1　1 次元非線形格子とソリトン

微分方程式が与えられた場合に任意の初期条件に対する解が決定できる場合にその微分方程式を可解と呼ぼう。線形の問題であれば大抵は可解である。一方、非線形問題は一般に可解ではないが一部の方程式にはソリトンと呼ばれる可解なクラスが存在する。ここでは弾性波の問題としてソリトンのごく簡単な側面を紹介してみよう。

今、図の様に 1 次元格子上の質点の運動を考えてみる。各質点の位置を $y_n(t)$ として相対位置を $r_n(t) \equiv y_{n+1}(t) - y_n(t)$ とする。全ての質点の質量を等しいとしてそれを m とすると運動方程式は

$$m\ddot{y}_n(t) = -\phi'(r_{n-1}) + \phi'(r_n) \tag{1}$$

と書けるだろう。ここで $\phi(r)$ はポテンシャルであり、相対変位の関数である。格子変位はそれほど大きくないとして平衡位置のまわりで展開すると

$$\phi(r) \simeq \frac{k}{2}r^2 + \frac{1}{3}kar^3 + \cdots \tag{2}$$

となる。$y_n(t)$ が n について充分滑らかに変化し $x = nh$ の連続関数として扱えるとしよう。但し h は格子の平衡間隔である。このとき $y(x,t) \equiv y_n(t)$ に対して

$$y_{n\pm1}(t) = y(x,t) \pm h\frac{\partial}{\partial x}y(x,t) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) \pm \cdots \tag{3}$$

と展開できる。(2),(3) を (1) に代入して

$$c_0 \equiv h\sqrt{k/m}, \quad \epsilon = 2ah \tag{4}$$

とする。(1) の右辺が

$$k(y_{n+1} - y_n - (y_n - y_{n-1}) + ka\{(y_{n+1} - y_n)^2 - (y_n - y_{n-1})^2 + \cdots\}$$

と書けることを利用することで

$$c_0^{-2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \epsilon\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \cdots \tag{5}$$

が導かれる。この方程式はソリトン方程式の一つで Boussinesq 方程式と呼ばれる。

Boussinesq 方程式は更に簡略化できる。それは方程式が時間に対して 2 階微分であり左右両方向に進む波を解としてもっているからである。実際にはそのどちらかだけが重要な役割を果すことが多い。ここで線形近似では伝播速度 c_0 の波を解に持つ波動方程式であったことを思い出そう。その波が右に進む場合にはその並進速度を除いた座標系を用いると便利である。そこで

$$\xi = x - c_0 t, \quad \tau = \frac{1}{2}\epsilon c_0 t \tag{6}$$

というスケールされた座標、時間を用い、新しい変数

$$u(\xi,\tau) = \frac{\partial y(x(\xi), t(\xi,\tau))}{\partial \xi} \tag{7}$$

を導入してみる。(6) 式から

$$\partial_t = \frac{\epsilon c_0}{2}\partial_\tau - c_0\partial_\xi, \quad \partial_x = \partial_\xi \tag{8}$$

という変換を受けるので (5) 式は

$$-\epsilon\partial_\tau u + \frac{1}{4}\epsilon^2\partial_\tau^2 y = \epsilon u\partial_\xi u + \frac{h^2}{12}\partial_\xi^3 u \tag{9}$$

となる。

ここで元々$\epsilon = 0$とおくと波動方程式になることからϵは微小パラメーターである。従って (9) 式でϵ^2に比例する項は高次の微小量として無視することが可能であろう。また右辺の第 2 項が他の項と釣合う条件を考えるならば$\epsilon \sim h^2$と考えるべきである。従って (9) 式は

$$\partial_\tau u + u\partial_\xi u + \frac{h^2}{12\epsilon}\partial_\xi^3 u = 0 \tag{10}$$

を得る。この方程式は前世紀に浅水波に対する方程式として Kortweg, de Vries によって導かれ、KdV(Kortweg-de Vries) 方程式と呼ばれる。 3 階微分は波の分散関係の最も主要な補正を与えるために分散性を表す。一方、第 2 項は最低次の非線形性を表す。第 1 、第 2 項のみであると波は突っ立ちを示し、やがて 3 価になるので解は爆発する。しかし、その突っ立ちを波をばらばらにする分散項とバランスさせることで正則な偏微分方程式を得る。

