メビウス変換の
ゲージ固定についての再考

奈良女子大学　素粒子論研究室
M2　佐々木智子

I. Kishimoto, T. Sasaki, S. Seki, T. Takahashi,
“The Veneziano Amplitude via Mostly BRST Exact Operator”,
arXiv:2109.08433 [hep-th]

two-point amplitude

tree-levelのopen string two-point amplitudeは「0」なのか？

$$\mathcal{A}_2 = \langle V_1 V_2 \rangle$$

ゲージ対称性 (上半平面の自己同型写像 $PSL(2;\mathbb{R})$) の3つの自由度のうち、2つのvertex operatorの位置を決めることによって、部分的に固定できる。しかし、まだ残っているゲージ対称性から生じる無限大のvolumeがあるので、

$$\mathcal{A}_2 = \frac{finite}{\infty} = 0$$

「two-point amplitudeは消えない」

[H. Erbin, J. Maldacena and D. Skliros, “Two-Point String Amplitudes”, JHEP 1907 (2019) 139]

運動量保存とエネルギー保存のδ関数から、
分子に無限大が生じる。

$$\delta(p_1^0 - p_2^0)\delta^{D-1}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) \quad \longrightarrow \quad \delta(0)\delta^{D-1}(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)$$

on-shell条件: $p_i^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}_i^2 + m^2}$

この$\delta(0)$が無限大のゲージvolumeを打ち消す。

$$\mathcal{A}_2 \propto \frac{\infty}{\infty} = 2p^0(2\pi)^{D-1}\delta^{D-1}(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k})$$

[Erbin-Maldacena-Skliros]は、このtwo-point amplitudeを
経路積分形式で示した。

演算子形式でも、同様のtwo-point amplitudeを導出できるか？

mostly BRST exact 演算子

[S. Seki and T. Takahashi, “Two-point String Amplitudes Revisited by Operator Formalism”, Phys. Lett. B800 (2020) 135078]

[S. Seki and T. Takahashi, “Reduction of Open String Amplitudes by Mostly BRST Exact Operators”, Phys. Lett. B822 (2021) 136664]

ゴースト数１を持ち、BRST不変 $(\delta_B \mathcal{E} = 0)$である演算子を導入。

$$\mathcal{E}(z) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq \left(c\partial X^0 e^{-iqX^0} - i\alpha' q(\partial c) e^{-iqX^0} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{i}{q}(\delta_B e^{-iqX^0}) \, , \qquad \delta_B e^{-iqX^0} = \left[Q_B, e^{-iqX^0} \right]$$

Lorentz不変性

$$\mathcal{E}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\frac{i}{q}(\delta_B e^{-iqX^0})\ , \qquad \delta_B e^{-iqX^0} = \left[Q_B, e^{-iqX^0}\right]$$

微小なLorentz変換

$$X^\mu \to X'^\mu = X^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu X^\nu$$

より、$\mathcal{E}$ の微小変化は

$$\delta\mathcal{E} = [Q_B, \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\pi}\epsilon^0{}_\nu X^\nu e^{-iqX^0}]$$: BRST exact （$\delta\mathcal{E} = \delta_B(*)$）

相関関数で考えると

$$\delta\left\langle\mathcal{E}\cdots\right\rangle = \left\langle\delta\mathcal{E}\cdots\right\rangle = \left\langle\delta_B(*)\cdots\right\rangle = 0$$

