



## 相対論的流体方程式の数値的解法 III

水田晃

高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 理論センター

要旨：今回は流体方程式の時間発展解を得るために、計算セル境界で Riemann 問題を考え、数値積分に必要な数値流束を解析的あるいは近似的 Riemann 解より評価することを述べた。近似的 Riemann 解では第 1 回で議論した特性線の考え方が反映されており、情報が伝わってくる風上方向からの差分（風上差分）の概念などに現れている。最終回となる本稿ではセル内に補間関数を導入し Riemann 問題を考える時の初期値条件を補正し数値粘性を小さくする試みを導入する。また、コードのテストに使われる典型的なテスト問題などを紹介する。

## 12 空間補間精度

ゴドノフタイプのスキームでは数値流束を計算するために各セル表面の左右の状態を与え、Riemann 問題を考える。Riemann 問題の初期値をどのようにとるかを考える。

各セルに定義された物理量はセルの中心点上の量ではなく、セル内の平均量として定義されたものである。つまり、ある物理量  $u$  にたいしてセル内での物理量の空間分布  $u(x)$  が仮定されており、以下の式が満たされていると考える。

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t = t_n) dx, \quad (164)$$

これは、積分形の差分式を得る時に導出した条件式 (式 (93)) である。これまでは、離散化した後の物理量分布はセル内部では一定だと仮定していたので、 $u_i^n$  がそのままセル表面での物理量となり、実際の物理量の分布はなめらかであっても隣のセルとの物理量の跳びが大きく生じる (図 12)。数値流束の式にもあるように、物理量の跳びが大きいと数値粘性が大きくはいい、不連続面をシャープに捕らえられなくなる。セル内部を多項式展開し、その跳びを少なくする試みを考える。一般に物理量分布  $u(x)$  を  $x$  の  $n-1$  次多項式とした時、精度は最高で  $n$  次精度となる。高次であればあるほど不連続面でのなまりはなくなり、少ないメッシュ数で不連続を捕えられるようになる。しかし、その一方で一次精度で保証されていた安定性が犠牲にされ高次精度では数値的に不安定になりやすいために補正が必要となる上に、あるいは計算コストがかかるという欠点もでてくる。

高次精度化を行なうとテスト計算の章でも示すように、不連続面の構造がより少ないメッシュでシャープに捕えられるだけでなく、多次元の問題では流体不安定性などに起因する渦構造を再現で

きるようになるなど、限られた計算資源で確保できるメッシュ数でより現実に近い物理現象を再現できるようにする。

式 (164) の定義では保存量に対して補間関数を考えるのが妥当であるが、実際には同様の概念が基本量  $\{\rho, p, v^i\}$  などの補間にも用いられている。保存量の補間、特性量、基本量の補間の3種類が考えられている。そして、補間量によって安定性、精度などが変る。相対論的流体の場合多くの場合基本量で補間が行われる。これは、保存量などで補間を行うと数値流束を求めるためにセル表面で基本量を導出するために計算コストがかさむこともその一因である。速度に対しては3元速度 ( $v^i$ ) で補間を行うよりも4元速度の空間成分 ( $Wv^i$ ) で補間するのがいいと言われている。これは光速に近くなると3元速度の変化よりも4元速度の空間成分の方が変化をうまく記述できるためだと考えられる。また、3元速度では補間後のセル表面の値が光速を超えてしまうなどの障害が起きるため4元速度の空間成分を補間することが行われる。

補間関数を考える上で重要な概念は式 (164) である<sup>1</sup>。これを満たす多項式展開はルジャンドル多項式  $P_i(x)$  を用いて

$$u(x) = u_i + \sum_{k=1}^{n_{max}} a_k P_k \left( \frac{2}{\Delta x_i} (x - x_i) \right). \quad (x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}), \quad (165)$$

とすればよい。何故なら

$$\int_{-1}^1 P_i(x) dx = 0 \quad \text{for any } i \geq 1. \quad (166)$$

であるため任意の次数まで展開しても式 (164) が満たされる。

## 12.1 1次精度

図 12(a) のように、計算格子内で物理量が一定としたときは1次精度となる。これは、最も簡単な場合であり、 $n_{max} = 0$  に相当する。

$$u(x) = u_i. \quad (x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}), \quad (167)$$

よって、セル表面での左右の状態は、

$$(u_L)_{i+1/2} = u_i, \quad (168)$$

$$(u_R)_{i+1/2} = u_{i+1}, \quad (169)$$

と表せる。

## 12.2 2次精度

計算格子内を1次関数で補間する場合を考える (例えば図 12(b))。ここでは、van Leer が考えた MUSCL 法 (Mono Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) van Leer (1977, 1979) に従う<sup>2</sup>。藤井孝藏 (1994), 大宮司久明, 吉沢徹, 三宅裕 (編集) (1998), Hirsch (1990) に詳しい解説がある。

<sup>1</sup>保存量に対する式であるが、基本量に対しても同様の概念が適用されている

<sup>2</sup>van Leer 以前に旧ソ連の研究者 Kolgan が同様の補間法を 1972 年の論文で発表している。しかし、ロシア語でかかれており、英文にも訳されなかった。更に Kolgan は 1978 年に亡くなったこともあり彼の仕事はあまり知られていなかった。Kolgan の 1972 年の論文は 2011 年英訳された (Kolgan, 2011)。同時に van Leer による歴史的経緯の解説論文も掲載されている (van Leer, 2011)。

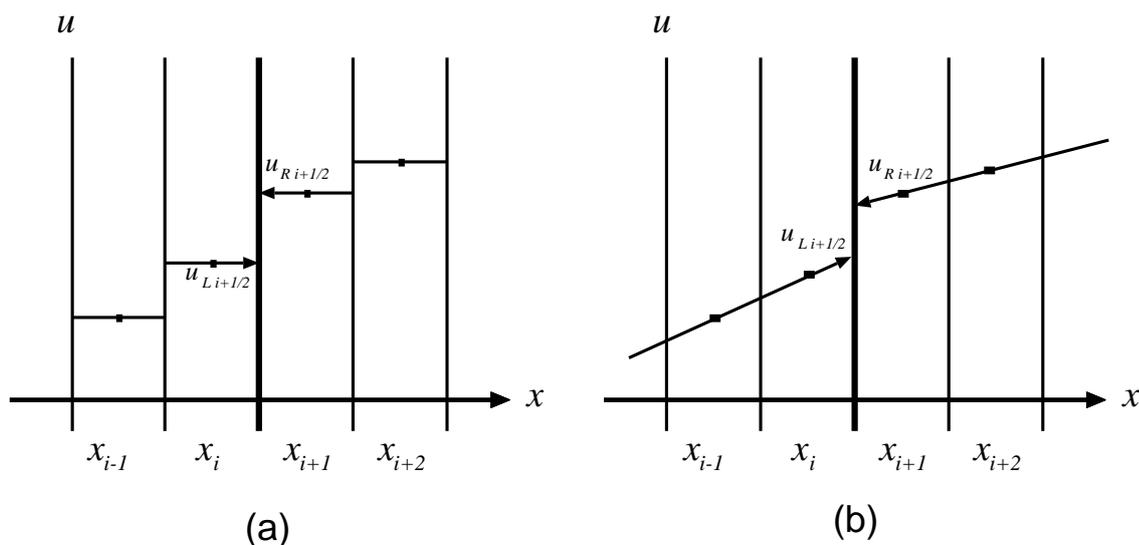


図 12: (a) 空間補間精度 1 次 (b) 空間補間精度 2 次 (線形補間 (外挿) の場合)

補間関数を展開すると,

$$u(x) = u_i + \frac{1}{\Delta x}(x - x_i) \cdot \frac{1}{2}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{3\kappa}{2(\Delta x)^2} \left( (x - x_i)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{12} \right) (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \dots, \quad (170)$$

となる. この展開は, パラメータ  $\kappa$  の値によらず式 (164) を満している. 式 (170) で 2 次以下の展開項は  $\kappa = 1/3$  の時は 2 次関数による 3 次精度の補間になるが, それ以外の場合は後に述べるように,  $\kappa$  の値により外挿, 内挿などの線形補間に対応し補正項となる.

式 (170) の展開を 2 次までで打ち切ったものに  $x = x_{i+1/2}$  を代入すると  $(u_L)_{i+1/2}$ ,  $i$  を  $i+1$  にずらして  $x = x_{i+1/2}$  を代入すると  $(u_R)_{i+1/2}$  が得られ,

$$(u_L)_{i+1/2} = u_i + \frac{1}{4}((1 - \kappa)\Delta_- + (1 + \kappa)\Delta_+)_i, \quad (171)$$

$$(u_R)_{i+1/2} = u_{i+1} - \frac{1}{4}((1 - \kappa)\Delta_+ + (1 + \kappa)\Delta_-)_{i+1}, \quad (172)$$

となる. 但し, ここで  $\Delta_+, \Delta_-$  は,

$$\Delta_+ \equiv u_{i+1} - u_i, \quad (173)$$

$$\Delta_- \equiv u_i - u_{i-1}, \quad (174)$$

で定義される.  $\kappa$  の値によって補間に用いる点が変わり,  $\kappa = -1$  の時は片側 2 点の外挿となり,  $\kappa = 0$  の時は両側 2 点を用いた補間となる. また,  $\kappa = 1$  の時は,  $(u_L)_{i+1/2} = (u_R)_{i+1/2} = (u_i + u_{i+1})/2$  となり, 不連続がなくなる. 図 6(b) では前に述べたように片側 2 点の外挿に相当し,  $\kappa = -1$  の場合である.

