Explicit renormalization group flow of entanglement entropy

KEK

Takato Mori

SOKENDAI

Based on work in progress;

see also S. Iso, **TM**, K. Sakai, 2103.05303 (PRD103, 105010),
S. Iso, **TM**, K. Sakai, 2105.02598 (PRD103, 125019),
S. Iso, **TM**, K. Sakai, 2105.14834 (Symmetry13, 1221)

関西地域セミナー@京都大学基礎物理学研究所　2021年10月30日

エンタングルメントエントロピー (EE)

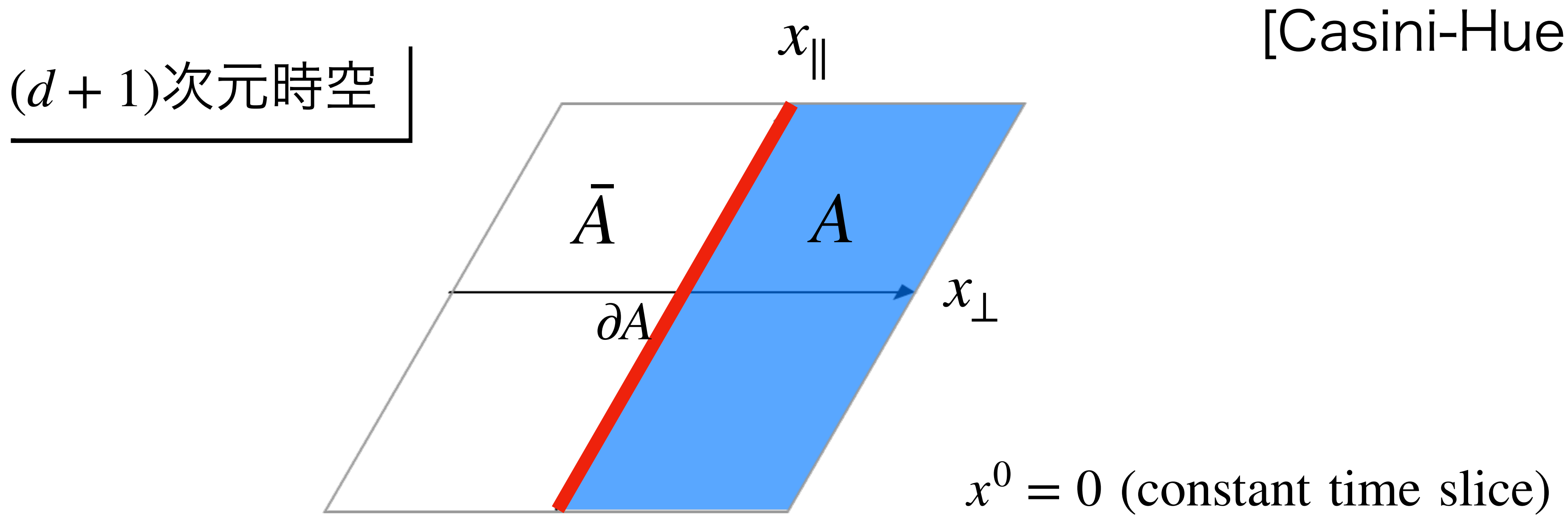
$$S_A = -\,\mathrm{tr}_A\left(\rho_A \log \rho_A\right), \quad \rho_A = \mathrm{tr}_{\bar{A}}\,\rho$$

✓ 部分系Aと$\bar{A}$間の量子相関を測る

✓ EEから定義される$C(A) = \left\{ l\frac{\partial}{\partial l} - (d-2) \right\} S_A(l)$はくりこみ群

のもとで単調と考えられている（エントロピックc関数）

[Casini-Huerta 2004]



エンタングルメントエントロピー (EE)

$$S_A = -\,\mathrm{tr}_A\left(\rho_A \log \rho_A\right), \quad \rho_A = \mathrm{tr}_{\bar{A}}\,\rho$$

