5　等方線形弾性体の Hertz の接触理論

5.1　釣り合いの式

Hertz の接触理論は弾性体の接触の際の基礎理論であり、発表後 100 年以上を経てもその価値は失われていない。本章ではその概要をできるだけ分かりやすく初等的に説明する.

まず力のバランス

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \tag{1}$$

を考えてみる. ここで g_i は重力加速度を想定しているが任意の体積力と考えて良い. ストレステンソルは歪テンソル u_{ij} を用いて

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{kk}\delta_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij} \tag{2}$$

と書けることを思い出そう. ここで λ, μ は Lame の弾性率であり Young 率 Y、Poisson 比 σ を用いて

$$\lambda = \frac{\sigma Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)} \tag{3}$$

と書ける. (3) を (2) に代入すると

$$\sigma_{ij} = \frac{Y}{1+\sigma}(u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ij}) \tag{4}$$

となる.

(4) を (1) に代入すると

$$\frac{Y}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{Y}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0 \tag{5}$$

となる. この式をベクトル形式で書くと

$$\triangle \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{2(1+\sigma)}{Y}\rho \mathbf{g} \tag{6}$$

となる. 或は恒等式 $\mathrm{graddiv}\mathbf{u} = \triangle \mathbf{u} + \mathrm{rotrot}\mathbf{u}$ を用いて

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1+\sigma)} rotrot\mathbf{u} = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{Y(1-\sigma)} \tag{7}$$

と書き直すことも可能である. (7) の発散を取ると重調和方程式

$$\triangle\triangle \mathbf{u} = 0 \tag{8}$$

が導かれる.

5.2　平面境界の弾性媒質の釣り合い

5.2.1　一般解

以下では重力等の体積力の影響は無視できるとしよう. すると (6) は

$$\triangle \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \tag{9}$$

となる. この解を Helmoltz 分解

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \nabla\varphi \tag{10}$$

の形で求めてみる. 但し $\triangle\mathbf{f} = 0$ を充たすとしよう. (10) を (9) に代入すると

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f} + 2(1-\sigma)\triangle\varphi) = 0 \tag{11}$$

を得る. 必然的にこの式の括弧内は定数であるが $\mathbf{f}, \varphi$ の任意性を考慮すると、その定数は 0 としても構わない. よって

$$2(1-\sigma)\triangle\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{f} \tag{12}$$

が成り立つ.

今、弾性媒質の表面が x, y 面としよう. 媒質は $z > 0$ に広がっているとして

$$\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z) = (\frac{\partial g_x}{\partial z}, \frac{\partial g_y}{\partial z}, f_z) \tag{13}$$

とおく. ここで $\triangle\mathbf{f} = 0$ より

$$\triangle g_x = \triangle g_y = 0 \tag{14}$$

とすることが可能である.

(13) を (12) に代入してみる. 左辺は

$$2(1-\sigma)\triangle\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_x}{\partial z} + \frac{\partial g_y}{\partial z} + f_z\right) = -\frac{\partial h}{\partial z} \tag{15}$$

となる. ここで h は (15) 式の第 2 式の括弧内によって定義される調和関数である. (12),(15) より

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{2(1-\sigma)}\partial_z h \tag{16}$$

を得る.

まず (16) の一般解は

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}h + \psi \tag{17}$$

と書ける事を示してみよう. 但し

$$\Delta\psi = 0 \tag{18}$$

を充たすとする. このことから斉次の一般解は ψ であるので、非斉次の特解を求めれば十分である.

$$\tilde{\varphi} \equiv zh \tag{19}$$

に対して

$$\bigtriangledown\tilde{\varphi} = (z\partial_x h, z\partial_y h, h + z\partial_z h) \tag{20}$$

及び

$$\Delta\tilde{\varphi} = z\Delta h + z\partial_z h = 2\partial_z h \tag{21}$$

を充たすので

$$\varphi = -\frac{\tilde{\varphi}}{4(1-\sigma)} \tag{22}$$

は

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{2(1-\sigma)}\partial_z h \tag{23}$$

を充たす特解となっている. 従って (16) の解は

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}) + \psi \tag{24}$$

で与えられる.

5.2.2 境界条件の設定

一般解を求めただけでは役に立たない. ここで境界条件の設定をしてみる. 外法線ベクトル $\mathbf{n}$ を z 軸負方向に設定してみよう. すると接触面で

$$\sigma_{iz} = -P_i \tag{25}$$

が成り立つ. ここで $\mathbf{P}$ は物体表面の単位面積上に働く外力である.

以下では簡単のために z 成分についてのみ論じる. (10) より

$$u_z = f_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{26}$$

及び

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \bigtriangledown \varphi \tag{27}$$

が成立する. 一方 (24) から

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}(f_z + G) + \psi \tag{28}$$

が成り立つ. 但し

$$G = \partial_x g_x + \partial_y g_y \tag{29}$$

としよう.

