音と音楽の物理

早川尚男 (京大人環) - 物理学概論 -

1　はじめに

物理学の中であらゆる意味で波動が主要な役割を果たす事は云うまでもない。古典的な流体力学、弾性論、光学は云うに及ばず、量子論でも波動力学として定式化されて森羅万象の記述が可能になっていることを既に学んでいる。音響学もそうした波動を具象化して記述する学問体系であり、１９世紀には主要な物理学の研究対象であった。

今世紀に入って、音響学は成熟した工学の一分野に埋没し、物理学を修める学生がまとまった形でその全容を学習する機会はあまりない。しかしながら現代の我々の目で改めて音響学を見直すと様々な興味深い点が浮かび上がり、終ってしまった古い学問分野として斥ける態度は適切ではなかろう。実際、音響学は受け手の問題、即ち、人間の聴覚を通して人間そのものの科学と密接に結び付いており、単に古典物理学の一つの応用では汲み尽くせない魅力がある。

無論、本講で最先端の音響学の動向を伝える事は難しい。ここでは主に古典音響学の概要を説明し、それが楽器や音楽の特性とどのように繋がっているのかの概略を説明するのに留めざるを得ない。

2　音とは何か

そもそも音という言葉には「鼓膜の振動を引き起こす波」という意味合いが篭められている。弾性波動論では縦波も横波もあり、それぞれの媒質中を波が伝わっており、空気中で伝搬する波ととりたてて区別する必要もない。しかしここでは空気中の振動が音として伝わるという単純化した言い方をしておく。[1] 空気では (ずり) 粘性は小さく、横波の寄与は殆んどない。一方で何かしらの物体の振動に伴って隣接する空気の体積は圧縮を受け、それが膨張して復元しようとする力とバランスすることによって波が伝わる。このように圧縮と膨張が伝わっていくので音は疎密波であるという言い方もする。当然、光を除く他の波と同様に振動する媒質がないと音は波として伝わる事ができない。従って真空では音は伝わらない。

音の伝播速度は光に比べると極めて遅い。稲妻が光って暫くしてからゴロゴロという音が聞こえた経験があるだろう。また超音速旅客機が存在する程である。音速は普通の状況ではおよそ $3.3\times10^5 m/s (=1.2\times10^3 km/h)$ 程度であり[2] 、航空機は普通亜音速で飛ぶ。これは音速の壁に存在する衝撃波を避けるためである。

---

[1] 勿論、水中でも音は伝わる。弾性体の中で伝わる縦波も音波という言い方をすることが多い。ここではあくまで単純化のためそういったものを除外している。しかし場合によっては水中の音を議論することもある。

[2] より詳しくは完全流体の式を線形化して圧力 P や密度 ρ、速度場 $u(x,t)$ の従う偏微分方程式は 1 次元的な変化に対して $\rho\partial u(x,t)/\partial t=-\partial P/\partial x$ である。$u=\partial\xi/\partial t$ に対して、圧力 P が $P=-K\partial\xi/\partial x$ で与えられる。従って偏微分方程式は

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{K}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

となり、音速は $c=\sqrt{K/\rho}$ となる。音速は $\sqrt{\partial P/\partial\rho}$ となる。音は空気の断熱圧縮によって生じるので $P\propto\rho^\gamma$ に従う。ここで γ は比熱比であり 2 原子分子では $5/7$ である。よって $\partial P/\partial\rho=\gamma P/\rho$ であり、$\rho=1.3kg/m^3$, $P=1.0\times10^5 Pa$ を用いれば本文中の結果を得る。一方、温度依存性は圧力が温度にほぼ比例するので (理想気体と見なせる)、基準温度の音速に対して線形に依存する。例えば摂氏 0 ° を基準音速 $c_0=331.5m/s$ とすると、摂氏 θ の音速は $c\simeq c_0(1+\theta/546.3)=331.5+0.61theta$ m/s となる。一方、水中の「音」はおよそ 1.5×10^3 m/s であり、空気中よりずっと速い。

3　音圧と音のエネルギー

音の強度はデシベル (dB) という単位を用いて測定する。音圧は無論、正負に均等に変化することが予想されるのでそのまま圧力を用いたものでは平均は 0 となる。従って何らかの平均操作が必要となる。現在、最も多く用いられるのは

$$P_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T dt P^2(t)} \tag{1}$$

という時間 T の間で平均した音圧の実効値である。音圧 P_e を基準実効音圧で無次元化して 10 を底とした対数の 20 倍である

$$L_p = 20\log_{10}\frac{P_e}{P_{e0}} \tag{2}$$

を音圧レベルと称し、単位 dB を用いる。[3] ここで基準実効音圧 P_{e0} は空気中の音波に対して $P_{e0} = 2\times 10^{-5}$ Pa を用いる。この値は 1 kHz の音を耳の良い人が両耳を使って聞き分ける事の出来る最小音圧に近い。