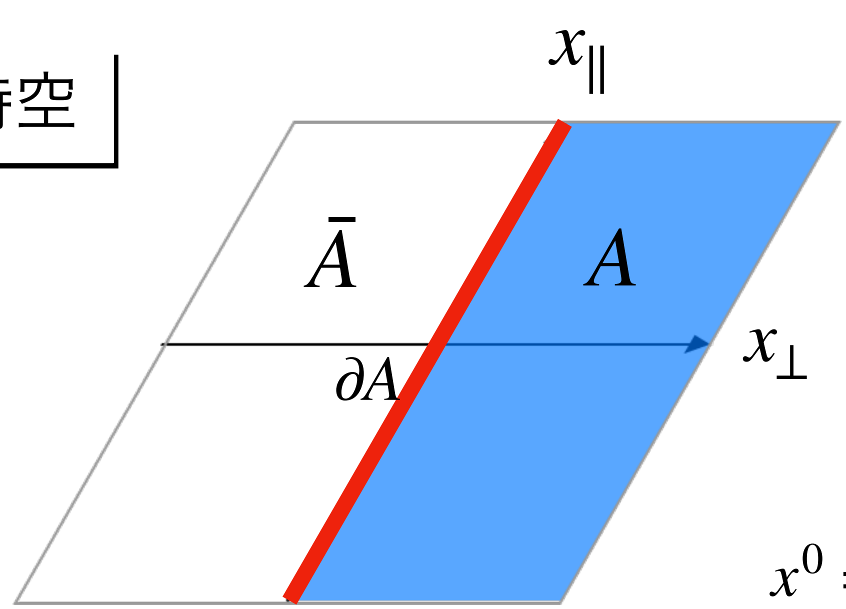
✓ 部分系Aと$\bar{A}$間の量子相関を測る

✓ EEから $\boxed{\text{半空間のEEだけで何か言えないか？}}$ りこみ群

のもとで単調と考えられている（エントロピックc関数）

[Casini-Huerta 2004]

$(d+1)$次元時空



$x^0 = 0$ (constant time slice)

エンタングルメントエントロピー (EE)

$$S_A = -\,\mathrm{tr}_A\left(\rho_A \log \rho_A\right), \quad \rho_A = \mathrm{tr}_{\bar{A}}\rho$$

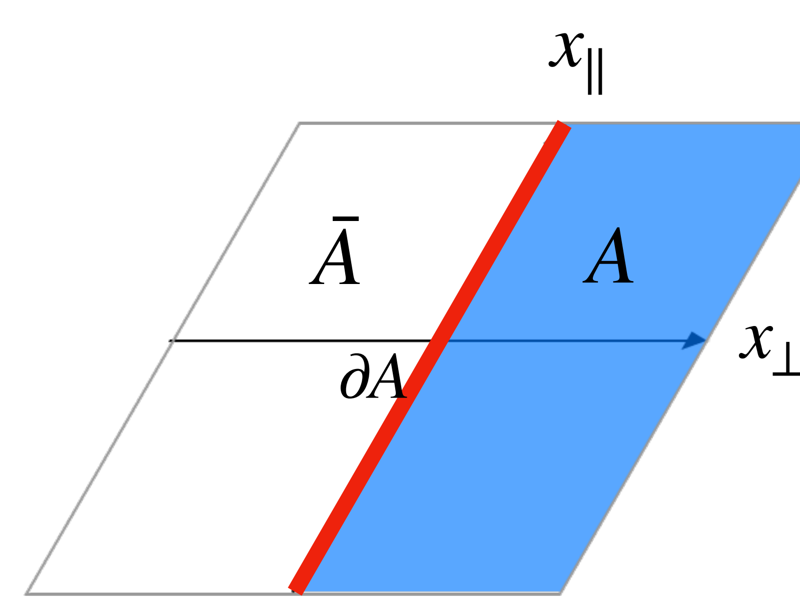
✓ 共形場理論（やホログラフィー）、自由場（ガウシアン）の理論ではよく理解されている

