# 非弾性Botltzmann方程式と流体方程式

早川尚男
京都大学大学院人間・環境学研究科
606-8501 京都市左京区吉田二本松町
Tel: 075-753-6782, Fax: 075-753-2999,
e-mail: hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

平成 13 年 7 月 6 日

## 1 はじめに

粉体を非弾性粒子多体系として捉えたときに今の処唯一つ可能な系統的な記述法は粉体系に気体分子運動論を適用することである. 気体分子運動論から流体力学を抽出する方法論は確立しているために実際に気体的な状況ばかりでなく粒子の衝突が 2 体的でありさえすればかなり広範囲の現象で適用可能と思われる. ここでは何が通常の分子気体と異なり, 何が一緒なのかをまとめてみる.

## 2 非弾性Boltzmann方程式の導出

弾性散乱をする希薄分子気体において分布関数の時間発展の記述には Boltzmann 方程式が用いられる. 一方, 非弾性衝突を行う粉体気体でも同様の方程式が存在すると思われる. ここではまず粒子回転を考えずに非弾性衝突粒子系の Boltzmann 方程式を導いてみよう.

粒子速度 $\mathbf{c}$, 位置 $\mathbf{r}$ に存在する質量 $m$, 粒径 $d$ の粒子系の分布関数を $f(\mathbf{c},\mathbf{r},t)$ としよう. 外力 $\mathbf{F}$ の下で微小時間 $dt$ 間の変化は

$$f(\mathbf{c}+\frac{\mathbf{F}}{m}dt,\mathbf{r}+\mathbf{c}dt,t)-f(\mathbf{c},\mathbf{r},t)=\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_c dt \tag{1}$$

と書けるだろう. ここで $[\partial f/\partial t]_c$ は衝突による分布関数の変化率である. 左辺を $dt$ で展開すると

$$\partial_t f+\frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\partial_{\mathbf{c}} f+\mathbf{c}\cdot\partial_{\mathbf{r}} f=\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_c \tag{2}$$

となる.

今, 粒子の非弾性衝突において回転の影響は考えないとする. 衝突 $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c_2}) \to (\mathbf{c'}_1, \mathbf{c}_2{}')$ に於いて反発係数 $e$ は

$$e \equiv -\frac{\mathbf{g}' \cdot \hat{n}}{\mathbf{g} \cdot \hat{n}} \tag{3}$$

で定義される. 但し $\mathbf{g} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ であり, $\hat{n}$ は衝突の際の共通法線である. このモデルでは衝突の際に接線方向の速度は連続なので

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}}\hat{n} + \mathbf{g} \cdot \hat{n}\hat{n} = \mathbf{g} - (1+e)(\mathbf{g} \cdot \hat{n})\hat{n} \tag{4}$$

という関係式が存在する. 一方運動量保存則は

$$\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{c'}_1 + \mathbf{c}_2{}' \tag{5}$$

である. (4), (5) より

$$\mathbf{c'}_1 = \mathbf{c}_1 - \frac{1+e}{2}(\mathbf{g} \cdot \hat{n})\hat{n}, \quad \mathbf{c'}_2 = \mathbf{c}_2 + \frac{1+e}{2}(\mathbf{g} \cdot \hat{n})\hat{n} \tag{6}$$

となる. 同様に衝突 $(\mathbf{c^*}_1, \mathbf{c^*}_2) \to (\mathbf{c}_1, \mathbf{c_2})$ では

$$\mathbf{c^*}_1 = \mathbf{c}_1 - \frac{1+e}{2e}(\mathbf{g} \cdot \hat{n})\hat{n}, \quad \mathbf{c^*}_2 = \mathbf{c}_2 + \frac{1+e}{2e}(\mathbf{g} \cdot \hat{n})\hat{n} \tag{7}$$

となる. 非弾性系においては衝突前後の時間反転対称性が破れていることが容易に分かる.

希薄粒子系を考えよう. 図の様に impact parameter $b$ の面素 $2\pi bdb$ を通って入射する粒子 1 に対して時間 t の間の $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c_2})$ の速度を持つ 2 粒子の loss と gain を考えてみる.

$$\text{Loss} \quad 2\pi bdb|\mathbf{g}|f(\mathbf{c}_1, \mathbf{r}_1 - d\hat{n}, t)f(\mathbf{c}_2, \mathbf{r}_2, t)d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 d\mathbf{r}dt$$

$$\text{Gain} \quad 2\pi bdb|\mathbf{g}^*|f(\mathbf{c^*}_1, \mathbf{r}_1 + d\hat{n}, t)f(\mathbf{c^*}_2, \mathbf{r}_2, t)d\mathbf{c^*}_1 d\mathbf{c^*}_2 d\mathbf{r}dt$$

