# M2ブレーンと AdS/CFT
# （江口先生との思い出）

細道和夫（防衛大学校）

基研研究会
「素粒子論と数理物理学 – 江口・ハンソン解の発見から40年」
2019.10.19, 京都大学基礎物理学研究所

# 江口先生の略歴

| | |
|---|---|
| 1975 | 東京大学大学院 博士課程修了 |
| 1975 | シカゴ大学・スタンフォード大学研究員 |
| 1978 | シカゴ大学 助教授 |
| 1981 | 東京大学理学部 助教授 |
| 1991 | 東京大学理学部 教授 |
| 2007 | 京都大学基礎物理学研究所 所長 |
| 2012 | 立教大学理学研究科 特任教授 |
| 2017 | PTEP 編集委員長 |

1995 – 2000　大学院生として
2009 – 2012　基研所員として　とくにお世話になりました

# 基研での江口先生（2010.07.30）

若手を誘って飲みに行き、いろんな話をするのが
お好きだった。

# 先生との仕事の思い出

学術創成研究「超弦理論と宇宙の創成」のメンバーに加えていただいた。

- Summer Institute @富士吉田 (08, 09, 10, 11)
- 温泉研究会「超弦理論と宇宙」(08, 09, 10, 11, 12)
- Recent Advances in Gauge Theories and CFTs (2010.03)
- ほか

素粒子論・宇宙論のたくさんの先生と知り合う機会を頂いた。

# Summer Institute

## 第１回は1999年、責任者は江口先生・板東昌子先生

Aspen のような研究会を日本でも催したい。

# 宇宙論との共同プロジェクト

宇宙論の知識は、弦理論にとっても今後重要になる

日本の弦理論研究者を導いていく方向を
真剣に考えておられた。

いっぽう、宇宙論の研究者との共同研究が
なかなか生まれないことには気を揉んでおられた。

# ふだんの雑談


- ときどき晩御飯をご一緒した。
- とりとめなくされる、好き嫌いやこだわりの話が楽しかった。

# 江口先生のこだわり
# の思い出

講演の依頼は
（ローレンツ祭での学部生への
　研究室紹介のようなものでも）
努めてご自身で引き受けられた。

所長をつとめられた間も
研究室のセミナーに欠かさず参加されていた。

（先生が参加できない不規則な日時に
セミナーを入れたりすると
ものすごく怒られた）

日本語で議論することにもこだわられた。
英語でのセミナー中にあえて日本語で
質問されることがよくあった。

研究会の最後のあいさつに立たれるときまって言うフレーズがあった。

「楽しかったですか？」

先生のさまざまなこだわりに接しながら
沢山のことを学ばせて頂いたように思います。

# 私の最近の興味

## 最近の興味

ABJM模型など超対称 CS-matter 理論を用いた
AdS/CFT対応の検証

近年 10 年で多くの精密な結果が得られる。
（鈴木滉平 2 等空尉と調査中）

# AdS/CFT 対応：標準的な例

**ABJM模型**

$$\Updownarrow$$

$\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ 上の N 枚の M2-brane

$$\Updownarrow$$

$\mathbf{AdS}_4 \times \left(\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k\right)$ 上の M理論

# AdS/CFT 対応：標準的な例と一般化

ABJM模型

⟶ $\mathcal{N} \geq 2$ 超対称 CS-matter 理論

$\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ 上の N 枚の M2-brane

⟶ CY4 上の N 枚の M2-brane

$\mathbf{AdS_4 \times (S^7/\mathbb{Z}_k)}$ 上の M理論

⟶ $\mathbf{AdS_4 \times SE_7}$ 上の M理論

AdS/CFT 対応の定量的検証

- 球面上の自由エネルギー
  → SE 空間の体積
- twisted index
  → 荷磁ブラックホールのエントロピー

きょうは ABJM の例で計算を振り返る

# 復習：ABJM模型（$\mathcal{N}=2$ の記法で）

| | |
|---|---|
| ゲージ対称性 | $U(N)_k \times U(N)_{-k}$ |
| カイラル超場 | $A_1, A_2\ (\mathbf{N}, \overline{\mathbf{N}})$, |
| | $B_3, B_4\ (\overline{\mathbf{N}}, \mathbf{N})$ |
| superpotential | $W = -\frac{2\pi}{k}\mathrm{tr}\left(A_a B_b A_c B_d\right)\epsilon^{ac}\epsilon^{bd}$ |