Q. 相互作用する有質量の場の理論では?

~~ガウシアン~~、~~共形対称性~~、~~重力双対~~

A. leadingの**半空間**のEEの寄与は、摂動論の全次数で足しあげられる！

[Iso-**TM**-Sakai 2021]



$x^0 = 0$ (constant time slice)

Entanglement entropy of half space in general QFTs

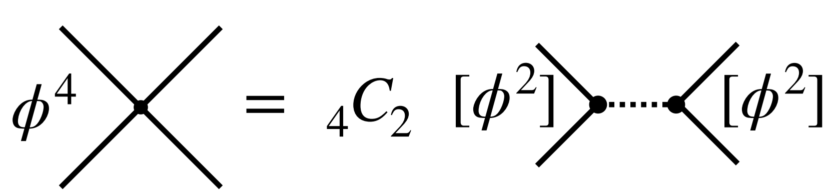
例：Scalar ϕ^4 theory in $(d+1)$ dim. $\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$

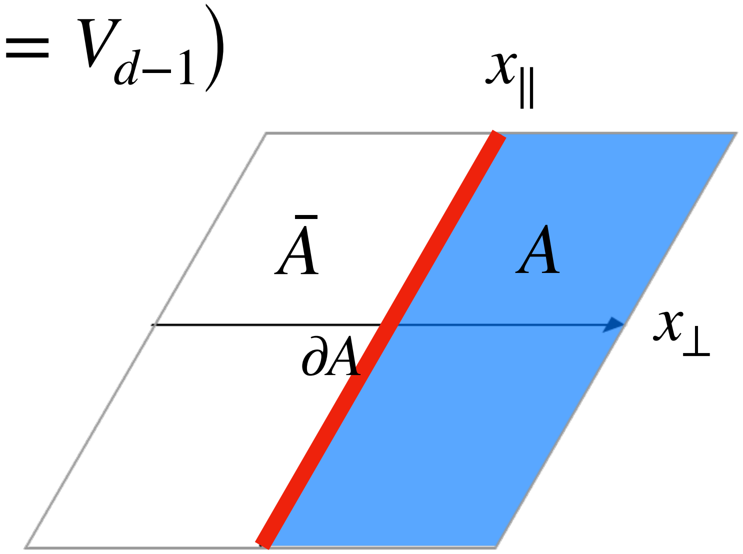
相関関数のくりこみ後、EEの低エネルギーで支配的な寄与は

$$\boxed{S = \frac{\mathrm{vol}(\partial A)}{12}\int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}}\left[\log G_{\phi\phi}(\mathbf{0},k_{\parallel}) + \log\left(1 - \frac{3}{2}\lambda G_{\phi^2\phi^2}(\mathbf{0},k_{\parallel})\right)\right]}$$

$\left(\mathrm{vol}\,(\partial A) = V_{d-1}\right)$

- ✓ 自由場で一致
- ✓ 摂動の全次数まで足しあげた
- ✓ 相関関数は繰り込まれている
- ✓ 相互作用の効果は、切り開いた相互作用頂点から来る複合演算子の2点関数からくる





$x^0 = 0$ (constant time slice)