となり、$\mathcal{E}$を挿入した相関関数はLorentz不変。

three-point function→two-point amplitude

タキオンのvertex operator $V_i(y) \equiv e^{ip_i \cdot X}(y)$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= i g_o^2 C_{D_2} \frac{\alpha'(p_1^0 - p_2^0)}{i} (2\pi)^{25} \delta^{25}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{\infty} dq\ \delta(q + p_1^0 + p_2^0) |y_{01}|^{-2\alpha' q p_1^0} |y_{02}|^{-2\alpha' q p_2^0} |y_{12}|^{\alpha' q^2} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{p_1^0}{|p_1^0|} - \frac{p_2^0}{|p_2^0|}\right)}_{\text{符号因子}} \times \underbrace{2|p_1^0|(2\pi)^{25}\delta^{25}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}_{\text{two-point amplitude}}
\end{aligned}
$$

five-point function→four-point amplitude

$$A_4 = \frac{1}{\mathrm{vol}PSL(2,\mathbb{R})}\langle \int dy_1 V_1(y_1) \int dy_2 V_2(y_2) \int dy_3 V_3(y_3) \int dy_4 V_4(y_4)\rangle$$

$y_0 < y_3 < y_4$ として、y_0，y_3，y_4 を固定すると、

$$\mathcal{A}_4 = i g_{\mathrm{o}}^4 C_{D_2} \langle 0|\, \mathcal{E}(y_0) \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 V_1(y_1) \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 V_2(y_2)\, cV_3(y_3)\, cV_4(y_4)\, |0\rangle$$

q積分の相関関数として $\mathcal{A}_4$を書き直すと

$$\mathcal{A}_4 = i g_{\mathrm{o}}^4 C_{D_2} \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \mathcal{F}(q)$$

$$\mathcal{F}(q) \equiv \langle 0|\left(\frac{i}{\pi q}\delta_{\mathrm{B}} e^{-iqX^0}(y_0)\right) \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 V_1(y_1) \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 V_2(y_2)\, cV_3(y_3) cV_4(y_4)\, |0\rangle$$

$\mathcal{F}(q)$を書き直すと、

$$\mathcal{F}(q) = (2\pi)^{26}\delta^{26}(\sum_{k=0}^{4} p_k) \left|\frac{y_{03}y_{04}}{y_{34}}\right|^{\alpha' q^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \frac{i}{\pi q}$$

$$\times \left(\frac{\alpha' p_0 \cdot p_0}{2} + \alpha' p_0 \cdot p_3 + \frac{\alpha' p_0 \cdot p_1}{u_1} + \frac{\alpha' p_0 \cdot p_2}{u_2} \right)$$

$$\times |u_1|^{2\alpha' p_0 \cdot p_1} |1-u_1|^{2\alpha' p_1 \cdot p_3} |u_2|^{2\alpha' p_0 \cdot p_2} |1-u_2|^{2\alpha' p_2 \cdot p_3} |u_1 - u_2|^{2\alpha' p_1 \cdot p_2}$$

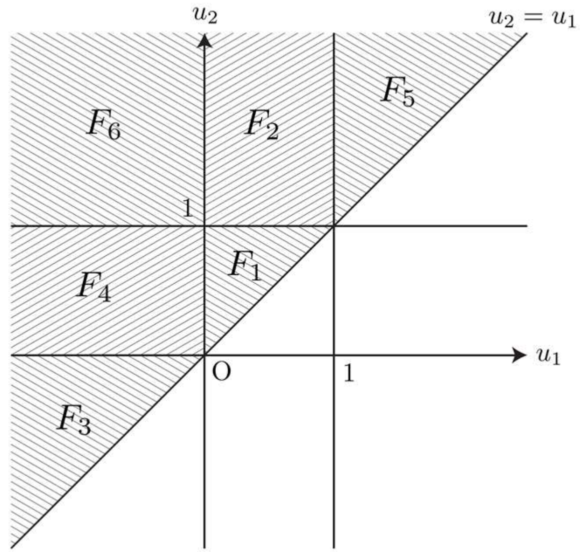
cross-ratio:

$$u_1 = \frac{y_{01}y_{34}}{y_{03}y_{14}} \ , \ u_2 = \frac{y_{02}y_{34}}{y_{03}y_{24}} \qquad (y_{ij} = y_i - y_j)$$

