連続体力学： 早川尚男 (京大大学院人間・環境学研究科)

このノートはサイエンス社の本「連続体 (粉体)」の草稿です. 滅多やたらに勝手に流通させないで下さい.

1 連続体力学の目指すもの

1.1 連続体とは何か

連続体力学は 19 世紀にその枠組が完成し,20 世紀の科学・技術の基礎として揺るぎない信頼性を高めて来た. 一方で, その完成度故に学問的な進展の見込みがないものとして学徒に敬遠され, またその実利性が故に工学等の応用科学の一分野と見なされて来た. 同時に 20 世紀に入っての 2 大革命である量子論と相対論のどちらにも与みしなかったために, 古色蒼然とした印象を与えて来た. しかしソリトンに始まる可積分系の発展やカオスに始まる非線形動力学, または散逸構造等に見られるパターンの自己組織化等はいずれも 1 世紀も前の流体力学の研究にその萌芽を見る事ができ, 現代こそ連続体力学の再考が求められている時代と言えるかもしれない.

このことは一方で日常スケールで生じている現象に対して 20 世紀に発達した物理学は余りにも無力であり, もう一方でそういった現象では多数個の粒子を含んでいて概ね構成要素の個性を問わないで済むという経験的事実と合致している. 更に言えば連続体力学は無限自由度の系を記述法を提供しており場の量子論は連続体力学の一種と考えても構わない. 少なくともスカラー場の場の理論では理論形式は古典的な連続体とそれほど大きな違いはない. 実際, 場の量子論の導入のために流体や弾性体といった古典的な場を紹介する本もある.[1] 無論伝統的な連続体である流体の運動は古典的な流体力学で記述できるし, 古典的な弾性体も連続体で記述できる. 破壊現象はもとより弾性論の中で論じられる場合が殆んどである. 一方, 高分子等では粘弾性が関心の対象となるためにやはり連続体に基礎を置いている. 更にプリゴジン以降注目されてきた散逸構造は流体中のパターンを議論しており, 連続体が基礎となっている. 星の集団や銀河団, プラズマ, 或は粉体等もそのマクロな挙動を観測する限りにおいては連続体と考えていいであろう. 筆者にとって最も印象深いのは 2 次相転移や超伝導におけるギンツブルク・ランダウ (GL) 理論の成功である. 特に 2 次相転移の研究においてはウィルソンが従来主流であったミクロな局所モデルを採用せず疑似自由エネルギーとその局所的な結合に基づいた連続体モデルを採用し臨界現象の本質を明らかにした事である. 最もミクロな構造が場の量子論によって記述され, 臨界現象や流体, 弾性体等の非常にマクロなスケールで連続体力学を用いるというこの事実がカリキュラム上での扱いと無関係に連続体力学が有効であることを示唆している.

その一方で最近はマクロな系の記述からセミマクロな系へ関心が移り, 従来看過されてきた構成要素の離散性をまともに扱わないといけない場合が増えて来た. 星の場合も連続体的な取り扱いに比べ長距離多体的相互作用をする質点系といった側面が強く押し出される様になった. また流体に浮かぶコロイド粒子やサスペンションもやはり流体を媒介として長距離相互作用をする粒子系であって, それらの振舞は余りよく理解されているとは言い難い. これらの例はしかしながら離散的な系というより場という連続量を媒介とした連続体の域を出ないものと捉えるべきであろう. あるいは粉体のように構成要素の離散性を全面に出し, 尚且場の媒介を考慮しない場合は連続体の対極にあると考える向きがあるかもしれない. しかしそうした考えは幾つかの点で根本的誤謬を含んでいる. まず第一に粉体を内部構造のある粒子と考えた際にその内部構造を決める基礎となる

[1] 高橋康「古典場から量子場への道」(講談社サイエンティフック,1979)

のは弾性体力学である. 次にマクロな粉体集団の挙動の大部分はこの本で例として示していくように特異な連続体として特徴づけられる. 更に離散性が避けがたい場合にもその連続体的記述の限界を見定めて比較対象として無矛盾な体系を整備しておかなければならない.