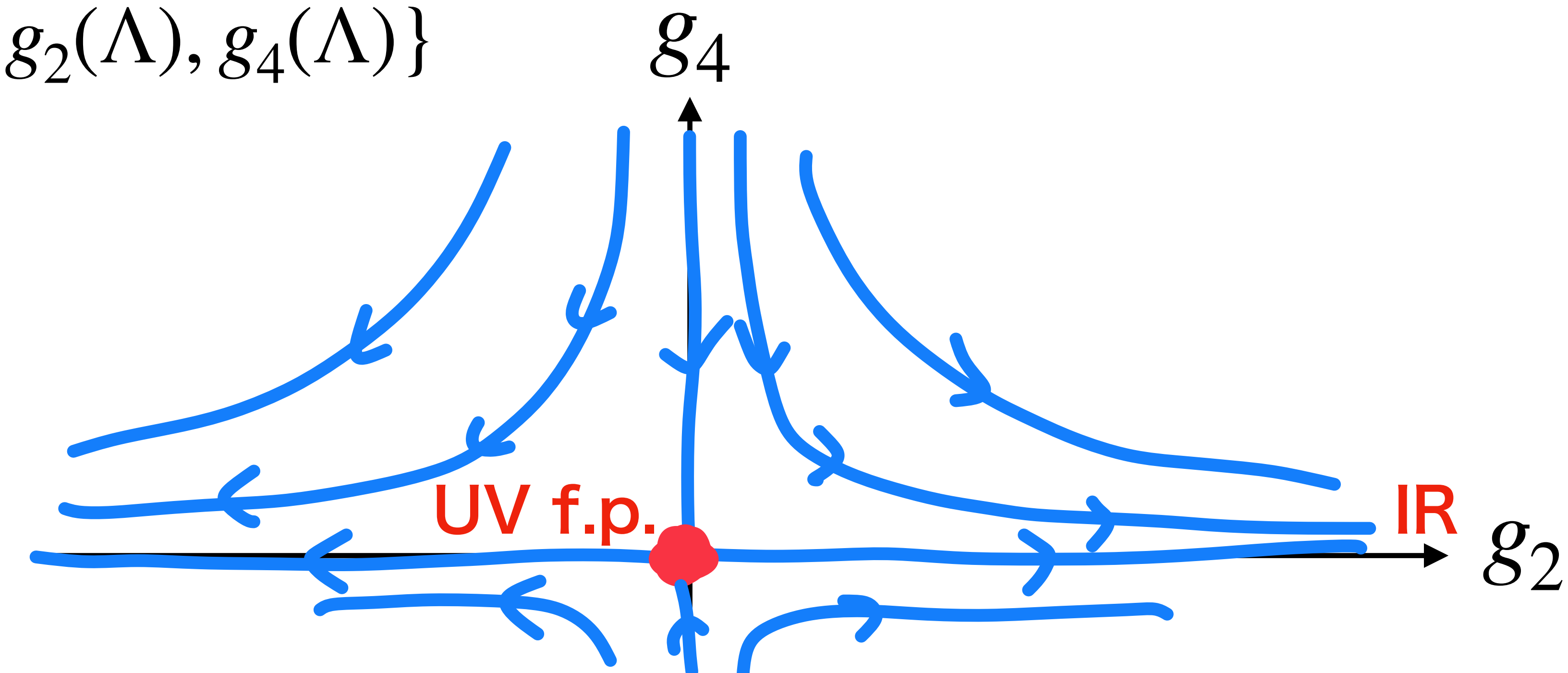
Renormalization group (RG) flow

- Wilson流くりこみの元で(cutoff)理論はUVからIRへ流れる

$$\int \mathcal{D}\phi_{k\leq\Lambda} e^{-S_\Lambda[\phi_{k\leq\Lambda}]} \overset{\text{integrate out}}{=} \int \mathcal{D}\phi_{k\leq\Lambda'<\Lambda} e^{-S'_{\text{eff}}[\phi_{k\leq\Lambda'<\Lambda}]} \overset{\text{rescale}}{=} \int \mathcal{D}\phi_{k\leq\Lambda} e^{-S_{\text{eff}}[\phi_{k\leq\Lambda}]}$$

無限小変換より、RG eq: free scalar $\dfrac{dg_2}{d\log\Lambda} = -2g_2 \quad \left(g_2 \equiv \dfrac{m^2}{\Lambda^2}\right)$