＊ベクトル超場の成分： $A_\mu,\quad \sigma,\quad D,\quad$ (fermion)

$\tilde{A}_\mu,\quad \tilde{\sigma},\quad \tilde{D},\quad$ (fermion)

# 球面上の自由エネルギー

$$F_{S^3} = N^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2\pi^6}{27\mathrm{vol}(\mathbf{SE}_7)}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{3}k^{\frac{1}{2}}N^{\frac{3}{2}} \qquad \text{（ABJMの場合）}$$

* SE7 の計量は以下により規格化されるとする。

$$\mathrm{d}s^2(\mathbf{CY}_4) = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}s^2(\mathbf{SE}_7)$$

# 球面上のABJM模型

経路積分は次の鞍点の上に局所化する。

$$\sigma = -D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma} = -\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\sigma}_N \end{pmatrix}$$ （定数）

自由エネルギーは有限次元積分で書ける。 Kapustin-Willett-Yaakov '09

$$e^{-F_{S^3}} = \int \mathrm{d}^N\sigma \mathrm{d}^N\tilde{\sigma} e^{-F(\sigma,\tilde{\sigma})}$$

$$\begin{aligned} F(\sigma,\tilde{\sigma}) \equiv & -\frac{ik}{4\pi}\sum_j \left(\sigma_j^2 - \tilde{\sigma}_j^2\right) - 2\sum_{i<j} \ln 2\sinh\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} - 2\sum_{i<j} \ln 2\sinh\frac{\tilde{\sigma}_i - \tilde{\sigma}_j}{2} \\ & + 2\sum_{i,j} \ln 2\cosh\frac{\sigma_i - \tilde{\sigma}_j}{2} + 2\ln N! + 2N\ln(2\pi) \end{aligned}$$

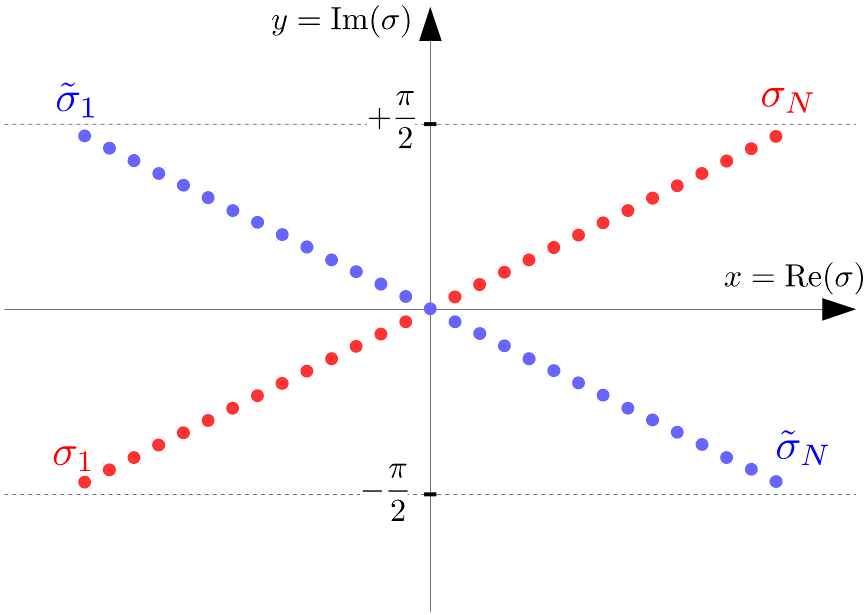
Large N 極限の評価には工夫が要る。

# Large N 極限での解法

- 伝統的な行列模型の手法を応用　Drukker-Marino-Putrov '10
- 数値解を援用　Herzog-Klebanov-Pufu-Tasileanu '10