簡単な例として朝のラッシュで生じる人の列の力学を挙げる事ができるだろう. 人は第 1 近似で粉体系として扱って良い. ラッシュの列は後ろの人によって押されることによってまっすぐな列を維持できなくなることはお馴染みであろう. この問題を連続体として扱う事は可能でそれはエラスチカの問題となり, どれだけの力が加わるとどのような列の変形が生じるかが定性的に分かる. この両者の記述法の定量的比較は従来試みられていないが, それほど難しい問題ではなく本書の範囲内にあると言って良い.

また高校で習う粒子の非弾性衝突も重要でまだ機構が解明されていない弾性論の問題である. 同時にこの問題は粉体力学の基礎を与える. おそらくは読者の大多数は非弾性衝突と云えばはねかえり (反発) 係数を導入した散逸力学系であるという認識しかないであろう. しかしながら高速での衝突で生じる内部の化学反応, 破壊等を含んだ諸々の塑性変形を除いた理想的な弾性体に於いても反発係数は殆んど意味を持たない. つまりそれは衝突速度の関数であって決してある一定値に漸近しない様な量なのである. そのあたりの事情の説明も本書の範囲内にあると云ってよい.

本書では古典的な連続体力学を構成する際に粉体への応用を第 1 義的に考えている. この態度は極めて特異 (というよりも異常) と言ってよいが, 内容そのものはスタンダードな連続体力学の範囲を逸脱したものではない. この試みの成否は読者諸賢の判断を仰ぐ他はないが, それだけに類書とは同じ題材でも一味違った見方をする予定である.

1.2 連続体の適用範囲

連続体力学は通常, 場の理論として定式化されている. 場の理論では次節で述べる様に観測点を「空間」に固定してその平均量を扱う. 勿論この「空間」というのは並進している弾性体球等を考えている場合にはその重心座標を原点とすべき種類のものであって絶対座標系の存在を仮定するものではない. その意味で常に (本書ではガリレオの) 相対性原理の影響下にある.

連続体力学では通常, 粒子スケール等の物質の微視的尺度よりも大きな尺度で平均することで局所的な情報を得る. 例えば気体であれば平均自由行程と運動の空間的変化の尺度の比で表されるクヌーセン数は充分小さくなければならないし, 平均自由行程自体も粒子の直径より大きい事が期待される. この種の条件は気体であれば問題はなく成立し, その結果, ミクロなモデルから流体の方程式の導出が可能になる.

しかし一般の液体についてはその連続体モデルの成立条件が殆んど明らかになっていない. 実際の処, 最近の分子動力学法によるシミュレーションによれば思ったよりはるかに小さなスケールから流体的挙動が成り立っている様である. こうしたシステムでどこからどのようにして流体力学が成立していくのかを調べる事は今後重要になっていくことと思われる.

弾性体であれば高分子なり固体なりの基盤になる物質が通常存在する. 固体の場合の線形弾性体は線形ばねで空間の格子点を接続したものと同等であり, その平衡点を分子間ポテンシャルの平衡点と考えるとほぼ分子スケールから弾性論を使って良い. 勿論数学的には格子間距離をゼロに漸近させた極限を連続体として扱うのであるが, その極限自体は容易に格子系から類推できるのでその間には大きなギャップはない. まして後で述べる様に線形弾性論に固執する理由は何一つなく分子間の共有結合等が健在であれば古典的に見れば固体は弾性体に他ならない. 弾性体で用いられる概念や手法がほぼそのままの形で固体物理に応用されるのはこのように偶然ではない. こうした事はフォノンの古典模型が 1 次元的に結合した 2 種類の粒子の連成振動子であることから

も想像がつく. 本書では連成振動子系等のように離散性が残っているものの連続極限がほぼ明らかなものを広義の連続体として扱う. こういう考え方を一つ取るだけで世界観はぐっと広がるし, 弾性論等の適用範囲も広いものになる.