理論空間$\{g_2(\Lambda), g_4(\Lambda)\}$



Renormalization group (RG) flow

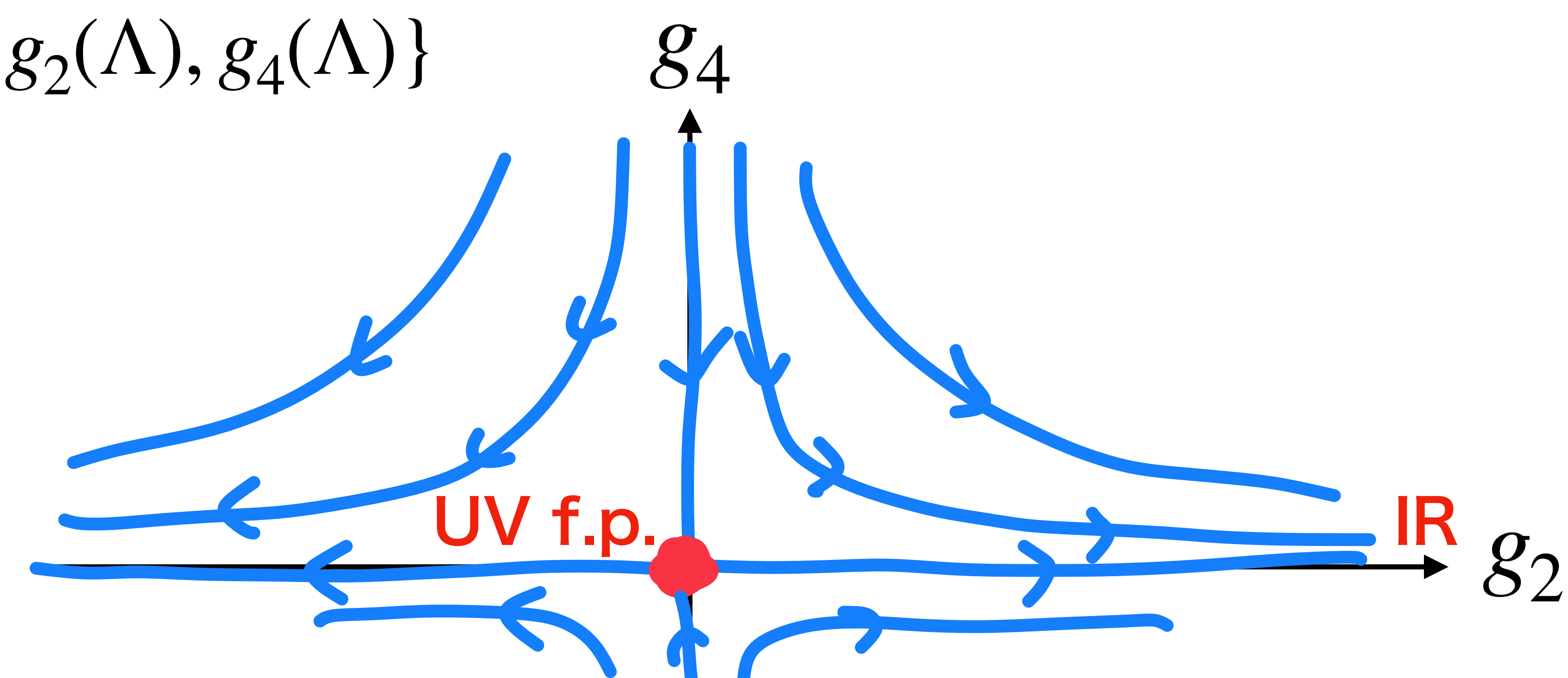
- Wilson流くりこみの元で理論はUVからIRへ流れる

$$\int \mathcal{D}\phi_{k\le\Lambda} e^{-S_\Lambda[\phi_{k\le\Lambda}]} \overset{\substack{\text{integrate}\\ \text{out}}}{=} \int \mathcal{D}\phi_{k\le\Lambda'<\Lambda} e^{-S'_{\text{eff}}[\phi_{k\le\Lambda'<\Lambda}]} \overset{\text{rescale}}{=} \int \mathcal{D}\phi_{k\le\Lambda} e^{-S_{\text{eff}}[\phi_{k\le\Lambda}]}$$