である. ここで粒径 $d$ が有限であることを考慮したが希薄極限ではその効果は無視してよい. 以下では

$$f_1 \equiv f(\mathbf{c}_1, \mathbf{r}_1, t), \quad f_2 \equiv f(\mathbf{c}_2, \mathbf{r}_2, t) \tag{8}$$

とする.

$$d\mathbf{c^*}_1 d\mathbf{c^*}_2 = d(\frac{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2}{2})d(\mathbf{g} - \frac{1+e}{e}(\mathbf{g} \cdot \hat{n})\hat{n}) = \frac{1}{e}d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 \tag{9}$$

に注意すると

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial t}\right]_c = \Gamma_+ - \Gamma_- \tag{10}$$

になる. 但し

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \frac{2\pi}{e}\int dbb \int d\mathbf{c}_2 |\mathbf{g}^*| f_1^* f_2^* \\ \Gamma_- &= 2\pi \int dbb \int d\mathbf{c}_2 |\mathbf{g}| f_1 f_2 \end{aligned} \tag{11}$$

である.

一方 $b$ の関数とするより共通法線の分布とみる方が普通なので

$$2\pi bdb = B(\mathbf{g},\hat{n})d\hat{n} = 2\pi B(\mathbf{g},\hat{n})\sin(\pi-\psi)d(\pi-\psi) \tag{12}$$

と書く. 但し $\psi$ は共通法線と $\mathbf{g}$ のなす角である. 従って

$$B(\mathbf{g},\hat{n}) = |\mathbf{g}|\left|\frac{b}{\sin\psi}\right|\left|\frac{db}{d\psi}\right| \tag{13}$$

とおき図から $b = d\sin(\pi-\psi) = d\sin\psi$ 及び $db/d\psi = d\cos\psi$ を考慮すると

$$B(\mathbf{g},\hat{n}) = |\mathbf{g}|d^2\cos\psi = d^2|\mathbf{g}\cdot\hat{n}| \tag{14}$$

となる. 一方 (3) から $|\mathbf{g}^*\cdot\hat{n}| = |\mathbf{g}\cdot\hat{n}|/e$ の関係があるので結局

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial t}\right]_c = d^2\int d\mathbf{c}_2\int_{\mathbf{g}\cdot\hat{n}<0} d\hat{n}|\mathbf{g}\cdot\hat{n}|\left(\frac{{f^*}_1{f^*}_2}{e^2} - f_1f_2\right) \tag{15}$$

となる. 従って非弾性 Boltzmann 方程式は

$$\partial_t f_1 + \frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\partial_{\mathbf{c}}f_1 + \mathbf{c}\cdot\partial_{\mathbf{r}}f_1 = d^2\int d\mathbf{c}_2\int_{\mathbf{g}\cdot\hat{n}<0} d\hat{n}|\mathbf{g}\cdot\hat{n}|\left(\frac{{f^*}_1{f^*}_2}{e^2} - f_1f_2\right) \tag{16}$$

である.

Boltzmann 方程式の利点は Chapman-Enskog スキームに則って系統的に保存則の方程式、すなわち流体力学を抽出できることにあった. 非弾性 Boltzmann 方程式においても状況は変わらない. 数密度は

$$n(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{c}f(\mathbf{c},\mathbf{r},t) \tag{17}$$

で定義される. 着目する物理量 $\Psi$ に対して平均 $<\Psi>$ を

$$<\Psi> = \frac{1}{n}\int d\mathbf{c}\Psi(\mathbf{c})f(\mathbf{c},\mathbf{r},t) \tag{18}$$

とすると常に

$$\frac{\partial}{\partial t}<n\Psi> = <\frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{c}}> - \nabla\cdot<n\mathbf{c}\Psi> + \mathbf{C}(\Psi) \tag{19}$$

が成り立つ. ここで $\mathbf{C}(\Psi)$ は

$$\mathbf{C}(\Psi) = \frac{d^2}{2n}\int d\mathbf{c}_1\int d\mathbf{c}_2\int_{\mathbf{g}\cdot\hat{n}<0} d\hat{n}(\mathbf{g}\cdot\hat{n})f_1f_2\Delta[\Psi(\mathbf{c}_1)+\Psi(\mathbf{c}_2)] \tag{20}$$

であり, $\Delta[\Psi(\mathbf{c})] = \Psi(\mathbf{c}') - \Psi(\mathbf{c})$ は衝突 $\mathbf{c}\to\mathbf{c}'$ における衝突前後での $\Psi$ の差である.