音の強さは伝搬方向に垂直な単位面積を通じて単位時間当りに流れる音のエネルギーで測定する。そのためにまず音のエネルギーと圧力の関係を示してみる。圧力 P によって体積変化 dV があるときの仕事は $dW = PdV$ である。体積弾性率 K (= 1 / 圧縮率) を用いると体積変化と圧力変化の間には $dV = -VdP/K$ という関係があるので

$$W = \int dW = -\frac{V(P-P_0)^2}{2K}$$

となる。ここで P_0 は初期圧力であり、単純な圧力の単純平均と考えて 0 としてよい。従って体積部分 dV の位置エネルギーを $P^2dV/(2K)$ と考えられる。

前ページ脚注に書いた通り音速は $c = \sqrt{K/\rho}$ なので dV 中の全エネルギーは

$$\frac{1}{2}\rho(u^2 + \frac{p^2}{\rho^2 c^2}) = wdV$$

と考えられる。ここでの p は基準圧力からの差と解釈すべきである。この式によってエネルギー密度 w が定義できる。

音の伝搬方向に垂直な単位面積に単位時間あたりに流れる音のエネルギーを音の強さと言う。その点の粒子速度を u, 音圧を p とすると時間 δt の間に p のする仕事は

$$\delta J = pu\delta t$$

である。従ってその時間平均、即ち音の強さは $J = \frac{1}{T}\int_0^T dtpu$ で与えられる。平面波であれば波形に関係なく $p = \rho cu$ が成り立つので

$$J = \frac{P_e^2}{\rho c}$$

が成り立つ。ここで $P_e = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^T dtp^2}$ は音圧の実効値である。音の強さもデシベルで表されるが、このときは

$$I = 10\log_{10}\frac{J}{J_0}$$

[3] 言うまでもなく本来無次元で単位はない量であるが、モル等と同様に単位を慣習上用いている。

で与えられる。ここで $J_0 = 10^{-12}\mathrm{W/m^2}$ に取ったとき音圧デシベルと一致する。長々と書いたが要はデシベルに 2 種類あるという事である。

音の大きさ (ラウドネス) は普通ホンという単位を用いる。ホンは $1000(=1\mathrm{k})$ Hz の純音を基準にして、そのときの音圧デシベルを指す。最小可聴音はこの場合の 4 ホンと決められている。等ホン曲線を振動数と音圧デシベルを軸にして描くと同じホン数でも 4 kHz 辺りで音圧が最小となっている。逆に言えばこの辺りで音の感覚が最もよい。これは外耳道の音響的性質や耳小骨の構造にも影響されている。因みに f(フォルテ) は 70 dB であり、ppp は 30 dB であるそうだ。このように音の大きさで測るのか強さを基準にするのかに注意が必要である。

4　平面音波と管の中の音の共鳴

例えば水の波であれば水面の同じ状態にあるところが伝わって来ることを見て、波の伝搬を知覚できる。音であれば音圧を変動する量として認識し得ることは既に触れ通りである。このように変動 (先の例であれば水面の高さ) が同じ部分をつなぐと一つの面を作り、それを波面と呼ぶ。１次元的に進行し、波面が平面になっている波を平面波、波面が球面になっている波を球面波という具合に波面で波を分類することもある。

特に平面波は簡単であり、近似的に平面波が実現している場合が多いので最も大事である。以下では平面波に限定して話を進める。波動方程式に従う音は三角関数で記述できる。実際、$p = \sin(kx - \omega t)$ は $\partial^2 p/\partial t^2 - (\omega^2/k^2)(\partial^2 p/\partial x^2) = 0$ を充たす。この場合伝搬速度は $c = \omega/k$ である。

音に限らず波は媒質中では境界の影響を受ける。例えばある波が管に入って来て、もう一方の管の端から反射される状況を考える。実際には他端からは音は漏れるので透過する波もあるのであるが簡単のために入射する波と反射する波のみが存在するとしてみる。(これは言うまでもないが笛と同じ状況である)。この完全反射の場合には入射波と反射波の振幅 P_0 は等しい。従って入射波を $p_i(x,t)$、反射波を $p_r(x,t)$ と表すと

$$p_i(x,t) = P_0 \sin(\omega t - kx + \phi_i), \quad p_r(x,t) = P_0 \sin(\omega t + kx + \phi_r)$$

と書ける。但し ϕ_i, ϕ_r は波の位相と呼ばれ、境界条件等で決まる。k は波数と呼ばれ波長 λ と $\lambda = 2\pi/k$ の関係がある。実際の音波は両者の足し算で決まるので

$$p(x,t) = p_i(x,t) + p_r(x,t) = 2P_0 \cos(kx - \frac{\phi_i - \phi_r}{2}) \sin(\omega t \frac{\phi_i + \phi_r}{2})$$