## 数値解の示唆：

## 固有値分布は $\rho(x), y(x), \tilde{\rho}(x), \tilde{y}(x)$ で表される。




$$\sum_i f(\sigma_i) \to N \int dx \rho(x) f(N^\alpha x + i y(x))$$

$$\sum_i f(\tilde{\sigma}_i) \to N \int dx \tilde{\rho}(x) f(N^\alpha x + i \tilde{y}(x))$$

**さらに**

- **分布の横幅** $\sim N^{\frac{1}{2}}$
- $\rho(x) = \tilde{\rho}(x),$

  $y(x) = -\tilde{y}(x)$

$$F(\sigma,\tilde{\sigma}) \equiv -\frac{ik}{4\pi}\sum_j\left(\sigma_j^2-\tilde{\sigma}_j^2\right) - 2\sum_{i<j}\ln 2\sinh\frac{\sigma_i-\sigma_j}{2} - 2\sum_{i<j}\ln 2\sinh\frac{\tilde{\sigma}_i-\tilde{\sigma}_j}{2}$$
$$+ 2\sum_{i,j}\ln 2\cosh\frac{\sigma_i-\tilde{\sigma}_j}{2} + 2\ln N! + 2N\ln(2\pi)$$

を $\rho(x), y(x), \tilde{\rho}(x), \tilde{y}(x)$ で書き換えると

$$F[\rho=\tilde{\rho},y,\tilde{y}] = \frac{k}{2\pi}N^{1+\alpha}\int \mathrm{d}x\cdot x\rho(x)\left(y(x)-\tilde{y}(x)\right)$$
$$+ N^{2-\alpha}\int \mathrm{d}x\cdot\rho(x)^2\left\{\pi^2-\left(y(x)-\tilde{y}(x)\right)^2\right\}$$
$$+ (\text{subleading in } N)$$

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\quad F\Big|_{\text{extremum}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}k^{\frac{1}{2}}N^{\frac{3}{2}}$ 簡単に出る。

# 一般化：$\mathcal{N}=2$ 超対称な場合

球面上の理論はカイラル超場 $\Phi_a$ の R-電荷 $\Delta_a$ の割り当てに不定性がある。

$\longrightarrow$ 自由エネルギー $F_{S^3}$ は $\Delta_a$ の関数。

いっぽう、理論の超共形代数に含まれる R-電荷は一意である。

**F 定理** Jafferis-Klebanov-Pufu-Safdi '11

一意な R-電荷 $\Delta_a$ は $F_{S^3}$ を最大化する

# 例題

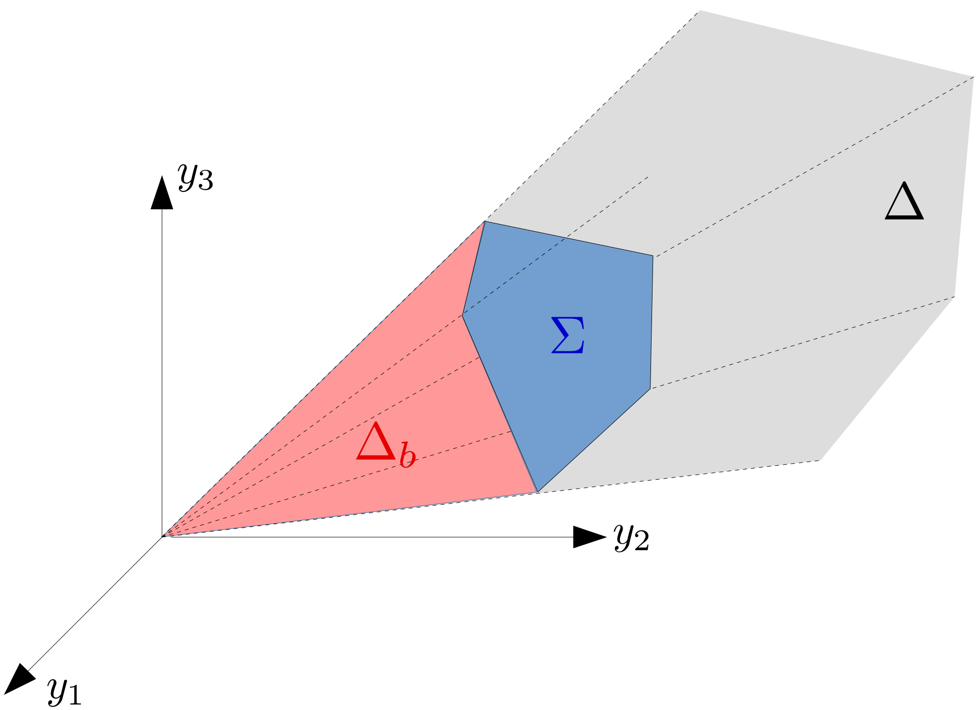
ABJM模型の自由エネルギーを $A_1, A_2, B_3, B_4$ の
R-電荷の関数として求めると