以上の議論は希薄気体に関して有効な Boltzmann 方程式である. 良く知られている様に粉体ガスは希薄な状態を保つ事は必ずしも容易ではない. 従って濃厚領域でも有効な運動論方程式が必要となる. 一般には非希薄気体では粒子相関が問題になり 1 体分布関数の時間発展には 2 体分布関数の情報が必要になり, 2 体関数を求めるには 3 体の情報が必要というBBGKY ヒエラルキーをなす. 従って閉じた分布関数の方程式を得ることは不可能で

ある. しかしながら現象論として 2 体分布関数に平衡分布関数 $\chi(\mathbf{r})$ を用いれば 1 体分布関数の方程式として閉じさせることは可能である. この方程式は Enskog 方程式として知られており, その場合

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial t}\right]_c = d^2 \int d\mathbf{c}_2 \int_{\mathbf{g}\cdot\hat{n}<0} d\hat{n}|\mathbf{g}\cdot\hat{n}|[\frac{f(\mathbf{c}^*{}_1, \mathbf{r}_1 + d\hat{n}, t)f(\mathbf{c}^*{}_2, \mathbf{r}_2, t)\chi(\mathbf{r}_1 + \frac{d}{2}\hat{n})}{e^2} - f(\mathbf{c}_1, \mathbf{r}_1 - d\hat{n}, t)f(\mathbf{c}_2, \mathbf{r}_2, t)\chi(\mathbf{r}_1 - \frac{d}{2}\hat{n})] \tag{21}$$

となる. この方程式はかなり高濃度まで適用可能であり経験的にガラス転移が問題になる様な濃度近傍迄定性的に正しい結果を与えることが知られている.

# 3 Homogeneous Cooling State

Boltzmann 方程式では H 定理があり $H$ 関数の減少によって行く着く先の平衡分布関数が決まった. しかし非弾性系では H 定理が存在しないことは容易に確かめることが出来る. 従って速度分布関数一つ取ってもどの様な分布になるかという事はよく分からない.

よく知られている様に非弾性ガスでは運動エネルギーが粒子の内部自由度に吸収されていく. 運動エネルギーの分布関数による平均を (粉体) 温度

$$\frac{1}{2}DnT(t) = \int d\mathbf{c} f(\mathbf{c}, t)\frac{1}{2}m\mathbf{c}^2 \propto -T^{3/2} \tag{22}$$

とみたてるのでこの状態を Cooling state と呼ぶ. ここで $D$ は空間次元である. ここでは Noije and Ernst[1] にならって極く簡単に空間自由度が無視できる Homogeneous Cooling State(HCS) の解析を行ってみよう.

HCS にはスケーリング解

$$f(\mathbf{c}, t) = \frac{n}{c_0(t)^D}\tilde{f}\left(\frac{c}{c_0(t)}\right) \tag{23}$$

が存在する. ここで $c = \sqrt{\mathbf{c}^2}$, $c_0(t) \equiv \sqrt{2T(t)/m}$ である. $\Psi = m\mathbf{c}^2/2$ と選ぶことで (19) 式から容易に

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\mu_2}{D}mnd^{D-1}c_0(t)^3 \tag{24}$$

を得る.

$C = c/c_0(t)$ としてスケーリング関数による衝突積分の表現を

$$\tilde{I}(\tilde{f}) \equiv d^{D-1}\int d\mathbf{C}_2 \int_{\mathbf{g}\cdot\hat{n}<0} d\hat{n}|\mathbf{g}\cdot\hat{n}|\left(\frac{\tilde{f}(\mathbf{C}^*{}_1)\tilde{f}(\mathbf{C}^*{}_2)}{e^2} - \tilde{f}(\mathbf{C}_1)\tilde{f}(\mathbf{C}_2)\right) \tag{25}$$

を導入してみる. (23) を (24) に代入して整理すると

$$\frac{\mu_2}{D}(D + C_1\frac{d}{dC_1})\tilde{f}(C_1) = \tilde{I}(\tilde{f}) \tag{26}$$

となる. ここで $\mu_2$ はモーメント $\mu_p$

$$\mu_p \equiv -\int d\mathbf{C}_1 C_1^p \tilde{I}(\tilde{f}) \tag{27}$$

において $p=2$ としたものである.

