# 非弾性衝突について

早川尚男
京都大学大学院人間・環境学研究科
606-8501 京都市左京区吉田二本松町
Tel: 075-753-6782, Fax: 075-753-2999,
e-mail: hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

平成 13 年 7 月 6 日

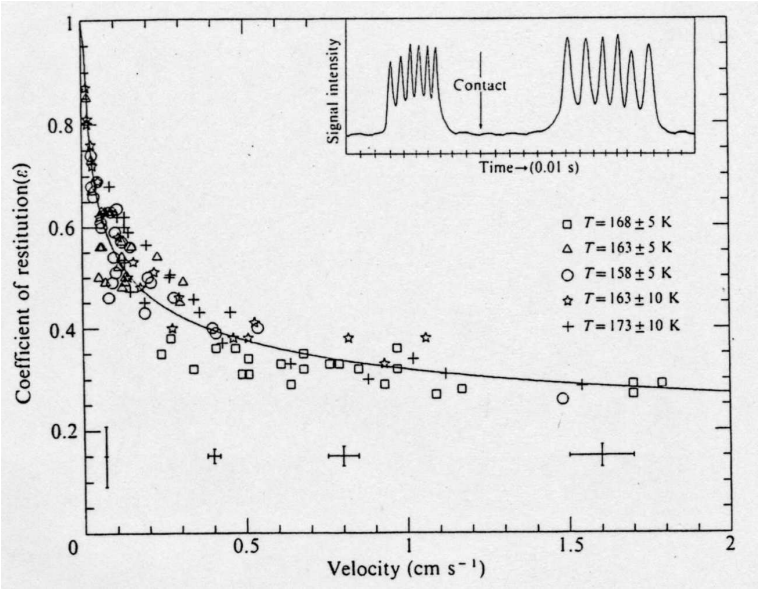


図 1: 氷の衝突実験におけるはねかえり係数の衝突速度依存性 [3]

# 1　はじめに

高校の物理では必ず非弾性衝突や摩擦を学習する事になっている。非弾性衝突は、粒子衝突前の相対速度 $v_i$ と衝突後の相対速度 $v_r$ の比で定義されるはねかえり係数

$$e = -\frac{v_r}{v_i} \tag{1}$$

が物質定数であり、衝突速度に依らないと習う。[1] 一方、摩擦でも似たような状況であり、動摩擦は最大静止摩擦より小さく、移動速度に依存しないと習う。摩擦がそんな単純なものではない事は本講座でも「摩擦の物理」という一巻が設けられていることからも分かるであろう。同様に非弾性衝突も一般には単純ではなく、とてもはねかえり係数一定という一言ではまとめられない。むしろ、はねかえり係数が衝突速度に依存するというのは常識として受け取られており [1, 2, 3, 4]、教育と実際の乖離が問題になる程である。

従来、量子力学の散乱問題の応用として原子・分子の衝突は理学的見地からよく研究されており、有名な教科書もある。[5, 6] 一方、マクロな粒子の衝突は原子・分子の衝突とは様相が異なり、工学的要請から各論的に研究がなされてきたが [1]、その結果がよく整理されたものとは言えず、物理的な重要性も認識されてこなかった。しかし最近、散逸粒子系の研究が盛んになるにつれて物理的見地からの見直しが起こりつつあるところである。例えば散逸粒子の多体系があったときの素過程は非弾性衝突であり、摩擦である。従って非弾性衝突や摩擦のメカニズムを明らかにすることは散逸粒子多体系を捉える上で重要である。本書では紙数の制限と本講座内での「摩擦の物理」の存在を考慮して衝突の物理に焦点をあてて紹介する。

非弾性衝突は散逸粒子の素過程と捉えられる一方で、元来、不可逆性のないミクロな力学系から如何に散逸や不可逆性を生じさせるかという統計力学の伝統的、基礎的な問題と関連している。同時に物理の問題として改めて捉えられる様になったのは極く最近の事で、研究が進んでいるとは言いがたいのが現状である。[2]

## 1.1　非弾性衝突のメカニズム

非弾性衝突は並進の運動エネルギーを内部の自由度への受渡しによって起こる。より詳しく言えば衝突に関連して並進の運動自由度が一旦内部運動の自由度に受け渡されて、その全てが再び並進自由度に戻りきらないという現象である。

一般に衝突は非弾性である。低分子系でも内部自由度は様々存在し、衝突の痕跡を残さない事は考えられない。例えば 1 原子系でも電子状態が衝突によって励起されるという事はありがちである。そうした励起は化学反応を伴った状態変化を起こすことも珍しくない。また極端に高エネルギーであれば核反応も考えられる。しかしここで考えたいのはむしろ低エネルギー衝突であり、化学反応等もなく塑性変形もなるべく排除した系である。必然

[1] (1) でマイナスがついているのは衝突前後で相対運動の方向が変わる事を考慮している。

[2] 最近、はねかえり係数が 1 を越えないという直観的には自明なことの証明がなされた。[7] 尤も後述の様に低速で温度揺らぎが重要になってくると直観的な結果が自明とばかり言えないのでこうした証明は意味を持つ。

的に理想化された衝突は弾性体間の衝突となる。弾性体の衝突でも衝突に伴う音波放射は排除して考えよう。これは真空中の衝突を考えれば消去できる。

無視できないのは衝突に伴う弾性変形と熱の移動である。主要因は弾性変形である。圧縮変形は準静的に起これば弾性体の接触が終ったときに残留歪みが残らないが、有限の速度で衝突及び圧縮変形が生じると全ての残留歪みは開放されない。一方、熱そのものが捉えがたい概念であるが弾性変形以外の諸々の変形要素を熱として表現することは必要である。そうでないと後述の様に接触を終えた弾性体の平衡状態への緩和はいつまでも起こらない。更に緩和メカニズムの欠如のせいか、弾性論そのものとの相性も良くない。いずれにしても現状で何が分かって何が解決すべきなのかをまとめるのも悪くない時期であると思われる。

尚、1 次元系では熱の効果を無視すれば、はねかえり係数はその構成要素の長さの比によって決まり、衝突速度には依存しないという比較的単純な結果が知られている。[1, 8] 理論解析も線形ばねのモード解析で済むので単純であり、実験結果を支持している。この際、長さの等しい「棒」の衝突でははねかえり係数が 1 になる。無論、上記の解析は単純化しすぎているので熱の効果を取り入れた研究も最近出るようになった。[9] しかし衝突の意義は 2 次元以上にある。並進の自由度が一旦衝突方向と違う方向への変形に置き換わってこそ状態の混合があるからである。こうして考えると弾性体の衝突でははねかえり係数はポアソン比に大きく依存するであろう事は想像がつく。実際に後述する弾性円盤の数値実験ではポアソン比の増加につれて非弾性の度合が増加することが示されている。[10]