この KdV 方程式の真価が広く認識されたのは 1967 年に Zabusky, Kruskal による数値計算によって波が衝突によってもその個性を失わない孤立波としての性質を持つこと、初期条件への再帰性を持つことなどが発見されたからである。彼らは粒子的特性を持つ孤立波をソリトンと名付けた。その後、直ちに厳密解等が次々と発見されて応用数学の中で今世紀後半の屈指の重要な発見となった。歴史的には 1950 年代初頭の Fermi-Pasta-Uram による非線形格子 (1),(2) の数値計算が先行したが、Los Alamos 研究所内部のレポートとして刊行されたに留まりその重要性が認識されることは少かった。しかしながら不可逆性、あるいはエルゴード性が非線形性だけで作り出す事ができないことはおおきな驚きであった事は想像に難くない。

その後、様々な系で研究が進みソリトンを持つ方程式系が続々と発見されていった。そのなかでも有名なのは指数関数的相互作用をする格子力学系で戸田盛和によって発見された戸田格子である。戸田格子では (2) のかわりに

$$\phi(r) = ae^{-r} + br \tag{11}$$

というポテンシャルを用いる。

ソリトンを持つ物理系は様々存在する。元来 KdV 方程式は浅水波の表面形状を表す方程式として導出された。その後、深い波も異なった方程式系ではあるがソリトン系であることが示された。 1 次元プラズマや電気回路系もソリトンに帰着することが知られているし、光通信の基礎にソリトンは用いられている。また白川博士のノーベル賞の対象となったポリアセチレン等の伝導性高分子での電荷移動のメカニズムはソリトンである。他にもスピン系や渦糸系等数限りなくソリトン系は発見されている。変わったところではアインシュタイン方程式が厳密に解けるブラックホール解はソリトンと等価である。また 1 次元電子系等で厳密に解けるモデルは何らかの意味でソリトンに変換できる。この様に可解系の殆んど場合は何らかの意味でソリトンと関係があり、その基礎を学ぶ事は今後重要になっていくであろう。

問 (1)

$$\phi(r) = \frac{k}{2}r^2 + \frac{ka'}{4}r^4$$

のとき、格子力学系 (1) 式の連続体近似を考えてみる。$v = \partial_\xi y,\ \tau = \epsilon c_0 t/2,\ \mu = 2a'$ とおくことで

$$\partial_\tau v + v^2 \partial_\xi v + \mu \partial_\xi^3 v = 0$$

という modified KdV(MKdV) 方程式が導かれることを示せ。

(2) MKdV 方程式は Miura 変換

$$u = v^2 + \partial_x v$$

によって

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = (\partial_x + 2v)(\partial_t v - 6v\partial_x v + \partial_x^3 v)$$

と書かけることを示せ。このように MKdV 方程式は KdV 方程式に変換可能である。

2 KdV 方程式の解法

2.1 広田の方法

KdV,MKdV, 戸田等のソリトン方程式が可解なのは非線形変換によって線形化が可能であるからである。歴史的にはこれらの方程式が非線形ポテンシャル中の散乱問題に変換でき、散乱データから逆にポテンシャルを推定するという逆散乱の問題として定式化された。しかしこの方法は道具立てが面倒なのでここでは、その後、広田良吾によって発見された直接解を求める方法 (直接法) を紹介しよう。

広田の方法では方程式を双線形形式に書き直して解く。そこで広田は任意の関数 $a(x),\ b(x)$ の双線形形式 $a(x)\cdot b(x)$ に作用する演算子 D_x を

$$D_x a(x)\cdot b(x) = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'})a(x)b(x)|_{x=x'} \tag{12}$$

で定義する。この演算子を l 回作用させると

$$D_x^l a(x)\cdot b(x) = (\partial_x - \partial_{x'})^l a(x)b(x')|_{x=x'} \tag{13}$$

となる。

すぐ分る通り広田の演算子は

$$D_x^l a(x)\cdot 1 = (\partial_x)^l a(x),\quad D_x^l a(x)\cdot b(x) = (-1)^l D_x^l b(x)\cdot a(x)\quad D_x^{2l+1} a(x)\cdot a(x) = 0 \tag{14}$$