$\mathcal{F}(q)$は各領域に対応する積分に分解でき、

$$\mathcal{F}(q) = (2\pi)^{26}\delta^{26}\left(\sum_{k=0}^{4} p_k\right)\left|\frac{y_{03}y_{04}}{y_{34}}\right|^{\alpha' q^2} \times \{F_1(q) + F_2(q) + \cdots + F_6(q)\} + (p_1 \leftrightarrow p_2)$$

$F_i(q)$は各積分領域に対応する。



例えば、$[0,1,2,3,4]$のとき

$$F_1(q) = \int_0^1 du_2 \int_0^{u_2} du_1 \frac{i}{\pi q} \times \left(\frac{\alpha' p_0\cdot p_0}{2} + \alpha' p_0\cdot p_3 + \frac{\alpha' p_0\cdot p_1}{u_1} + \frac{\alpha' p_0\cdot p_2}{u_2}\right) \times u_1^{2\alpha' p_0\cdot p_1}(1-u_1)^{2\alpha' p_1\cdot p_3} u_2^{2\alpha' p_0\cdot p_2}(1-u_2)^{2\alpha' p_2\cdot p_3}(u_2-u_1)^{2\alpha' p_1\cdot p_2}$$

$F_1(q)$

cross-ratios u_1, u_2 を

$$u_1 = xy \ , \ u_2 = x$$

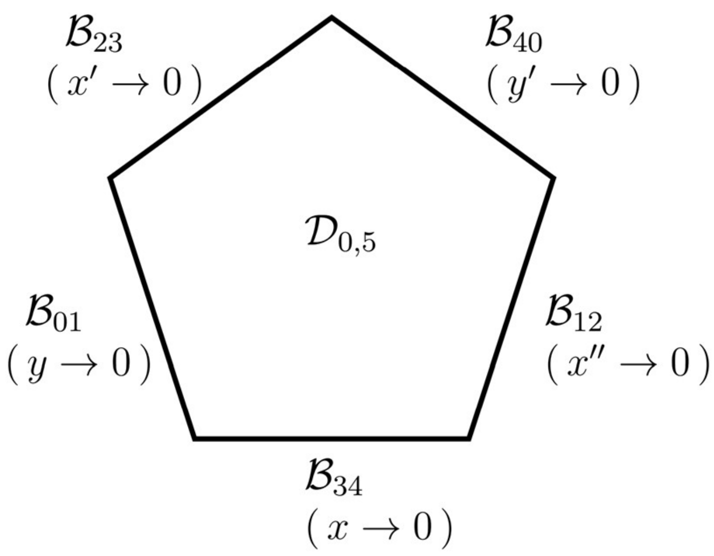
とすると、x, y もcross-ratiosで

$$x = \frac{y_{02}y_{34}}{y_{03}y_{24}} \ , \ y = \frac{y_{24}y_{01}}{y_{14}y_{02}}$$

x, yの積分領域は $0 \leq x, y \leq 1$ なので、$F_1(q)$ は

$$F_1(q) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{-i\alpha'}{\pi} \left(\frac{q}{2} + \frac{p_1^0}{xy} + \frac{p_2^0}{x} + p_3^0 \right)$$
$$\times x^{2\alpha' p_3 \cdot p_4 - \alpha' p_0 \cdot p_0 + 1} (1-x)^{2\alpha' p_2 \cdot p_3} y^{2\alpha' p_0 \cdot p_1} (1-y)^{2\alpha' p_1 \cdot p_2} (1-xy)^{2\alpha' p_1 \cdot p_3}$$