# 2 弾性論

弾性体の衝突を論じるのであるから弾性体の接触理論が基礎となる。弾性論は伝統があり、壮麗な学問体系をなす。同時に物理の教程では軽んじられているので物理の学生や研究者にはなじみが薄く敷居が高いと言える。弾性体の接触の問題等については洗練された計算が存在するが、計算も長大なので小冊子にはとても導出過程は載せられない。ここでは弾性論の代表的な教科書 [11, 12, 13, 14] を挙げてその結果をまとめてみよう。

但しここでは接線方向の弾性力については触れない。その理由は紙数が限られている子と、法線方向の接触力に比べると複雑であることと弾性体の正面衝突にはその寄与がないからである。しかしながら摩擦との絡みや、後述の場合の様に弾性体を用いて粉体多体系を記述する際にはその効果は重要である。

## 2.1 3 次元弾性球のヘルツの接触理論

線形弾性論に基づく接触力については前世紀から詳細な研究がある．中でも最も有名なものはヘルツ ( Hertz ) [15] による固体接触の理論であり，大抵の弾性論の教科書には詳細に記述されてある [11, 12] . ここで簡単にその結果を紹介しよう . まず 3 次元の球同士の接触を考える．2 つの球を結ぶ中心軸を $z$ 軸に取り、x,y 平面を接触面とする。両物体の圧縮力の合力を $F_{el}$ とすると両物体は変形し，接触面は半径 $a$ の円となる．その半径 $a$ 及び接

触領域の距離 $h$ は接触粉体粒子の半径 $R$, $R'$ を用いて

$$a = F_{el}^{1/3}(D\frac{RR'}{R+R'})^{1/3}: \quad h = F_{el}^{2/3}[D^2(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'})]^{1/3} \tag{2}$$

で与えられる．ここで $D = \frac{3}{4}(\frac{1-\sigma_0^2}{Y} + \frac{1-\sigma_0'^2}{Y'})$ であり，$\sigma_0$, $Y$ はポアソン比，ヤング率と呼ばれる基本定数となっている[3] ．また両物体の接触点で働く圧縮力の分布は

$$P(x,y) = \frac{3F_{el}}{2\pi a^2}\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} \tag{3}$$

となる。但し $r = \sqrt{x^2+y^2}$ である。また圧縮に応じた変位ベクトルの圧縮方向成分を $u_z$ とすると

$$u_z = \frac{1-\sigma_0^2}{\pi Y}\int\int_{r'^2 \le a^2} dx'dy' \frac{P(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}} \tag{4}$$

である。ここで注目すべきは変形 $h$ と力 $F_{el}$ は $F_{el} \propto h^{3/2}$ という関係式で結ばれていることである．この関係は線形ばねによる変形と力の比例関係とは異なる．

### 2.2 弾性円盤或は弾性円筒のヘルツの接触理論

2 次元的形状をした円盤或は円筒の場合は微妙な問題がある。ストレステンソルの値が自重のみで接触したときと、もう一つの円筒で挟み込んで圧縮させて接触した場合と値が異なる [13, 14, 10]。工学的には後者の方が現実的だが衝突の問題と繋げるには前者の状況下で考える必要がある。

もっとも最終的な結果にはその影響は殆んどない。一応等半径、等質の円盤の接触の場合に前者の結果を示すと

$$h \simeq -\frac{F_{el}}{\pi Y}\{\ln\left(\frac{4\pi Y R}{F_{el}\,(1-\sigma_0^2)}\right) - 1\}, \tag{5}$$

という風に $F_{el}$ で解けた形に表現することは出来ない。[10] また接触半径、力の分布はそれぞれ

$$a = \sqrt{\frac{4(1-\sigma_0^2)F_{el}R}{\pi Y}}, \quad P(x) = \frac{2F_{el}}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2} \tag{6}$$

である。[13, 14, 10]

## 3 準静的な理論

準静的な理論というのは弾性論に遅い動的効果が加わったものである。遅い衝突と言っても有限速度の変形を扱えるので衝突にも適用できる。こうした研究は筆者の知る限り文

[3] ヤング率は単軸の引っ張りあるいは圧縮に対する応力と歪みの比例定数．ポアソン比は単軸の引っ張りを行なった場合の垂直変位 ( 縮み ) と軸方向の延びの比．

献 [16] が最初であり、１０年程してから物理の分野でも論文が書かれる様になった。[17] これらはいずれも弾性論の教科書 [11] にある様な現象論的な散逸関数を用いている。ここでは第 1 章との繋がりを強調するためにランジュバン方程式の導出法を用いたある意味で第 1 原理的な導出法を等方性物質の場合に単純化して紹介する。[18] 尚、言うまでもないことだが、この導出法に基づき導出されたマクロな変形 $h$ に対する発展方程式は現象論的な導出法 [16, 17] の結果と一致する。

ランジュバン方程式に基づく導出に移る前に現象論的導出について簡単に説明しよう。そこでは弾性ストレステンソルの他に粘性ストレステンソルを導入する。弾性ストレステンソルと粘性ストレステンソルは同型なのでスケーリングが成立して簡単に解析ができる。この粘性ストレステンソルの起源は複雑な内部摩擦を速度に比例する抵抗力としてモデル的に表現したものである。元来散逸の起源を問いたかった筈であるが更にミクロな情報が必要であるとしたのは皮肉に他ならない。

モルガド (W. A. M. Morgado) とオッペンハイム (I. Oppenheim)[18] の導出法のポイントはマクロな球を構成する原子の平衡位置からのずれを弾性変形のみとはせず、熱的な変位を陽に導入した事にある。従って原子 $i$ の位置 $\mathbf{d}_i$ は原子の平衡位置 $\mathbf{R}_i$, 弾性変形 $\mathbf{u}_i$, 熱的変形 $\boldsymbol{\rho}_i$ を用いて $\mathbf{d}_i = \mathbf{R}_i + \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\rho}_i$ と表される。ここで $\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{R}_i$ を導入する。[4] 微小弾性変形を仮定すると $\boldsymbol{\xi}_i$ は

$$\boldsymbol{\xi}_i \simeq \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{u}(\mathbf{R}_i) + \boldsymbol{\rho}_i \tag{7}$$

となる。

原子間のポテンシャルは平衡位置からの展開によって 2 次形式で表現できる。一様等方であれば

$$U_0 = \frac{\kappa}{2}\sum_i \boldsymbol{\xi}_i^2 \tag{8}$$

と書けるだろう。[5] (7) を (8) に代入し、弾性変形が歪みテンソル

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$$

を通して変形を受ける事 [11] を思い出せば (8) は

$$U_0 = U_{el} + U_\phi + U_H \tag{9}$$

となる。(9) の右辺第 1 項は通常の弾性変形の歪みエネルギーであり

$$U_{el} = \sum_i \{\frac{\lambda}{2}u_{\alpha\alpha}(\mathbf{R}_i)u_{\beta\beta}(\mathbf{R}_i) + \mu u_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_i)u_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_i)\} \tag{10}$$