従来よりも連続体の適用範囲が広いであろうことは電磁気学を思い起こせば充分であろう. 実際, $\mathbf{r}_i$ に分布する点電荷系 $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を扱う場合も電荷密度 ρ_e はディラックのデルタ関数を使えば

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{1}$$

で導入可能である. 電磁気学は連続体の理論であるから, 従来のような狭い考え方で連続体を捉える必要はない.

では何が電磁気学は点電荷系迄取り扱い可能として, 通常の流体や弾性体ではかなり強い制限をつけているのであろうか. それは微分の存在である. デルタ関数等のような特異点を持つものを形式的に場の連続変数として扱ってもその微分は出来ない. 電磁気学では幸いな事に電荷密度の微分は理論形式に含まれていない. 従って連続体としての記述が (量子論の存在を気にしない限り), 微小領域迄外挿できるのである. 一方, 流体や弾性体といった古典的連続体では質量の保存則から質量密度の微分が必要になることが分かる. これは電流とは違って質量流は密度に比例するからである. この辺りから強い制限が生まれる要因になる. しかし後で述べる様に体積力の概念を使えば必ずしもその制限にかからない場合が多く, 広義の連続体の概念はかなり広い領域で有効であると思われる.

1.3 ラグランジェ的記述とオイラー的記述

古典力学では粒子の運動の時間発展を追尾する理論形態を取る. 多粒子系であっても本質的な変化はなく粒子の運動方程式を連立させて解くだけのことである. 連続体がそうした粒子から構成されるという立場に立つならば, その一つの記述法に構成要素の時間発展を追いかける方法があると考えるのが自然である. これをラグランジェ的記述と呼ぶ. この場合, 連続体の要素を実際の構成粒子と同定する必要はなく, 形状は一般に時間と共に変化する. ラグランジェ的記述によれば時刻 t の連続体粒子の位置は初期位置 $\mathbf{r}_0$ 及び時刻 t を独立変数として

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \tag{2}$$

となる. また同じ粒子の速度 $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \tag{3}$$

であり, 加速度も同様にして与えられる. このように質点系の力学をそのまま連続体に持ち込んだ恰好になっている.

もう一つの記述法は電磁気学のように連続体を場の量として扱う方法である. この場合は位置座標は観測点として固定されており, もはや時間変数とは独立になる. 従って例えば速度 $\mathbf{v}$ は位置 $\mathbf{r}$, 時刻 t の関数として $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ として表される. これをオイラー的記述と呼ぶ. 言うまでもないことだがラグランジェ的記述における微分とオイラー的記述による微分は一致しない. ラグランジェ的な記述での時間微分 (ラグランジェ微分) を全微分 d/dt で書く本も多いが, それは正しい表記ではないのでここでは D/Dt で表す. 実際ラグランジェ微分は初期位置と時間を独立変数としたと

きの時間に関する偏微分であって全微分とは異なる. オイラー的記述における偏微分 (オイラー微分)$\partial/\partial t$ との間の関係を見るために任意のスカラー関数 $f(\mathbf{r},t)$ に対して演算 D/Dt を施すと

$$\frac{D}{Dt}f(\mathbf{r}_0,t)=(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot\mathrm{grad})f(\mathbf{r},t)=(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})f(\mathbf{r},t) \tag{4}$$

が成り立つ. 直交座標系であれば f をベクトル変数に置き換えてもこの関係が成立することは分かるので, 一般に演算子の関係式

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad} \tag{5}$$

が成立する.

気をつける必要があるのは関係式 (5) を用いると極座標のような曲線座標系では一般に方位ベクトルが座標の関数であるために各成分では (4) 式が成立していないことである. これらについては読者諸賢が自ら例題を解いてそのことを体感する他はない.

問題 1 スカラー $\phi(\mathbf{r})$, ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ が存在したとき

(1) 3 次元極座標を考え $\mathbf{A}=(A_r,A_\theta,A_\varphi)=A_r\mathbf{e}_r+A_\theta\mathbf{e}_\theta+A_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ としたときに $\mathrm{grad}\phi$, $\nabla^2\phi$ を求めよ. 但し $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi$ はそれぞれ極座標の単位ベクトル.