$$F_{S^3}\Big|_{\text{large N}} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}$$

$$(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 2)$$

$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \dfrac{1}{2}$ で極大。

# 重力側：SE7 の体積　Martelli-Sparks-Yau '05




Toric Kahler 錐体 $X_8$

4次元錐体 $\Delta$ 上の $T^4$ 束

Sasaki 多様体 $Y_7$

3次元多面体 $\Sigma$ 上の $T^4$ 束

$\Sigma := \Delta \cap \{2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y} = 1\}$

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ：Reebベクトル

$Y_7$ の体積 $= 128\pi^4 \times$（多面体 $\Delta_b$ の体積）

これを最小化するよう $b$ を選んだとき、
$Y_7$ は Sasaki-Einstein になる。

# Remark

ABJM模型の例では、対応関係

$$F_{S^3}(\Delta_a) \;=\; N^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2\pi^6}{27\mathrm{vol}\mathbf{SE}_7(\boldsymbol{b})}}$$

は両辺の極値を取る前から成り立つ。

一般には両辺に含まれるパラメータの個数が違う
（が、一般化の議論がある。）

Amariti-Franco '12, Lee-Yokoyama, '14

# Twisted Index と
# ブラックホールエントロピー

# 11d 超重力を SE7 にコンパクト化
# （4d $\mathcal{N}=2$ ゲージ化超重力）

重力 + $U(1)^n$ ベクトル多重項：

$$g_{\mu\nu}, \quad A_\mu^{\Lambda=0,\cdots,n}, \quad z^{i=1,\cdots,n}$$

**磁荷・電荷**

$$\begin{cases} n^\Lambda = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{S^2} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu F^\Lambda_{\mu\nu} \\ e_\Lambda = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{S^2} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^\Lambda}\right)_{\mu\nu} \end{cases}$$

**斉次座標**

$$\begin{cases} X^\Lambda(z^i) \\ F_\Lambda(z^i) = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\Lambda} \end{cases}$$

$\mathcal{F}$：プレポテンシャル

荷磁ブラックホール解の発見： Cacciatori-Klemm '09

# ゲージ化

$SU(2)_{\mathrm{R}}$ で変換される場は $A_\mu^\Lambda$ に結合する。

$$\delta_{\mathrm{SUSY}}\psi_\mu^A = D_\mu \varepsilon^A + \cdots$$

$$= \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}\gamma_{ab}\right)\varepsilon^A - \frac{i}{2} g_\Lambda A_\mu^\Lambda (\sigma_3)^A{}_B \varepsilon^B + \cdots$$

$g_\Lambda$ ：ゲージ化超重力の結合定数

# ゲージ化

$SU(2)_{\mathrm{R}}$ で変換される場は $A_\mu^\Lambda$ に結合する。

$$\delta_{\mathrm{SUSY}}\psi_\mu^A = D_\mu\varepsilon^A + \cdots$$

$$= \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}\gamma_{ab}\right)\varepsilon^A - \frac{i}{2}g_\Lambda A_\mu^\Lambda(\sigma_3)^A{}_B\varepsilon^B + \cdots$$