式 (170) での補間では数値計算を安定に行う条件である特性量に関して時刻  $\{n+1\}$  ステップ目と  $n$  ステップ目の間に TVD (Total Variation Diminishing) 条件

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \quad (175)$$

$$\text{但し, } TV(u^n) \equiv \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n|, \quad (176)$$

が満されない．特性量の総変化量 (TV) は不連続がない場合には特性速度で移流するだけなので保存し，不連続がある場合には不連続面で特性線が吸い込まれるために，総変化量 (TV) は減少するはずである．この条件が満たされると新たな極値が生成されず数値振動が起きないとされる．ここでもこの概念が保存量補間や，基本量補間にも適用されると考える．

TVD 条件を満たすために流束制限関数が導入される．流束制限関数にはいくつか挙げられるが，ここでは minmod 制限関数を考える．

$$\bar{\Delta}_+ = \text{minmod}(\Delta_+, b\Delta_-), \quad (177)$$

$$\bar{\Delta}_- = \text{minmod}(\Delta_-, b\Delta_+), \quad (178)$$

を式 (171), (172) の  $\Delta_+, \Delta_-$  のかわりに用いる．ここで， $b$  はパラメータ  $\kappa$  を用いて

$$1 \leq b \leq \frac{3 - \kappa}{1 - \kappa}, \quad (179)$$

である． $b$  が小さいほうがより拡散的になる．解が拡散的になると，不連続面を数値的にシャープに再現できなくなり，解像度を上げる必要がある． $b$  を最大値近くにとると基本量で補間した時に強い衝撃波で数値振動がおきる場合があり注意が必要である．minmod 関数は，

$$\text{minmod}(a, b) \equiv \text{sign}(a) \max(0, \min(|a|, \text{sign}(a) b)), \quad (180)$$

で定義され， $a, b$  が同符号の時は絶対値の小さい方を，異符号の時は 0 となるような関数である．具体的にかくと，

$$\text{minmod}(a, b) = b \quad \text{if } a > b > 0, \text{ or } a < b < 0, \quad (181)$$

$$\text{minmod}(a, b) = a \quad \text{if } b < a < 0, \text{ or } b > a > 0, \quad (182)$$

$$\text{minmod}(a, b) = 0 \quad \text{if } a < 0 < b, \text{ or } a > 0 > b, \quad (183)$$

となる．この関数によって，物理量の変化が急な場合には，安定性を優先し精度が落される．

### 13 PPM 補間

PPM (Piecewise Parabolic Method) は Colella and Woodward (1984) によって提案されたもので，オリジナルの論文では 2 次関数による 3 次精度の補間と Riemann 問題の解析解を用いる Godunov 法の高次精度化であった．後に補間部分のみを用いる際にも PPM 法と呼ばれることもある．相対論的流体方程式には Martí and Müller (1996) によって導入された．

ここでは Colella and Woodward (1984) にあるように不等間隔の空間メッシュにも対応できるように  $i$  番目のセルの幅を  $\Delta x_i$  と表記する．導出の大筋はまず，補間関数としてより高次である 3 次関数を用いて空間を補間する．3 次関数を

$$u(x) = u_i + a_1'(x - x_i) + a_2' \left( (x - x_i)^2 - \frac{\Delta x_i^2}{12} \right) + a_3'(x - x_i)^3, \quad (184)$$

とすると係数は,

$$a_3' = \frac{4}{\sum_{k=i-1}^{i+2} \Delta x_k} \left[ \frac{1}{\sum_{k=i}^{i+2} \Delta x_k} \left( \frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}} - \frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}} \right) + \frac{1}{\sum_{k=i-1}^{i+1} \Delta x_k} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) \right], \quad (185)$$

$$a_2' = \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{\sum_{k=i}^{i+2} \Delta x_k} \left( \frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}} - \frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}} \right) + \frac{1}{\sum_{k=i-1}^{i+1} \Delta x_k} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) \right] - \frac{3a_3'}{8} (-\Delta x_{i-1} + \Delta x_i + 3\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2}), \quad (186)$$

$$a_1' = 2 \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} - \frac{a_3'}{2} \left( \frac{\Delta x_i^2}{2} + \Delta x_i \Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+1}^2 \right) - \frac{a_2'}{3} (\Delta x_i + 2\Delta x_{i+2}). \quad (187)$$

となり,  $x = x_{i+1/2}$  を代入すると,

$$u_{L_{i+1/2}} = u_{R_{i+1/2}} = u_{i+1/2} = u_i + \Delta x_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} - \frac{\Delta x_{i+1} \Delta x_i}{\sum_{k=i-1}^{i+2} \Delta x_k} \left[ \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\sum_{k=i}^{i+2} \Delta x_k} \left( \frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) + \frac{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}}{\sum_{k=i-1}^{i+1} \Delta x_k} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) \right]. \quad (188)$$

Colella and Woodward (1984) ではこれを以下のように書き変えた.

$$u_{i+1/2} = u_i + \Delta x_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} + \frac{1}{\sum_{k=i-1}^{i+2} \Delta x_k} \times \left[ \frac{2\Delta x_i \Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \left( \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i} - \frac{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}}{2\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \right) (u_{i+1} - u_i) - \Delta x_i \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i} \delta u_{i+1} + \Delta x_{i+1} \frac{\Delta x_{i+2} + \Delta x_{i+1}}{2\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} \delta u_i \right], \quad (189)$$

ここで  $\delta u_i$  は

$$\delta u_i = \frac{\Delta x_i}{\sum_{k=i-1}^{i+1} \Delta x_k} \left( \frac{\Delta x_i + 2\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i+1} + \Delta x_i} (u_{i+1} - u_i) + \frac{2\Delta x_{i+1} + \Delta x_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} (u_i - u_{i-1}) \right). \quad (190)$$

$\delta u_i / \Delta x_i$  は  $i$  番目のセルを  $u_{i-1}, u_i$ , 及び  $u_{i+1}$  を用いて放物線で補間した場合のセル両端の値から出した平均値であるので式 (170) を不等間隔メッシュにした場合の  $(x - x_i)$  の係数と一致する<sup>3</sup>.

更に, 補間関数がセル内で極値を持つ場合などは単調性が保てない場合があるため,  $u_{i+1/2}$  が  $u_i$  と  $u_{i+1}$  の間にあるように,  $\delta u_i$  を

$$\delta_m u_i = \min(|\delta u_i|, 2|u_i - u_{i-1}|, |u_{i+1} - u_i|) \text{sign}(\delta u_i) \quad \text{if } (u_{i+1} - u_i)(u_i - u_{i-1}) > 0, \\ = 0 \quad \text{otherwise} \quad (191)$$

<sup>3</sup> $F(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2$  に対して  $(F(x_{i+1/2}) - F(x_{i-1/2})) / \Delta x_i = \partial F / \partial x|_{x=x_i} = a_1$ .

と置きかえる．更に，接触不連続面近傍，衝撃波面近傍で補正を行い，単調性が成り立つように考慮して最終的な  $(u_L)_{i+1/2}, (u_R)_{i+1/2}$  が得られる．

これらの他に，TVD 条件よりもゆるやかな制限を考慮した，ENO(Essentially Non-Oscillatory) スキーム (Harten et al., 1987) の発展形である WENO (Weighted ENO) スキーム (Suresh and Huynh (1997), Balsara and Shu (2000)) を採り入れているグループもある．ENO は近傍 3 点を用いた 3 次精度を与えるスキームであるが，5 次精度の WENO では更に前後 1 点をずらして 3 つの補間関数の平均によって補間を考える．合計 5 点で領域を補間し，領域がスムーズである場合は 5 次精度となる．不連続面の近傍などでは変化が大きくなる補間部分の寄与を小さくして，安定に解けるように工夫がされる．

## 14 境界条件

流体方程式の時間発展問題は初期値境界値問題であるので，各ステップ毎に境界条件によって空間メッシュの端に隣接するメッシュに物理量を与える必要がある．このメッシュのことを ghost mesh などと呼ぶ．

境界条件には，自由境界，反射境界，周期境界，固定端条件などが考えられる．自由境界では境界を挟んで物理量に勾配が無いとするのが一般的である（計算領域の端の物理量をそのままコピーする）．反射境界では境界面に垂直方向の速度のみ符合を反転させ，その他の物理量に関しては自由境界と同じ扱いをするのが一般的である．

