江口-ハンソン空間, モック・モジュラー形式と超共形場理論

2019/10/19, @ YITP.「素粒子論と数理物理学
−江口・Hanson解の発見から40年−」

立命館大学　菅原祐二

江口先生との共同研究

[1] T. Eguchi and Y. Sugawara, Nucl. Phys. B **577**, 3 (2000) doi:10.1016/S0550-3213(00)00150-4 [hep-th/0002100].

[2] T. Eguchi and Y. Sugawara, Nucl. Phys. B **598**, 467 (2001) doi:10.1016/S0550-3213(00)00783-5 [hep-th/0011148].

[3] T. Eguchi and Y. Sugawara, Phys. Lett. B **519**, 149 (2001) doi:10.1016/S0370-2693(01)01080-2 [hep-th/0108091].

[4] T. Eguchi and Y. Sugawara, Nucl. Phys. B **630**, 132 (2002) doi:10.1016/S0550-3213(02)00187-6 [hep-th/0111012].

[5] T. Eguchi, Y. Sugawara and S. Yamaguchi, Nucl. Phys. B **657**, 3 (2003) doi:10.1016/S0550-3213(03)00148-2 [hep-th/0301164].

[6] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **0305**, 063 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/05/063 [hep-th/0305050].

[7] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **0401**, 025 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/01/025 [hep-th/0311141].

[8] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **0405**, 014 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/05/014 [hep-th/0403193].

[9] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **0501**, 027 (2005) doi:10.1088/1126-6708/2005/01/027 [hep-th/0411041].

[10] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **1103**, 107 (2011) doi:10.1007/JHEP03(2011)107 [arXiv:1012.5721 [hep-th]].

[11] T. Eguchi and Y. Sugawara, JHEP **1411**, 156 (2014) doi:10.1007/JHEP11(2014)156 [arXiv:1407.7721 [hep-th]].

[12] T. Eguchi and Y. Sugawara, PTEP **2016**, no. 6, 063B02 (2016) doi:10.1093/ptep/ptw078 [arXiv:1603.02903 [hep-th]].

江口-ハンソン空間 (ALE空間)

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{a}{r}\right)^4} + r^2\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \left\{1-\left(\frac{a}{r}\right)^4\right\}\sigma_z^2\right]$$

($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Maurer-Cartan 1-form of $SU(2) \cong S^3$)

⇨ 重力インスタントン解

トポロジカルには T^*S^2 （A_1 型単純特異点の解消）

複素2次元の単純型特異点

タイプ (G)	方程式	コクセター数 (N)
A_{k+1}	$x^{k+2}+y^2+z^2=0$	$k+2$
D_k	$x^2y+y^{k-1}+z^2=0$	$2(k-1)$
E_6	$x^3+y^4+z^2=0$	12
E_7	$x^3+xy^3+z^2=0$	18
E_8	$x^3+y^5+z^2=0$	30

$\Longrightarrow$ $\mathrm{ALE}(G)$

ALE空間上のストリング理論

$$\text{type II/ALE}(\underline{G}) \cong \underbrace{\frac{SU(2)_{N-2}}{U(1)}}\otimes \frac{SL(2)_{N+2}}{U(1)}\Bigg|_{U(1)\text{-charge}\in\mathbb{Z}}$$

[Ooguri-Vafa, 1995]

$G = A_n, D_n, E_n$

N : コクセター数

$\boxed{\underline{G}\text{-type modular invariance}}$

[Cappelli-Itzykson-Zuber 1987]

[Kato 1987]

特異カラビヤウ空間上のストリング理論

'Non-compact Gepner-like systems' for singular CY_n

[Giveon-Kutasov-Pelc 1999]　ホログラフィックな解釈

[Eguchi-Y.S 2000]　モジュラー不変分配関数（free part）の構成と時空の超対称性の解析

[Eguchi-Y.S 2003, 2004, 2004]　境界状態によるD-ブレーンの解析（'modular bootstrap'），

離散スペクトル，楕円種数の解析

……

ALE空間の楕円種数

$$\mathcal{Z}(\tau, z) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left[(-1)^{F_L+F_R}\, e^{2\pi i z J_0}\, q^{L_0-\frac{c_L}{24}}\, \overline{q^{\tilde{L}_0-\frac{c_R}{24}}}\right]$$

[Eguchi-Y.S 2004]

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{ALE}(G)}(\tau, z) = \sum_{r,s} \sum_{a\in\mathbb{Z}_N} \mathcal{N}^G_{r,s}\, \mathrm{ch}^{(\widetilde{\mathrm{R}})}_{r-1,r+2a}(\tau, z)\, \chi^{(N)}_{dis}(s, a; \tau, -z)$$

G-type
modular inv.

