潮汐力と潮汐

Tidal forces and tides

○ 松田　卓也，神戸大学名誉教授，神戸市灘区六甲台町, tmatsuda312@yahoo.co.jp
猪坂弘，神戸大学理学研究科，神戸市灘区六甲台町
Takuya Matsuda, Emeritus professor of Kobe University, Rokkodai-machi, Nada-ku, Kobe, 657-8501
Hiromu Isaka, Graduate School of Science, Kobe University, Kobe, 657-8501

We discuss tidal forces and tides, of which notions are sometimes misunderstood in literatures of public domain. We derive the formula for tidal force produced by a point mass on an extended body. The tidal force is a secondary effect of the force of gravity, and the tidal force produces tide along with other forces. The tidal force arises because the gravitational force extended on a body by a secondary mass is not uniform across its diameter. In the derivation of the tidal force, the non-uniformity of the gravity is essential, and inertial forces such as centrifugal force and/or Colioris force are not needed. On the other hand, in order to calculate tide, we have to take into account of, not only the tidal force, but the inertial forces, pressure gradient force and viscous force.

１．はじめに

本小論において潮汐力と潮汐を論じる。ここで厳密性のために潮汐力と潮汐の概念を区別する。潮汐力とは重力場の非一様性に起因する重力の２次的な効果である。一方、潮汐とは潮汐力により引き起こされる現象であるとする。例えば地球上の海水の形状が球面からずれる現象である。そのずれを求めるには、潮汐力だけでなく、地球の重力、地球の自転による遠心力、コリオリ力、海水の圧力勾配力、地球と海水の間の摩擦力などを考慮しなければならない。例えばWikipediaでも潮汐力[1,2]と潮汐[3,4]は別項目になっている。

潮汐力の概念はニュートンが発見したものであるが、現在において科学的にはきっちりと定義されていて疑問の余地はない。しかし、それを易しく解説しようとすると、著者により説明法が違い、そのなかには間違った概念も紛れ込む。実際、潮汐力に関する論争のみを論じた記事もある[5]。注意すべき事は、先に挙げたWikipediaの記事も全面的に信用することは出来ないということだ。とくに日本語の解説記事には問題がある。

潮汐力とは先に述べたように重力の非一様性に起因する２次的効果である。ここで、ある領域内での平均的な重力を１次的重力と呼び、一様な１次的重力からのずれを２次的重力と呼ぶことにする。この意味で潮汐力は２次的重力のことである。だから潮汐力を数学的に記述して定義することは簡単明瞭であり、そこには論争を呼ぶような不確かさはほとんどない(3.1 節参照)。

ところが潮汐力は、まずは地球の海水の潮汐を引き起こす力として発見されたという歴史的経緯のため、潮汐力を説明するのにお互いに公転している地球・月系をとりあげる場合が多い。ここで地球・月系はその共通重心の周りに円運動をしていると仮定する。その回転系で考えると、地球、月の中心は静止している。海面の形もこの座標系に対して静止している。

そのような回転系に静止しておかれたテスト粒子には、地球重力、月重力、系の回転に起因する遠心力が働く。地球上で働く潮汐力は、非球対称な成分であるので、以後の議論では、とくに述べない限り、地球重力は無視する。もしテスト粒子が回転系に対して運動していると、さらにコリオリ力も働く。コリオリ力を計算するには、回転系でのテスト粒子の速度を与えなければならない。つまり海水が回転系にたいしてどう運動するかを指定する必要がある。この運動の指定を巡って混乱が生じる。違った状況を考えたら結果が異なるのは当然である。

ここで重要なことは、潮汐力を決めるのは月重力だけであり、系が公転しているか、自転しているかは関係ないと言うことだ。だから潮汐力を求めるには、遠心力やコリオリ力は関係ない。その意味ではどのような状況を考えても、潮汐力はユニークに定義できる。しかし潮汐現象、具体的には海水面の形を求めるには、潮汐力の他に、地球重力、遠心力、コリオリ力、海水の圧力勾配力、海水が地球から受ける力、たとえば抗力や摩擦力も考慮する必要がある。だから考える状況によって、潮汐現象は異なる可能性がある。しかし潮汐力は変わらない。

世の中の潮汐力を解説した文献に混乱があるとすれば、その多くは潮汐力と潮汐の区別をきちんとしていないこと、回転系に基づいて議論していることに原因がある。

潮汐力は月重力による海水への影響として発見されたので、海洋学的、天文学的には重要であっても、物理学的にはそれほど重要な概念ではなかった。しかし一般相対論においては、潮汐力こそが真の重力であるという意味において、極めて重要な概念になったのである。そこでは潮汐力とはリッチ・テンソルであり、曲率を生み出さない慣性力は、潮汐力には寄与しないのである。つまり相対論的に言っても、遠心力やコリオリ力などの慣性力は、潮汐力とは関係ないのである。