[4] 本節のローカルルールとして $i, j$ 等は原子を表す添字で、$\alpha, \beta$ 等ギリシア文字の添字は成分を表す。また同じ成分の添字が出て来たときは和を取るというアインシュタインルール $a_\alpha b_\alpha \equiv \sum_\alpha a_\alpha b_\alpha$ を適用する。

[5] 原論文 [18] では一様性も等方性も仮定していないので $\kappa$ は 2 階のテンソルになっている。

と表現できる。[11][6] 但し $\lambda,\ \mu$ はラメ (Lamé) の弾性係数であり、正の値を取り $\kappa R_\alpha R_\beta = \mu\delta_{\alpha\beta} + \frac{\lambda}{2}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma\beta}$ という関係式で結ばれている。(9) 式の右辺第 2 項

$$U_\phi = \kappa \sum_{i,j} R_{i\alpha} u_{\alpha\nu} \rho_{j\nu}$$

は弾性変形と熱変形のカップリングであり弾性体の衝突の際に重要な役割を果たす. (9) 式の第 3 項 $U_H = \frac{\kappa}{2}\sum_{i,j}\rho_{i\alpha}\rho_{j\alpha}$ は熱変形のエネルギーであり、弾性変形に比べて一般に寄与は小さく、余り重要ではない。

弾性体の衝突の際には物質 1 と物質 2 のそれぞれに上記の議論が当てはまる。エネルギー等は各物質の寄与の単純和である。それぞれの重心を $\mathbf{r}_i\ (i = 1, 2)$ としてその距離 $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ が粒子直径 $2R$ より小さくなったときに両者の相互作用が働くものとする。

2 体が接触したときにランジュバン方程式の形にかけるであろうか。弾性変形は熱的な力ではない。また本来の熱的な力 $-\nabla U_H$ はあまりにも寄与が小さい。よって今、揺動力の役割を果たすのは $-\nabla U_\phi$ である。抵抗係数 $\zeta(r_{12})$ は揺動力の時間相関関数に他ならないので

$$\zeta(r_{12}) = \int_0^\infty d\tau < \nabla U_\phi \nabla U_\phi(\tau) > \tag{11}$$

と書けるだろう。[7] ここで時間の並進性を仮定し、$\nabla U_\phi(\tau)$ は時間 $\tau$ だけ経過した後の $\nabla U_\phi$ である。従って

$$\zeta(r_{12}) = \kappa^2 \sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j} R_\alpha^{(k)} R_\beta^{(k)} (\nabla_{12} u_{\beta\gamma}^{(k)})(\nabla_{12} u_{\alpha\delta}^{(k)}) \int_0^\infty d\tau < \rho_{i\delta}^{(k)} \rho_{j\gamma}^{(k)}(\tau) > \tag{12}$$

と書ける。ここで $\nabla_{12} = \nabla_{\mathbf{r}_{12}}$ であり、上付きの添字 $(k)$ は衝突する巨視的な粒子 1,2 を表す。ここで $\boldsymbol{\rho}_i$ が熱揺らぎを表している事を思い出すと

$$< \rho_{i\alpha}^{(k)} \rho_{j\beta}^{(k)}(\tau) >= \frac{\tau_v}{\kappa} k_B T \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}\delta(\tau) \tag{13}$$

と書けるだろう。[8] よって

$$\zeta(r_{12}) = k_B T \frac{\tau_v}{\kappa} \sum_{k=1}^{2} R_\alpha^{(k)} R_\beta^{(k)} (\nabla_{12} u_{\beta\gamma}^{(k)})(\nabla_{12} u_{\alpha\gamma}^{(k)}) \tag{14}$$

となる。

ここでクラマース方程式を多粒子系に拡張して

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(X_t,t)}{\partial t} &= \left[\left(-\sum_{i=1}^{2}\frac{\mathbf{p}_i}{M}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_i} + \sum_{i=1}^{2}\nabla_{\mathbf{r}_i} U_0 \nabla_{\mathbf{p}_i}\right)\right] P(X_t,t) \\ &+ \left[\frac{1}{2}\sum_{j(\neq k)=1}^{2} \zeta_{12}\hat{\mathbf{r}}_{jk}\hat{\mathbf{r}}_{jk} : \nabla_{\mathbf{p}_{kj}}(\beta\frac{\mathbf{p}_{kj}}{M} + \nabla_{\mathbf{p}_{kj}})\right] P(X_t,t) \end{aligned} \tag{15}$$

[6] ここでも原論文は $u_{\alpha\beta}u_{\gamma\delta}$ の係数に 4 階のテンソルを用いた一般的な表現を用いている。また $U_\phi$ も 2 階テンソルを含む係数がかかる。

[7] 積分したのは一般に揺動力の相関に表れるのはデルタ関数に比例したものになるからであり、求めたいのは抵抗係数 $\zeta$ だからである。

[8] $\tau_v$ は振動のタイムスケールに相当する。

を用いる。ここで $\beta = 1/k_B T$, $X_t = \{\mathbf{p}_i(t), \mathbf{r}_i(t)\}$ $(i = 1, 2)$, $\zeta_{12} = \zeta(r_{12})$, $\mathbf{p}_{kj} = \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k$, $\nabla_{\mathbf{p}_{kj}} = \nabla_{\mathbf{p}_j} - \nabla_{\mathbf{p}_k}$ であり、$\hat{\mathbf{r}}_{jk}$ は $j$ 粒子の中心から $k$ 粒子の重心に向かう単位ベクトルである。ここで任意の変数 $B$ に対する平均 $< B >_t$ を $< B >_t \equiv \int dX_t B P(X_t, t)$ で定義する。このとき $< B >_t$ の時間発展は

$$\frac{d}{dt} < B >_t = \int dX_t B \frac{\partial P}{\partial t}. \tag{16}$$

で与えられる.

相対座標 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ を導入すると

$$\begin{aligned} < \dot{\mathbf{p}}_{12} >_t &= \int dX_t \mathbf{p}_{12} \left[ \left( -\sum_{i=1}^{2} \frac{\mathbf{p}_i}{M} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_i} + \sum_{i=1}^{2} \nabla_{\mathbf{r}_i} U_0 \nabla_{\mathbf{p}_i} \right) \right] P(X_t, t) \\ &\quad + \int dX_t \mathbf{p}_{12} \left[ \frac{1}{2} \sum_{j(\neq k)=1}^{2} \zeta_{12} \hat{\mathbf{r}}_{jk} \hat{\mathbf{r}}_{jk} : \nabla_{\mathbf{p}_{kj}} \right] \end{aligned} \tag{17}$$

となる. ここで 1 行目の第 1 項を部分積分すると $P(X_t, t)$ の境界での値に比例する. よって境界で $P(X_t, t) = 0$ と仮定するとその項の寄与はない. 同様に部分積分から

$$\int dX_t \mathbf{p}_{12} \nabla_{\mathbf{r}_1} \nabla_{\mathbf{p}_1} P(X_t, t) = -\int dX_t \nabla_{\mathbf{r}_1} U_0 P(X_t, t)$$