N=2
minimal ch.

SL(2)/U(1)
(extended)
discrete ch

正則で，期待される massless spectrum を再現，
しかし ‘anomalous’ なモジュラー変換性

（‘mock modularity’）

ALE空間の楕円種数

Ex） 江口-ハンソンの場合

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{ALE}(A_1)}(\tau, z) = \underline{\mathrm{ch}_0^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\ell = 0; \tau, z)}$$

N=4 massless character

ALE空間の楕円種数

Puzzle

① 重力子表現なし（gravity decouple）

② 楕円種数はヤコビ形式
（good modularity and spectral flow property）

① と ②は両立しない？

ウェイト0，指数１の正則ヤコビ形式は定数倍
を除いて一意（ $\phi_{0,1}(\tau, z) \propto \mathcal{Z}_{K3}(\tau, z)$ ）

ALE空間の楕円種数

経路積分での計算

‘正しい’ モジュラー変換性を期待

どのように整合するか？

超共形場理論におけるmock modularity

$$\chi_{con}\left(p, m; -\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{m} \int dp' \, S(p, m|p', m') \, \chi_{con}(p', m'; \tau)$$

$$\chi_{dis}\left(v, a; -\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{v', a'} A(v, a|v', a') \, \chi_{dis}(v', a'; \tau)$$
$$+ \underline{\sum_{m'} \int dp' \, B(v, a|p', m') \, \chi_{con}(p', m'; \tau, z)}$$

“anomalous term” (Mordell integral)

超共形場理論におけるmock modularity

[Eguchi-Taormina 1988, 1988]　N=4 SCA 指標公式，モジュラー変換公式など

[Odake 1989, 1990]　CY_3 -コンパクト化のための拡大指標，とそのモジュラー変換公式

[Miki 1990]　N=3 SCA 指標公式，モジュラー変換公式

[Hori-Kapustin 2002]

[Eguchi-Y.S 2003, 2004]　N=2 リウビル理論（ $\cong SL(2)/U(1)$ ）の拡大指標とそのモジュラー変換公式，D-brane(境界状態)の解析

超共形場理論におけるmock modularity

「モジュラー完備化」

[Eguchi-Y.S 2010]　（closely related work : [Troost 2010]）

経路積分に基づき　$SL(2)/U(1)$ -理論の分配関数と楕円種数を解析し，building blockとしてN=2 拡大指標の「モジュラー完備化」を導出.

$$\widehat{\chi}_{dis}(v, a; \tau) = \chi_{dis}(v, a; \tau) + [\text{non-hol. correction terms}]$$

経路積分により一意に定まる

超共形場理論におけるmock modularity

$$\Longrightarrow \quad \widehat{\chi}_{dis}\left(v,a;-\frac{1}{\tau}\right)=\sum_{v',a'}A(v,a|v',a')\,\widehat{\chi}_{dis}(v',a';\tau)$$

no anomalous term !

※数学的背景　[Zwegers 2002]

モックモジュラー形式　〜　正則だが
「モジュラーアノマリー」含む
（ハミルトニアン形式）

'completion'

調和マース形式　〜　モジュラーだが
「正則アノマリー」含む
（経路積分）

モックモジュラー形式

モックモジュラー形式(モックヤコビ形式)の典型例:

$\boxed{\text{Appell-Lerch Sum}}$

$$f_u^{(k)}(\tau, z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{kn^2} y^{2kn}}{1 - yw^{-1}q^n} \qquad (q \equiv e^{2\pi i\tau},\ y \equiv e^{2\pi iz},\ w \equiv e^{2\pi iu})$$

$$u \equiv \alpha\tau + \beta,\ 0 \leq \alpha,\ \beta < 1$$

モックモジュラー形式

Completion of Appell-Lerch sum
[Zwegers 2002]

(non-hol. Jacobi form
with weight 0, index k, (u=0 case))

$$\widehat{f}_u^{(k)}(\tau, z) := f_u^{(k)}(\tau, z) - \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{2k}} R_{m,k}(\tau, u) \Theta_{m,k}(\tau, 2z)$$