無限小変換 … $\left(g_2 \equiv \dfrac{m^2}{\Lambda^2}\right)$

$\boxed{\text{半空間のEEのcutoff } \Lambda \text{ dependence？}}$

理論空間$\{g_2(\Lambda), g_4(\Lambda)\}$



RG flow and monotonicity of EE in free scalar

- 例として自由スカラーを考える（他の自由場でも同様）

$$S = -\frac{V_{d-1}}{12}\int^{|k_\parallel|=\Lambda}\frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}}\log\left[\frac{G_0^{-1}(k_\parallel)}{M^2(\Lambda)}\right] \overset{\text{or}}{=} \frac{V_{d-1}}{12}\int^{\infty}\frac{d^{d-1}k_\parallel}{(2\pi)^{d-1}}\int_{1/\tilde{M}^2(\Lambda)}\frac{ds}{s}e^{-s\,G_0^{-1}(k_\parallel)}$$

where $G_0^{-1}(k) = k^2 + m^2$ and

$M^2(\Lambda)$ or $\tilde{M}^2(\Lambda)$ is a reference scale for EE (or free energy).

✓ For each $k_\parallel$ mode, EE must be nonnegative for $|k_\parallel| \leq \Lambda$:

we choose $M^2 = G_0^{-1}(\Lambda) = \Lambda^2 + m^2$. (cutoffでEEへの寄与が0になるように)

(For proper time reg., it does not matter; we may choose $M = \Lambda$.)

エントロピックc関数からの期待：$\dfrac{dS}{d\log\Lambda}$がcentral chargeを与える

（~理論の自由度）

RG flow and monotonicity of EE in free scalar

For $d = 1$,

$$(g_2 = m^2/\Lambda^2)$$

$$\frac{dS}{d\log\Lambda} = \frac{1}{6}\frac{1}{1+g_2} \text{ (hard cutoff reg.)}, \quad \frac{1}{6}e^{-g_2} \text{ (proper time reg.)}$$

✓ Both coincides with the expectation in the UV/IR limit:

$S \to 0$ as $g_2 \to \infty$: IR (massive) limit — No d.o.f. left

$S \to \frac{1}{6}$ as $g_2 \to 0$: UV (massless) limit — reproduces the central charge $c_{\text{boson}} = \frac{1}{6}$ of the Gaussian f.p. CFT

✓ They decrease monotonically as $\Lambda \searrow$ $\left(\Leftrightarrow \frac{d^2S}{d(\log\Lambda)^2} \geq 0 \right)$

$\boxed{\text{確かに}\frac{dS}{d\log\Lambda}\text{がeffectiveなcentral chargeを与える！}}$

RG flow and monotonicity of EE in free scalar

For $d > 1$,

$$\frac{dS}{d\log\Lambda} = \frac{1}{6}\frac{\Omega_{d-2}}{(2\pi)^{d-1}(d-1)}V_{d-1}\Lambda^{d-1}\frac{1}{1+g_2} \quad \text{(for hard cutoff reg.)}$$

$$\frac{dS}{d\log\Lambda} = \frac{1}{6}\frac{\Omega_{d-2}}{(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}}V_{d-1}\Lambda^{d-1}e^{-g_2} \quad \text{(for proper time reg.)}$$

$$(g_2 = m^2/\Lambda^2)$$

RG flowでのmonotonicity $\dfrac{d^2S}{d(\log\Lambda)^2} \geq 0$ を満たすか確認：各々

$$\frac{d^2S}{d(\log\Lambda)^2} = \frac{1}{6}\frac{\Omega_{d-2}}{(2\pi)^{d-1}(d-1)}V_{d-1}\Lambda^{d-1}\frac{1}{1+g_2}\left(d+1-\frac{1}{1+g_2}\right) \geq 0 \quad (\because g_2 \geq 0)$$

$$\frac{d^2S}{d(\log\Lambda)^2} = \frac{1}{6}\frac{\Omega_{d-2}}{(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}}V_{d-1}\Lambda^{d-1}e^{-g_2}\left(d-1+2g_2\right) \geq 0$$