moduli空間 $\mathcal{D}_{0,5}$ は五角形になる。



ここで、

$$x' = \frac{1-x}{1-xy}\ ,\ y' = 1 - xy$$

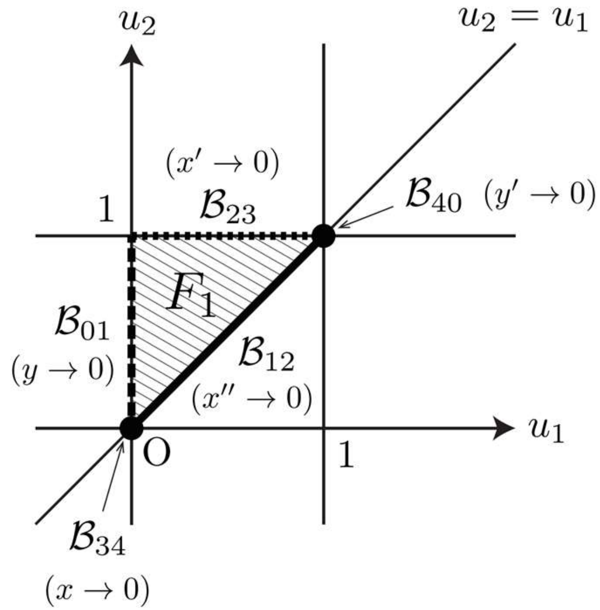
$$x'' = \frac{1-x'}{1-x'y'}\ ,\ y'' = 1 - x'y' = x$$

のように変換した。

x', y', x'' も x, y と同様にcross-ratios。

また、(u_1, u_2) 平面で考えると、

F_1 は三角形になる。



$q=0$での $F_1(q)$ の特異点を調べる。

$\mathcal{B}_{01}$ について $y=0$ 近傍を調べると、

$$\int_0^1 dy y^{2\alpha' p_0\cdot p_1 - 1} \sim \frac{1}{-2\alpha' q p_1^0 - i\varepsilon} \sim \frac{\pi i}{2\alpha' |p_1^0|}\delta(q)$$

と $\delta(q)$ を抜き出すことができる。

$\mathcal{B}_{40}$ の場合も同様に $\delta(q)$ を抜き出すことができ、その結果、

$$F_1(q) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^0}{|p_1^0|} - \frac{p_4^0}{|p_4^0|}\right)\delta(q) I(u,s)$$

$$\left[\begin{array}{l} s=-(p_1+p_2)^2,\ t=-(p_1+p_3)^2,\ u=-(p_1+p_4)^2 \\ I(u,s) \equiv B(-\alpha' u - 1, -\alpha' s - 1) \\ B(a,b) = \int_0^1 dx\ x^{a-1}(1-x)^{b-1} \end{array}\right]$$

$F_2(q), F_3(q), \cdots, F_{12}(q)$についても、$\delta(q)$を抜き出すことができる。
全てを足し合わせると、

$$\mathcal{A}_4 = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{p_3^0}{|p_3^0|} - \frac{p_4^0}{|p_4^0|}\right)}_{\text{符号因子}} \times A_4$$

A_4 はVeneziano amplitudeで

$$A_4 = 2ig_0^4 C_{D_2}(2\pi)^{26}\delta^{26}(\sum_{k=1}^{4} p_k)(I(s,t) + I(t,u) + I(u,s))$$

summary

- five-point functionからfour-point amplitudeを導出した。
- 結果にmoduli積分が残るような振幅の計算を行った。
- mostly BRST exact 演算子$\mathcal{E}$ は $PSL(2;\mathbb{R})$ の１自由度を正しくゲージ固定する。
- $\mathcal{E}$ を挿入した場合の一般式(n≥2)は

$$ig_{\mathrm{o}}^{n}C_{D_2}\langle 0|\,\mathcal{E}(y_0)\int_{-\infty}^{\infty}dy_1V_1(y_1)\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dy_{n-2}V_{n-2}(y_{n-2})\,cV_{n-1}(y_{n-1})\,cV_n(y_n)\,|0\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{p_{n-1}^{0}}{|p_{n-1}^{0}|}-\frac{p_{n}^{0}}{|p_{n}^{0}|}\Big)\times A_n$$

と予想される。