Non-holomorphic

$$R_{m,k}(\tau, u) := \sum_{\nu \in m + 2k\mathbb{Z}} \left\{ \mathrm{sgn}(\nu + 0) - \mathrm{Erf}\left(\sqrt{\frac{\pi \tau_2}{k}} (\nu + 2k\alpha) \right) \right\} w^{-\nu} q^{-\frac{\nu^2}{4k}},$$

$$\mathrm{Erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \qquad u \equiv \alpha\tau + \beta,\ 0 \le \alpha,\ \beta < 1$$

モックモジュラー形式

$\widehat{f}_u^{(k)}(\tau, z)$:非正則弱ヤコビ形式,
ウェイト 1, 指数 $(k, -k)$

$$\widehat{f}_u^{(k)}(\tau+1, z) = \widehat{f}_u^{(k)}(\tau, z)$$

$$\widehat{f}_{\frac{u}{\tau}}^{(k)}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = \tau e^{2\pi i k \frac{z^2-u^2}{\tau}}\, \widehat{f}_u^{(k)}(\tau, z)$$

$$\widehat{f}_u^{(k)}(\tau, z+m\tau) = q^{-km^2} y^{-2km}\, \widehat{f}_u^{(k)}(\tau, z)$$

……

新しいタイプの「ムーンシャイン」

$K3$ の楕円種数

[Eguchi-Ooguri-Taormina-Yang 1989],
[Kawai-Yamada-Yang 1993]

N=4 massless ch.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{K3}(\tau,z) \, (\equiv 2\phi_{0,1}(\tau,z)) \\
&= -2\,\mathrm{ch}_0^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\ell=1/2;\tau,z) + 20\,\mathrm{ch}_0^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z) \\
&\quad + 2\sum_{n=1}^{\infty} A(n) q^{n-\frac{1}{8}} \frac{\theta_1(\tau,z)^2}{\eta(\tau)^3} \\
&\equiv 24\,\mathrm{ch}_0^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\ell=0;\tau,z) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \underline{A(n)} q^{n-\frac{1}{8}} \frac{\theta_1(\tau,z)^2}{\eta(\tau)^3}
\end{aligned}
$$

何か特別な意味があるか？

新しいタイプの「ムーンシャイン」

「マシュー・ムーンシャイン」

[Eguchi-Ooguri-Tachikawa 2011]

[Eguchi-Hikami 2011]

「 $A(n)$ はすべて「マシュー群」 M_{24} のある表現の次元に等しい. 」

$$h^{(2)}(\tau) \equiv 2\sum_{n=0}^{\infty} A(n) q^{n-\frac{1}{8}}$$
$$= 2q^{-\frac{1}{8}}\left[-1 + 45q + 231q^2 + 770q^3 + 2277q^4 + \cdots\right]$$

⇒
- ウェイト1/2のモックモジュラー形式,
- モンスター群のムーンシャインにおける保型関数 $J(\tau)$ と同じ役割

‘old type’「ムーンシャイン」

「モンスター・ムーンシャイン」 [Conway-Norton 1979]

$$J(\tau) \equiv j(\tau) - 744 = \frac{1}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n$$

$$= \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + \dots$$

「 $a(n)$ はすべて「モンスター群」のある表現の次元に等しい．」

‘old type’「ムーンシャイン」

$\left[\mathbb{R}^{24}/\Lambda_{\mathrm{Leech}}\right]/\mathbb{Z}_2$ 上の自由カイラルボソンを用いた，

モンスター加群： $V \equiv \coprod_{n=-1}^{\infty} V(n)$ （ $\dim V(n) = a(n)$ ）

の具体的な構成　[Frenkel-Lepowsky-Meurman 1984, 1985]

⇒ 頂点作用素代数（VOA）

正定値自己双対偶格子

- 8次元： Γ_8
- 16次元： Γ_{16}, $\Gamma_8 \times \Gamma_8$
- 24次元： 24種類
  - リーチ格子 （rootのないもの）
  - ニーマイヤー格子 (23種類)

$$\Lambda_X, \qquad X = A_*^n \, D_*^m \, E_*^\ell$$

total rank 24, the same Coxetor number

新しいタイプの「ムーンシャイン」

※マシュームーンシャインの拡張：

ウンブラルムーンシャイン

[Cheng-Duncan-Harvey 2012, 2013]

[Cheng-Harrison 2014]

$$\mathcal{Z}_{K3}(\tau, z) = 24\,\mathrm{ch}_0^{(\widetilde{\mathrm{R}})}(\ell = 0; \tau, z) + h^{(2)}(\tau)\frac{\theta_1(\tau, z)^2}{\eta(\tau)^3}$$

$$\equiv \underline{24\,\mathcal{Z}_{\mathrm{ALE}(A_1)}(\tau, z)} + h^{(2)}(\tau)\frac{\theta_1(\tau, z)^2}{\eta(\tau)^3}$$