## 15 クーラン条件による時間ステップの制限

先に見てきたように，流体方程式系では情報が各セルの特性速度で隣のセルに特性量運び影響を及ぼす．数値流束で物理量のやりとりをするのは 1 回の時間積分では直接隣接するメッシュだけであり，時間 1 ステップで 2 メッシュ以上隣のメッシュとの情報のやりとりはできない．そこで特性速度の絶対値 ( $|\lambda_{\max}|$ ) と空間メッシュ幅 ( $\Delta x$ ) との比は 1 を超えてはならない．

$$\Delta t = C \frac{\Delta x}{|\lambda_{\max}|}, \quad (192)$$

ここで  $C$  は  $0 < C < 1$  を満たす定数で，このように時間ステップに制限がかかる．CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy Condition) あるいは単にクーラン条件と呼ばれる<sup>4</sup>． $C$  は 1 に近い方が時間ステップ巾が稼げ，計算コストが軽減するが，流束の導出に用いるスキーム，高次精度化の手法によって安定性の範囲が変化する． $C$  の値はどの程度がいいかはテスト計算などで経験的に決めることになる．通常は  $C = 0.1 \sim 0.5$  程度の値が採用される．

---

<sup>4</sup>図 6 の estimate timestep に相当

## 16 保存量から基本量の導出

相対論的流体方程式を数値的に解く場合、各時間ステップ毎に保存量が更新される。次の時間ステップの数値流束を求める時に基本量が必要となってくる。つまり保存量ベクトル  $u$

$$u = (\rho W, \rho h W^2 v^1, \rho h W^2 v^2, \rho h W^2 v^3, \rho h W^2 - \rho W)^T \quad (193)$$

から基本量ベクトル

$$w = (\rho, p, v^1, v^2, v^3)^T \quad (194)$$

を求めなければならない<sup>5</sup>。非相対論的方程式の場合、保存量ベクトルは  $u_{NR} = (\rho, \rho v, \rho v^2/2 + \rho \epsilon)^T$  であるから、質量密度 ( $\rho$ ) は時間積分によって直接求まり、それと運動量密度 ( $\rho v$ ) から速度の各成分がすぐに求められる。内部エネルギー密度 ( $\rho \epsilon$ ) は、全エネルギー密度から運動エネルギー密度を引くことによって簡単に求められる。

しかし、相対論的流体の場合ローレンツ因子  $W$  の中に速度の全成分がはいってくるため容易には求まらない。また、運動量密度に熱的エネルギーの指標である単位質量あたりのエンタルピー  $h$  がカップルしており、非相対論的な場合と大きく異なる点である。これらの非線形性がたたく複雑性から保存量から基本量を解析的、あるいは収束計算を用いて求める様々な方法が考案されている ((Eulderink and Mellema, 1995), Aloy et al. (1999), Zenitani et al. (2009))。Eulderink and Mellema (1995) では 4 次方程式を解くことによって保存量から基本量を出す試みがなされている。Zenitani et al. (2009) でも 4 次方程式を解くが方程式の解の導出法が工夫されている。ここでは Newton-Raphson 法を用いる Aloy et al. (1999) の方法について述べる。

理想気体の状態方程式  $p = (\gamma - 1)\rho \epsilon$  の場合を紹介する。一般的状態方程式の場合もこの拡張が適用される。流体方程式の時間積分より、

$$u = (D (\equiv \rho W), S (\equiv \rho h W^2 v), \tau (\equiv \rho h W^2 - p - \rho W))^T, \quad (195)$$

という、保存量  $D, S, \tau$  が更新される。ここで、

$$f(p) = (\gamma - 1)\rho_* \epsilon_* - p, \quad (196)$$

ただし、

$$\rho_* = \frac{D}{W_*}, \quad (197)$$

$$\epsilon_* = \frac{\tau + D(1 - W_*) + p(1 - W_*^2)}{DW_*}, \quad (198)$$

$$W_* = \frac{1}{\sqrt{1 - v_* v_*}}, \quad (199)$$

$$v_* = \frac{S}{\tau + D + p}, \quad (200)$$

と置く。  $f(p)$  は時間更新された保存量と未知変数  $p$  の関数である。  $f(p) = 0$  となるような  $p$  が求めるべき圧力であり、これを Newton-Raphson 法によって求める。ただし、  $p > 0$  という物理的要請から  $p_{\min} = |S| - \tau - D$  という条件が課せられる。また、  $f$  の微分には

$$f' = |S_*|^2 c_{s_*}^2 - 1, \quad (201)$$

<sup>5</sup>図 6 の primitive recovery に相当

という近似式を用いる。Newton-Raphson 法では first guess が必要であるが前のステップの  $p$  を用いることが多い。

$p$  が求まれば、上で定義した\*付きの標識を適用していき、新しい基本量が求められる。

Newton-Raphson 法では、first guess や関数の形によっては解が収束しない場合もあり、数値流体計算で最もトラブルが起きやすい部分である。特に基本量では物理的な要請から質量密度、圧力は正でなければならないし、相対論的な場合では、3 元速度の各成分は光速よりも小さくなくてはならない。

特に保存形の方方程式を差分しているため超音速流においては、負の圧力が現れやすい。これは、非相対論的な場合の基本量の導出で説明したように内部エネルギー密度 ( $\rho\epsilon = p/(\gamma - 1)$ ) を全エネルギー密度 ( $\rho v^2/2 + \rho\epsilon$ ) から運動エネルギー密度 ( $\rho v^2/2$ ) を引くことによって求めるためである。超音速流では全エネルギー密度と運動エネルギー密度はほぼ同程度であり、桁落ちなどから負の内部エネルギー密度が現れることがあるためであり、保存形の差分式を用いるデメリットの一つとなっている。

## 17 非デカルト座標系

今まではデカルト座標系で考えてきたが、以上の定式化は円柱座標系、極座標系などにも簡単に応用できる。ここでは、流体方程式を円柱座標系、極座標系に書き下すことを考える<sup>6</sup>。

### 17.1 円柱座標系

円柱座標系での流体方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\mathbf{f}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} = \mathbf{s}, \quad (202)$$

と書ける。保存量ベクトル、流束ベクトルの表式はデカルト座標の時と同様にかける、しかし、運動量保存の式にはソース項がでてくる。これは方程式の座標変換を時空の変換と考えれば、クリストッフェル記号を用いて計算ができる。簡単には円柱座標系での運動量流束テンソル (相対論的にはエネルギー運動量テンソルの空間成分) の円柱座標系での発散と考えれば良い<sup>7</sup>。よって、ソース項は

$$\mathbf{s} = \left( 0, \frac{1}{r} (\rho h W^2 v_\varphi^2 + p), -\frac{1}{r} \rho h W^2 v_r v_\varphi, 0, 0 \right)^T. \quad (203)$$

<sup>6</sup>航空宇宙工学の分野では航空機などの曲がった境界条件を扱うため、実空間には一般曲線座標がはられ、計算空間は直行座標系で行い、両者を Jacobian 行列を用いて結びつけるが本質的には同じ事を行っている

<sup>7</sup>円柱座標系での  $3 \times 3$  テンソル  $T$  の発散は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot T)_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_{\varphi r} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zr} - \frac{T_{\varphi\varphi}}{r} \\ (\nabla \cdot T)_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_{z\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} T_{z\varphi} + \frac{T_{\varphi r}}{r} \\ (\nabla \cdot T)_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_{\varphi z} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{aligned}$$

となる．積分形の差分は以下のようにとれる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{i,j,k}^{n+1} &= \mathbf{u}_{i,j,k}^n \\
&- \frac{1}{r_{i,j,k}} \left( r_{i+1/2,j,k} \tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2,j,k} - r_{i-1/2,j,k} \tilde{\mathbf{f}}_{i-1/2,j,k} \right) \frac{\Delta t}{\Delta r} \\
&- \frac{1}{r_{i,j,k}} (\tilde{\mathbf{g}}_{i,j+1/2,k} - \tilde{\mathbf{g}}_{i,j-1/2,k}) \frac{\Delta t}{\Delta \varphi} \\
&- (\tilde{\mathbf{h}}_{i,j,k+1/2} - \tilde{\mathbf{h}}_{i,j,k-1/2}) \frac{\Delta t}{\Delta z} \\
&+ \mathbf{s}_{i,j,k} \Delta t.
\end{aligned} \tag{204}$$

数値流束に関しては直交座標系と同じものが使える．また，ソース項はセル内の平均値を用いる．

## 17.2 極座標系

極座標系での流体方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{f}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \mathbf{g}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{h} = \mathbf{s}, \tag{205}$$

と書ける．円柱座標系の時と同様に運動量保存の式にソース項があり，これは極座標系でのテンソルの発散を考えればよい<sup>8</sup>．よって，ソース項  $\mathbf{s}$  は