及び:

$$\int dX_t \mathbf{p}_{12} \zeta_{12} \hat{r}_{12} \hat{r}_{12} : \nabla_{\mathbf{p}_{12}} \nabla_{\mathbf{p}_{12}} = 0$$

を容易西示すことができるので、ポテンシャル $U_0$ が弾性変形のポテンシャル $U_{el}$ で近似できるとする

$$\begin{aligned} < \dot{\mathbf{p}}_{12} >_t &= -\int dX_t P(X_t, t)(\nabla_{\mathbf{r}_1} U_{el} - \nabla_{\mathbf{r}_2} U_{el}) - \frac{\beta}{M} \int dX_t \zeta_{12} \hat{\mathbf{r}}_1 \hat{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{p}_{12} P(X_t, t) \\ &= < \mathbf{F}_{el} >_t - \frac{\beta}{M} < \zeta_{12} \hat{\mathbf{r}}_{12} \hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot \mathbf{p}_{12} >_t \end{aligned} \tag{18}$$

となる。[9] ここで弾性力 $< \mathbf{F}_{el} >= -\hat{\mathbf{r}}_{12} U'_{el}(h)$ は既に $(2)$ に出て来たヘルツの接触力と一致する。ここで $U_{el} = \frac{k}{2} h^{5/2}$ と書くならばマクロな変形 $h$ [10] に対する発展方程式は

$$\frac{M}{2} \ddot{h} = -\frac{5}{4} k h^{3/2} - \frac{\beta \zeta(h)}{M} \dot{h} \tag{19}$$

となる。[11] このように散逸力を決める問題は抵抗係数 $\zeta(h)$ をマクロな変形 $h$ の関数として決める問題に帰着した。

ここで全て問題が可解ならば $\zeta(h)$ を厳密に求める事が可能であろう。しかし問題は弾性変形、熱的な変形が絡み合って錯綜しており、厳密な解析は困難である。しかし歪みテンソルのスケーリングを考える事で $\zeta(h)$ が $h$ のどのような関数であるかということは容易に分

[9] 運動量については部分積分を実行していて自由度を落している。
[10] 接触したときに $h = 2R - r_{12}$ という関係式がある。
[11] 言うまでもないが $M/2$ は換算質量である。

かる。実際 $(4)$ 式から $u_z(\mathbf{x}) \to u_z(\sqrt{\alpha}\mathbf{x}) = \alpha u_z(\mathbf{x})$ であり、歪みテンソル $u_{\alpha\beta}$ は $u_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \to u_{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}\mathbf{x}) = \sqrt{\alpha}u_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ という変換を受ける。従って $\partial u_{\alpha\beta}(\mathbf{x})/\partial h \to \partial u_{\alpha\beta}(\sqrt{\alpha}\mathbf{x})/\alpha\partial h = 1/\sqrt{\alpha}(\partial u_{\alpha\beta}(\mathbf{x})/\partial h)$ である。弾性エネルギー $(10)$ と $\zeta(h)$ の表式 $(14)$ を比較すれば $u_{\alpha\beta}$ と $\partial u_{\alpha\beta}/\partial h$ のスケール変換が鍵になることが分かる。今までの議論から弾性エネルギーが $\alpha^{5/2}$ でスケールされるならば $\zeta(h)$ は $\alpha^{-2}$ だけずれた $\alpha^{1/2}$ でスケールされる筈である。従って

$$\zeta(h) = \frac{5}{2}k'h^{1/2} \tag{20}$$

及び

$$\frac{M}{2}\ddot{h} = -\frac{5}{4}kh^{3/2} - \frac{5}{2}k''\dot{h} \tag{21}$$

となる。但し $k'' = \beta k'/M$ であり、$k'$ はこのような雑な議論では決まらない定数である。この結果は既に述べた通り散逸関数を用いた導出による結果と一致する $[16, 17]$ が、肝心な箇所は変数のスケーリングを用いているだけなので当然の一致とも言えよう。

この導出は等温熱浴の中での運動を仮定しているので等温変形でのみ有効である。ところが一般に圧縮に伴って温度上昇があり温度勾配が出来る。温度勾配はまた熱伝導を通して散逸をもたらすのでもう一つ散逸のメカニズムを考慮する必要がある。但し圧縮と熱伝導を結び付けて散逸を議論した論文は殆ど見当たらない。いずれにしてもここで紹介した導出が実際の衝突で起こっており定量的に正しいと解釈すべきではなく、リサブレベルの早い運動の自由度が沢山あり、その消去によって散逸が起こり得るということを理解するための例証であると解釈すべきであろう。

尚、 2 次元の準静的理論は近似的に

$$F_{tot} \simeq -\frac{\pi Y h}{\ln(4R/h)} - A\frac{\pi Y \dot{h}}{\ln(4R/h)}, \tag{22}$$

となることが $(5)$ と 3 次元の議論を参考にすれば容易に想像がつくだろう。$[10]$ 但し $A$ は未知定数である。

# 4 弾性円盤の数値解析

準静的な理論では熱的な変形を持ち出し、温度が一様であるとした。従って準静近似が成り立つ条件は熱拡散によって温度が一様化するタイムスケールよりも十分ゆっくりな衝突を考えた事になる。しかし通常の衝突では衝突面の温度上昇があることは野球のボールとバット等を通した日常体験でもおなじみの事であろう。即ち、日常における衝突は準静的と呼べない程早い衝突が多いのである。また熱変形という得体の知れないものを導入したために散逸の起源を明らかにするという意味では目的を達したと言えない。更に巨視的な物体では熱変形等の温度効果が重要であるかどうかも自明ではない。同時に前節で紹介した結果と等価な結果を与える現象論 $[16, 17]$ では弾性ストレステンソルの他に粘性ストレステンソルを導入しており、最初から弾性論の枠組では散逸を議論できない様な印象を与えてしまう。

従って準静的理論のアンチテーゼとして弾性変形のみを考慮したモデルの解析が当然考えられる。少なくとも粘性ストレステンソルが散逸の必要条件ではないことを示すためにも、ここではまずゲール (F. Gerl) とジッペルス (A. Zippelius) の弾性円盤の数値解析を中心に弾性変形のみで何が分かるかをま紹介してみる。[10] 次いでばねネットワークモデルに基づくシミュレーションの結果と比較検討をしてみる。

## 4.1 弾性円盤のモード 解析モデル

彼らの解析は自由円盤のモード 解析に基づく。線形弾性論ではよく知られている様に圧縮波と回転波の 2 つの弾性波が存在する。[11, 12, 19, 20] 2 次元では圧縮、回転はそれぞれ

$$\eta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}; \qquad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{23}$$

で与えられ波動方程式は各々

$$\nabla^2\eta = \frac{\rho(1-\sigma_0^2)}{Y}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}; \qquad \nabla^2\zeta = \frac{2\rho(1+\sigma_0^2)}{Y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \tag{24}$$

となる。ここで $\rho$ は密度である。円盤であれば (24) の解は

$$\eta = A_n\kappa^2 J_n(\kappa r)\cos n\phi\cos\omega t, \quad \zeta = -\frac{1}{2}B_n\kappa'^2 J_n(\kappa' r)\sin n\phi\cos\omega t \tag{25}$$