本小論では現実的な潮汐は論じない。潮汐力の概念を解説し、簡単な場合についてのみ潮汐を論じる。

２．潮汐加速度の簡単な計算

2.1　非回転の場合の１次元計算

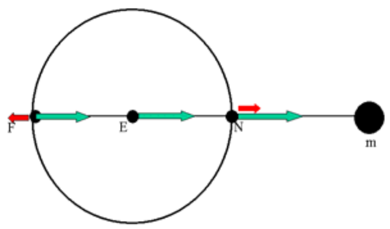

Fig. 1 潮汐力/潮汐加速度の計算。質量 m の天体２(右の黒丸)が天体 1(左の丸)に重力を及ぼしている(緑色のベクトルで表した)。E,N,F は天体１の中心、天体２に近い側の点、遠い側の点である。赤いベクトルが潮汐加速度である。

図１においてｍは潮汐力を及ぼす天体２で、その質量をｍとする。天体２は簡単のため質点とする。左の円は例えば広がった天体１で、その中心をＥとする。２天体の中心Ｅとｍを結ぶ直線を描く。天体１の表面上の点でその直線上にある２点を考える。天体２に近い点をＮ、遠い点をＦとする。Ｅとｍの間の距離をＲ、天体１の半径をｒとする。天体２がN,E,F点に及ぼす重力加速度はそれぞれ

$$g_N = \frac{Gm}{(R-r)^2}$$
$$g_E = \frac{Gm}{R^2} \qquad (1.1)$$
$$g_F = \frac{Gm}{(R+r)^2}$$

である。ここで重力加速度は、単位質量あたりに作用する重力である。図では緑で示したベクトルが、それぞれの点に働く重力加速度である。

単位質量あたりに働く潮汐力を潮汐加速度と呼ぶことにする。この場合の潮汐加速度は(1.1)の重力加速度の差である。ＮとＥに働く重力加速度の差を計算すると

$$g_{NE} = g_N - g_E = \frac{Gm}{(R-r)^2} - \frac{Gm}{R^2}$$
$$= \frac{Gm}{R^2}\left[\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-2} - 1\right] = \frac{2Gm}{R^3} r + O\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (1.2)$$

この右辺第１項がＮ点に働く潮汐加速度である。同様にＦ点に働く潮汐加速度は

$$g_{FE} = -\frac{2Gm}{R^3} r + O\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (1.3)$$

となり、潮汐加速度の大きさは(1.2)のものと、大きさは同じで方向が反対である。図１では赤色で示したベクトルが潮汐加速度である。

潮汐加速度はＥ点に働く重力加速度を微分しても得られる。

$$\Delta g_E = \frac{dg_E}{dR}\Delta R = -\frac{2Gm}{R^3}\Delta R \qquad (1.4)$$

天体１と２が慣性系にあり、天体２が天体１に向かって真っ直ぐに自由落下しているような状況を考える。その場合、Ｅ点にいる観測者から見ると、Ｎ点とＦ点は、赤いベクトルで示したような加速度で遠ざかっていくように観測される。それが潮汐力の効果である。

この場合、次のようにも解釈できる。Eとともに落下する観測者はEに働く重力加速度g_Eと、大きさが同じで方向が反対の慣性力－g_Eを感じる。その慣性力は天体１全体で一様であるから、天体１にはやはり赤色ベクトルで示したような潮汐力を感じる。

あるいは天体１が、何かの力で支えられて、天体２に自由落下しない場合を考える。その場合でも、天体１には一様な抗力－g_Eが働き、やはり(1.2),(1.3)の潮汐加速度が天体１に働く。