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} = \left( 0, \frac{1}{r} (2p + \rho h W^2 v_\theta^2 + \rho h W^2 v_\varphi^2), \frac{1}{r} (\rho h W^2 v_\theta v_r - \cot \theta (\rho h W^2 v_\varphi^2 + p)), \right. \\
\left. \frac{\rho h W^2}{r} (v_\varphi v_r + \cot \theta v_\varphi v_\theta), 0 \right)^T.
\end{aligned} \tag{206}$$

となる．積分形の差分も直交座標系，円柱座標系の時と同様に取れる．

## 18 時間高次精度化

これまでの差分式では時間積分に関して 1 次精度のものを示してきた．空間を高次精度化すると，時間方向にも同程度高次精度化しなければ解が安定しない．時間高次精度化に対してもいくつかのスキームが考えられているが，ここでは最もよく用いられている TVD-Runge-Kutta 法による時間高次精度化を試みる．

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \Delta t L(\mathbf{u}^n). \tag{207}$$

ここで上付き添字は時間ステップ数を示す． $L(\mathbf{u})$  は 1 次元 plane の場合

$$L(\mathbf{u}) \equiv \frac{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u})_{i+1/2} + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u})_{i-1/2}}{\Delta x_i}, \tag{208}$$

<sup>8</sup>極座標系での  $3 \times 3$  テンソル  $T$  の発散は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot T)_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_{\varphi r} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\varphi\varphi}}{r} \\
(\nabla \cdot T)_\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_{\varphi\theta} + \frac{T_{\theta r}}{r} - \frac{\cot \theta T_{\varphi\varphi}}{r} \\
(\nabla \cdot T)_\varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} T_{\varphi\varphi} + \frac{T_{\varphi r}}{r} + \frac{\cot \theta T_{\varphi\theta}}{r}
\end{aligned}$$

ここで下付き添字は空間グリッドを示す. TVD Runge-Kutta 法は Shu and Osher (1988) によって提唱された. 時間 1 次精度を得るには,

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^n + \Delta t L(\mathbf{u}^n). \quad (209)$$

とし,  $\mathbf{u}^{(1)}$  を  $\mathbf{u}^{n+1}$  と置き換えればよい. ここで,  $\mathbf{u}^{(1)}$  の上付き添字は Runge-Kutta 法の間状態のステップ数を示し, 時間ステップと区別するため括弧付きとしている.

時間 2 次精度では,

RK2 (2nd order accuracy)

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{(1)} + \Delta t L(\mathbf{u}^{(1)})). \quad (210)$$

時間 3 次精度では,

RK3 (3rd order accuracy)

$$\mathbf{u}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{u}^n + \frac{1}{4}(\mathbf{u}^{(1)} + \Delta t L(\mathbf{u}^{(1)})), \quad (211)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{u}^n + \frac{2}{3}(\mathbf{u}^{(2)} + \Delta t L(\mathbf{u}^{(2)})). \quad (212)$$

高次精度を適用した場合,  $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$  を求めた際に, 基本量  $\rho$ ,  $p$ ,  $v$  の導出を行わなければならない, より高次精度を適用するとその分計算コストも増加する.

## 19 数値計算コードテスト

コード開発が終われば具体的な応用問題に入る前にコードのテストを行なってコードが正しく組んでいるかを確認する. 流体方程式は非線形方程式であるために解析的な解が得られている問題はあまりなく特に多次元問題では定性的なふるまいをみたり, 他のスキーム, あるいは他のグループが開発したコードで行なった結果と比較するようなことが行われる.

以下で典型的なテスト計算問題とその結果に関して紹介する. Zhang and MacFadyen (2006) では他にも多くのテスト計算がされており, そちらも参照されたい.

### 19.0.1 1次元衝撃波管問題

$x$  方向に不連続があるような初期値での衝撃波管問題を解いた. 衝撃波面, 接触不連続面, 膨張波という全ての波が現れるため, コードのテスト問題の中でも最も基本的な問題であり, コードが完成した時に最初に行うべき問題である. 解析解は Martí and Müller (2003) に掲載されている計算コードより求めた. 下記の典型的な 2 つの初期条件を用いた.

- Shock tube A (plane) : 400 uniform grid points  
 Left state ( $0 < x < 0.5$ );  $\rho_L = 10, p_L = 13.3, v_{xL} = 0, v_{yL} = 0, \gamma_L = 5/3$   
 Right state ( $0.5 < x < 1$ );  $\rho_R = 1, p_R = 1 \times 10^{-6}, v_{xR} = 0, v_{yR} = 0, \gamma_R = 5/3$

- Shock tube B (plane) : 400 uniform grid points  
 Left state ( $0 < x < 0.5$ );  $\rho_L = 1, p_L = 1000, v_{xL} = 0, v_{yL} = 0, \gamma_L = 5/3$   
 Right state ( $0.5 < x < 1$ );  $\rho_R = 1, p_R = 0.01, v_{xR} = 0, v_{yR} = 0, \gamma_R = 5/3$

これを Marquina の流束式を用いて空間，時間共に 1 次精度で解いたものが図 13(a),14(a) である．実線で示した解析解と比べると衝撃波面が不連続面でなく大きくなまってしまっているのが分かる．Shock tube B では非常に薄い衝撃波圧縮領域を捕らえられていない．また，膨張波の先端にあたる  $x = 0.2$  あたりも大きく解析解からずれている．初期不連続面 ( $x = 0.5$ ) にはエントロピー則を守る補正がされていないために，なめらかになっていない．同じ問題を MUSCL 補間によって空間 2 次精度に上げたものが図 13(b),14(b) であり，数値解は劇的に改善されている．

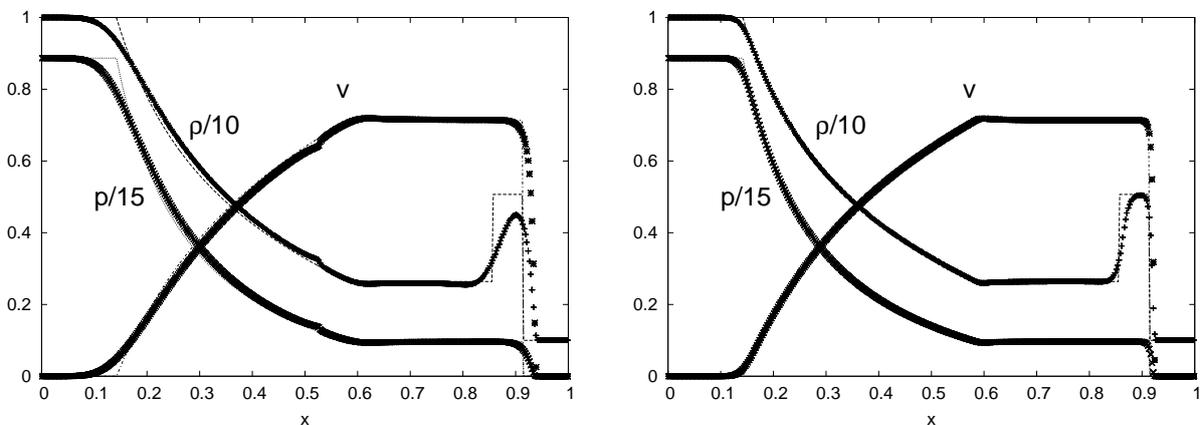


図 13: 衝撃波管問題 (shock tube A) の密度，圧力， $x$  方向の速度分布 ( $t=0.5$ ) . (a) 時間，空間 1 次精度，(b) 時間 1 次精度，空間 2 次精度．点線，破線，一点鎖線は解析解．

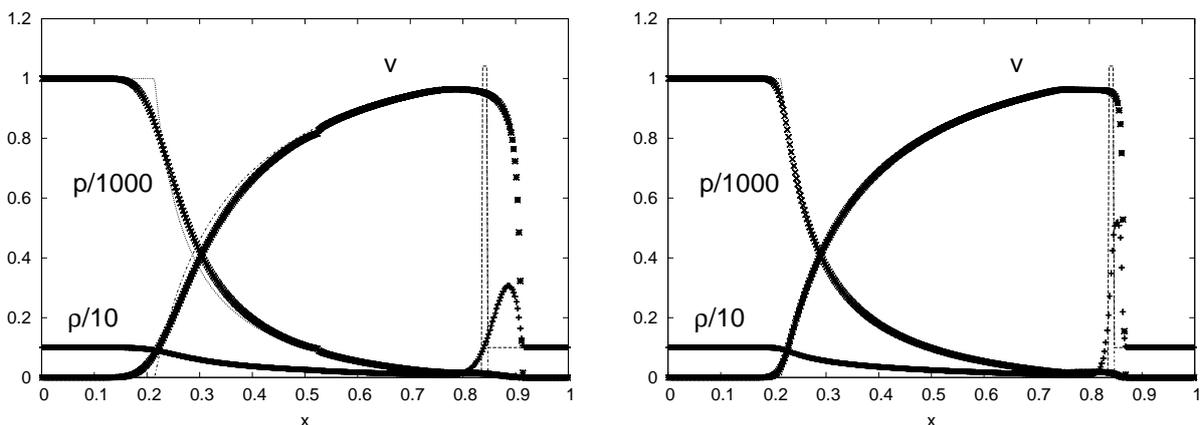


図 14: 衝撃波管問題 (shock tube B) の密度，圧力， $x$  方向の速度分布 ( $t=0.35$ ) . (a) 時間，空間 1 次精度，(b) 時間 1 次精度，空間 2 次精度．点線，破線，一点鎖線は解析解．

shock tube A に関していくつかの解像度(メッシュ数), 数値流束, 補間法で行なったものを  $L_1$  norm で誤差の比較, 評価した.  $L_1$  norm ( $L(u)$ ) の定義は,

$$L(u) = \sum_i |u_i - u_i^{\text{exact}}| \Delta x_i, \quad (213)$$

ここで,  $u$  はエラーを評価する物理量で密度, 圧力, 速度, や保存量などが考えられる. また,  $u_i$  は  $x = x_i$  での数値解,  $u_i^{\text{exact}}$  は  $x = x_i$  での解析解である.