の線形結合で書けるだろう。ここで $J_n$ は $n$ 次のベッセル関数であり $\kappa, \omega$ 等の間には分散関係

$$\kappa = \omega\sqrt{\frac{\rho(1-\sigma_0^2)}{Y}}; \qquad \kappa' = \omega\sqrt{\frac{2\rho(1+\sigma_0^2)}{Y}} \tag{26}$$

が存在する。

円盤の自由表面では力が働かないのでストレステンソルは半径 $R$ の処で $\sigma_{rr}(R,\phi) = 0$ 及び $\sigma_{r\phi}(R,\phi) = 0$ を充たす筈である。円盤同士或は円盤と壁との正面衝突では接線方向の力は働かないので一般に $n$ 次のモード に対して $\phi = \pi k/n$ では $u_\phi = 0$, $\phi = \pi(2k+1)/(2n)$ では $u_r = 0$ となる。但し $k = 0, 1, \cdots, 2n-1$ の整数である。このとき境界条件は 2 つの方程式を導くがそのうちの一つ

$$\begin{aligned} &-A_n[\frac{(1-\sigma_0)}{R}\frac{dJ_n(\kappa R)}{dR} + (\kappa^2 - \frac{(1-\sigma_0)}{R^2}n^2)J_n(\kappa R)] \\ &+nB_n(1-\sigma_0)[\frac{1}{R}\frac{dJ_n(\kappa' R)}{dR} - \frac{J_n(\kappa' R)}{R^2}] = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

ともう一つから $A_n$ を消去して、$B_n$ で両辺を割ると

$$\begin{aligned} &(1-\sigma_0^2)(1-n^2)\kappa\kappa'^2 J_{n-1}(\kappa)J_{n-1}(\kappa') + \kappa^2[\kappa^2 - 2n(n+1)(1-\sigma_0)]J_n(\kappa)J_n(\kappa') \\ &+(1-\sigma_0)[\kappa^2 - (1-\sigma_0)(1-n^2)n][\kappa J_{n-1}(\kappa)J_n(\kappa') + \kappa' J_{n-1}(\kappa')J_n(\kappa)] = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

を得る。この固有方程式は実は $\kappa$ 或は $\omega$ の決定方程式となっている。即ちある $n$ に対して可算無限個の $\kappa_{n,l}$ 或は $\omega_{n,l}$ を決める事ができる。円盤の大きさが有限なので量子力学と同

様に離散固有値になっていることに注意されたい。従って固有状態間の遷移は摂動等がなければあり得ない。この方程式に規格化条件

$$\int_0^R drr\{u_r^{n,l}(r)^2 + u_\phi^{n,l}(r)^2\} = R^2$$

を課す事で閉じた方程式系を得、$A_n, B_n$ を決める事ができる。こうして固有状態を完全に決める事ができる。但し

$$\begin{aligned} u_r^{n,l}(r)R &= A_{n,l}\frac{dJ_n(k_{n,l}r)}{dr} + nB_{n,l}\frac{J_n(k'_{n,l}r)}{r}, \\ u_\phi^{n,l}(r)R &= -nA_{n,l}\frac{J_n(k'_{n,l}r)}{r} - B_{n,l}\frac{dJ_{n,l}(k_{n,l}r)}{dr} \end{aligned} \tag{29}$$

は無次元化された変形の $r, \phi$ 成分である。更に

$$C_{n,l} = u_r^{n,l}(R), \quad S_{n,l} = u_\phi^{n,l}(R)$$

を導入しておく。

衝突の際に行うのは次のモード展開の係数

$$(u_r(r,\phi), u_\phi(r,\phi)) = \sum_{n,l} Q_{n,l}(u_r^{n,l}(r)\cos n\phi, u_\phi^{n,l}(r)\sin n\phi), \tag{30}$$

$Q_{n,l}$ を求める事になる。壁がなければモードの混合は起こらないが壁の影響でモードが混合する. 従って次のハミルトニアン

$$H = \frac{p_0^2}{2M} + \sum_{n,l}^{N}(\frac{P_{n,l}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega_{n,l}^2 Q_{n,l}^2) + V_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi e^{-\alpha y(\phi,t)} \tag{31}$$

を導入し、正準方程式

$$\dot{P}_{n,l} = -\frac{\partial H}{\partial Q_{n,l}}; \quad \dot{Q}_{n,l} = \frac{\partial H}{\partial P_{n,l}} \tag{32}$$

を解く。但し $\alpha$ はポテンシャルの強さであり、$y(\phi,t)$ は円盤の形状を表し

$$y(\phi,t) = y_0(t) + \sum_{n,l} Q_{n,l}(C_{n,l}\cos(n\phi)\cos\phi - S_{n,l}\sin(n\phi)\sin\phi) \tag{33}$$

で与えられる。

固有値方程式 $(28)$ や $(32)$ を数値的に解く事で円盤の衝突が解析できるのである。但し実際の数値解析では無限個のモードを取ることは不可能なので有限のモード数 $N$ で打ち切る事になる。また $(27), (28)$ は数値的に解くために発展方程式 $(32)$ を解くとき以外にも数値誤差が入り込む点に注意が必要である。また粒子同士の衝突をシミュレートする場合には鏡像法のアイデアを借りてポテンシャルの強さについて $\alpha \to \infty$ の極限を取る必要がある。文献 $[10]$ は $\alpha$ やモード数の外挿を注意深く行っており、$1-e^2$ がそれぞれ $1/(\alpha R), 1/\sqrt{N}$ に線形に変化することを確認している。

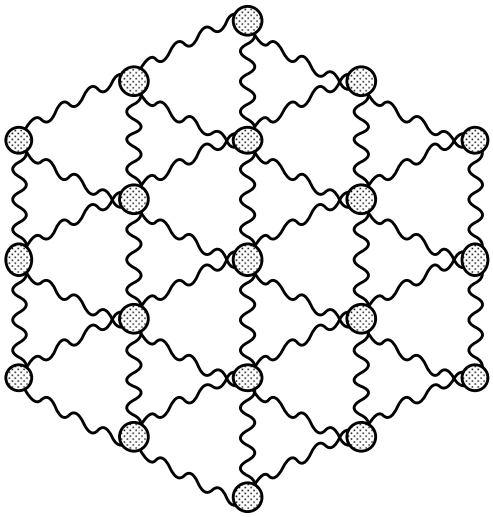

図 2: モデル A の概念図.