等が成立する。[1] ここで l は整数である。また

$$D_x a(x)\cdot b(x) = 0 \to a(x) \propto b(x) \tag{15}$$

もすぐ分る。その他、定数 $\alpha,\beta,\delta,\epsilon$ に対して

$$D_x^l e^{\alpha x}\cdot e^{\beta x} = (\alpha-\beta)^l e^{(\alpha+\beta)x},\quad e^{\epsilon D_x} a(x)\cdot b(x) = a(x+\epsilon)b(x-\epsilon) \tag{16}$$

[1] (14) の最後のものは $D_x^{2l+1} a\cdot a = \sum_{r=0}^{2l+1} {}_{2l+1}C_r a^{(r)} a^{(2l+1-r)}$ という定義式とライプニッツルールを組み合わせて表現する。ここで $a^{(r)} = d^r a/dx^r$ 及び ${}_{2l+1}C_r = (2l+1)!/(r!(2l+1-r)!)$ である。和を $r=0$ から l までと $r = l+1$ から $2l+1$ までに分割して後半のものを $k = 2l+1-r$ で書き直す事で $D_x^{2l+1} a\cdot a = 0$ が証明できる。

の成立も容易に分るであろう。更に (16) を用いて $D_t,\ D_x$ の任意の多項式 $F(D_t, D_x)$ に対して

$$F(D_t, D_x)e^{\Omega_1 t+p_1 x} \cdot e^{\Omega_2 t+p_2 x} = F(\Omega_1 - \Omega_2, p_1 - p_2) \exp[(\Omega_1 + \Omega_2)t + (p_1 + p_2)x] \tag{17}$$

や

$$F(D_t, D_x)e^{\Omega_1 t+p_1 x} \cdot e^{\Omega_2 t+p_2 x} = \frac{F(\Omega_1 - \Omega_2, p_1 - p_2)}{F(\Omega_1 + \Omega_2, p_1 + p_2)} F(\partial_t, \partial_x) \exp[(\Omega_1 + \Omega_2)t + (P_1 + p_2)x] \tag{18}$$

が成立する。

この広田の方法を用いると KdV 方程式

$$\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0 \tag{19}$$

は変換

$$u = 2\partial_x^2 \ln f \tag{20}$$

を施すと

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = 0 \tag{21}$$

となる。

証明 (21) から (19) を導こう。定義 (12) から

$$\begin{aligned} D_x D_t f \cdot f &= (\partial_x - \partial_{x'})(\partial_t - \partial_{t'})f(x,t)f(x',t')|_{x=x':t=t'} \\ &= (\partial_x - \partial_{x'})\{\partial_t f(x,t)f(x',t) - f(x,t)\partial_t f(x',t)\}|_{x=x'} \\ &= 2\{\partial_x\partial_x f f - \partial_t f \partial_x f\} \end{aligned} \tag{22}$$

が成り立つ。また

$$D_x^4 f \cdot f = D_x^3(\partial_x f f - f\partial_x f) = 2D_x^3(\partial_x f f) \tag{23}$$

も成り立つ。ここで

$$v = \partial_x \ln f = \frac{\partial_x f}{f} \tag{24}$$

と置くと

$$D_x D_t f \cdot f = 2(\partial_x\partial_t f - \partial_x f \partial_t f) = 2f^2\partial_t v \tag{25}$$

が成立する。また恒等式[2]

$$\partial_x^3 \frac{a}{b} = \frac{D_x^3 a \cdot b}{b^2} - 3(\frac{D_x a \cdot b}{b^2})\frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2} \tag{26}$$

において $a = \partial_x f,\ b = f$ とすると

$$\frac{D_x^3 \partial_x f \cdot f}{f^2} = \partial_x^3 v + 6\partial_x v^2 \tag{27}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} D_x f \cdot f &= \partial_x^2 f f - (\partial_x f)^2 = f^2 \partial_x v \\ D_x^2 f \cdot f &= 2(\partial_x^2 f f - (\partial_x f)^2 = 2f^2 \partial_x v \end{aligned} \tag{28}$$

[2] 証明は直接計算に基づく。$D_x^3 a \cdot b/b^2 = a'''/b - 3a''b'/b^2 + 3a'b''/b^2 - ab'''/b^2,\ D_x a \cdot b/b^2 = (a'b - ab')/b^2,$ $D_x^2 b \cdot b/b^2 = 2b''/b - 2b'^2/b^2$ より (26) の右辺は $a'''/b - 3a''b'/b^2 - 3a'b''/b^2 - ab'''/b^2 + 6a'b7^2/b^3 - 6ab'^3/b^4 + 6ab'b''/b^3$ となる。一方、左辺は普通の微分を 3 回繰り返す事でこの恒等式は証明できる。