{Marquina 流束式, 空間 2 次精度 (MUSCL+minimod 流束制限関数), 時間 2 次精度}

{Marquina 流束式, 空間 3 次精度 (PPM 補間), 時間 3 次精度}

{HLL 流束式, 空間 2 次精度 (MUSCL+minimod 流束制限関数), 時間 2 次精度}

{MUSTA 流束式 (4 ステップ), 空間 2 次精度 (MUSCL+minimod 流束制限関数), 時間 2 次精度}

メッシュは等間隔で 200,400,800,1600 と変化させた. 図 15 は shock tube A に関して密度の  $L_1$  norm をメッシュ数の関数として表示した.  $L_1$  norm は同じスキームでも解像度が上がるにつれ小さくなる. 衝撃波面や接触不連続面があるためにそこで精度が落とされるために, 2 次精度, 3 次精度のスキームを用いても概ね 1 程度の収束レートしか出ていない. 各スキームを見てみると, 時間, 空間共に 3 次精度にしたものが, 絶対値も小さく, 収束レートもやや良い結果が得られている.

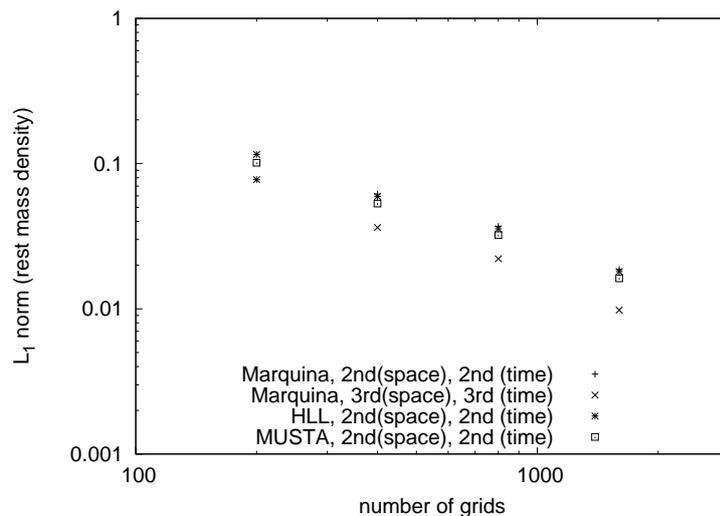


図 15:  $L_1$  norm の解像度, スキーム依存性. shock tube A の密度に関してとった.

### 19.1 垂直方向に速度を持った場合の衝撃波管問題

先ほどの例では運動が  $x$  方向のみであったが, 初期に  $x$  軸に垂直方向 ( $y$  方向とする) に速度がある場合も初期条件が左右それぞれで一定速度であれば Riemann 問題である. 特に相対論的流体の場合,  $y$  方向の運動が 0 でない場合, ローレンツ因子を介して  $x$  方向の運動に影響を及ぼす.  $y$  方向の速度が 0 でない場合の解析解が Pons et al. (2000) で議論され,  $y$  方向の速度によっては解の振る舞いが大きく変わることが Rezzolla and Zanotti (2002) によって指摘された.

- Shock tube C (plane) uniform 400 grid points

Left state ( $0 < x < 0.5$ );  $\rho_L = 1.0, p_L = 1000.0, v_{xL} = 0, \gamma_L = 5/3$

Right state ( $0.5 < x < 1$ );  $\rho_R = 1.0, p_R = 1 \times 10^{-2}, v_{xR} = 0, \gamma_R = 5/3$

とし,  $v_{yR}, v_{yL}$  を独立にそれぞれ 0, 0.9, 0.99 変化させ計 9 パターンに対して比較をする.  $v_{yR} = 0, v_{yL} = 0$  の問題は shock tube A と同じ問題である. 図 16 はそれぞれの  $t = 4.0$  での密度, 圧力, 速度の  $x$  成分であり, 実線は Martí and Müller (2003) で添付されているコードで計算した解析解である.

左上の速度の  $y$  成分が左右共に 0 である場合を除き, 衝撃波面, 接触不連続面で解析解と大きな隔たりが見られる. この数値的エラーの原因は完全には理解されていない. この問題では  $hWv_y$  は接触不連続面と同様に  $v_x$  で運ばれる<sup>9</sup>ため, 初期の  $hWv_y$  の不連続が接触不連続面に現れるが, 数値的に熱 (比エンタルピー  $h$ ) と運動速度 ( $Wv_y$ ) が分離ができていない可能性がある. この問題は数値流束を変えても解決しない. 本稿では紹介しなかったが Glimm の方法を相対論的流体方程式に適用すると, 問題が生じないことが報告されている (Cannizzo et al., 2008) が, この手法は多次元問題に適用するのが難しく現実的ではない. 解像度を上げると数値的エラーが減少することが知られており,  $v_{yL}, v_{yR} = (0.9, 0.9)$  の場合に対してメッシュ数を増やしていくと, 解析解が再現される様子を図 17 に示した.

### 19.1.1 1次元反射衝撃波問題

反射衝撃波問題は, 初期に低温で超音速の一様流が壁あるいは中心で反射し, 反射衝撃波が生じる問題である. この問題は強い衝撃波を捕えることができるかを確認する上で重要である. 解析解は Johnson and McKee (1971) で導出されている Rankine-Hugoniot の関係式より求められる (5.3 節). 初期条件はそれぞれ,

- REP

$\rho_0 = 1.0, \epsilon_0 = 10^{-4}, v_0 = -0.999(\Gamma_0 = 22), \gamma = 4/3$ , Cartesian

- REC

$\rho_0 = 1.0, \epsilon_0 = 10^{-4}, v_0 = -0.999(\Gamma_0 = 22), \gamma = 4/3$ , Cylindrical

- RES

$\rho_0 = 1.0, \epsilon_0 = 10^{-4}, v_0 = -0.999(\Gamma_0 = 22), \gamma = 4/3$ , Spherical

時刻  $t = T$  での解析解は,

$$\rho = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(\Gamma_0 - 1) \right) \rho_0, \epsilon = \Gamma_0 - 1, v = 0, \text{ for } x < V_s T \text{ or } r < V_s T \quad (214)$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{|v_0|t}{x} \right)^\alpha, \epsilon \sim 0, v = v_0, \text{ for } x > V_s T \text{ or } r > V_s T, \quad (215)$$

ここで  $V_s$  は衝撃波面の速度で

$$V_s = \left( \frac{\Gamma_0 - 1}{\Gamma_0 + 1} \right)^{1/2} (\gamma - 1). \quad (216)$$

<sup>9</sup>多次元の場合の特性速度が  $v_x$  (3 重解) であったが 1 つはエントロピー波, 他の 2 つが  $hWv_y, hWv_z$  を運ぶシアー波のモードに対応している