## 4.2 ばねネットワークモデルとモード解析モデルの数値解析

モード解析モデルはシミュレーションの実行までに理解せねばならない理論的背景が多々あり、直観的ではない。一方、普通に考えるのは質点とばねでネットワークを作って弾性体を表現しようとするのではなかろうか。実際、そういった観点からばねネットワークモデル (図 3.1) の数値解析を行い、モード解析モデルの結果と比較した論文がある。[21] ここではその論文に沿って弾性変形のみの衝突で何が起こるかを解説してみる。以下ではばねネットワークモデルをモデル A, 上述のモデルをモデル B と呼ぶ事にしよう。衝突に際して粒子の重心は $x = 0$ に固定され、$y > 0$ から近付き、跳ね返るものとする。

モデル A はばね定数 $k_0$ のばねで質点 (質量 $m$) を結合したものである。この系は連続極限でヤング率が $Y = 2k_0/\sqrt{3}$、ポアソン比が $1/3$ になることが知られている。[22] また運動方程式は

$$m\frac{d^2\mathbf{r}_p}{dt^2} = -k_0\sum_{i=1}^{6}(d_0 - |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i|)\frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i|} + \hat{y}\alpha V_0 e^{-\alpha y_p} \tag{34}$$

に従う。ここで $d_0$ は格子定数、 $\mathbf{r}_i$ は注目点 $\mathbf{r}_p$ の最隣接格子点、$y_p$ は $\mathbf{r}_p$ の $y$ 座標であり、$\hat{y}$ は $y$ 方向の単位ベクトルである.

2 つのモデルは良く似ているが微妙に違う点もある。その違いをまとめると

- モデル A は直観的であり、少ない素子数の系は小さな円盤を表現する。一方、モデル B は素子数を一旦無限大として連続極限を取ってからの解析であり、少ないモード数の系は代表的な変形のみを含んだ事になっている。

- モデル B は任意のポアソン比を扱えるが、モデル A はポアソン比は $1/3$ に限定される。

- モデル A では素子全体が壁と相互作用するが、モデル B は円盤の外縁だけが相互作用をする。
- モデル A は線形弾性論の枠の中であるが、モデル B は方向余弦が非線形性をもたらすために大変形も可能である。
- モデル A は塑性変形を記述できないが、モデル B は後述の様に塑性変形を記述できる。
- モデル A は 6 回対称性しか持ち得ないが、モデル B は回転対称性を持つ。

といったところである。従って数値計算の結果は微妙に一致しない。

数値計算は初期に内部運動の自由度を持たせたものと持たせないものとの両方を行った。運動の自由度を持たせる場合はカノニカルな初期分布を用意すれば良い。[12] 初期の内部自由度から温度 $T$ が定義できる。しかしながらあくまで弾性変形のみを考慮しているので温度は熱を表現しているのではなく、格子振動の自由度を表しているのに過ぎない。

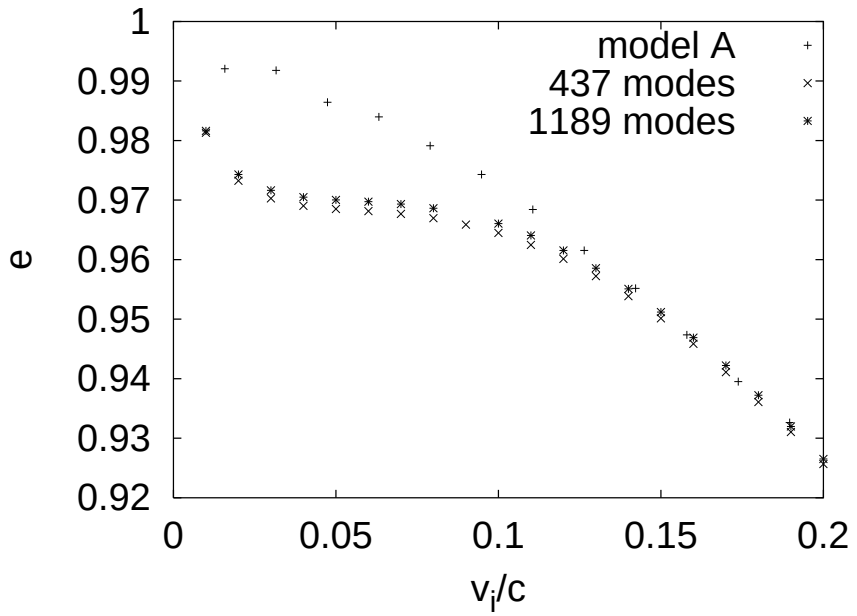


図 3: モデル A, B におけるはねかえり係数の衝突速度依存性.

図 3.2 は $T = 0$ の数値計算の結果得られた、はねかえり係数の衝突速度依存性である。ここで $c = \sqrt{Y/\rho}$ は音速の目安である。このようにはねかえり係数は衝突速度の増加につれて徐々に減少する。モデル B の低速の場合に急速にはねかえり係数 $e$ が減少して、中間的な速度であまり $e$ が変化しないという結果はブリッジ等の氷の衝突実験によく似た結果である [3]、どの程度意味があるのかは分からない。

[12] 実際には文献 [21] ではモデル A の場合、速度分布のみをマクスウェル分布にし、質点の位置は平衡としている。これは不適切な初期条件である。

次にこれらのモデルが前節で紹介した準静的な理論と一致した傾向を示すかを見てみよう。どちらのモデルでも傾向は一緒だが、モデル B の方が精度良く高速に計算できるのでその結果を見てみよう。文献 [10] にも示唆されているが、文献 [21] の数値計算の結果は明らかに準静的な理論とは合わない。例えば衝突速度 $v_i = 0.01c$ では反発力 $F$ とマクロな変形 $h$ の関係はきれいなヒステリシスループを描き、$v_i = 0.001c$ ではほぼ線形の応答をしている。とりわけ $v_i = 0.001c$ では最大の反発力が働き、最も大きく変形している点[13] が弾性論で予想される (5) 式とは大きく隔たっており、$\dot{h}$ に比例する散逸力という描像が成り立たない。おそらく更に低速の衝突でも弾性論の結果には近付かないであろうことが予想される。実際、外場によって圧縮しても平衡状態に緩和せず重心は単振動を行う。この結果は準静的理論や弾性理論への回復には熱的な力が重要な役割を果たすというある意味で至極真っ当な結論を意味する。[14] 即ち低速の衝突では局所的な変形による温度変化の効果が重要であるという事を示唆しており、等温的な取り扱いは最早正しくないのである。

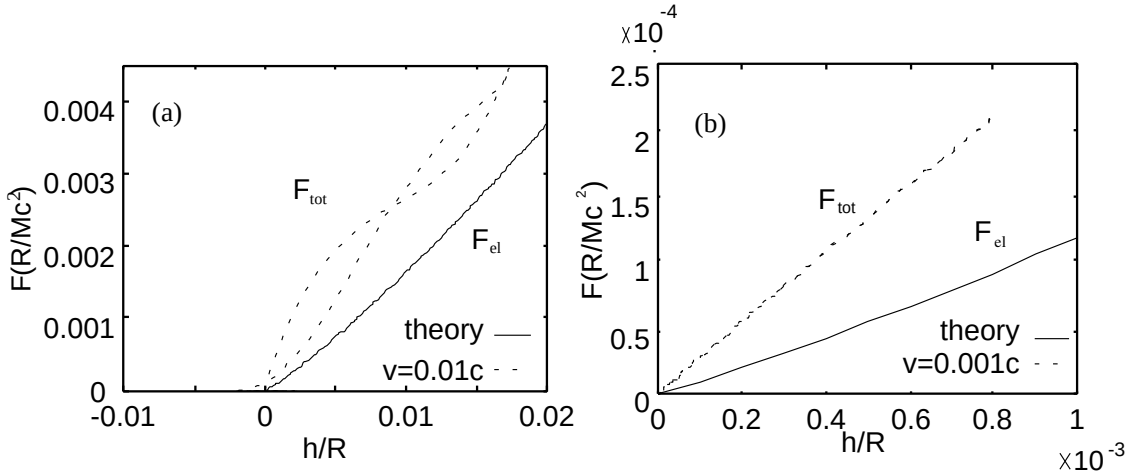


図 4: (5) 式のヘルツ則とモデル B のシミュレーション結果の比較。(a) $v_i = 0.01c$ 及び (b) $v_i = 0.001c$.