2.2　天体が共通重心の周りを公転している場合

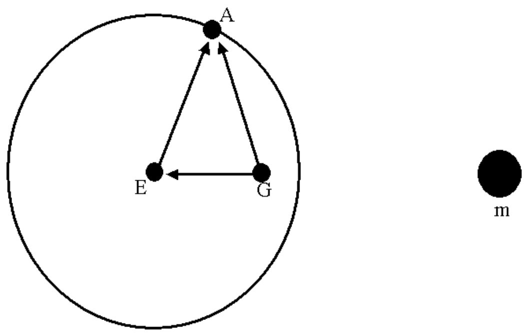

Fig. 2 天体１(左の白丸)と天体２(右の黒丸)は共通重心Ｇの周りを円軌道で公転している。図は公転面を表し、公転の回転軸はＧを通り紙面に垂直な直線である。公転方向は正、つまり反時計回りとする。回転系に固定したＡ点に働く遠心力をベクトルGAで表せば、それは一定ベクトルGEと、動径方向を向くベクトルEAの和として表せる。遠心加速度の成分GEはＡ点が円上のどこにあっても同じである。またベクトルGEはＥ点に、質点ｍが作る重力加速度と大きさが等しく方向が反対である。ベクトルEAは中心Ｅから外向きであるので、公転面に限れば、天体１による重力加速度を、少し弱くする効果を持つ。いわば重力に組み込める。しかしその成分は、軸対称的であり海面をゆがめる潮汐効果をもたない。

2.2.1　天体が回転系で静止している場合

次に天体１と２が共通重心Ｇの周りを、角速度Ωで円軌道を描いて公転している場合を考えよう。地球・月系の場合、共通重心は図２に示すように、天体１の内部にある。しかしそのことは本質的ではない。Ｇ点が天体１の外部にあっても議論は同様に成立する。

潮汐加速度は重力加速度の非一様性であるので、その導出は2.1節のものと同じである。しかし天体１の上にあるテスト粒子に働く力は、潮汐力だけではなく、系の回転による慣性力を考慮しなければならない。

その場合は、テスト粒子の運動が問題になる。そこで天体１が慣性系に対して角速度ωで回転しているとする。すると回転系から見れば天体１は

$$\omega_1 = \omega - \Omega \qquad (1.5)$$

の角速度で自転しているように見える。

まずＡ点に置かれたテスト粒子が回転系に対して静止している場合を考えよう。あるいは天体１の慣性系における自転角速度ωが、公転角速度Ωと等しいと言い換えることも出来る。

$$\omega = \Omega \qquad (1.6)$$

この場合、

$$\omega_1 = 0 \qquad (1.7)$$

となり、天体１は回転系では自転していない。

天体１の表面上の任意の一点Ａを考える。Ａ点に静止したテスト粒子に働く慣性力は、遠心力だけである(コリオリ力はない)。遠心力の大きさは長さGAに比例するので、ここでは遠心力はベ

クトル GA と等しいとしよう。ベクトル GA は次のように分解できる。

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EA} \tag{1.8}$$

これらの遠心力成分の大きさは GE 間の距離を a とすれば

$$\left|\overrightarrow{GE}\right| = a\Omega^2 \tag{1.9}$$

$$\left|\overrightarrow{EA}\right| = r\Omega^2 \tag{1.10}$$

ベクトル GE は A 点が円上のどこにあっても、同じである。一方ベクトル EA は、E を中心として、そこから動径方向外向きである。天体１による重力は A 点から動径方向内向きである。だから公転面だけに限れば、ベクトル EA で表される遠心力は、重力を場所によらず少し弱める効果を持つ。このことをさして、遠心力は重力に組み込めると表現することも出来る。遠心力の動径成分 EA は、軸対称的であり、海面をゆがめる潮汐効果を持たない。海面の形を決めるのは、天体２の重力と遠心力成分 GE のみである。

天体１と２が共通重心の周りに円運動している場合、天体２が天体１に及ぼす重力g_EはベクトルGEと大きさが同じで、方向が反対である。つまり式(1.2)で天体２の重力を差し引く代わりに、一定の大きさの遠心力g_Eを加えても同じ結果になる。

世の解説書で、天体２の重力に、一定の遠心力を加えると潮汐力になるという説明のものがあるが、それは上記のように解釈すれば理解できる。ただし、もともとの遠心力は GE ではなく GA である。だから点 N に働く、本来の遠心力は図の場合では左を向くのではなく、右を向くことになる。そのことを指摘しないと、誤解の原因となりやすい。

2.2.2 天体が慣性系に対して非回転の場合

先のケースではテスト粒子は回転系に対して静止と仮定した。そのために遠心力 EA を付加しなければならなかった。そこで次に、天体１は慣性系から見て回転していないと仮定しよう。その場合、明らかに次の式が成り立つ。

$$\omega = 0 \tag{1.11}$$

ところが角速度Ωで正の方向に回転する回転系から見ると、天体 1 は静止ではなく-Ωで自転していることになる。

$$\omega_1 = \omega - \Omega = -\Omega \tag{1.12}$$

図３に示したように、A 点は赤い矢印で示した方向に自転している。そのため、回転系の上ではコリオリ力が働く(水色のベクトル)。コリオリ力による加速度の大きさは

$$g_C = 2v_\theta\omega_1 = 2\left(r\omega_1\right)\omega_1 = 2r\Omega^2 \tag{1.13}$$