(4) 式の zz 成分を考えて (25) を考慮すると

$$\sigma_{zz} = \frac{Y}{1+\sigma}(u_{zz} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}) = P_z \tag{30}$$

となる. ここで

$$u_{ll} = \nabla \cdot \mathbf{f} + \Delta\varphi = -(1-2\sigma)\Delta\varphi = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}(f_z + G) \tag{31}$$

に注意しよう. ここで (12),(15) を用いた. よって $z = 0$ において

$$\begin{aligned} -\frac{1+\sigma}{Y}P_z &= \partial_z f_z + \partial_z^2 \varphi + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll} \\ &= \partial_z f_z + \partial_z^2 \varphi + \frac{\sigma}{2(1-\sigma)}\partial_z(G + f_z) \\ &= \partial_z f_z + \partial_z^2 \psi - \frac{1}{4(1-\sigma)}\partial_z^2[z(f_z+G)] + \frac{\sigma}{2(1-\sigma)}\partial_z(f_z+G) \end{aligned} \tag{32}$$

が成り立つ. 途中の変形で (24) を用いている. また

$$\partial_z^2[z(f_z+G)] = z\partial_z^2(f_z+G) + 2\partial_z(f_z+G) \tag{33}$$

が成り立つことから $z \to 0$ で

$$-\frac{1+\sigma}{Y}P_z|_{z\to 0} = \frac{1}{2}\partial_z f_z - \frac{1}{2}\partial_z G + \partial_z^2 \psi \tag{34}$$

となる. 従って

$$\frac{\partial}{\partial z}\{(f_z - (\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z})\}|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{Y}P_z \tag{35}$$

が z 成分の境界条件を与える.

全く同様の計算を x, y 成分について行うと

$$\partial_z^2 g_i|_{z=0} + \partial_i\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z}\}|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{Y}P_i \tag{36}$$

が成り立ち、それぞれが x, y 成分の境界条件を与える.

5.2.3 集中力に対する特解

更に簡単化するために自由表面上に集中力が働く場合を考えてみよう. さらにその力も z 成分しか持たないとする. この力は

$$\mathbf{P} = F\hat{z}\delta(x)\delta(y) \tag{37}$$

に従って分布する面力である. 但し $\hat{z}$ は z 方向の単位ベクトルである.

一般に $\mathbf{P}' = \mathbf{F}\delta(x)\delta(y)$ の解が分かれば Green tensor を用いて任意の解が構成できるのはスカラーの場合と同様である.

調和関数 $f(x, y, z)$ に対して遠方で 0, $z = 0$ の平面上で $\partial f/\partial z$ が与えられているとする. このとき f は

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial_z f(x', y', z)|_{z=0}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}dx'dy' \tag{38}$$

で与えられることを示そう. 但し

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{39}$$

である.

証明 今 Green 関数が

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{40}$$

を充たし, f が調和関数

$$\Delta f(\mathbf{r}) = 0 \tag{41}$$

であるとする. Green の公式

$$\int dV(G\Delta f - f\Delta G) = \int dS(G\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial G}{\partial n}) \tag{42}$$

より

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3\mathbf{r} = \int dS(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial G}{\partial n}) \tag{43}$$

となる. 一般に f の不定性 (斉次解) を利用して表面積分の自由度の片方のみを残るようにすることが可能である. ここでは f が表面上で与えられ $z=0$ 上で

$$\partial_n G = 0 \tag{44}$$

を充たすとしよう. $\mathbf{n}$ の方向は $-z$ 方向なので

$$f(x,y,z) = -\int\int dx'dy' G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \frac{\partial f}{\partial z}|_{z=0+} \tag{45}$$

である. ここでは $z<0$ の半空間のみを考えるので

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{46}$$

である. よって (38) を得る. (証明終り)

(35) 式に戻ってみよう. $f_z,\ g_x,\ g_y,\ \psi$ は調和関数であるから (35) の括弧内は調和関数であり、左辺はその法線微分を与える. よって

$$f_z - \partial_x g_x - \partial_y g_y + 2\partial_z \psi = \frac{1+\sigma}{\pi Y}\int\int \frac{P_z(x',y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy' = \frac{1+\sigma}{\pi Y}\frac{F}{r} \tag{47}$$

が成り立つ. ここで (37),(38) を用いた. 実際

$$Q \equiv f_z - \partial_x g_x - \partial_y g_y + 2\partial_z \psi \tag{48}$$

とすると (38) より

$$Q = -\frac{1}{2\pi}\int\int \partial_z Q|_{z=0}\frac{dx'dy'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1+\sigma}{\pi Y}\int\int \frac{P_z(x',y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dx'dy' \tag{49}$$

である. 但し最後の等式では (35) を用いている.