$g_\Lambda$ ：ゲージ化超重力の結合定数

荷磁ブラックホール $(n^\Lambda g_\Lambda = \pm 2)$ では
右辺 2 項の相殺が起こる。

$\rightarrow$ CFT 側は位相ツイストされた理論。

ブラックホール解の具体形は複雑だが
エントロピーは Attractor 機構から求まる。 Dall'Agata-Gnecchi '12

$$(\text{地平面の半径})^2 = \frac{-i(e_\Lambda X^\Lambda(z) - n^\Lambda F_\Lambda(z))}{g_\Lambda X^\Lambda(z) - g^\Lambda F_\Lambda(z)}$$

「分母 = 1」 のゲージで分子の極大値を求めると考える。

**ブラックホール解の具体形は複雑だが**
**エントロピーは Attractor 機構から求まる。** Dall'Agata-Gnecchi '12

$$
(\text{地平面の半径})^2 = \frac{-i(e_\Lambda X^\Lambda(z) - n^\Lambda F_\Lambda(z))}{g_\Lambda X^\Lambda(z) - g^\Lambda F_\Lambda(z)}
$$

**「分母 = 1」のゲージで分子の極大値を求めると考える。**

**例：S$^7$**

$$
\mathcal{F} = -2i\sqrt{X^0 X^1 X^2 X^3}
$$

$$
g_0 = g_1 = g_2 = g_3 = 1/\sqrt{2}L
$$

$$
S_{\mathrm{BH}}(e_\Lambda, n^\Lambda) = 2\pi i \left( e_\Lambda X^\Lambda - \frac{L^2}{2G_{\mathrm{N}}} \cdot n^\Lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\Lambda} \right) \Bigg|_{\text{extr.}}
$$

$$
(X^0 + X^1 + X^2 + X^3 = 1)
$$

# Twisted Index

- **ABJM模型を** $S^1_{(t\sim t+\beta)} \times S^2_{(\theta,\varphi)}$ **に載せ、**

  **U(1) R-対称性のゲージ場** $A_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\cos\theta \mathrm{d}\varphi$ **を導入する。**

- $A_1, A_2, B_3, B_4$ **の R-電荷は** $n_1, n_2, n_3, n_4$ **（整数）。**

  **このとき**

$$I(n_a, \Delta_a) \equiv \mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H - i\Delta_a R_a}\right]$$

**ただし**

- $R_{1,2,3,4}$ **は** $A_1, A_2, B_3, B_4$ **の位相回転**
- $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0 \mod 2\pi$

**経路積分は次の鞍点に局所化する。**

$$e^{i\beta(A_t+i\sigma)} = \begin{pmatrix} e^{iu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{iu_N} \end{pmatrix} \qquad \int_{S^2} \frac{F}{2\pi} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N \end{pmatrix}$$

$$e^{i\beta(\tilde{A}_t+i\tilde{\sigma})} = \begin{pmatrix} e^{i\tilde{u}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\tilde{u}_N} \end{pmatrix} \qquad \int_{S^2} \frac{\tilde{F}}{2\pi} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{m}_N \end{pmatrix}$$

**注意：** $u_i, \tilde{u}_i$ **は SUSY 不変だが** $u_i^*, \tilde{u}_i^*$ **は SUSY exact**

$$I(n_a, \Delta_a) \;=\; \sum_{m_i, \tilde{m}_i} \int \mathrm{d}^N u \mathrm{d}^N \tilde{u} \, (\cdots\cdots)$$

**JK 留数の性質をうまく使うと、和を先に実行できる。**

残った 2N-次元積分を large N で評価する。

$$I(n_a, \Delta_a) \; = \; \int \mathrm{d}^N u \mathrm{d}^N \tilde{u} \cdot (\text{以下の位置に極をもつ関数})$$

$$e^{iku_i} = \prod_{j=1}^{N} \frac{\left(1 - e^{i(\tilde{u}_j - u_i - \Delta_1)}\right)\left(1 - e^{i(\tilde{u}_j - u_i - \Delta_2)}\right)}{\left(1 - e^{i(\tilde{u}_j - u_i + \Delta_3)}\right)\left(1 - e^{i(\tilde{u}_j - u_i + \Delta_4)}\right)}$$

$$e^{ik\tilde{u}_j} = \prod_{i=1}^{N} \frac{\left(1 - e^{i(\tilde{u}_j - u_i - \Delta_1)}\right)\left(1 - e^{i(\tilde{u}_j - u_i - \Delta_2)}\right)}{\left(1 - e^{i(\tilde{u}_j - u_i + \Delta_3)}\right)\left(1 - e^{i(\tilde{u}_j - u_i + \Delta_4)}\right)}$$