となり、図ではベクトル AB で表される。それと遠心力 EA を加えると、ベクトル AE となる。これは A 点から回転中心 E に向かう向心力となり、A 点は E の周りを円運動する。

天体１が慣性系に対して非回転の場合、海水がその天体に対して相対的に静止であるとすると、海水は図３の緑の矢で示したように、潮汐バルジに対して相対的に運動しなければならない。潮汐バルジは回転系に対して静止しているからだ。海水の回転速度は、回転系から見て正確に剛体回転でなければならない。

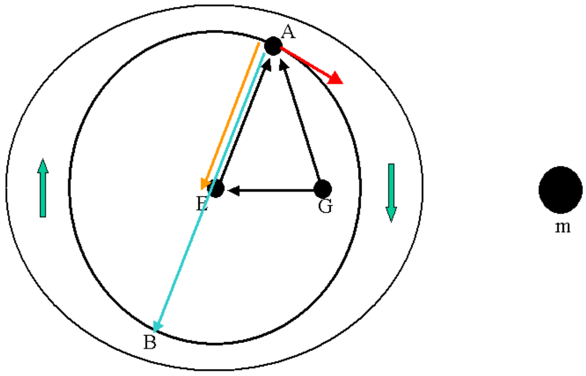

Fig. 3 慣性系に対して非回転の天体１と、その海面および潮汐。回転系から見ると、天体は角速度-Ωで自転しているように見える。A 点に示した赤い矢印は A 点にあるテスト粒子の速度。点 A の速度によるコリオリ力 AB と遠心力 EA を加えると、向心力 AE になる。そのため、A 点は E の周りを円運動する。潮汐バルジは回転系に対して静止しているので、海水はバルジの中を、E 点を中心として回転角速度-Ωで流れなければならない(緑の矢印)。

3 より厳密な取り扱い

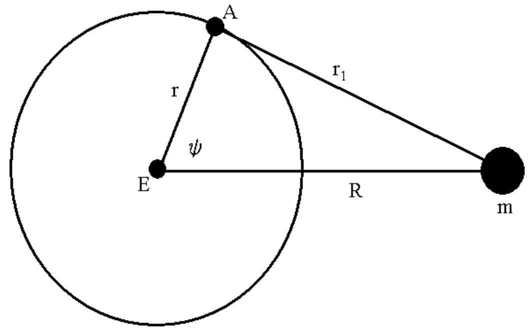

Fig. 4 潮汐力ポテンシャルの計算。天体１上の点Aは天体２から距離r_1離れている。

3.1 潮汐力ポテンシャル

2.1 節では天体２によって作られる重力ポテンシャルを、直線Em上でのみ求めた。ここではそれを一般化しよう。図４に示したように、点Aは天体 1 の中心Eから距離r離れたところにある。角度AEmをφとする。Aとmの距離をr_1とすると、余弦定理から次の式が成り立つ。

$$r_1^2 = R^2 - 2rR\cos\psi + r^2 \tag{1.14}$$

あとで重力ポテンシャルを求める場合に $1/r_1$が重要になるので、それを求めると

$$r_1^{-1} = \frac{1}{R}\left[1 - 2\frac{r}{R}\cos\psi + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{1.15}$$

ここでrはRに比べて十分に小さいとしてルジャンドルの多項式を使ってr/Rで展開すると

$$r_1^{-1}=\frac{1}{R}\left[1+\frac{r}{R}P_1\left(\cos\psi\right)+\left(\frac{r}{R}\right)^2P_2\left(\cos\psi\right)+O\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$$

(1. 16)

ここでルジャンドルの多項式は

$$P_1\left(x\right)=x$$
$$P_2\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2} \qquad (1.17)$$

であるので、高次の項を無視して

$$r_1^{-1}=\frac{1}{R}\left[1+\frac{r}{R}\cos\psi+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(3\cos^2\psi-1\right)\right] \qquad (1.18)$$

A 点で質点mの作る重力ポテンシャルは

$$V_m=-\frac{Gm}{r_1}=-\frac{Gm}{R}\left[1+\frac{r}{R}\cos\psi+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(3\cos^2\psi-1\right)\right] \qquad (1.19)$$