ここで (36) を利用してみる. 不定性を利用すると括弧内は 0 とでき

$$(1-2\sigma)f_z - (\partial_x g_x + \partial_y g_y) + 4(1-\sigma)\partial_z\psi = 0 \tag{50}$$

を課すことが可能になる. 従って (36) は

$$\partial_z^2 g_x|_{z=0} = 0, \quad \partial_z^2 g_y|_{z=0} = 0 \tag{51}$$

となる. 一方 $\partial_z g_x,\ \partial_z g_y$ は調和関数なのでそれぞれ

$$\partial_z g_x = -\frac{1}{2\pi}\int\int \partial_z^2 g_x \frac{dx'dy'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 0 \tag{52}$$

及び

$$\partial_z g_y = 0 \tag{53}$$

が成り立つ. 従って (50) 式は

$$\partial_z \psi = -\frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)} f_z \tag{54}$$

となる. (47) 式に代入し $1-\dfrac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}=\dfrac{1}{2(1-\sigma)}$ を用いると

$$f_z=\frac{2(1-\sigma)(1+\sigma)}{\pi Y r}F \tag{55}$$

及び

$$\partial_z\psi=-\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{2\pi Y r}F \tag{56}$$

を得る.

ここで一般解 (10) に戻って $G=0$ に注意すると

$$\begin{aligned} u_z &= f_z+\partial_z(-\frac{z}{4(1-\sigma)}f_z)+\partial_z\psi \\ &= \frac{1+\sigma}{2\pi Y}\frac{F}{r}\{4(1-\sigma)-1+\frac{z^2}{r^2}-(1-2\sigma)\} \\ &= \frac{1+\sigma}{2\pi Y}\frac{F}{r}\{2(1-\sigma)+\frac{z^2}{r^2}\} \end{aligned} \tag{57}$$

となる.

5.3 固体接触

いよいよ 2 個の固体 (弾性体) の接触を考える. 今共有接触面を x,y 面に取り、z,z' 軸をそれぞれ物質の内部に向かう方向に設定する. 平面上の接触点近傍で物質表面は

$$z=\kappa_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta \quad (\alpha,\beta=1,2) \tag{58}$$

と展開できる. ここで $\kappa_{\alpha\beta}$ は 2 次元対称テンソルであり物体表面の曲率を特徴づける. 同様にもう一つの物体についても

$$z'=\kappa'_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta \quad (\alpha,\beta=1,2) \tag{59}$$

が成り立つ.

今双方の物体に圧縮力が準静的に加わって互いの中心間の距離が h だけ接近するとしよう. u_z,u'_z をそれぞれ表面での z 軸方向の変位とすると

$$z+u_z+(z'+u'_z)=h \Leftrightarrow (\kappa_{\alpha\beta}+\kappa'_{\alpha\beta})x_\alpha x_\beta+u_z+u'_z=h \tag{60}$$

が成立する. 第 2 式には (58),(59) を用いている. 接触していない処でも変位 u_z,u'_z を用いれば

$$z+z'+u_z+u'_z>h \tag{61}$$

が成立する. また x,y 軸をテンソル $\kappa_{\alpha\beta}+\kappa'_{\alpha\beta}$ の主軸に選び、その主値を A,B とすると (60) は

$$Ax^2+By^2+u_z+u'_z=h \tag{62}$$

となる.

両物体の接触点に働く圧縮力を $P_z(x,y)$ とする. 接触面を平面 $z=0$ とする. (57) は Green tensor を求めたことに他なら無いので $z=0$ とおくことで一般解

$$u_z=\frac{1-\sigma^2}{\pi Y}\int\int dx'dy'\frac{P_z(x',y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\quad u'_z=\frac{1-\sigma'^2}{\pi Y'}\int\int dx'dy'\frac{P_z(x',y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{63}$$

が求められる. 但し積分範囲は接触域に限るとする. (63) からたちどころに導かれるのが

$$\frac{u_z}{u_z'} = \frac{(1-\sigma^2)Y'}{(1-\sigma'^2)Y} \tag{64}$$

という関係式である.

(63) を (62) に代入すると

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\sigma^2}{Y}+\frac{1-\sigma'^2}{Y'}\right)\int\int dx'dy'\frac{P_z(x',y')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = h - Ax^2 - By^2 \tag{65}$$

となる. この問題を $P_z(x,y)$ について解けばよいのである.

ここで問を見れば分かる通り電荷分布を与えたときの静電ポテンシャルを求める問題と等価である. 特に一様に帯電している楕円体の電荷分布によって生じる静電ポテンシャルは 2 次関数であることが知られており, その結果を利用できる. 実際楕円体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{66}$$

の体積内で一様に分布した電荷 (電荷密度 ρ) があるとき楕円体内部のポテンシャルは

$$\varphi(x,y,z) = \pi abc\rho\int_0^\infty\{1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}-\frac{z^2}{c^2+\xi}\}\frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)}} \tag{67}$$

で与えられる.