(2) 同様の座標系で $\mathrm{div}\mathbf{A}$,$\mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\nabla^2\mathbf{A}$ を求めよ.

(3) 円筒座標で (1),(2) と同様の計算をせよ.

2 連続の式

物理学は保存則を基礎として構成している. 連続体でも保存則が最も主要な役割を果たす。ソリトンの様に無限の保存則を持つ場合もない訳ではないが, 現実の殆んどの系では保存する量は少数であり, いずれも物理的に重要な量となっている. それらの少数の保存量の中でも際立って重要なのは質量, 運動量及びエネルギーの保存である[2] . このうち質量の保存は物質の不生不滅を表現しており, 運動量の保存は運動方程式に対応する. 注意が必要なのはエネルギーの保存である. 連続体は巨視的な変数のみを論じているのでそこで捉え切れない自由度が残る場合が殆んどである. 例えば弾性体の運動を考えても並進等の巨視的な自由度に分配されるエネルギーの他に格子振動等の内部の運動自由度に分配される. これらの内部の自由度にエネルギーが分配されたら殆んど再び巨視的な自由度に利用できる見込みはなく,「熱」としてエネルギーは散逸される. マクロな現象ではこのような散逸は大抵の場合に存在するのでエネルギーは保存しない散逸系を論じる必要が生じるのである.

本書では連続の式として最初に質量の保存を説明し, 次いで運動量の保存を論じる. 運動量の保存では面積力と体積力の概念が必要になるのでその違いを説明する.

2.1 質量の保存

保存則のうちで最も基本的なものは質量の保存である. 質量が突如生成したり消滅したりしない事はラボアジエの発見以来物理学のみならず科学全体の基本概念となっている. 勿論, 相対論ではエネルギーと質量の等価性を考慮しないとならないが, その等価性を組み込めば質量は保存して

[2] 本書では非相対論的な連続体を扱うのでエネルギーと質量は等価という扱いはしない上に運動量と質量 (エネルギー) で 4 元ベクトルを構成して一括して論じる事はない.

いる. もとより, 相対論はこの教科書の範囲外なので読者は直観的な質量概念をそのまま用いて保存則を論じれば良い.

オイラー的な記述による質量の保存では空間的に動かない仮想的な閉曲面を考えてその収支を考える事で表現される. 従って, 質量の保存則は連続体を自由に通す閉曲面内の質量の増加, 減少は面を通して流入, 流出した質量に等しい, と表現できる. この単純な事実を数学的に表現しよう. 考えている閉曲面を S, その面で囲まれた領域を $V(S)$ として, その中に含まれる質量 m は質量流束 J を用いて

$$\frac{dm}{dt} = -J \tag{6}$$

となる. 但し右辺では領域を出て行く流束を J としているので増加量は $-J$ となっている. この式は電磁気学の場合にも電荷の保存則としてお馴染みである. 即ち質量 m を電荷に置き換え, 質量流束 J を電流と見なせばよい. 電荷は勿論質量と等価ではないが全く同等の役割を果たしている. このような電磁気学の知識を思い出せば質量密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ と質量流束密度 $\mathbf{j}$ を用いて

$$\frac{d}{dt}\int_{V(S)} \rho(\mathbf{r}, t) dV = -\int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n} dS \tag{7}$$

と書ける事が分かる. ここで $\mathbf{n}$ は面法線ベクトルであり、外向きに正の方向を取る。またガウスの法則を用いて面積分を体積積分に直し、閉曲面及びそれに囲まれた領域が任意である事から

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0 \tag{8}$$

となる. これも電磁気学でお馴染みの式である. 初学者にありがちな疑問は $\rho(\mathbf{r}, t)$ の時間微分が偏微分となっている事であろう. これは (6) 式の被積分関数が滑らかな関数であり, 積分領域及び密度の空間座標が時間に依存しない事に依っている.

