3　ストレステンソル

3.1　ストレステンソルの導入

既に述べた通り面力の記述にはストレステンソルが必要になる. このテンソルは直観に訴えるものではないがよく考えれば難しい概念を含んでいる訳ではない.

さて考えている連続体を A,B の 2 つに分割してみよう. 図の面 δS 中の単位面積に働く力を $\mathbf{F}$, 面法線ベクトルを $\mathbf{n}$ しよう. ここで

$$\mathbf{F}(\mathbf{n})//\mathbf{n} \tag{1}$$

を法線応力、

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) \perp \mathbf{n} \tag{2}$$

を接線応力と呼ぶ. 一般に面を指定した場合には法線応力と接線応力の混合になるのでテンソル的記述が必要になる.

さて応力が内力の場合には作用・反作用の法則から

$$\mathbf{F}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{F}(\mathbf{n}) \tag{3}$$

が成り立つ. 図の 4 面体 OABC についての力の釣り合いを考えてみよう. 面 ABC, OBC, OAC, OAB の面積をそれぞれ δS,δS_1, δS_2,δS_3 として各面に働く力を $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ としよう. 体積力を $\mathbf{K}$, 密度を ρ, 4 面体の加速度を $\mathbf{a}$ すれば、運動方程式は

$$\rho\delta V\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{n})\delta S + \mathbf{f}(-x)\delta S_1 + \mathbf{f}(-y)\delta S_2 + \mathbf{f}(-z)\delta S_3 + \rho\delta V\mathbf{K} \tag{4}$$

である. ここで 4 面体を相似的に小さくし、

$$\delta V/\delta S_i \to 0 \tag{5}$$

という極限を取ってみる. すると

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{n}) &= -\mathbf{f}(-x)\delta S_1/\delta S - \mathbf{f}(-y)\delta S_2/\delta S - \mathbf{f}(-z)\delta S_3/\delta S \\ &= \mathbf{f}(x)\delta S_1/\delta S + \mathbf{f}(y)\delta S_2/\delta S + \mathbf{f}(z)\delta S_3/\delta S \end{aligned} \tag{6}$$

となる. ここで方向余弦 n_i を導入すると

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_i\mathbf{e}_i \tag{7}$$

であるので

$$\delta S_i/\delta S = n_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

と書ける. ここで $\mathbf{e}_i$ は i 成分の単位ベクトルである. (8) を (6) に代入することで

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \mathbf{f}(x)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{f}(y)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{f}(z)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{f}(x_i)n_i \tag{9}$$

を得る. 一方、σ_{ik} を i 軸に垂直な単位面積を通して k 方向に働く力とすると

$$\mathbf{f}(x_i) = \sigma_{ik}\mathbf{e}_k \tag{10}$$

となるので (9),(10) から

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \mathbf{e}_k\sigma_{ik}n_i \tag{11}$$

という式が成り立つ. このように考えることでストレステンソル σ_{ik} が自然に導入できる.

この節を終える前に (8) で用いた

$$\delta S_j = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j)\delta S \tag{12}$$

について補足を加えよう.

$$\delta \mathbf{S} = \delta S \mathbf{n} \tag{13}$$

であるので、左辺を成分に表示して

$$\delta \mathbf{S} = (\delta S_x, \delta S_y, \delta S_z) \tag{14}$$

としたとき

$$\delta \mathbf{S}^2 = \delta S_x^2 + \delta S_y^2 + \delta S_z^2 \tag{15}$$

が成り立つ. 方向余弦の 2 乗の和が 1 であることを思い出すと明らかに

$$\delta S_x = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n})\delta S \tag{16}$$

が成り立つ.

3.2 テンソルの対称性について

特別な外力がない場合にストレステンソルは対称テンソルであるという著しい性質を持つ. これは基本的にトルクバランスを考える事で証明可能である.