この方程式が解ければ空間的に一様な場合の速度分布関数が求まるのであるが残念ながらそれは現在まで誰も成功していない. ここでは非一様分子気体でも使われた弾性極限の Maxwell 分布 $\tilde{f} \simeq \phi(C) \equiv \pi^{-D/2}\exp[-C^2]$ のまわりでの展開によって近似解を構成してみる. このとき

$$\tilde{f}(C) = \phi(C)\{1 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p S_p(C^2)\} \tag{28}$$

と表す. ここで $S_p(x)$ は Sonine 多項式で

$$S_0(x) = 1, \quad S_1(x) = -x + \frac{D}{2}, \quad S_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{D+2}{2}x + \frac{D(D+2)}{8} \tag{29}$$

等である. Sonine 多項式は

$$\int d\mathbf{C}\phi(C)S_p(C^2)S_{p'}(C^2) = \delta_{pp'}N_p \tag{30}$$

を充たす直交多項式である. また容易に分かる通り $a_p$ と $N_p$ の間には

$$a_p = \frac{1}{N_p}\int d\mathbf{C}S_p(C^2)\tilde{f}(C) \equiv \frac{1}{N_p} < S_p(C^2) > \tag{31}$$

という関係式がある.

(31) 式から直ちに $a_1 = 0$ という関係式が導かれる. $a_2$ は

$$a_2 = \frac{4}{D(D+2)}[< C^4 > -\frac{D(D+2)}{4}] \tag{32}$$

が成り立つ. 一方で

$$\mu_p = \frac{\mu_2}{D}p < C^p > \tag{33}$$

という関係式も成立し, $a_2$ の決定にはやはり高次のモーメントが次々と必要になり, 一つの閉じた方程式によって決定することはできない. 関係式を閉じさせるためには (28) 式を有限多項式で打ち切るという近似を行う必要がある. 例えば $f(C) = \phi(C)(1 + a_2 S_2(C^2))$ とすると

$$a_2 = \frac{16(1-e)(1-2e^2)}{9 + 24D + 8eD - 41e + 30(1-e)e^2} \tag{34}$$

となることが知られている.

ここで紹介した手法は強い非正規性を議論する際には殆んど無力である. 例えば速度分布のテールがしばしば問題になるが $C^2$ のべき関数である有限多項式近似では Maxwellian と本質的に違うものが出て来る余地はない. しかし一方で分布の高エネルギーテールが gain 項が無視できるという近似の下で指数関数になると予想されており、そのことは数値的にもある程度支持されている. この様に Sonine 多項式の有限多項式近似の無力さは際立っている. しかしながら標準偏差の 2 倍から 3 倍以内の分布のピーク付近では殆ど正規分布であり, そこからのずれもこの手法が十分に良い結果を与えている.

# 4 Shear Flow

通常の非一様分子気体の輸送係数の計算にはやはり Sonine 多項式による展開が用いられる. 従って非弾性由来のものと非一様性由来のものを組み合わせて展開する必要があるが古い Jenkins 等の kinetic theory ではそこいらの事情に余り頓着せず分布関数をある程度仮定して輸送係数を求めている. おおらかな計算はそれなりに意味があるが導かれた流体方程式は通常の分子気体の流体と大差ないものであった. 一方最近より系統的な計算が幾つか出版される様になってきて非自明の結果を出している. ここでは Goldhrisch 等 [2] の結果と古い Savage and Jeffrey[3] の結果を紹介しよう.

## 4.1 非等方的な圧力

Goldhrisch 等 [2] は 2 次元の shear flow を解析した. 彼等の結論はやや misleading な点もあるが系統的な計算によって異方的な圧力を導いた点は評価できる.

2 次元の定常 shear flow は

$$\mathbf{c}_1 \cdot \nabla f_1(\mathbf{c}_1) = d \int d\mathbf{c}_2 \int_{\mathbf{g}\cdot\hat{n}<0} d\hat{n} |\mathbf{g}\cdot\hat{n}| \left( \frac{f^*{}_1 f^*{}_2}{e^2} - f_1 f_2 \right) \tag{35}$$

前節と同様に $c_0(t)$ によって無次元速度 $\mathbf{C} = \mathbf{c}/c_0(t)$ を導入し, (23) 式 ($D = 2$) で定義された分布関数 $\tilde{f}$ を用いる. また空間のスケールは平均自由行程 $l = 1/(2nd)$ でスケールし $\mathbf{R} = \mathbf{r}/l$ とする. また shear flow も無次元化し

$$\mathbf{v} = \gamma_s y \hat{x} \to \mathbf{V} \equiv \mathbf{v}/c_0 = \gamma Y \hat{x} \tag{36}$$

とする. ここで無次元化された shear rate $\gamma = l\gamma_s/c_0(t)$ 及び $Y = y/l$ である. 無次元化された速度揺らぎを $\mathbf{U} \equiv \mathbf{C} - \mathbf{V}$ で導入すると (36) 式は

$$-\gamma U_y \frac{\partial f}{\partial U_x} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{U}_2 \int_{\mathbf{G}\cdot\hat{n}<0} d\hat{n} |\mathbf{G}\cdot\hat{n}| \left( \frac{\tilde{f}(\mathbf{C}^*)\tilde{f}(\mathbf{C}_2^*)}{e^2} - \tilde{f}(\mathbf{C})\tilde{f}(\mathbf{C}_2) \right) \tag{37}$$

となる. ここで $\mathbf{G} = \mathbf{C} - \mathbf{C}_2$ であり添字 1 は除去した.