を用いている。

(25),(27) より

$$\frac{1}{f^2}D_x(D_t+D_x^3)f\cdot f = 2(\partial_t v + 6\partial_x v^2 + \partial_x^3 v) \tag{29}$$

となる。最後に $u=2\partial_x v$ とおき KdV 方程式 (19) が導かれる。

(証明終)

2.2 1ソリトン解

1 ソリトン解は容易に求められる。(21) で f を

$$f(x,t) = 1+\epsilon f^{(1)}(x,t)+\epsilon^2 f^{(2)}(x,t)+\cdots \tag{30}$$

として ϵ^1 の係数を書き下すと

$$\partial_x(\partial_t+\partial_x^3)e^{2\eta}=0 \tag{31}$$

である。但し

$$\eta = -kx-\eta_0+4k^3t \tag{32}$$

である。従って

$$f^{(1)}=e^{2\eta},\quad f^{(2)}=f^{(3)}=\cdots=0 \tag{33}$$

となる。$u(x,t)$ で表現すれば $\beta=4k^3$ に対して

$$u(x,t)=2k^2\mathrm{sech}^2(kx-\beta t+\eta_0) \tag{34}$$

となる。(34) は 1 ソリトン解に他ならない。

2.3 2ソリトン解

2 ソリトン解はやや面倒である。2 ソリトンでは

$$f=1+f^{(1)}+f^{(2)}=1+e^{2\eta_1}+e^{2\eta_2}+Be^{2(\eta_1+\eta_2)} \tag{35}$$

とおく。ここで $f^{(1)}$ は前節の結果から $f^{(1)}=e^{2\eta_1}+e^{2\eta_2}$ であり $f^{(2)}$ は

$$f^{(2)}=Be^{2(\eta_1+\eta_2)} \tag{36}$$

である。

定義及び (35) から

$$D_x(D_t+D_x^3)f\cdot f = D_x(D_t+D_x^3)f^{(1)}\cdot f^{(1)}+2D_x(D_t+D_x^3)f^{(2)}\cdot 1=0 \tag{37}$$

となる。ここで 1 ソリトンが $D_x(D_t+D_x^3)f^{(1)}\cdot 1=0$ を充たすこと及び (14) の性質を用いている。(18),(36),(37) より

$$\begin{aligned} D_x(D_t+D_x^3)f^{(1)}\cdot f^{(1)} &= D_x(D_t+D_x^3)(e^{2\eta_1}\cdot e^{2\eta_2}+e^{2\eta_2}\cdot e^{2\eta_1} \\ &= 2\frac{(k_1-k_2)[2(\beta_1-\beta_2)-\{2(k_1-k_2)\}^3]}{(k_1+k_2)[2(\beta_1+\beta_2)-\{2(k_1+k_2)\}^3]}\partial_x(\partial_t+\partial_x^3)e^{2(\eta_1+\eta_2)} \\ &= -2\partial_x(\partial_t+\partial_x^3)Be^{2(\eta_1+\eta_2)} \end{aligned} \tag{38}$$

が成り立つ。$\beta_i = 4k_i^3$ を考慮すると

$$B = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \tag{39}$$

となる。ここで $\beta_i = 4k_i^3$ を用いた。この式で 2 ソリトン解が求まったことになる。元の変数に戻すのは容易であるが表式が煩雑になるので省略する。

2 ソリトン解は指数関数の重ね合わせに共鳴項とも呼ぶべき $f^{(2)}$ の項が足された形になっている。従って $\eta_1 \simeq \eta_2$ の処を除くと殆んど共鳴項はゼロであり 1 ソリトンの重ね合わせで表現できる。一方、1 ソリトンが互いに接近した場合には共鳴項の寄与が重要になる。x 軸正方向へ伝播する 2 つのソリトンの相互作用を考えてみよう。1 ソリトンの伝播速度は振幅の 3 乗に比例するので先行する振幅の小さなソリトンは後から進行してくるソリトンに追い付かれる。その後、f^2 で表現される共鳴を起こした後、再び 2 つのソリトンは分離をし、独立に振舞うことになる。この波の独立性がソリトンがソリトンたるゆえんである。