図の様な連続体中の直方体を考える. 中心軸を x_3 軸としてそのまわりの面積力によるモーメントは

$$M_3 = (\sigma_{21}\delta x_2 \delta x_3)\delta x_1 - (\sigma_{12}\delta x_1 \delta x_3)\delta x_2 = (\sigma_{21} - \sigma_{12})\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \tag{17}$$

である. 従って面積力によるモーメントは考えている微小体積に比例する. 一方体積力によるモーメントは長さの 4 乗に比例するので

$$\delta V \to 0 \tag{18}$$

という極限で M_3 以外の寄与は消える. 一方で物体は回転せず静止しているためには M_3 がバランスする必要があり

$$M_3 = 0 \tag{19}$$

が成立する. 従って

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{20}$$

が成り立つ. 回転軸を 1,2 軸にすれば同様に

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{21}$$

を示す事ができる.

このテンソルの対称性は磁性流体等では破れている. 例えば磁化 $\mathbf{M}$ が

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = \rho M_1 \tag{22}$$

のようにトルクとバランスし得る. 従って非対称部分は

$$\sigma_{ij}^{(a)} = \frac{\rho}{2}\begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 \\ -M_3 & 0 & M_1 \\ M_2 & -M_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

となって有限に残る. この様な連続体をマイクロポーラー連続体と呼び、その一般論が存在する.

結局、ストレステンソルによって力 $\mathbf{F}$ と方向余弦 n_i の間には

$$\sigma_{ij}^{(a)} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{24}$$

という関係式が成り立つ.

3.3 歪みテンソル

図の様に点 P を P' に移してみる.

$$x_i(P) \to x_i^{'}(P^{'}) \tag{25}$$

このとき

$$x_i + \delta x_i \to x_i^{'} + \delta x_i^{'} \tag{26}$$

という変換を受ける. この操作は連続体の変形を意味する.

ここで変位の i 成分を

$$u_i = x_i^{'} - x_i \tag{27}$$

で導入してみよう. 変形後の位置は元の位置の関数なので

$$x_i^{'} = x_i^{'}(x_1, x_2, x_3) \tag{28}$$

と書けるだろう. 従って微小変形の場合は

$$\delta u_i = \delta x_i^{'} - \delta x_i \simeq \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_n}\delta x_j \delta x_n \tag{29}$$

と展開可能である. 線形近似の範囲内で

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \tag{30}$$

と書く事が可能である. これを

$$\delta u_i = (u_{ji} + \Omega_{ji})\delta x_j \tag{31}$$

と書き直してみよう. 第 1 項, 第 2 項はは (30) の第 1 項、第 2 項に対応しており、それぞれ対称、反対称 (交代) テンソルになっている. ここで ϵ_{ijk} は Levi-Civita 記号と呼ばれ

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\text{i,j,k が偶置換}) \\ -1 & (\text{i,j,k が奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外})) \end{cases} \tag{32}$$

である.

ここで Ω_{ji} の意味を明かにするために回転 (rotation) と比較してみよう.

$$\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2} rot \mathbf{v} \tag{33}$$

とすると、明かに

$$\omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \tag{34}$$

が成り立つので

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k \tag{35}$$

という関係があることが分かる. [1]

ここで対称テンソル

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \tag{36}$$

の物理的意味について説明しよう. 対称テンソルは対角化可能なので主軸と主歪みが決まる. このとき対角和 $(\mathrm{trace}) u_{ii}$ が最も重要であるが, それは体積歪みを表している. 実際, 微小体積要素 δV が $\delta V'$ に変形されたとする. このとき

$$\delta V' = \delta x_1' \delta x_2' \delta x_3' = (1+u_{11})(1+u_{22})(1+u_{33}) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \simeq (1+u_{ii}) \delta V \tag{37}$$

が成り立つ.[2] よって

$$u_{ii} = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} \tag{38}$$

である.

このように対角和は体積歪みを表すのでそれを分けて考える事が可能である. 実際歪みテンソルを

$$u_{ij} = (u_{ij} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ij}) + \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ij} \tag{39}$$

という恒等式で書き直す事がしばしば行われる. 言うまでもなく右辺第 1 項は等積歪みを表し, 第 2 項は静水歪みを表す.