Goldhrisch 等 [2] も前節と同様に

$$\tilde{f}(\mathbf{U}) = \phi(U)(1 + \Phi(\mathbf{U})) \tag{38}$$

と展開することを考えた. 違いは $\Phi$ の展開に Sonine 多項式を用いなかったこと constraints

$$\int d\mathbf{U}\phi(U)\Phi(\mathbf{U}) = \int d\mathbf{U}\mathbf{U}\phi(U) = \int d\mathbf{U}U^2\phi(U)\Phi(\mathbf{U}) = 0 \tag{39}$$

を課したこと, 及び $\Phi$ と $\gamma$ を $\epsilon = 1 - e^2$ で

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{U}) &= \sqrt{\epsilon}\Phi_1(\mathbf{U}) + \epsilon\Phi_2(\mathbf{U}) + \epsilon^{3/2}\Phi_3(\mathbf{U}) + O(\epsilon^2) \\ \gamma &= \gamma_1\sqrt{\epsilon} + \gamma_2\epsilon + \gamma_3\epsilon^{3/2} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{40}$$

と展開したと主張したことである. ここで「主張した」と書いたのが彼等の論文が misleading と思われる処である. つまり $\epsilon$ を非弾性衝突から生じる散逸と同定する必要はなく弾性衝突をする分子気体でも殆どそのまま彼等の議論が使えてしまうという事である. そう考えると気体分子運動論の膨大な蓄積 [4] を用いる事も可能だし, より簡単な計算法も存在し [5], 定性的な結果は変わらない. つまり $O(\epsilon)$ で圧力の異方性が生じることはよく知られている [4, 5, 6]. 特に定常状態熱力学との絡みでこの効果が問題になっていることは記憶に新しい. 従ってより系統的に Goldhrisch 等の計算を書き直すことは難しくないが時間がないのでここではしない.

Goldhrisch 等の解析では物理量を $\epsilon^{1/2}$ で展開して摂動論的に解析を進めている. 従って $\epsilon$ を散逸パラメータとすると弾性的な量しか計算には現れない. ($\epsilon$ の微分が現れるがそれは $O(\epsilon^{3/2})$ である). このことからも $\epsilon$ を反発係数と結び付けないで考えた分子気体でも殆ど結果が変わらないことが予想される.

彼等の解析の詳細は省くが基本的な流れは紹介しよう. まず $O(\epsilon^{1/2})$ では

$$L(\Phi_1(\mathbf{U})) = 2\gamma_1 U_x U_y \tag{41}$$

となる. ここで $L$ は Boltzmann 方程式に現れる線形演算子

$$L(\Phi) \equiv \frac{1}{2}\int d\mathbf{U}_2 \int_{\mathbf{G}\cdot\hat{n}<0} d\hat{n}|\mathbf{G}\cdot\hat{n}|\phi(U_2)(\Phi(\mathbf{U}') + \Phi(\mathbf{U}_2') - \Phi(\mathbf{U}) - \Phi(\mathbf{U}_2)) \tag{42}$$

である. この方程式は線形なので解ける. 実際 $\mathbf{U}$ を極座標に直し角度変数をくくりだすことで

$$\Phi_1(\mathbf{U}) = 2\gamma_1\tilde{\Phi}(U)U_x U_y, \quad U = |\mathbf{U}| \tag{43}$$

と書くことができる. この式を (41) 式に代入することで

$$\tilde{\Phi}_1(U) = e^{-U^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n I_n(U^2) \tag{44}$$

という解析解を得る. 但し $I_n(x)$ は変形ベッセル関数である. $a_n$ も決定可能である.[2]

$O(\epsilon)$ の計算も繁雑ではあるが同様に実行できる. そこまでの計算で粉体流体のストレステンソルを求めてみると興味深い結果が得られる. (無次元化された) ストレステンソルは

$$P_{ij} \equiv < U_i U_j > = \int d\mathbf{U} U_i U_j f(\mathbf{U}) \tag{45}$$

で定義される. 但し $P_{ij}$ は collisional stress tensor であり

$$n\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} \tag{46}$$

を充たす. Goldhrisch 等の計算で求まった $P_{ij}$ は

$$P_{xx} = \frac{1}{2} + \epsilon\hat{P}_{xx} + O(\epsilon^2), \quad P_{xy} = P_{yx} = \sqrt{\epsilon}\hat{P}_{xy} + O(\epsilon^{3/2}), \quad P_{yy} = \frac{1}{2} + \epsilon\hat{P}_{yy} + O(\epsilon^2) \tag{47}$$