衝突速度 $v_i$ と熱速度 $\sqrt{k_B T/M}$ の比が有限であれば、初期の内部自由度即ち温度の効果が重要になる。有限温度の数値計算はまだ余りないが、低速の衝突でははねかえり係数の揺らぎが低速になるにつれて、或は温度の上昇につれて急激に増加することも知られている。これらの効果については今後の研究が待たれる。

[13] $\dot{h} = 0$ を充たす。

[14] ある程度高速の衝突であれば円盤が接触している時間等は弾性論の予想と一致しており、この弾性論モデルが有効である速度領域が存在する。

# 5　塑性変形

ところで前節におけるモデル A における有限温度の計算でははねかえり係数がある衝突速度を境に急激に低下することが観測された。[21] これは図 4 に見られる様な一種の塑性変形が生じたためである。一般にボール等がへこんでしまったら弾性が失われる事は良く知られている。モデル A の特殊な事情を説明するなら最隣接格子間の相互作用のみを考慮しているために衝突に伴う強い圧縮で格子が裏返ってしまい、また圧縮が解けたときのそのエネルギー状態は元の格子の状態と変わらないために準安定な配置になっているのである。

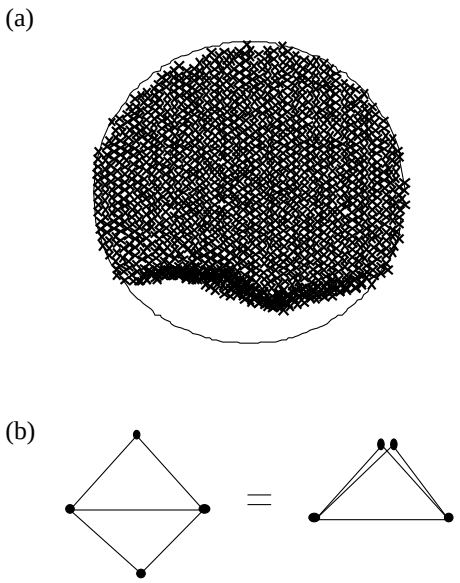


図 5: (a) $T = 0.03mc^2$ において衝突速度 $v_i = 0.22c$ で観測された塑性変形。円が初期の形状、点が衝突後の質点の位置。(b) エネルギー的に等価な 2 つの配置.

さて一般に塑性変形が生じるとどのようなはねかえり係数になるのであろうか。ここで文献 [13] にならって 3 次元の場合の塑性変形の影響を簡単に紹介してみよう。但し、実際の塑性変形は図 4 の様に大変形がいきなり生じる事は稀であり、局所的なクラックの発生に伴って生じる場合が殆んどである。以下の次元解析は現実的な状況に対応しており、上述の塑性変形には適用できないことを予め断っておく。

まず塑性変形の臨界圧力を衝突速度の関数で見積もってみよう。[15] (2) 式より接触中心における最大圧力は

$$p_0 = \frac{3F_{el}}{2\pi a^2} = \left(\frac{6F_{el}{Y_*}^2}{\pi^3 R^2}\right)$$

[15] 以下では数ファクターは無視する。

成り立つのでこの $p_0$ が臨界圧力 $(p_0)_Y$ に達したとした場合

$$F_Y = \frac{\pi^3 R^2}{6{Y_*}^2}(p_0)_Y^3$$

となる。[16]

ヘルツ則 (2) から $F_{el} \sim Y_* R^{1/2} h^{3/2}$ である。但し $Y_* = Y/(1-\sigma^2)$ は有効ヤング率である。一方最大変形は $Mv_i^2 \sim Y_* R^{1/2} h^{5/2}$ が成り立つときに起こるので

$$h_* \sim \left(\frac{Mv_i^2}{R^{1/2} Y^*}\right)$$

である。この $h_*$ を代入して $F_{el} = F_Y$ とおき $F_Y \sim \frac{\pi^3 R^2}{{Y_*}^2}(p_0)_Y^3$ とバランスさせると

$$(p_0)_Y \sim \left(\frac{Y_*}{R^{3/4}}\right)^{4/5} (Mv_i^2)^{1/5} \tag{35}$$

となる。これが塑性変形の生じる条件である。

さていよいよ塑性変形があったときのはねかえり係数への影響を見てみよう。(2) 式によればマクロな変形 $h$ は接触面の半径 $a_0 \sim (F_{el}R/(Y_*))^{1/3}$ との間に $h \sim a_0^2/R$ なる関係がある。但し弾性力は $F_{el}$, 変形がないときの球の半径は $R$ である。従って塑性変形を起こしたときの変形 $h_*$ はそのときの力 $F_*$, 接触面の半径 $a_*$ を用いて $h_* \sim F_*/(Y_* a_*)$ となる。従って塑性変形の際に蓄えられている内部エネルギーは $W' \sim F_* h_* \sim F_*/(a_* Y_*)$ と見積もられる。衝突で接している間の平均圧力を $p_d$ とすると $F_* = \pi a_*^2 p_d$ という関係式が成り立つ。塑性状態で蓄えられた内部エネルギーが運動エネルギーに変換されるので反発後の運動エネルギー $K_r$ は $K_r \sim W' \sim \pi^2 a_*^2 p_d^2$ であろう。

一方、質量 $M$ の球の圧縮に要する仕事は $W = (1/2)Mv_i^2 \sim \int_0^{h_*} dh F_{el} \sim \int_0^{a_*} daa/R$ である。ここで $F_{el} = \pi a^2 p_d$ が保たれるとすると

$$W = \int_0^{a_*} \pi p_d a^3 da/R \sim \frac{\pi p_d {a_*}^4}{R} \sim Mv_i^2 \tag{36}$$