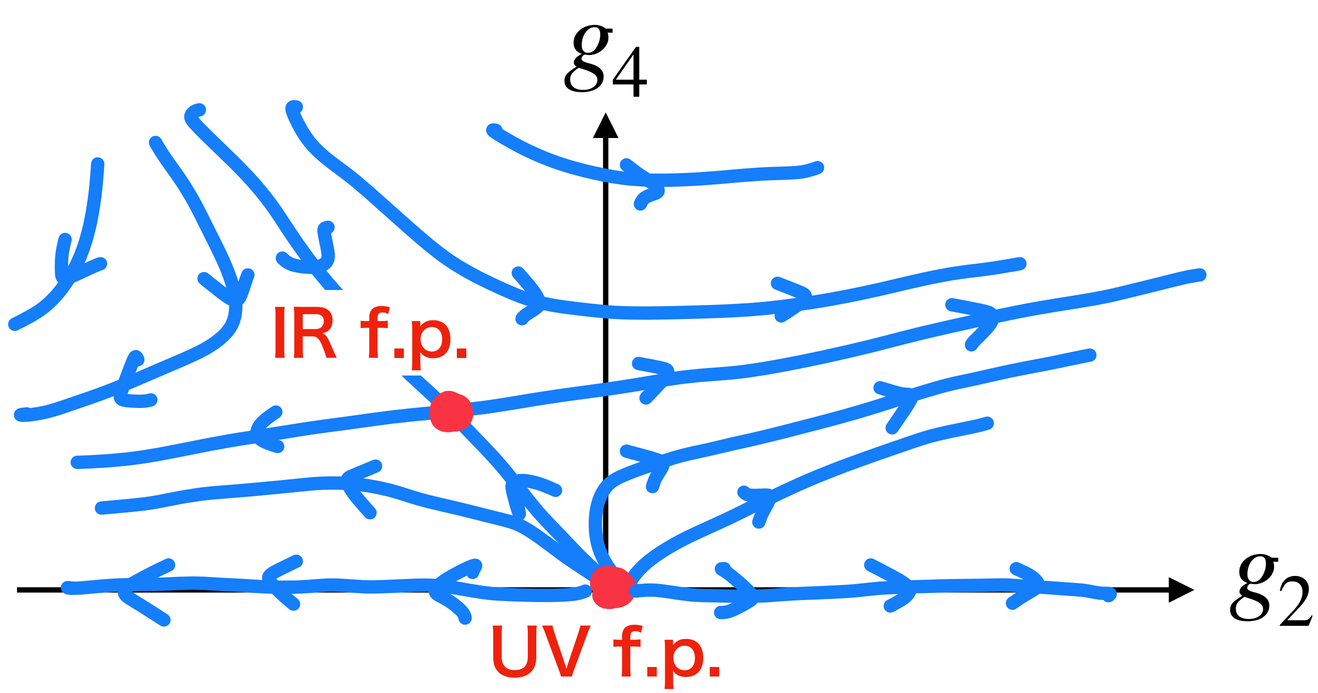
確かに満たす！

相互作用が入った場合

—Wilson-Fisher fixed point in $4-\epsilon$ dim. を例として—

Wilson-Fisher fixed point and ϵ expansion

In $d < 4$, scalar field theory has a nontrivial IR fixed point a.k.a. Wilson-Fisher fixed point.
In particular, when $d = 4 - \epsilon$, the IR f.p. becomes weakly coupled
→Analytically tractable using linearized RG eqs.