問 1 (1)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jk}$$

を示せ.

(2)

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k$$

を示せ.

[1] 外微分形式に詳しい人には Ω_{ji} と ω_k の間には duality があることが分かるであろう.

[2] 体積の増加は 3 つの軸に沿っての独立な変形の積と考えられる. 1 軸変形を考えると $\delta u_1 = \partial u_1 / \delta x_1 \delta x_1 = u_{11} \delta x_1$ でそれ以外の変形は 0 である. このとき $\delta x_1^{'} = (1+u_1 1) \delta x_1$. 同様に 2,3 軸変形を考えると (37) となる.

3.4 応力仕事率

エネルギー方程式

$$\begin{aligned}\frac{D\epsilon}{Dt} &= \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}v_{ij} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{40}$$

を考える. ここで v_i は速度の i 成分であり

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{41}$$

である.

この系の弾性歪みエネルギーを考えてみよう. 弾性体の準静的な微小変形 δu_i に対して応力 $\sigma_{ij}n_j$ がする単位面積あたりの仕事 δW を計算してみる. 但し準静的変形では常に $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0$ が充たされている. この微小変形に伴う全仕事は

$$\begin{aligned}\int_V \delta W dV &= \int_S \sigma_{ij}n_j\delta u_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}u_i)dV \\ &= \int_V dV\{\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i\} = \int_V dV\sigma_{ij}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \int_V dV\sigma_{ij}\delta u_{ij}\end{aligned} \tag{42}$$

が成り立つ. ここで $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0$ 及び $\sigma_{ij}\Omega_{ij} = 0$ を用いた. よって

$$\delta W = \sigma_{ij}\delta u_{ij} \tag{43}$$

及び

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial\delta F}{\partial u_{ij}} \tag{44}$$

が成り立つ. 最後の δF は変形の (ヘルムホルツの) 自由エネルギーであり、準静的な最大仕事がヘルムホルツの自由エネルギーの差に等しいという熱力学の関係式を用いた.

3.5 Hooke 弾性体のストレステンソル

Hooke 弾性体とは変形が小さくストレスが歪みテンソルの線形で記述できるものを指す. このとき

$$\sigma_{ij} \simeq \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial u_{kl}}\right)_0 u_{kl} = C_{ijkl}u_{kl} \tag{45}$$

と書ける. ここで添字 0 は変形がないときの微分値を用いる事を表している. 無論 (45) は歪みがないときにストレスがかからない、即ち $\sigma_{ij} = 0$ であることを用いている.

(44) 式を用いると変形の自由エネルギー及び準静的な等温仕事は

$$W = \delta F = \frac{1}{2}C_{ijkl}u_{ij}u_{kl} \tag{46}$$

と書ける. ここで等方弾性体とすると歪みテンソルの対称性 $u_{ij} = u_{ji},\ u_{kl} = u_{lk}$ 及び (46) での u_{ij}, u_{ji} の入れ換えに対する対称性から

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \tag{47}$$

が成り立つ. 従って本来 $3^4 = 81$ 自由度のある系が 21 自由度まで簡略化できる.

ここで等方テンソルを用いると更に簡略化できる. 4 階の対称等方テンソルは一般に

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{48}$$

と書ける事が知られている (問参照). 従ってストレステンソルは

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})u_{kl} = \lambda u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij} \tag{49}$$

となる. 同様に変形の自由エネルギー δF は

$$\delta F = \frac{\lambda}{2}u_{kk}u_{ll} + \mu u_{ij}u_{ij} \tag{50}$$

となる. 自由エネルギーの安定性から λ, μ は正でなくてはならないということが分かる. これらは Lame の弾性定数と呼ばれる.

ストレステンソルが分かったために運動方程式は

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}) + \rho K_i \tag{51}$$

と書ける. ここで K_i は体積力である.