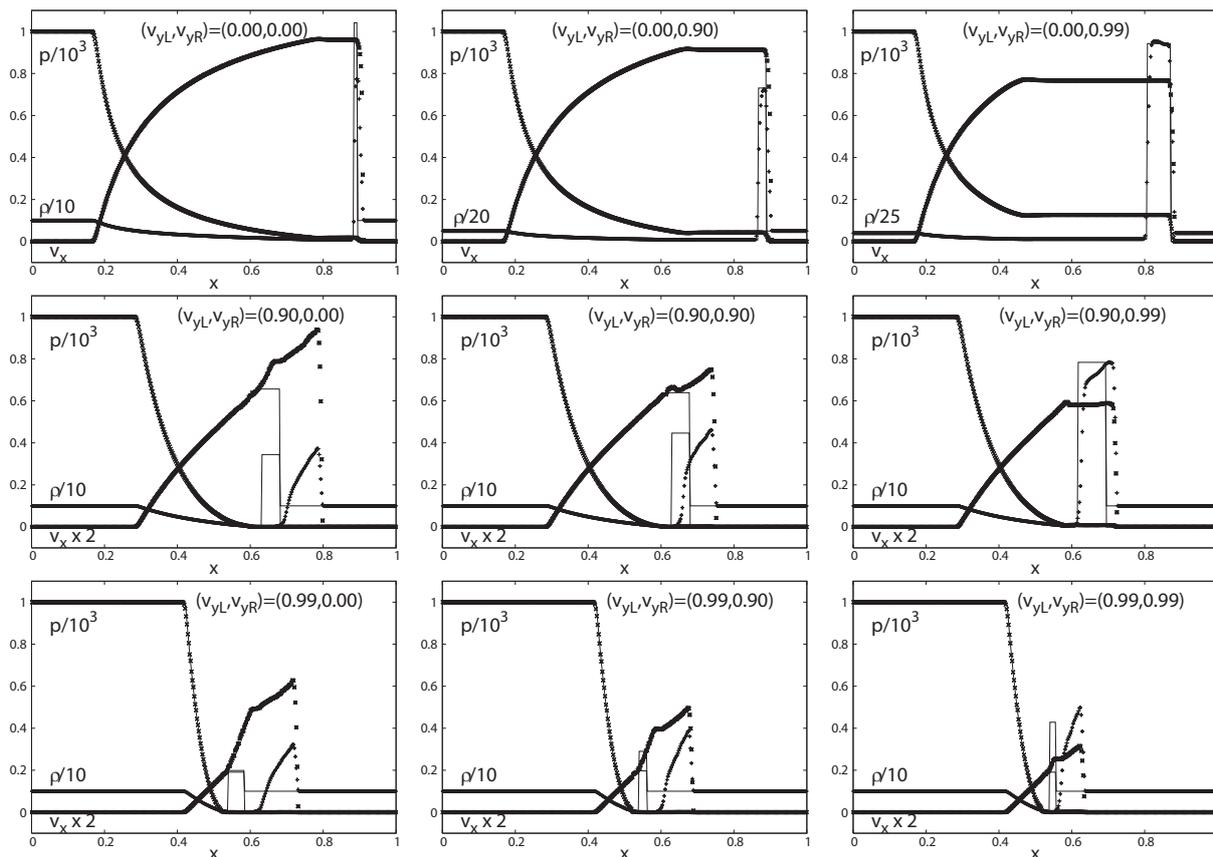


図 16: 不連続面に平行な速度を持った場合の衝撃波問題． $v_{yR}, v_{yL}$  を独立にそれぞれ 0, 0.9, 0.99 変化させた．密度，圧力， $x$  方向の速度分布．実線は解析解．

$\alpha$  は Cartesian の場合 0, Cylindrical の場合 1, Spherical の場合 2 である．

等間隔 400 メッシュ, PPM 補間法によって空間 3 次精度, TVD-RUNge-Kutta 法によって時間 3 次精度, 数値流束には Marquina の流束式を用いて計算した結果が図 18 である．(a) Cartesian, (b) Cylindrical, (c) Spherical の場合であり, 密度, 圧力, 速度をかいた．実線の解析解とよい一致を示している．Cartesian 以外で顕著であるが,  $r = 0$  が特異点となっているため  $r = 0$  付近のみ密度, 圧力が解析解から数%程度ずれている．これは Noh (1987) でも議論された wall heating 現象である．Cartesian 以外の場合, 特異点を計算領域に含めず計算境界を少し外側にとると改善されるが, 根本的な解決法はない．

図 18 は Cartesian と同じ条件で流入速度を変化させた時の密度分布を示したものである．速度が増加するにつれ, ローレンツ因子は増加していくが, 7 万以上のローレンツ因子も精度よく扱えているのが分かる．

## 20 2次元衝撃波管問題

空間多次元の問題に対しては残念ながら解析解が求められる問題が非常に少ないために, テスト計算結果を解析解と比べるということはあまり行われず, 他のグループの結果と比較するようなことが行われる．ここで紹介する 2次元衝撃波管問題以外にも斜め衝撃波問題や Emery のステップ問題など

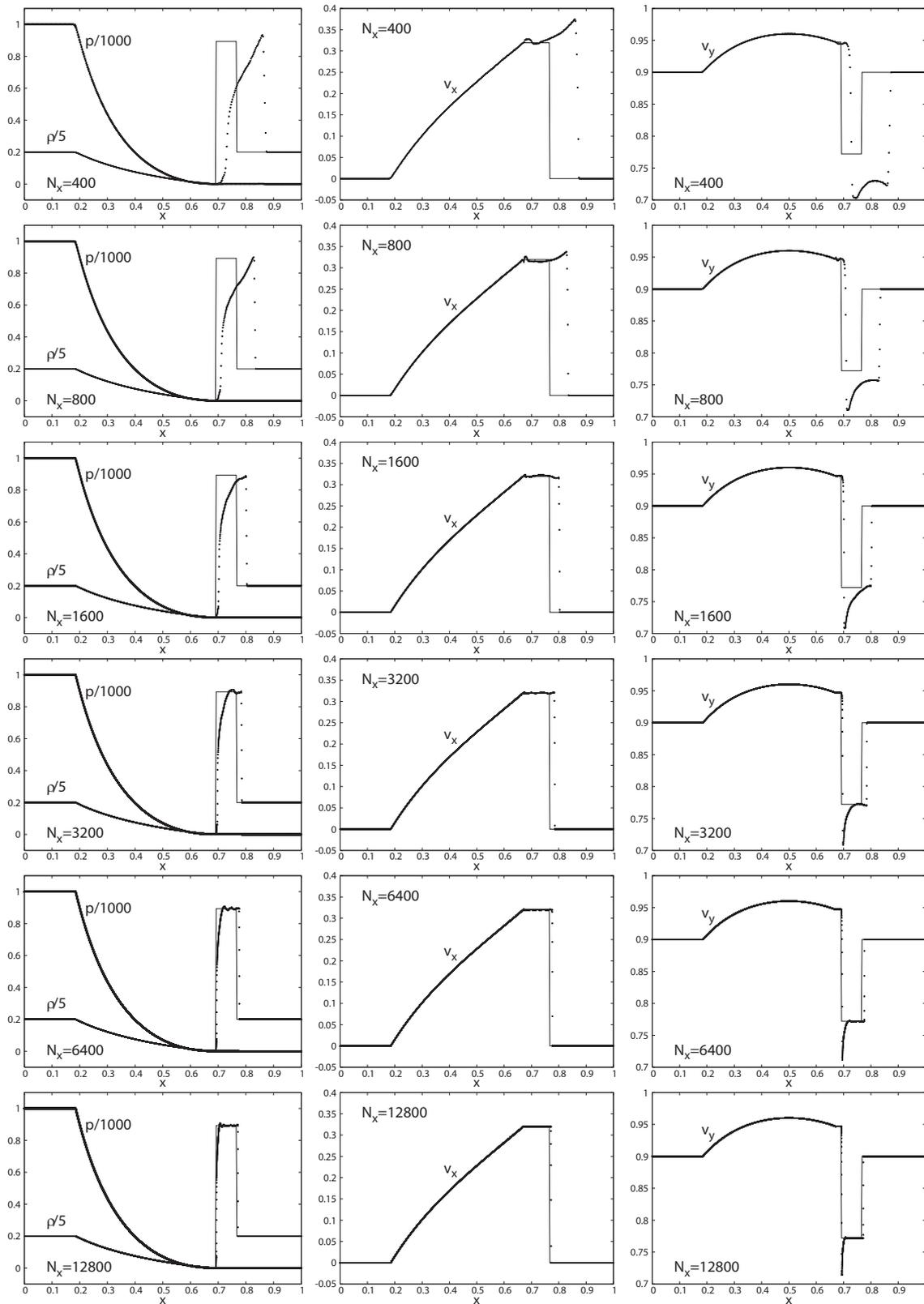


図 17: shock tube C,  $(v_{yL}, v_{yR}) = (0.9, 0.9)$  の解像度依存性 (数値解 (点) と解析解 (実線)) . 上からメッシュ数 400, 800, 1600, 3200, 6400, 12800 である . 左から密度と圧力 ,  $x$  方向の速度 ,  $y$  方向の速度 . (Mizuta et al. (2006) より . Reproduced by permission of the AAS)