次に質量流束密度 $\mathbf{j}$ を決定しなければならない. 電磁気学では電流は独立な変数として電磁場の連続の式の中で決定する必要はない点がそれ以外の連続体の場合と異なると云って良いかもしれない. 流速 $\mathbf{v}$ を持っている流れの面要素 dS に垂直な速度成分は $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ となる. よって単位時間に面要素 dS を通過する質量は $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$ となる. よって (6) 式の J は

$$J = \int_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} dS \tag{9}$$

となり,(7) との比較から

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \tag{10}$$

となる. (10) 式を (8) 式に代入すると質量保存則は最終的に

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{11}$$

となる. またラグランジェ微分を用いて (11) 式は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \tag{12}$$

と書き直す事も出来る. この表式もよく用いられる.

質量の保存について幾つかの注意をしておこう. まず電磁気学との比較である.(10) 式の質量流束密度は運動量密度である. 一方, 電磁気学では電場 $\mathbf{E}$, 磁場 $\mathbf{H}$, 光速 c に対して運動量密度は $\mathbf{E}\times\mathbf{H}/c$ であって, $\mathbf{j}$ には一致しない. これは電磁場の運動量とエネルギーの連続の方程式が電荷

密度と電流に対して立てられていない事に由来する. 次に (10) 式は一成分系にのみ成り立っており, 多成分系の場合は必ずしも正しくない事である. 例えば多成分系であれば拡散流束がある場合がある. しかしこの問題は微妙な点も含んでおり後でまた触れる事にして, とりあえず (10) 式が常に成り立っているとして解析を進める. 最後に (11) 式の構造に注意して欲しい. 左辺第 1 項はスカラー変数であり, 左辺第 2 項はベクトルの発散を取っている. 従ってベクトルの保存則にはテンソルの発散が現われるであろうことは容易に想像がつくであろう.

2.2 運動量の保存

前節と同様に空間に固定した任意の閉曲面 S に対して運動量の保存を考えてみよう. 体積要素 dV に含まれる運動量は $\rho\mathbf{v}dV$ であるから, S で囲まれた領域 $V(S)$ に含まれる全運動量は

$$\mathbf{P} = \int_{V(S)} \rho\mathbf{v}dV \tag{13}$$

で与えられる. この時間変化はニュートンの運動方程式より

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{tot} + \Gamma \tag{14}$$

となる. ここで $\mathbf{F}_{tot}$ は領域 $V(S)$ に含まれる連続体が受ける力である. 既に述べた通りこの力は物質の体積に比例した体積力と接触面を通して働く力である面積力に分類される. また (14) の Γ は境界を通しての運動量の流入であり, 前節で見た通り面 dS を単位時間当たりに通過する質量が $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$ であったので, 単位時間当たりに面 dS を通過する運動量は $\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{v}dS$

$$\Gamma = -\int_S dS\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \tag{15}$$

である. ここで流入のとき内向き法線ベクトル $-\mathbf{n}$ が基準になっていることに注意されたい.

2.2.1 体積力

物理現象に現われる重力, 電磁気力等の長距離力は, その大きさが物質の体積または質量に比例しているために, これらを体積力と呼ぶ. 体積力が連続体に働く場合, 体積要素 dV に働く力は

$$\rho\mathbf{K}dV \tag{16}$$

ここで $\mathbf{K}$ は連続体の単位質量当りに働く力を表す. 従って体積 $V(S)$ に働く力を $\mathbf{F}_B$ とすると

$$\mathbf{F}_B = \int_{V(S)} \rho\mathbf{K}dV \tag{17}$$

である.

ここで重力が働いている場合は $\mathbf{K}$ は重力加速度 $\mathbf{g}$, 速度 $\mathbf{v}$ で運動する電磁気力であれば電場 $\mathbf{E}$, 磁束密度 $\mathbf{B}$ に対して $\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ となる[3] . 質点系では体積力は基本的に外力に相当するが、長距離力であれば内力も体積力と成り得る.