実は極の位置は Bethe ポテンシャル $\widetilde{W}$ の停留点である。

$$\widetilde{W} \equiv \frac{k}{2} \sum_i (\tilde{u}_i^2 - u_i^2) - \sum_{i,j} \sum_{a=1}^{4} \varepsilon_a \mathrm{Li}_2 \left( e^{i(\tilde{u}_j - u_i - \varepsilon_a \Delta_a)} \right)$$

$$- 2\pi \sum_i \left( \tilde{n}_i \tilde{u}_i - n_i u_i \right)$$

$$\varepsilon_{1,2,3,4} = (+1, +1, -1, -1)$$

$n_i, \tilde{n}_i$ は任意の整数

$\widetilde{W}$ の停留点を求める計算は**なぜか** $F_{S^3}$ の計算に一致する。

$$-i\widetilde{W}\Big|_{\text{extr.}} = N^{3/2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4}$$

Twisted index は $\widetilde{W}$ を用いて書ける。

$$I(n_a, \Delta_a) = \exp\left[-n_a \frac{\partial}{\partial \Delta_a}(-i\widetilde{W})\right]$$

いっぽう $I$ が BH の状態数 $d$ の生成汎関数とすると

$$I(n_a, \Delta_a) = \sum_{e_a} e^{-ie_a\Delta_a} d(n_a, e_a) \qquad (e_a：電荷)$$

$S_{\text{BH}}$ は $\ln I$ のルジャンドル変換で得られる。

$$S_{\text{BH}} = \ln d(n_a, e_a) = \Big[\ln I(n_a, \Delta_a) + ie_a\Delta_a\Big]_{\text{extr.}}$$

## ゲージ理論側

$$\ln d(n_a, e_a) = \left[ i e_a \Delta_a - n_a \frac{\partial}{\partial \Delta_a} (-i\widetilde{W}) \right]_{\text{extr.}}$$

$$= \left[ i e_a \Delta_a - n_a \frac{\partial}{\partial \Delta_a} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} N^{3/2} \sqrt{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4} \right) \right]_{\text{extr.}}$$

$$(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 2\pi)$$

## 重力側

$$S_{\mathrm{BH}} = 2\pi i \left[ e_\Lambda X^\Lambda - \frac{L^2}{2G_{\mathrm{N}}} \cdot n^\Lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial X^\Lambda} \right]_{\text{extr.}}$$

$$= 2\pi \left[ i e_\Lambda X^\Lambda - \frac{2\sqrt{2}}{3} N^{3/2} \cdot n^\Lambda \frac{\partial}{\partial X^\Lambda} \sqrt{X^0 X^1 X^2 X^3} \right]_{\text{extr.}}$$

$$(X^0 + X^1 + X^2 + X^3 = 1)$$

## $F_{\mathbf{S}^3}$, $\widetilde{W}$, $\mathcal{F}$, $\mathrm{Vol}(\mathbf{SE}_7)$ の不思議な一致

- ゲージ理論の作用が与えられれば
  あらわに確認できる。
  （経験則と言えなくもない）
  $\rightarrow$ 深い理由があるなら知りたい

# ブラックホールと超弦理論

修士課程の２年間にうまく研究を始められなかった
私を見かねて、江口先生が下さったテーマ。

原点に戻って再出発したい。

# ブラックホールと超弦理論

修士課程の２年間にうまく研究を始められなかった
私を見かねて、江口先生が下さったテーマ。

原点に戻って再出発したい。

……江口先生、ありがとうございました。