であり

$$\begin{aligned}\hat{P}_{xx} &= \int d\mathbf{U} U_x^2 \phi(U)\Phi_2(\mathbf{U}) \simeq 0.2612 \\ \hat{P}_{xy} &= \int d\mathbf{U} U_x U_y \phi(U)\Phi_1(\mathbf{U}) \simeq -0.3572 \\ \hat{P}_{yy} &= \int d\mathbf{U} U_y^2 \phi(U)\Phi_2(\mathbf{U}) \simeq -0.2612 \end{aligned} \tag{48}$$

となる. 従って

$$\frac{P_{xx}}{P_{yy}} = \frac{1+0.5224\epsilon}{1-0.5224\epsilon} \tag{49}$$

という関係式を得る.

以上の結果が反発係数の展開でのみ得られて弾性極限では消えてしまう結果であれば大変面白い結果であるが残念ながらそうではない. 既に述べた様に弾性系の分子気体でも同様の結果になることが知られている.[4, 5, 6] 従って更に系統的な研究が待たれるところである.

## 4.2 Bagnolds' law

本節では Savage and Jeffrey[3] を紹介する. この論文では高濃度のハードコア粒子系が非常に興味深い性質を持ち得ることを Enskog 方程式 (21) 式に基づき示した.

Savage and Jeffrey[3] のポイントは (21) 式に現れる 2 体相関関数 $\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ にずりの効果も採り入れて議論したという点にある. 即ち 2 体分布関数 $f^{(2)}(\mathbf{c}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{r}_2, t) = \chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f_1 f_2$ ($f_i$ $(i = 1, 2)$ is 1-body velocity distribution function) に対して $\chi$ を

$$n^2 \chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2 \int_{\mathbf{g}\cdot\hat{n}>0} \chi_0(d, \phi) f(\mathbf{c}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{u}(\mathbf{r}_1)) f(\mathbf{c}_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{u}(\mathbf{r}_2)) d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 \tag{50}$$

とした. ここで $\mathbf{u}$ はずり速度である. また $\chi_0(d, \phi)$ は接触したときの平衡分布関数で

$$\chi_0(d, \phi) = \frac{1}{1-\phi} + 3\frac{\phi}{2(1-\phi)^2} + \frac{2\phi^2}{2(1-\phi)^3} \tag{51}$$

が非常に良い結果を与えることが知られている.[7] 従って

$$\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{2\chi_0}{n^2} \int_{\mathbf{g}\cdot\hat{n}>0} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 f(\mathbf{c}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{u}(\mathbf{r}_1)) f(\mathbf{c}_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{u}(\mathbf{r}_2)) \tag{52}$$

となるが $f$ が Maxwellian $f_1 = n(\pi v^2)^{-3/2} \exp[-(\mathbf{c}_1 - \mathbf{u}_1)^2/v^2]$ (但し $v =< \mathbf{c}_1 >$) であれば

$$\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \chi_0(d, \phi) \mathrm{erfc}(2\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}_2)/\sqrt{2 < v^2 >} \tag{53}$$

となる.

衝突に伴う運動量の増加 $m(\mathbf{c}_2{}' - \mathbf{c}_2)$ を面 $\delta S > 0$ で考慮する. 考えている面の法線ベクトル $\mathbf{n}$、共通法線を $\mathbf{k}$ とする.[1] 体積 $d\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\delta S$ 上の $\mathbf{g}\cdot\mathbf{k} > 0$ の粒子が衝突するので (衝突断

[1] 前と違う記号で申し訳ありません。時間がないので論文と一緒にしたいと思います。

面積 $d^2$) 単位面積、単位時間当たりの運動量の移動は

$$md^3 \int ({\mathbf{c}_2}' - \mathbf{c}_2)\chi f_1 f_2 (\mathbf{g}\cdot\mathbf{k})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) d\mathbf{n} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 \tag{54}$$

である. 弾性散乱では $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 = (\mathbf{g}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$ という関係があるのでストレステンソル $\sigma_{ij} = -P_{ij}$ は

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{m}{2} d^3 \int_{\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}>0} \chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f(\mathbf{c}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{u}(\mathbf{r}_1)) f(\mathbf{c}_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{u}(\mathbf{r}_2)) \\ &\times (\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})^2 \mathbf{k}\mathbf{k} d\mathbf{k} d\mathbf{c}_1 d\mathbf{c}_2 \end{aligned} \tag{55}$$

となる.