$g_2 = m^2/\Lambda^2$
$g_4 = \lambda/\Lambda^{4-d}$

EE in interacting ϕ^4 scalar theory

For convenience, we choose the hard cutoff reg.

The reference scale should be chosen
s.t. (EE for mode $k_{\|}$)=0 at $|k_{\|}| = \Lambda$ as in free theory.

$$S = -\frac{V_{d-1}}{12}\int^{\Lambda}\frac{d^{d-1}k_{\|}}{(2\pi)^{d-1}}\left[\log\left(\frac{G^{-1}(\mathbf{0},k_{\|})}{G^{-1}(\mathbf{0},\Lambda)}\right) - \log\left(\frac{1-\frac{3}{2}\lambda G_{\phi^2\phi^2}(\mathbf{0},k_{\|})}{1-\frac{3}{2}\lambda G_{\phi^2\phi^2}(\mathbf{0},\Lambda)}\right)\right]$$

Using RG eq., to the 1st order in ϵ, the eff. central chg is

$$\frac{dS}{d\log\Lambda} = \frac{V_{2-\epsilon}\Lambda^{2-\epsilon}}{12}\frac{\Omega_{1-\epsilon}}{(2\pi)^{2-\epsilon}(2-\epsilon)}\left(\frac{1}{1+g_2^{\mathrm{phys}}} - \frac{\epsilon}{6}\right) + O(\epsilon^2),$$

where $g_2^{\mathrm{phys}} = m_{\mathrm{phys}}^2/\Lambda^2$.

RG flow and monotonicity of EE in interacting ϕ^4 scalar theory

Vicinity of the IR Wilson-Fisher f.p.

$$\frac{dS}{d\log\Lambda} = \frac{V_{2-\epsilon}\Lambda^{2-\epsilon}}{12}\frac{\Omega_{1-\epsilon}}{(2\pi)^{2-\epsilon}(2-\epsilon)}\left(1+\frac{\epsilon}{18}+O(\epsilon^2)\right)$$

Vicinity of the UV Gaussian f.p. $\wedge$

$$\frac{dS}{d\log\Lambda} = \frac{V_{2-\epsilon}\Lambda^{2-\epsilon}}{12}\frac{\Omega_{1-\epsilon}}{(2\pi)^{2-\epsilon}(2-\epsilon)}\times 2$$

確かにUVの方がIRより大きい

2回微分はRG eq.を2回使うことで計算できる：

$$\frac{d^2S}{d(\log\Lambda)^2} = \frac{V_{2-\epsilon}\Lambda^{2-\epsilon}}{12}\frac{\Omega_{1-\epsilon}}{(2\pi)^{2-\epsilon}}\left(1+\frac{\epsilon}{9}\right)+O(\epsilon^2) > 0$$

確かに示された！

Pros and cons

【利点】

- 従来のentropic c-functionと異なり、CFT以外でも計算可
- 有限のintervalで考える必要がない
- CFT以外ではlength l以外のスケールがあるため、lに関する単調性がRG flowでの単調性に完全に等価であるかは微妙であったが、今回は直接cutoffに対する応答を見ている

【欠点】

- c関数がcutoff-dependentなため、正則化による
  但し、UVで0になるような良い正則化を選ぶとc関数にはなる
- Cutoffをあらわに変えるため、数値的な確認が難しい

まとめ

- 半空間のEE in 相互作用する場の理論を使って、
  Wilson流くりこみの観点からcutoff依存性をあらわに見た
- Cutoff依存のeffectiveな中心電荷が定義でき、自由場でRG flowの単調性も示された
- さらに先行研究で求めた公式を用いて、非自明なIR固定点として
  Wilson-Fisher f.p.をϵ展開で調べた
  この場合も確かに単調性が確認された

<u>今後の課題</u>

- 先行研究[Metlitski-Fuertes-Sachdev '09, Whitsitt-Witczak-Krempa-Sachdev '17, Akers et al. '16, Chen-Dai et al. '21]との比較
- 正則化によらない定義