^z(2h - 1)A_{\pm}(v^x - \lambda_{\pm}) \\ -v^x - W^2(v^2 - v^x v^x)(2h - 1)(v^x - A_{\pm}\lambda_{\pm} + hA_{\pm}\lambda_{\pm}) \end{pmatrix}^T, \end{aligned} \quad (162)$$

と表せる．但し， $\lambda_{\mp,1} = hWA_{\pm}(v^x - \lambda_{\pm}) - v^x - W^2(v^2 - v^x v^x)(2h - 1)(v^x - A_{\pm}\lambda_{\pm}) + hA_{\pm}\lambda_{\pm}$ ，であり， Δ は右固有値ベクトル行列の行列式

$$\Delta = h^3 W (h - 1) (1 - v^x v^x) (A_+ \lambda_+ - A_- \lambda_-), \quad (163)$$

左右固有値ベクトルの標識を導出するのは複雑な計算でなかなか得られていなかった．この標識は (Donat et al., 1998) で示された．他の方向に対する固有値，固有ベクトルも添字の入れ替えなどを行う事によって簡単に得られる．

参考文献

- Del Zanna, L., & Bucciantini, N. 2002, A&A, **390**, 1177-1186,
An efficient shock-capturing central-type scheme for multidimensional relativistic flows. I. Hydrodynamics .
- Donat, R., & Marquina, A. 1996, J. Comp. Phys., **125**, 42-58,
Capturing shock reflections : An improved flux formula.
- Donat, R., Font, J. A., Ibáñez, J. M., & Marquina, A. 1998, J. Comp. Phys., **146**, 58-81,
A Flux-Split Algorithm Applied to Relativistic Flows.
- Einfeldt, B. 1988, SIAM J. Numer. Anal., **25**, 294-318,
On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics.
- Eulderink, F., & Mellema, G. 1995, A&AS, **110**, 587-623,
General Relativistic Hydrodynamics with a Roe Solver.
- Font, J. A., Ibáñez, J. M., Marquina, A., & Martí, J. M. 1994, A&A, **282**, 304-314,
Multidimensional Relativistic Hydrodynamics : Characteristic Fields and Modern High - Resolution Shock - Capturing Schemes.
- Godunov, S. K. 1959, Mat.Sb., **47**, 271-306,
A Finite Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics.
- Kikola, D., Peryt, W., Sinyukov, Y. M., Slodkowski, M., & Szuba, M. 2006, Acta Physica Hungarica Heavy Ion Physics, **27**, 373-378,
New Computer Program for Three-Dimensional Relativistic Hydrodynamical Model.
- Koide, S., Nishikawa, K., & Mutel, R. L. 1996, ApJ, **463**, L71-L74,
A Two-dimensional Simulation of Relativistic Magnetized Jet.
- Koide, S. 2003, Phys. Rev. D, **67**, 104010-+,
Magnetic extraction of black hole rotational energy: Method and results of general relativistic magnetohydrodynamic simulations in Kerr space-time.
- Kurganov, A., & Kolgan, E. 2000, J. Comp. Phys., **160**, 241 - 282,
New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection Diffusion Equations.
- Lucas-Serrano, A., Font, J. A., Ibáñez, J. M., & Martí, J. M. 2004, A&A, **428**, 703-715,
Assessment of a high-resolution central scheme for the solution of the relativistic hydrodynamics equations.
- Martí, J. M., & Müller, E. 1994, J. Fluid Mech., **258**, 317-333,
The Analytical Solution of the Riemann Problem in Relativistic Hydrodynamics.

- Martí, J. M., & Müller, E. 1996, J. Comp. Phys., **123**, 1-14,
Extension of the Piecewise Parabolic Method to One-Dimensional Relativistic Hydrodynamics.
- Martí, J. M., & Müller, E. 2003, Living Reviews in Relativity, **6**, 7-+,
Numerical Hydrodynamics in Special Relativity.
- Mignone, A., & Bodo, G. 2005, Mon. Not. R. Astron. Soc., **364**, 126-136,
An HLLC Riemann solver for relativistic flows - I. Hydrodynamics.
- Quirk, J. J. 1994, Int. J. Numer. Methods Fluids, **18**, 555-574,
A Contribution to the Great Riemann Solver Debate.
- Roe, P. L. 1981, J. Comp. Phys., **43**, 357-372,
Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes.
- Schneider, V., Katscher, U., Rischke, D. H., Waldhauser, B., Maruhn, J. A., & Munz, C.-D. 1993,
Journal of Computational Physics, **105**, 92-107,
New Algorithms for Ultra-relativistic Numerical Hydrodynamics.
- Shibata, M., & Font, J. A. 2005, Phys. Rev. D, **72**, 047501-+,
Robustness of a high-resolution central scheme for hydrodynamic simulations in full general relativity.
- Thompson, K. W. 1986, J. Fluid Mech., **171**, 365-375,
The Special Relativistic Shock Tube.
- Toro, E. F., & Titarev, V. A. 2006, J. Comp. Phys., **216**, 403-429,
MUSTA fluxes for systems of conservation laws.
- Toro, E. F., Spruce, M., & Speares, W. 1994, Shock Waves, **4**, 25-34,
Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver.
- Toro, E. F. 2009, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : a Practical Introduction, Springer-Verlag, Berlin.
- Wilson, J. R. 1972, ApJ, **172**, 431-438,
Numerical Study of Fluid Flow in a Kerr Space.