[3] ここでの表式は SI 単位系に基づいている

2.2.2 面積力

連続体には体積力の他に接触面を通して働く力がある. この種の力は何もない空間を運動する粒子系には現われず, 連続体力学の特色となっている.

面を通しての相互作用は直観的に分かる通りに、極端な長距離相互作用を除くと面積力となっている。その場合面を通して働く力は各成分があるので, その単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ $(i = x, y, z)$ に対して

$$\mathbf{F} = dxdy\{\sigma_{xz}\mathbf{e}_x + \sigma_{yz}\mathbf{e}_y + \sigma_{zz}\mathbf{e}_z\} \tag{18}$$

面を指定したときにいろいろな成分を持ち得る事は既に述べた分子間の相互作用を考えれば容易に分かるだろう. ここで σ_{ij} はストレステンソルであり, まとめて σ と書く. ストレステンソル σ_{ij} の最初の添字 i は力の成分を表し, 2 番目の添字 j は面の法線ベクトルの方向を表す. 一般の座標軸と斜交する面の場合は各座標軸と平行な稜を持つ 4 面体を考えれば必ず (18) 式の様に座標軸と面が直交する様にすることができる. 或は (18) 式は $\mathbf{F} = dxdy\sigma \cdot \mathbf{e}_z$ と書ける.

従って一般の閉曲面 S に対して

$$\mathbf{F}_S = \int_S dS\sigma \cdot \mathbf{n} = \int_{V(S)} dV \mathrm{div}\sigma \tag{19}$$

となる. ここでガウスの定理を用いた.

2.2.3 運動方程式

体積力と面積力を合わせた合力 $\mathbf{F}_{tot}$ は (17),(19) 式より

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_{V(S)} dV[\rho\mathbf{K} + \mathrm{div}\sigma] \tag{20}$$

となる. (14),(15),(20) 式及び閉曲面 S が任意に取れる事から i 成分の式は

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \tag{21}$$

となる. 或は (11) 式を使って

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\sigma + \mathbf{K} \tag{22}$$

と書く事が出来る. 上式を成分表示したら

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + K_i \tag{23}$$

となる.[4]

運動方程式 (21) 或は (22) 式は質量保存の式 (11) 式と連続体の基礎方程式を構成する. しかし未知数 $\rho, \mathbf{v}, \sigma$ を決定するには不十分な情報のみしか含まれておらず, そのためにストレステンソルを決定する構成方程式が必要となる. この辺りの事情とどのような構成方程式が可能であるかについては次章で詳しく述べる事にしよう.

[4] 以降では特に断らない限り Einstein の規約に従い, 2 回現われた添字について和を取る, 即ち $v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \sum_k v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ を意味する.

- 例： 真空中の電磁場

  電磁気学は通常の連続体とは若干趣を異にしている. それは光子が質量 0 であることと電磁場の記述に電子の運動が絡んでいることと関係している. 詳細は電磁気学の本を参考するとして電場 $\mathbf{E}$, 磁束密度 $\mathbf{B}$ に対して電磁運動量 $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$($\epsilon_0$:真空中の誘電率) の連続の式は

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -\nabla \cdot T_{em} + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{24}$$

  である. ここでストレステンソル T_{em} は

$$(T_{em})_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(\epsilon_0 E_k E_k + \frac{1}{\mu_0} B_k B_k) \tag{25}$$

  である. 但し μ_0 は真空中の透磁率. 電磁力の長距離性を反映して体積力が存在するが, 面積力も混在するので単純に通常の連続体力学の枠組に入らない.

2.3 エネルギーの連続の式

エネルギーの保存も質量や運動量と同様であるが, テンソルが現われない分, 直観に訴えやすい. もっともエネルギーそのものが熱力学変数であるので熱力学と切り離せず, 連続体で話が閉じなくなってしまう点に注意が必要であろう. 熱力学と関連して連続体力学で扱う系では全エネルギーが一般に保存しない. このあたりの事情はマクロな系では様々な内部自由度に分配されるので巨視的変数としてのエネルギーは保存されないのである. 保存されないエネルギーは一般に熱の形で散逸される. その熱の生成メカニズムについては簡単な場合については後述する (予定である).