ニーマイヤー格子 $X = A_1^{24}$ と同定

$$\underline{G_{A_1^{24}} \cong M_{24}} \qquad (\ G_X \equiv \mathrm{Aut}\,(\Lambda_X)/W_X\ )$$

「ウンブラル群」

新しいタイプの「ムーンシャイン」

一般のニーマイヤー格子への拡張

$$\mathcal{Z}_{K3}(\tau, z) = \mathcal{Z}_X(\tau, z) + h_X(\tau)\frac{\theta_1(\tau, z)^2}{\eta(\tau)^3}$$

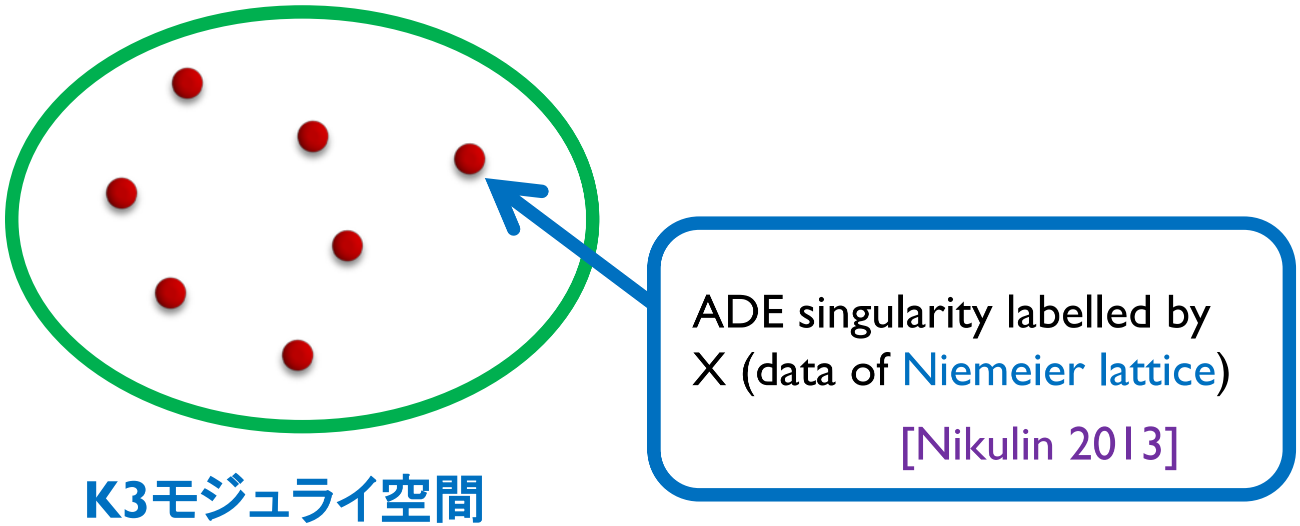
$$\mathcal{Z}_X(\tau, z) \equiv \sum_i n_i\, \mathcal{Z}_{\mathrm{ALE}(G_i)}(\tau, z)$$

[Eguchi-Y.S 2004]

($\Lambda_X,\ X \equiv G_1^{n_1} G_2^{n_2} \ldots$ ニーマイヤー格子)

モックモジュラー形式 $h_X(\tau)$ はウンブラル群 G_X のムーンシャインを与える.

[Cheng-Harrison-Volpato-Zimet, 2016]



- symmetry at smooth points $\subset$ (simple) Conway group
  [Gaberdiel-Hohenegger-Volpato, 2011]
- symmetry at singularities $\sim$ umbral group for X

「N=4 リウビル理論」に基づく‘高次元ターゲット空間’としての解釈

[Eguchi-Y.S. 2016]

$$\left[\begin{array}{ll} \text{N=2 リウビル} & \cong \mathbb{R}_\phi \times U(1) \times 2 \text{ fermions} \\ \text{N=4 リウビル} & \cong \mathbb{R}_\phi \times SU(2) \times 4 \text{ fermions} \end{array}\right]$$

[Matsuda-Ishimoto 1996] , [Matsuda 1997]

モンスター・ムーンシャイン と同じレベルでの
CFTとしての解釈が可能か？

ご清聴ありがとう
ございました.

江口先生、本当に
お世話になりました.