となることは容易に確認できる。

ここで管を $x = l$ が閉じられた端であり、$x = 0$ が開放端であるとしよう。この場合、開放端では外界と同じ圧力であり、圧力変動は少ない。一方、閉鎖端では内部圧力は上がったり、下がったりする。実はこの地点が振動の腹となっており、圧力変動が最大となる。従って

$$\phi_i - \phi_r = 2kl - 4n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を充たす必要がある。このために例えば $x = 0$ での音圧が

$$p(0,t) = P_0 \sin \omega t$$

で与えられた場合は

$$p(x,t) = \frac{P_0}{\cos kl} \cos k(x - l) \sin \omega t$$

となることが容易に確かめられる。

上の式で管の長さ l と波数 k が

$$kl = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

を充たすと分母が 0 になる。現実にはここで考慮していない諸々の原因から圧力が発散することはないが、実際にこの値を取る場合に音が大きくなる。これが閉管の共鳴で笛で音が選ばれる原理と思って良い。このうち振動数 ν が一番少ない

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4l}$$

が最も表れやすい。(この selection のメカニズムは複雑であり、初等的な説明は出来ない)。従って $\nu = 440$ Hz、音速を $c = 3.4 \times 10^2$ m/s としたときに管の長さはおよそ $l = c/(4\nu) = 19$ cm となる。

両端が開放されているときには、両端で圧力変動が最小となる。従って共鳴条件は

$$kl = m\pi, \quad l = m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる。この場合に振動数最小のものは

$$\nu = \frac{c}{2l}$$

となる。従って閉管の閉じた方を開放することで 1 オクターブ音が低くなる。

部屋の中の音声は 3 次元的な箱の中の平面波と考えて良く、その場合、次元性はそれぞれの 3 方向の積で書ける。従って完全反射の壁に囲まれた場合には同様の共鳴条件が成り立つ。そうするとある場所では音が大きく、ある場所では音が聞こえないという事になる。こうした事は深刻であって、特にコンサートホール等ではあってはならないことである。こうした共鳴を防ぐために壁の材質を音を吸収しやすいものにするとか音を乱反射させて共鳴をおこりにくくするという工夫がなされる。(昔はよく行った) 京都会館第 1 ホールの天井からは不細工な反射板が多数ぶらさがっていたが、設計ミスによる共鳴を解消するために後から設置したものであった。昨日 (2000/11/12) にも京都コンサートホールに行ったが、その天井には (ちょっと規則的な気もするが) 乱反射を起こすための突起がある。

5 音階と音律

音楽で使用される音は振動数について連続的な分布ではなく離散的になっている。それらを一定の規則に従って高さの順に配列したものが音階である。音階として階段状に配列した音の間の隔たりを音程と言い、 2 音の隔たりを振動数比で表したものが音程比になる。 1 オクターブの音程比は既に述べた通り 2 である。

通常、基準音としてラ (A) を用いる。オーケストラの音合わせでオーボエを用いているのはその音である。[4] 最も標準的にはこのラの音の振動数を 440 Hz とする。 1 オクターブ高ければ 880Hz だし、低ければ 220 Hz である。 1 オクターブは 8 つの音から成る訳であるが、半音も入れて 1 2 音として考える方がよい。この間をどう取るかであるかは頭の痛い問題であり、現在も決定的な方法はない。

[4] 何でオーボエか。一回聞いたけど忘れました。詳しい人教えて下さい。

最も標準的に用いられているのはオクターブを１２等分した１２平均律である。これは半音を含めて等分配しているのでメロディーは滑らかであり、転調も容易に出来る。しかし欠点もある。音は音程比で決まっているのである音から次の音の間 (例えばミとファの間) には $2^{1/12} \simeq 1.059$ という無理数の音程比がある。従って和音ドミソを取ってもドとミの間の音程比は $2^{1/3}$ であり、ドとソの間は $2^{7/12}$ であり、どちらも無理数である。このように音程比が無理数である場合には一般に音のうなりが消えず、きれいな和音とならない。

一方で純正律という音階も存在する。そこでは和音を優先し、ドミの音程比を $5/4$、ドソの音程比を $3/2$ というきれいな有理数に固定した。そうすると和音の調和は非常によくなる。しかしその一方で大全音 (ドレの間)、小全音 (レミの間)、半音と３種類の音程比が混在するためにメロディーはぎこちないものになる。また転調によって前の音階にない音が出て来るために鍵盤楽器等を作る事が困難になる。

その他、ピタゴラス音階もよく用いられるがここでは省略しよう。どの音階でも調和とメロディーの間の矛盾は本質的に解決できていない。特にここ暫く圧倒的に主流であった平均律に対する批判が最近は強く起こって来ているので今後、全く違った音階というものも考えられるかもしれない。[5]

6　まとめ

どこが音楽の物理やねん、という突っ込みがあるかもしれないが、ちょっと音楽の苦手な筆者にはこれ以上の記述は難しい。興味を持った方は参考書を読まれると良い。いずれにしても音楽はともかく音や波は物理の基礎となるべき概念であり、音楽の愛好家に物理は必修科目である。彼のハイゼンベルクは音楽家になるべきか物理学者になるべきか迷ったそうである。またアインシュタインもこよなく音楽を愛していた。音楽を通して物理を身近に感じられたら幸いである。

[5] もっともこういった趣向を追求してシェーンベルクは失敗したと考えられるが。