もう一つの大きな仮定は局所平衡の仮定である. 一般に連続体は平衡から大きく離れているがそのずれ自体は連続体の運動に付随して生じる. この教科書で議論するように殆んどの場合は歪み速度 (や歪み) が小さくそれらで展開した線形理論を議論する. その場合は圧力は定数部分にあたり歪み速度に由来した非平衡の影響は受けない. また温度が一様でない場合もそのずれを小さいとして展開する場合が多く, そのような場合は熱平衡からのずれは高次補正を与えるのに過ぎない. 言うまでもなくこの論法は変形や歪み速度が大きいときには使えない. 高分子等では大変形があっても非常にゆっくりした運動しかないのでエネルギー方程式そのものが議論の対象から外れる場合が多い. しかし粉体の様にそうでない場合もあるので一般論は難しい.

いずれの場合でも運動量の連続の式等と比較して様々なレベルの話が入り混じって錯綜した議論になる場合がある. その点については十分注意してからエネルギーの連続の式を用いる必要がある.

力学的エネルギー密度は運動エネルギー密度 $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ と内部エネルギー ϵ に分割出来る. 従って総量は

$$\int_V \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \epsilon) dV \tag{26}$$

となる. この時間変化を議論する訳になる. まず面 S を通してのエネルギー流入は

$$-\int_S dS \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \epsilon)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \tag{27}$$

である. 次に体積力と面積力のなす仕事率は

$$\int_V \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS \tag{28}$$

である. 勿論第 1 項,2 項がそれぞれ体積力, 面積力に対応している.

マクロな連続体では全ての自由度の動きを把握することは出来ない. 例えば格子振動一つ取っても全部の運動の自由度をフォローすることは難しい. また一般の運動では格子振動以外にも様々な自由度が絡み合っており, そのモデル化は不十分であるおそれがある. また非晶質や流体では格子振動は存在しないか, 固体におけるものとかなり違うが, 連続体の一般論は適用物質に限定せずに普遍的に成立する. その際、注目している少数の自由度以外は熱として散逸する. またその熱は流れるので熱流が存在する.

従ってエネルギーの散逸は熱流で表現出来る. 熱流は流れなので面を通して現われる. 従って熱流によるエネルギーの増加は

$$-\int_S dS\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \tag{29}$$

である. (26) から (29) 迄を組み合わせると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_V \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\epsilon)dV &= -\int_S dS\rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\epsilon)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \\ &\quad +\int_V \rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}dV+\int_S(\sigma\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}dS-\int_S dS\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\end{aligned} \tag{30}$$

となる. 上式 (30) にガウスの定理を用いて, 体積 V が任意に取れることから成分表示で

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(\frac{1}{2}v_iv_i+\epsilon)\}=\frac{\partial}{\partial x_j}\{\sigma_{ij}v_j-\rho(\frac{1}{2}v_iv_i+\epsilon)v_j-q_j\}+\rho K_iv_i \tag{31}$$

となる. またこの式は質量の保存則 (11) 式を用いると

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}v_iv_i+\epsilon)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i-q_j)+K_iv_i \tag{32}$$

という書き換えが可能になる.

一方 (23) 式から

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}v_iv_i)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}v_j+K_iv_i \tag{33}$$

が成立する.(32),(33) の辺々引くと

$$\frac{D\epsilon}{Dt}=\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{34}$$

となる.

- 電磁気学のエネルギーの連続の式：

  真空中の電磁気学では電磁エネルギー密度 w_{em} は $w_{em}=\frac{1}{2}(\epsilon_0E_kE_k+\frac{1}{\mu_0}B_kB_k)$ に対して

  $$\frac{\partial w_{em}}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{S}-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \tag{35}$$

  である. ここで $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$ はポインティングベクトル, 右辺第 2 項はジュール熱によるエネルギー散逸である. ジュール熱は電流が長距離相互作用を持つことを反映して体積力の形で現われる. ここでも電磁気学はかなり特異であることが分かる.