である。重力加速度は重力ポテンシャルの勾配である。(1.19)の右辺第1項は定数であるから、力を生じない。第2項はEmの方向をx軸とすると

$$x=r\cos\psi \qquad (1.20)$$

であるので、x 軸方向を向かう一定の力となり、加速度の x 成分は

$$g_x=-\frac{\partial V_m}{\partial x}=\frac{Gm}{R^2} \qquad (1.21)$$

である。これは天体2が天体1の中心に及ぼす重力である。従って潮汐力ポテンシャルV_tは(1.19)の第3項になり

$$V_t=-\frac{Gm}{2R^3}r^2\left(3\cos^2\psi-1\right) \qquad (1.22)$$

である。

潮汐力ポテンシャルの勾配を求めると、潮汐加速度が得られる。潮汐加速度は天体1の表面にそった水平成分g_Hと、動径方向の成分g_rに分解できる。

$$g_r=-\frac{\partial V_t}{\partial r}=\frac{Gm}{R^3}r(3\cos^2\psi-1)$$
$$g_H=-\frac{1}{r}\frac{\partial V_t}{\partial\psi}=-\frac{3Gm}{2R^3}r\sin 2\psi \qquad (1.23)$$

ここまでの取り扱いは、2 次元的であった。しかし図4を見れば分かるように、潮汐力ポテンシャルはx軸を回転軸として、軸対称的である。ここで 3 次元デカルト座標(x,y,z)と 3 次元極座標(r, θ, φ)を導入する。座標原点はEとする。x軸の方向はEmで、y軸は公転面内にあるとする。z軸はEを通り回転軸と平行な方向、図では紙面に垂直な方向であるとする。極座標とデカルト座標の関係は

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi \qquad (1.24)$$
$$z=r\cos\theta$$

である。(1.20)と比較すると

$$\cos\psi=\sin\theta\cos\varphi \qquad (1.25)$$

の関係が得られる。従って(1.22)は次のようにかける。

$$V_t=-\frac{Gm}{2R^3}r^2\left(3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1\right) \qquad (1.26)$$

3.2 遠心力ポテンシャル

回転系で見た場合、系の回転による遠心加速度は図２に示したようにベクトルGAの方向を向き、その大きさは

$$g_C=r_2\Omega^2 \qquad (1.27)$$

である。ただしここでr_2はGAの長さで、デカルト座標を用いると次のように表される。

$$r_2{}^2=(x-x_G)^2+y^2 \qquad (1.28)$$

ただしx_Gは共通重心のx座標である。従って遠心力ポテンシャルV_Cは

$$V_C=-\frac{\Omega^2}{2}\left[\left(x-x_G\right)^2+y^2\right] \qquad (1.29)$$

のように表される。点Gのy,z座標は0であるとする。

2.2.1節で論じた、遠心力ポテンシャルの分解は、次のように式で理解できる。

$$V_C=-\frac{\Omega^2}{2}\left[x^2+y^2-2xx_G+x_G{}^2\right]$$
$$=V_1+V_2-\frac{\Omega^2}{2}x_G{}^2 \qquad (1.30)$$

ただし

$$V_1=-\frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2) \qquad (1.31)$$

$$V_2=\Omega^2x_Gx \qquad (1.32)$$

V_1は、天体1の中心Eを通り、z軸に平行な軸を中心として、天体1が自転していると見たときの遠心力ポテンシャルである。V_2をxで微分するとx方向の一定の力を生み出す。

$$g_2=-\frac{\partial V_2}{\partial x}=-\Omega^2x_G \qquad (1.33)$$

この力と(1.21)の加速度が釣り合う。

$$\frac{Gm}{R^2}-\Omega^2x_G=0 \qquad (1.34)$$

遠心力ポテンシャルV_1を極座標を使ってあらわすと

$$V_1=-\frac{1}{2}\Omega^2r^2\sin^2\theta \qquad (1.35)$$

となる。結局、全ポテンシャルは、一定部分や打ち消し会う部分を除いて、天体１による重力ポテンシャル、潮汐力ポテンシャル、遠心力ポテンシャルの和になる。

$$V=-\frac{GM}{r}-\frac{Gm}{2R^3}r^2\left(3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1\right)-\frac{1}{2}\Omega^2r^2\sin^2\theta \quad (1.36)$$

天体１の表面上の質点の運動を考えるには、上記のポテンシャル力の他に、質点が回転系に対して相対的に運動する場合には、コリオリ力を付加しなければならない。

参考文献

(1) http://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%BD%AE%E6%B1%90%E5%8A%9B
(2) http://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_force
(3) http://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%BD%AE%E6%B1%90
(4) http://en.wikipedia.org/wiki/Tides#Alternative_explanation
(5) http://en.wikipedia.org/?title=Talk:Tidal_force