ここで前節で出て来た応力仕事率 $\sigma_{ij}v_{ij}$ を考えてみよう. (48) と $v_{ij} = du_{ij}/dt$ を使って

$$\sigma_{ij}v_{ij} = \frac{d}{dt}(\frac{\lambda}{2}u_{kk}u_{ll} + \mu u_{ij}u_{ij}) = \frac{d\delta F}{dt} \tag{52}$$

という関係式が導かれるので仕事率という名称が適切であることが分かる.

問 (1) 4 階の等方テンソル C_{ijkl} が

$$\epsilon_{hia}C_{ajkl} + \epsilon_{hja}C_{iakl} + \epsilon_{hka}C_{ijal} + \epsilon_{hla}C_{ijka} = 0$$

を充たすことを示せ.

(2) 2 階の等方テンソルは

$$v_{ij} = \frac{1}{3}v_{jj}\delta_{ij}$$

と書けることを示せ.

(3) 3 階の等方テンソルは

$$w_{ijk} = \alpha\epsilon_{ijk}$$

と書けることを示せ. 定数 α を求めよ.

(4) 4 階の等方テンソルが 2 つの指標の入れ換えに対して対称ならば (48) 式の様に表せることを示せ.

(5) 反対称 (交代) 性をもつ場合には

$$S_{ijkl} = \gamma(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})$$

と書けることを示せ.

4　物質定数：弾性定数

ストレステンソルには弾性定数が含まれる. Lame の弾性定数を導入したが, 実際には異なった弾性定数が用いられる事が多い. その理由は以下に述べる弾性定数が直接実験で測ることが可能であり、どのような物理的特性を反映したものであるのかがはっきりしているからである.

その準備のためにストレステンソル (49) の対角和を取ってみよう.

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)u_{ii} \Leftrightarrow u_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{53}$$

となる.

4.0.1　Young 率

Young 率は 1 軸方向の力に対するどのような 1 軸変形が起こるかを示した定数であり、物体の幅を無視すればばね定数に対応している. 今 x_1 軸方向に σ_{11} を加えてみる. (53) から

$$u_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11}, \quad u_{22} = u_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11} \tag{54}$$

となる. ここで

$$u_{11} = \frac{1}{Y}\sigma_{11} : \quad Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{55}$$

と書いたときの Y が Young 率である.

Young 率の物理的な意味を明らかにするために断面積 S の変化しない棒を 1 軸方向に δl だけ伸長することを考えてみよう. この場合、棒の端は力 $F = \sigma_{11}S$ の力がかかっており、u_{11} は伸びと元の長さの比になるので $u_{11} = \delta l/l$ である. 従って

$$Y = \frac{\sigma_{11}}{u_{11}} = \frac{F/S}{\delta l/l} \tag{56}$$

となり、ばね定数との対応関係もはっきりするであろう. この場合 $Y > 0$ であることは物質の安定性から要請される.

4.0.2　Poisson 比

一般に図の様に棒を引っ張ると横方向に縮む. その割合を表す弾性定数が Poisson 比である. この本では σ で表し、定義は

$$\sigma \equiv \frac{|u_{22}|}{|u_{11}|} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{57}$$

で与えられる. 明らかに Poisson 比は垂直方向の縮みと軸方向の伸びの比であり殆んどの場合に正の値を取る. また硬い物質程横の変形が小さく、0 に近い値を取り, 軟らかい物質は大きな値を取りやすい.

或は体積弾性率

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{58}$$

を導入して (56)-(58) の弾性定数を Y, σ で表してみると

$$\lambda = \frac{\sigma Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}, \quad k = \frac{Y}{3(1 - \sigma)} \tag{59}$$

となる. 熱力学的な安定性より μ, k, Y が正であり

$$-1 < \sigma < 1/2 \tag{60}$$

という制限がつく. 何度も言うように実質的に $\sigma > 0$ なので (60) は

$$0 < \sigma < 1/2 \tag{61}$$

に置き換えてもよい.