詳しい計算は原論文に譲るとしてここでも速度分布が Maxwellian であると仮定して無次元化した shear rate $R \equiv d|du/dy|/v^2$ の関数としてストレステンソルを計算することができる. ここで Maxwellian として意味のある結果が残るのは相関関数の効果を採り入れたためである. 無相関でストレステンソルを計算したら対角の静水圧しか残らない. その結果 shear rate が小さいときは

$$\begin{aligned} \sigma &= -2\phi\chi_0(d,\phi)\rho_s v^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{6}{5}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \phi\chi_0(d,\phi)\rho_s d\frac{du}{dy} v \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(R^2) \end{aligned} \tag{56}$$

となる. 従って有効粘性率は

$$\mu_{eff} = \frac{6}{5}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \phi\chi_0(d,\phi)\rho_s d\sqrt{T/m} \tag{57}$$

である. 但し $T = m < \mathbf{c}^2 >$ とする. 一方 $R \gg 1$ の極限では

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{12}{35}\phi g_0(d,\phi)\rho_p (d\frac{du}{dy})^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{32}{35\pi}\phi g_0(d,\phi)\rho_p d^2 \frac{du}{dy}|\frac{du}{dy}| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(1/R^3) \end{aligned} \tag{58}$$

となる.

ここでの議論では非散逸であるが排除体積効果のみで非ニュートン的なストレステンソルが現れた点で興味深い. この様に $R$ の 2 乗に比例する抵抗力は Bagnold のよって見つけられたので Bagnold's law とも呼ばれる. 通常 Bagnold's law の簡単な説明には非弾性の極限を取って議論をするがその必要は必ずしもないことを Savage and Jeffrey[3] は示したことになる. またストレステンソルが前節と同様に非等方になっている. この結果は土石流等にも多少の変更を加えて応用されている.

最後に幾つかのコメントをしておこう. まずここでの扱いは散逸はないと仮定したが後に Jenkins and Savage[8], Lun et al[9]. 等によって反発係数の効果は採り入れられていった. しかし殆どが弱い shear を論じているばかりで流体方程式は通常のものと大差ない. また境界の影響を余り論じていなかったが境界付近では粒子濃度の上昇や回転の影響が無視できなくなる. 境界で回転が促進される効果をまともに考えるのであれば極性流体となるのは必至であるがその辺の事情については境界の項に譲る.

# 5 流体方程式の破れ

In this section, I introduce the analysis by Brey et al [10] as a typical example of application of kinetic theory. They start from BGK(Bhatnagar-Gross-Krook) equation.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}\cdot\nabla f = \zeta(f - f_0) \tag{59}$$

where

$$f_0(\mathbf{r},\mathbf{c},t) = n(\mathbf{r},t)\phi(\frac{v}{ev_0}). \tag{60}$$

Here, $v$ is the fluctuation of the velocity, and $v_0$ is the thermal velocity $\sim \sqrt{T_g/m}$ and $\phi(v/v_0) = (\pi v_0^2)^{-d/2}\exp[-(v/v_0)^2]$.

There are three hydrodynamic variables

$$n(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{c} f(\mathbf{r},\mathbf{c},t) \tag{61}$$

$$n(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{c}\mathbf{c} f(\mathbf{r},\mathbf{c},t) \tag{62}$$

$$\frac{D}{2}n(\mathbf{r},t)T_g(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{c}\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 f(\mathbf{r},\mathbf{c},t) \tag{63}$$

where $D$ is the spatial dimension. The form of $\zeta$ is BGK equation is assumed to be the same as that of hard core Boltzmann gas

$$\zeta = CnT_g^{1/2}: \quad C \sim d^D/\sqrt{m} \tag{64}$$

Multiplication of BGK eq. by 1, $\mathbf{c}$, and $c^2$, we obtain the following hydrodynamic equations:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\mathbf{u}) = 0 \tag{65}$$

$$mn(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = -\nabla\cdot\mathcal{T} \tag{66}$$

$$\frac{D}{2}n(\frac{\partial T_g}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T_g) = -\nabla\mathbf{u}:\mathcal{T} - \nabla\cdot\mathbf{q} - \frac{D}{2}\zeta(1-e^2)nT_g \tag{67}$$

where

$$\mathcal{T} = \int d\mathbf{c} m\mathbf{c}\mathbf{c} f(\mathbf{r},\mathbf{c},t) \tag{68}$$

is the stress tensor and

$$\mathbf{q} = \int d\mathbf{c} \frac{1}{2} m v^2 \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) \tag{69}$$

is the heat flux.

In Chapman-Enskog scheme the hydrodynamic equation is determined by a series of perturbation from the basic solution:

$$\mathbf{u}_h = 0, \nabla (T_g)^h = \nabla n_h = 0, \nabla \cdot \mathbf{q}_h = 0 \tag{70}$$

This solution recovers a homogeneous cooling solution.