問 (67) 式を示せ. [1]

さて (67) で $z\to 0$, $c\to 0$ という極限を考えてみる. すると φ は x,y のみの関数となり

$$\varphi(x,y) = \pi abc\rho\int_0^\infty\{1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\}\frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)}} \tag{68}$$

となる. 一方初等電磁気学よりポテンシャルは

$$\varphi(x,y,z) = \int\int\int dx'dy'dz'\frac{\rho(x',y',z')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{69}$$

で決まる. 但し積分領域は楕円体の内側である. この式での $z\to 0$ における φ の値と (68) は一致しなければならない.

(69) において z 方向の積分は先に実行しなければならない. その後に $z\to 0$ の操作を行う必要がある. z に関する積分の範囲は

$$X \equiv 1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2} = \frac{z'^2}{c^2} \tag{70}$$

を導入すれば明らかに $-cX$ から cX までである. 従って

$$R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} \tag{71}$$

に対して

$$\varphi(x,y) = \lim_{z\to 0}\int\int dx'dy'\rho(x',y')J(x',y') \tag{72}$$

[1] 解答は例えば後藤憲一、山崎修一郎「詳解電磁気学演習」(共立 1982) を参照せよ.

と書ける. 但し

$$J(x,y) \equiv \int_{-cX}^{cX} \frac{dz'}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{R^2+(cX-z)^2}+cX-z}{\sqrt{R^2+(cX+z)^2}-(cX+z)} \right| \tag{73}$$

である.

ここで

$$u \equiv \frac{cX-z}{R}, \quad v \equiv \frac{cX+z}{R} \tag{74}$$

とおく. (70) から分かる通り $z \to 0$ の極限を取ることは u, v を小さく取る (或は r を大きく取る) 極限と等しい. 従って

$$J(x,y) = \ln \left(\frac{\sqrt{1+u^2}+u}{\sqrt{1+v^2}-v} \right) \simeq u+v = \frac{2cX}{R} \tag{75}$$

となる. よって (72) は

$$\varphi(x,y) \simeq 2\rho c \int\int dx'dy' \frac{X}{R} = 2\rho c \int\int \frac{dx'dy'}{R} \sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}} \tag{76}$$

となる.

(68) と (76) の比較から

$$\int\int \frac{dx'dy'}{R} \sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}} = \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \{1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)}} \tag{77}$$

が成立する. この式と (65) 式を比較することで

$$P_z(x,y) = const. \sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}} \tag{78}$$

と書ける. 比例定数は合力 F が

$$F = \int dxdy P_z \tag{79}$$

であることから求まり, その結果は

$$P_z(x,y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}} \tag{80}$$

となる.

(80) を (65) に代入すると

$$\frac{FD}{\pi} \int d\xi \frac{1-\frac{x^2}{a^2+\xi}-\frac{y^2}{b^2+\xi}}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}} = h - Ax^2 - By^2 \tag{81}$$

となる. 但し

$$D = \frac{3}{4} \left(\frac{1-\sigma^2}{Y} + \frac{1-\sigma'^2}{Y'} \right) \tag{82}$$

である. この等式は任意の x, y で成立するので各係数が等しい. よって

$$\begin{aligned} h &= \frac{FD}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}, \\ A &= \frac{FD}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}, \\ B &= \frac{FD}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2+\xi)\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}} \end{aligned} \tag{83}$$

が成立する. これらは F が与えられたときの接触域の長軸と短軸を与える.

上述の公式 (83) を半径 R, R' の 2 球の接触問題に適用してみよう. このとき対称性等より

$$A = B = \frac{1}{2}(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}) \tag{84}$$

となり $a = b$ を充たす. 接触域の半径は (83) 式より

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}) = \frac{FD}{\pi}\frac{d\xi}{(a^2+\xi)^2\sqrt{\xi}} = \frac{FD}{2a^3} \tag{85}$$

となる. 但し最後の積分はベータ関数 $B(1/2, 3/2) = \int_0^\infty dx/((1+x)\sqrt{x}) = \pi/2$ を用いた. よって接触域の半径 a は

$$a = F^{1/3}\frac{DRR'}{R+R'} \tag{86}$$

となる.

また接触に伴う変形 h は $B(1/2, 1/2) = \pi$ から

$$h = \frac{FD}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)\sqrt{\xi}} = \frac{FD}{a} \tag{87}$$

より

$$h = F^{2/3}D^2(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}) \tag{88}$$

となる. この様に変形 h は力 F の $2/3$ 乗に比例する.

問 (1) 2 次元の Hertz の接触理論を求めてみよ.

(2) 接触する等半径の球の外形を求めてみよ.