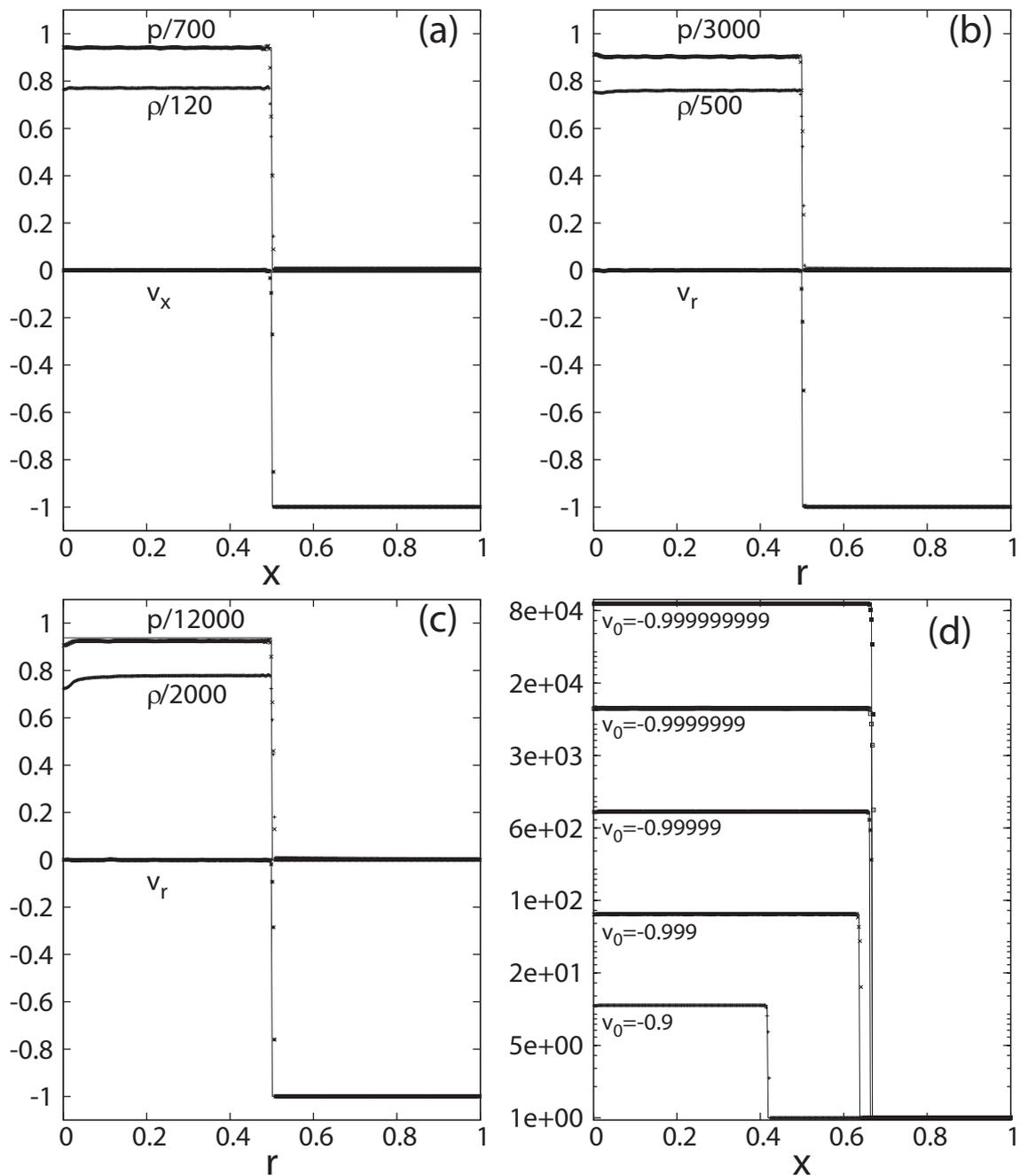


図 18: 反射衝撃波問題, (a)Cartesian, (b)Cylindrical, (c)Spherical の場合の密度, 圧力, 速度 ( $t = 1.57$ ). 実線は解析解. (d) は Cartesian の場合に流入速度  $|v_0|$  を変化させた場合の密度 (全て  $t = 2$ ). (Mizuta et al. (2006) より. Reproduced by permission of the AAS)

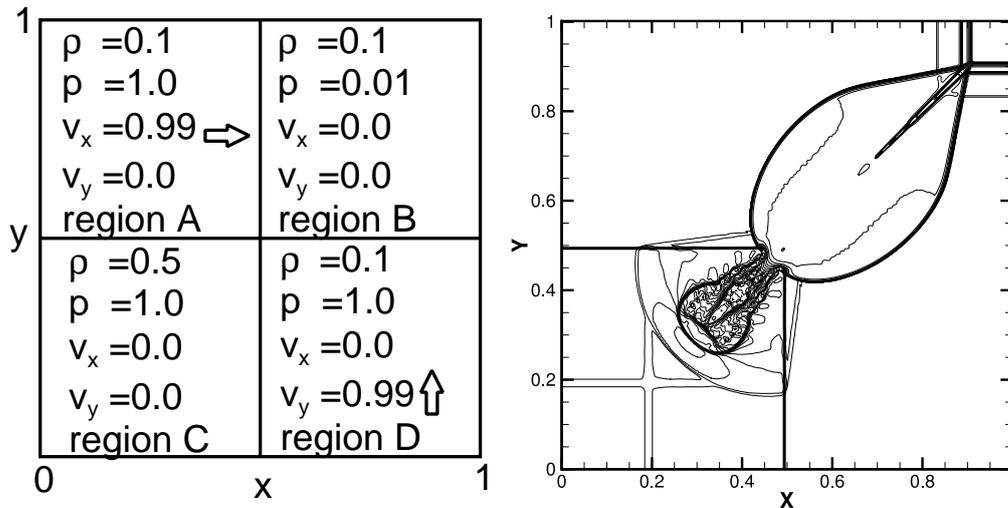


図 19: 2次元の衝撃波管問題の初期条件 (左) と  $t = 0.4$  での密度等高線 (右, 対数スケールで等間隔の 30 本) . (Mizuta et al. (2006) より . Reproduced by permission of the AAS)

がよく行われる .

2次元の衝撃波管問題は図 19 左に示すような初期に 4 分割された領域 A-D でそれぞれ一様な状態を考える .

$$\begin{aligned}
 (\rho, v_x, v_y, p) &= (0.10, 0.00, 0.00, 0.01) : 0.5 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1 \text{ (region A)}, \\
 (\rho, v_x, v_y, p) &= (0.10, 0.99, 0.00, 1.00) : 0 \leq x \leq 0.5, 0.5 \leq y \leq 1 \text{ (region B)}, \\
 (\rho, v_x, v_y, p) &= (0.50, 0.00, 0.00, 1.00) : 0 \leq x \leq 0.5, 0 \leq y \leq 0.5 \text{ (region C)}, \\
 (\rho, v_x, v_y, p) &= (0.10, 0.00, 0.99, 1.00) : 0.5 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5 \text{ (region D)}.
 \end{aligned}$$

図 19 右は 2次元の衝撃波管問題の  $t = 0.4$  での対数スケールで等間隔にした密度等高線 (30 本) である . region B には region A, D から超音速流が流れ込むために対角線上で時々刻々両者がぶつかり反射衝撃波が弧を描くように生じる . 右上部分には衝突前の衝撃波面が  $x, y$  軸に平行に見られる . 反射衝撃波によって高圧部分が生じ region C に対角線上に膨張する成分が見られる . region A と C, 及び region C と D の間は初期に圧力平衡で不連続面の垂直方向の速度の跳びが無いために接触不連続面となっている . 計算は Marquina の流束式を用いたために接触不連続面で物理的には生じない数値的な音波が発生し , region C の  $x = 0.2, y = 0.2$  近くに筋状の波が見える . Roe スキームなど接触不連続面で数値的な音波を生じないスキームではこのような音波起源の波は生じない .

region B, と C を通る対角線に対して対称なので対称性を見て  $x, y$  各方向同じ計算ができているかというチェックもできる .

## 21 最後に

相対論的流体方程式の数値解法と題して3回に渡って数値計算法の解説をした．第一回では相対論的流体の諸性質，特に数値計算スキームで重要となる特性線の考えを導入した．第二回では離散化した空間メッシュに対して隣接セル間で Riemann 問題を考えることによって，数値流束を与えるゴドノフタイプのスキームを紹介した．第三回となる本稿では離散化した空間分布を注目するセルの近傍の点の値を用いて補間し，高次精度化することを考えた．最後にテスト計算例を示した．

数値計算法に主眼をおいたため，コードをアプリケーションとして使ってどのような計算が行われているかには言及ができなかったが，計算法の改善，大型計算機の進歩と共に2000年代に入ってから幅広い問題に応用されている．

数値計算法のベースとなる部分は非相対論的流体方程式に対して提唱されたものを用い，それを応用する形で使われてきている．数値解法にはスキームの弱点を補うためにさまざまな補正がなされているが，本稿ではそこまで踏み込んだ議論には至らなかった．相対論的流体方程式の非線形性のために保存量から基本量の導出が困難であったり，衝撃波伝搬方向に対して垂直方向に速度がある場合の衝撃波管問題で大きな数値エラーが現れるなど相対論的流体方程式特有の困難，問題も存在し，今後さらなるスキームの改善，改良が期待される．