The velocity distribution function for the homogeneous state is

$$f_h(\mathbf{c}, t) = \int_1^\infty dx P(x) n_h \phi(\frac{v}{e v_0 x}) \tag{71}$$

where

$$P(x) = p x^{-(1+p)} \quad p = \frac{1}{1 - e^2}. \tag{72}$$

It is important to indicate that $f_h$ obeys

$$f_h \sim v^{-p-d} \quad (v \to \infty) \tag{73}$$

Thus, the tail obeying a power law appears in this BGK equation for all inelastic situations.

Hydrodynamic equations can be got from the expansion:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) = f^{(0)}(\mathbf{c}|\{\chi_i\}) + \epsilon f^{(1)}(\mathbf{c}|\{\chi_i\}) + \cdots \tag{74}$$

where $f^{(0)} \Leftarrow f_h$ with replacing $n_h$ by $n(\mathbf{r}, t)$, and $\{\chi_i\}$ are hydrodynamic fields. $f^{(1)}$ may be expanded as

$$f^{(1)} = \mathbf{A}_n \cdot \nabla n + \mathbf{A}_u : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{A}_T \cdot \nabla T_g. \tag{75}$$

Thus we obtain

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}) = 0 \tag{76}$$

$$mn(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \eta \mathcal{T}_0 - \nabla (n T_g) \tag{77}$$

where $\mathcal{T}_0$ is

$$\mathcal{T}_{0ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{d}{2} \partial_k u_k \delta_{ij}. \tag{78}$$

We also obtain the equation for energy

$$\frac{D}{2} n (\frac{\partial T_g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_g) = -\nabla \mathbf{u} : \eta \mathcal{T}_0 - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \nabla \cdot (\mu \nabla n) - \frac{D}{2} \zeta (1 - e^2) n T_g \tag{79}$$

where

$$\eta = \frac{2 n T_g}{(1 + e^2)\zeta}, \quad \kappa = \frac{(D+2)(2e^4 - 2e^2 + 1) n T_g}{2(2e^2 - 1) m \zeta} \tag{80}$$

and

$$\mu = \frac{(D+2)e^2(1-e^2)T_g^2}{(3e^2-1)(2e^2-1)^2 m\zeta}. \tag{81}$$

These equations are well-posed only for $e^2 > 1/2$: otherwise $\kappa$ and $u$ become negative, and the set of equations diverges.

Nondimensionalizing and assuming $\tilde{\chi}_i = \hat{\chi}_i(\sigma, \mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\sigma t}$ with dimensionless hydrodynamic variables $\tilde{\chi}_i$, the shear mode is given by

$$\sigma_t = \frac{1-e^2}{2} - \frac{k^2}{1-e^2}, \tag{82}$$

while the other modes obeys cubic dispersion relation. In short scale limit we obtain

$$\sigma_l(k \to \infty) = -\frac{D(1+e^2)(\kappa^* - \mu^*)}{4\kappa^*(D-1)} \tag{83}$$

where $\kappa^* = 2\zeta_h\kappa/(n_h v_0^2)$ and $\mu^* = 2\zeta_h\mu/(T_g v_0^2)$. Thus, $\sigma_l < 0$ for $e < e^* \simeq 0.79$.

In summary, for $e > e^*$ we cannot use any hydrodynamic descriptions. For $e > e^*$ we can use hydrodynamic description as the dynamics of cluster formation (transient).

At present we do not have any good hydrodynamic model to describe cluster formation.

# 参考文献


[1] T. P. C. Noije and M. H. Ernst, Granular Matter **1**, 57 (1998).

[2] I. Goldhrisch, in Modeling in Applied Sciences: A Kinetic Theory Approach ; edited by N. Ballomo and M. Pulvirenti (Birkhauser, Boston, 2000) pp. 21-79. see also I. Goldhrisch, N. Sela and S. H. Noskowicz, Phys. Fluids **8**, 2337 (1996).

[3] S. B. Savage and D. J. Jeffrey, J. Fluid Mech. **110**, 255 (1981).

[4] S. Chapman and T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970).

[5] D. Jou, J. Casas-Vazquez and G. Lebon, Extended Irreversible Thermodynamics (Springer, Berlin, 1996).

[6] S. Sasa and H. Tasaki, unpublished. See also H-D. Kim and H. Hayakawa, unpublished.

[7] N. F. Carnahan and K. E. Stirling, J. Chem. Phys. **51**, 635 (1969).

[8] J. T. Jenkins and S. B. Savage, J. Fluid Mech. **130**, 187 (1983).

[9] C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey and N. Chepurniy, J. Fluid Mech. **140**, 223 (1984).

[10] J. J. Brey, F. Moreno and J. W. Dufty, Phys. Rev. E **54**, 445 (1996).