である。従って

$$e^2 = \frac{v_r^2}{v_i^2} \sim \frac{p_d R}{Y_* a_*} \tag{37}$$

が成り立つ。

ここで (36) 式より $R/a \sim p_d R^3/(Mv_i^2)^{1/4}$ と書けることを利用すると (37) 式は

$$e^2 \sim \frac{p_d}{Y_*}\left(\frac{p_d R^3}{Mv_i^2}\right)^{1/4} \tag{38}$$

となるので、最終的に

$$e \propto v_i^{-1/4} \tag{39}$$

となる。この式は図に示す様に実験と極めて良く一致する式である。

[16] $(p_0)_Y$ はおよそ $1.6Y$ であることが知られており Mises の臨界条件と呼ばれる。

また 2 次元で同様の計算を行うと

$$e \propto v_i^{-1/3} \tag{40}$$

となることが知られている。[21] [17]

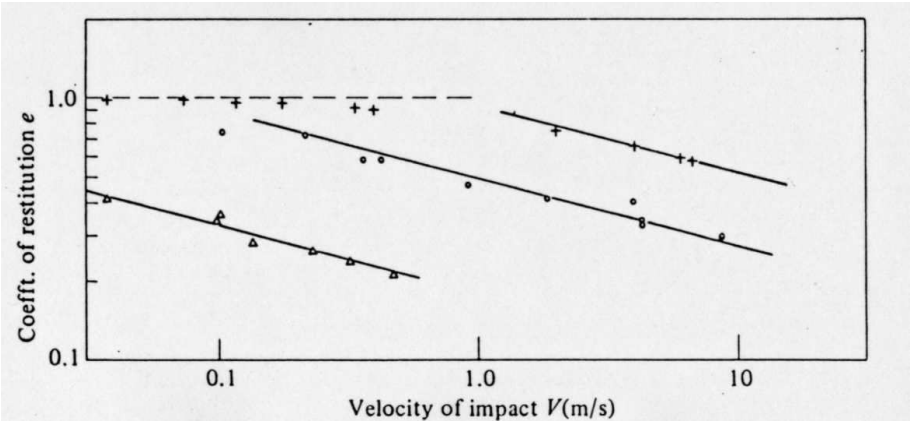


図 6: 3 次元系での塑性変形によるはねかえり係数の低下と (39) 式の比較.[13] 直線は (39) を示す.

# 6 まとめ

マクロな粒子の衝突の問題は今始まったばかりと言える。また準静的理論を見れば分かる通りに第 1 章に述べた非平衡統計・熱力学の自然な拡張で論じる事が可能な対象である。一方で格子振動のみに着目したモデルの解析では「熱」の不透明を避けたが故に「熱」緩和が生じず、弾性論や準静的な理論と整合しない結果を得ている。もし「熱」を導入しないのであれば、非線形弾性論に活路を見出す等、何らかの意味で混合性を持ったモデルを導入する必要がある。またポテンシャルで壁との相互作用を記述し、接触したときも境界条件を自由境界にしているのは弾性論と異なるので、その正当性の吟味が必要になるだろう。

その他、次元性は重要であるにも拘らず、3 次元のミクロシミュレーションは存在しない。同時に鉛直方向への衝突ではなく、斜め方向や回転の入った衝突、または摩擦の様にずり変形に対する応答等は殆んど手着かずの状態で残っている。この様に衝突や摩擦の問題は未成熟な状態にあり、それだけに今後大いに発展が期待できる。

[17] 文献 [21] の数値計算で生じた塑性変形に伴うはねかえり係数の低下はもっと急激である。これは実際に生じる塑性変形とモデル A で格子が裏返ってしまった変形が必ずしも対応していないことを意味する。また温度効果で塑性変形が生じるというのもマクロな系では実際には起こりそうもない。こうした事はセミマクロな系での観測が期待できる。

# 参考文献


[1] W. Goldsmith, Impact: *The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids* (Edward Arnold Publ., London, 1960).

[2] See, for example, R. Sondergaard, K. Chaney, and C. E. Brennen, Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics **57**, 694 (1990); K. D. Supulver, F. G. Bridges, and D. N. C. Lin, ICARUS **113**, 188 (1995).

[3] F. G. Bridges, A. Hatzes, and D.N.C. Lin, Nature **309**, 333 (1984).

[4] R. K. Adair, The Physics of Baseball 2nd Ed.(Happercollins Publ., 1994): R. アデア、中村和幸訳：ベースボールの物理学 (紀伊国屋書店, 1996).

[5] N. F. Mott and H. S. W. Massay, The Theory of Atomic Collisions (3rd Edition, Oxford Univ.Press, Oxford, 1965).

[6] 高柳和夫、電子・原子・分子の衝突 (培風館)

[7] 田崎晴明：私信. 佐々真一、私信.

[8] 伊東正貴、三嶋信彦、はねかえり係数の物理的意味：in 続間違いだらけの物理概念 pp.107-122(丸善, 1995).

[9] G. Giese and A. Zippelius, Phys. Rev. E **54**, 4828 (1996); T. Aspelmeier, G. Giese and A. Zippelius, Phys. Rev. E **57**, 857 (1998); A. G. Basile and R. S. Dumont, Phys. Rev. E **61**, 2015 (2000).

[10] F. Gerl and A. Zippelius, Phys. Rev. E **59**, 2361 (1999).

[11] L.D. ランダウ, I. M. リフシッツ、佐藤常三訳：弾性理論 (東京図書, 1972) : ロシア語の初版は 1953 年。日本語訳は訳者の丁寧な計算ノートがあり便利。コンパクトで分かりやすい。

[12] A. E. H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity : Fourth Edition (Dover, New York, 1944): 初版 1927 年刊行の古典的名著。

[13] K. L. Johnson, Contact Mechanics (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985): 弾性体の接触問題について幅広くバランスのいい記述がなされている。

[14] D. A. Hills, D. Nowell, and A. Sackfield, Mechanics of Elastic Contact (Butteworth-Heinemann, Oxford, 1993): 2 次元弾性体の接触問題を中心に数学的に完備した記述がなされている。

[15] H. Hertz, J. Reine Angew. Math. **92**, 156 (1881).

[16] G. Kuwabara and K. Kono, Jpn. J. Appl. Phys. **26**, 1230 (1987).

[17] N. Brilliantov, F. Sphan, J.-M. Hertzsch and T. Pöschel, Phys. Rev. E **53**, 5382 (1996).

[18] W. A. Morgado and I. Oppenheim, Phys. Rev. E **55**, 1940 (1997).

[19] 巽友正、連続体力学 (岩波書店、1995).

[20] 川原琢治、連続体力学 (産業図書、1996).

[21] H. Hayakawa and H. Kuninaka, in the Proceedings of Neptis IX,pp. 82-95 (2001) (cond-mat/0011294). H. Kuninaka and H. Hayakawa, to be published in J. Phys. Soc. Jpn. **70**, No.7. (cond-mat/0011375). H. Hayakawa and H. Kuninaka, in Powders and Grains 2001 edited by Y. Kishino (A.A. Balkema Publ. 2001). H. Hayakawa and H. Kuninaka, submitted to Chem. Eng. Sci. (cond-mat/0106145).

[22] W. G. Hoover, *Computational Statistical Mechanics* (Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1991).