本稿で紹介したように流体方程式の解法にはさまざまなものが提唱され，HLLCスキームなど2000年代に入ってから登場したものであり，今後も新しい手法の開発が期待される．相対論的強い衝撃波による圧縮のために非常に薄い構造が現れやすい．この構造を解像するためには高い解像度が必要であるが，計算コストを軽減させるために，時間的空間的に局所的に不連続面が生じる部分に高解像度を与えるAMR(Adaptive Mesh Refinement)法もいくつかのグループがとりいれている(Zhang and MacFadyen (2006))．

また，本稿では特殊相対論的流体に話を絞ったが，様々な物理を加えるという応用も活発にされている．強い重力場の周りで重要となってくる一般相対論的効果を取りいれてるためアインシュタイン方程式と曲がった時空での流体を扱う数値相対論は古くから研究されており，近年はブラックホールの誕生を数値的に扱うことができるようになった(例えばFont (2008), Shibata (2003))．相対論的磁気流体方程式も近年格段に数値解法が改良され(例えばGammie et al. (2003), De Villiers and Hawley (2003), Del Zanna et al. (2003))活発に研究が行われている．本稿では粘性など拡散的な物理を考えなかったが，散逸を取り入れた場合のスキームの研究も行われ始めている(例えばTakamoto and Inoue (2011))．

## 謝辞

本原稿は第一回の冒頭の脚注にもあったように「新学術領域：素核宇宙融合による計算科学に基づいた重層的物質構造の解明」における勉強会のレジюмеとして用意されたものに加筆訂正をしたものである．非相対論的流体方程式の数値解法に関しては，良書が数多く出されており，また，大学での講義用，研究解説用のドキュメントなどがインターネット検索などから数多く見られる．本稿で紹介したスキームに関する解説，今回紹介できなかったバックグラウンドなどの解析も詳しくされているので参照されたい．相対論的流体方程式の数値解法に関しては，レビュー論文が書かれているものの，

細かい式の導出などは原著論文にあたる必要があるのが現状である．本稿が読者の理解の一助となれば幸いである．

勉強会の参加者からは多くの質問を頂き，本稿向けにレジюмеを改訂するにあたって非常に有益であった．ここに感謝の意を表す．説明不足な点を補足できた部分もあるが，専門的すぎる部分が残っているかもしれない．また，私の理解不足で誤った部分等があれば私の責任である．是非お知らせいただきたい．また，レジюмеをもとに本誌への掲載を勧めて頂き，コメントを頂いた編集委員の板倉数記氏 (KEK) に感謝したい．

最後に，数値計算法に関して初歩的なところからさまざまなことを教えて頂いた大西直文，澤田恵介（東北大工），長友英夫（阪大レーザー研），花輪知幸（千葉大），山田章一（早稲田大），Jose M<sup>a</sup>. Ibáñez, Jose M<sup>a</sup>. Martí, Miguel A. Aloy (バアレンシア大), Ewald Müller (MPA) の各氏に心から感謝を申し上げる．

## 参考文献

- Aloy, M. A., Ibáñez, J. M., & Martí, J. M. . 1999, ApJS, **122**, 151-166,  
*GENESIS: A High-Resolution Code for Three-Dimensional Relativistic Hydrodynamics.*
- Balsara, D. S., & Shu, C.-W. 2000, Journal of Computational Physics, **160**, 405-452,  
*Monotonicity Preserving Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes with Increasingly High Order of Accuracy.*
- Cannizzo, J. K., Gehrels, N., & Vishniac, E. T. 2008, ApJ, **680**, 885-896,  
*Glimm's Method for Relativistic Hydrodynamics.*
- Colella, P., & Woodward, P. 1984, J. Comp. Phys., **54**, 174-201,  
*The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations.*
- De Villiers, J.-P., & Hawley, J. F. 2003, ApJ, **589**, 458-480,  
*A Numerical Method for General Relativistic Magnetohydrodynamics.*
- Del Zanna, L., Bucciantini, N., & Londrillo, P. 2003, A&A, **400**, 397-413,  
*An efficient shock-capturing central-type scheme for multidimensional relativistic flows. II. Magnetohydrodynamics.*
- Eulderink, F., & Mellema, G. 1995, A&AS, **110**, 587-623,  
*General Relativistic Hydrodynamics with a Roe Solver.*
- Font, J. A. Stanford Exploration Project Report 2008, Living Reviews in Relativity, **11**, 7,  
*Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity.*
- Gammie, C. F., McKinney, J. C., & Tóth, G. 2003, ApJ, **589**, 444-457,  
*HARM: A Numerical Scheme for General Relativistic Magnetohydrodynamics.*

- Harten, A., Engquist, B., Osher, S., & Chakravarthy, S. R. 1987, *Journal of Computational Physics*, **71**, 231,  
*Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes III.*
- Hirsch, C. 1990, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol.2, John Wiley & Sons, Inc., Chichester.
- Johnson, M. H., & McKee, C. F. 1971, *Phys. Rev. D*, **3**, 858-863,  
*Relativistic Hydrodynamics in One Dimension.*
- Kolgan, V. P. 2011, *J. Comp. Phys.*, **230**, 2384-2390,  
*Application of the principle of minimizing the derivative to the construction of finite-difference schemes for computing discontinuous solutions of gas dynamics.*
- Martí, J. M., & Müller, E. 1996, *J. Comp. Phys.*, **123**, 1-14,  
*Extension of the Piecewise Parabolic Method to One-Dimensional Relativistic Hydrodynamics.*
- Martí, J. M., & Müller, E. 2003, *Living Reviews in Relativity*, **6**, 7-+,  
*Numerical Hydrodynamics in Special Relativity.*
- Mizuta, A., Yamasaki, T., Nagataki, S., & Mineshige, S. 2006, *ApJ*, **651**, 960-978,  
*Collimated Jet or Expanding Outflow: Possible Origins of Gamma-Ray Bursts and X-Ray Flashes.*
- Noh, W. F. 1987, *J. Comp. Phys.*, **72**, 78-120,  
*Errors for Calculations of Strong Shocks Using an Artificial Viscosity and an Artificial Heat Flux.*
- Pons, J. A., Martí, J. M., & Müller, E. 2000, *Journal of Fluid Mechanics*, **422**, 125-139,  
*The exact solution of the Riemann problem with non-zero tangential velocities in relativistic hydrodynamics.*
- Rezzolla, L., & Zanotti, O. 2002, *Physical Review Letters*, **89**, 114501,  
*New Relativistic Effects in the Dynamics of Nonlinear Hydrodynamical Waves.*
- Shibata, M. 2003, *PRD*, **67**, 024033,  
*Axisymmetric general relativistic hydrodynamics: Long-term evolution of neutron stars and stellar collapse to neutron stars and black holes.*
- Shu, C., & Osher, S. 1988, *Journal of Computational Physics*, **77**, 439-+,  
*Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes.*
- Suresh, A., & Huynh, H. T. Stanford Exploration Project Report 1997, *Journal of Computational Physics*, **136**, 83-99,  
*Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge Kutta Time Stepping.*
- Takamoto, M., & Inoue, T. 2011, *ApJ*, **735**, 113,  
*A New Numerical Scheme for Resistive Relativistic Magnetohydrodynamics Using Method of Characteristics.*

- van Leer, B. 1977, J. Comp. Phys., **23**, 276-299,  
*Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection.*
- van Leer, B. 1979, J. Comp. Phys., **32**, 101-136,  
*Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method.*
- van Leer, B. 2011, J. Comp. Phys., **230**, 2378-2383,  
*A historical oversight: Vladimir P. Kolgan and his high-resolution scheme.*
- Zenitani, S., Hesse, M., & Klimas, A. 2009, ApJ, **696**, 1385-1401,  
*Two-Fluid Magnetohydrodynamic Simulations of Relativistic Magnetic Reconnection.*
- Zhang, W., & MacFadyen, A. I. 2006, ApJS, **164**, 255-279,  
*RAM: A Relativistic Adaptive Mesh Refinement Hydrodynamics Code.*
- 大宮司久明, 吉沢徹, 三宅裕 (編集) 1998, 乱流の数値流体力学 モデルと計算法, 東京大学出版会, 東京.
- 藤井孝藏 1994, 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 東京.

## 訂正

第1回, 68 ページ図1 脚注に誤りがありました .

$$\text{(誤)} \quad (\gamma - 1)/\gamma$$

$$\text{(正)} \quad \gamma/(\gamma - 1)$$

第2回, 72 ページ式 (132) に誤りがありました .

$$\text{(誤)} \quad \mathbf{f}_{M2}^l = \frac{1}{2} \left( \mathbf{f}_L^l \mathbf{f}_R^l - \frac{\Delta x}{\Delta t} (\mathbf{f}_R^l - \mathbf{f}_L^l) \right)$$

$$\text{(正)} \quad \mathbf{f}_{M2}^l = \frac{1}{2} \left( \mathbf{f}_L^l + \mathbf{f}_R^l - \frac{\Delta x}{\Delta t} (\mathbf{f}_R^l - \mathbf{f}_L^l) \right)$$