極性流体力学の概要

早川尚男
京都大学大学院人間・環境学研究科
606-8501 京都市左京区吉田二本松町
Tel: 075-753-6782, Fax: 075-753-2999,
e-mail: hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

平成 13 年 7 月 4 日

1 はじめに

物理学は保存則を基礎として構成している. 連続体でも保存則が最も主要な役割を果たす。ソリトンの様に無限の保存則を持つ場合もない訳ではないが, 現実の殆んどの系では保存する量は少数であり, いずれも物理的に重要な量となっている. それらの少数の保存量の中でも際立って重要なのは質量, 運動量及びエネルギーの保存である[1] . このうち質量の保存は物質の不生不滅を表現しており, 運動量の保存は運動方程式に対応する. 注意が必要なのはエネルギーの保存である. 連続体は巨視的な変数のみを論じているのでそこで捉え切れない自由度が残る場合が殆んどである. 例えば弾性体の運動を考えても並進等の巨視的な自由度に分配されるエネルギーの他に格子振動等の内部の運動自由度に分配される. これらの内部の自由度にエネルギーが分配されたら殆んど再び巨視的な自由度に利用できる見込みはなく,「熱」としてエネルギーは散逸される. マクロな現象ではこのような散逸は大抵の場合に存在するのでエネルギーは保存しない散逸系を論じる必要が生じるのである.

本書では連続の式として最初に質量の保存を説明し, 次いで運動量の保存を論じる. 運動量の保存では面積力と体積力の概念が必要になるのでその違いを説明する.

2 質量の保存

保存則のうちで最も基本的なものは質量の保存である. 質量が突如生成したり消滅したりしない事はラボアジエの発見以来物理学のみならず科学全体の基本概念となっている. 勿論, 相対論ではエネルギーと質量の等価性を考慮しないとならないが, その等価性を組み込

[1] 本書では非相対論的な連続体を扱うのでエネルギーと質量は等価という扱いはしない上に運動量と質量 (エネルギー) で 4 元ベクトルを構成して一括して論じる事はない.

めば質量は保存している. もとより, 相対論はこの教科書の範囲外なので読者は直観的な質量概念をそのまま用いて保存則を論じれば良い.

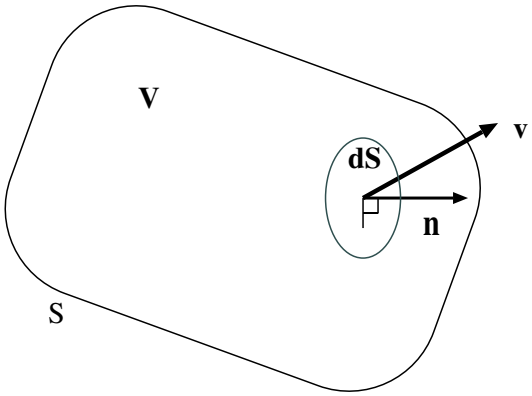

図 1: 表面 S に囲まれた領域と法線ベクトル $\mathbf{n}$ 及び流速 $\mathbf{v}$

オイラー的な記述による質量の保存では空間的に動かない仮想的な閉曲面を考えてその収支を考える事で表現される. 従って, 質量の保存則は連続体を自由に通す閉曲面内の質量の増加, 減少は面を通して流入, 流出した質量に等しい, と表現できる. この単純な事実を数学的に表現しよう. 考えている閉曲面を S, その面で囲まれた領域を $V(S)$ として, その中に含まれる質量 m は質量流束 J を用いて

$$\frac{dm}{dt} = -J \tag{1}$$

となる. 但し右辺では領域を出て行く流束を J としているので増加量は $-J$ となっている. この式は電磁気学の場合にも電荷の保存則としてお馴染みである. 即ち質量 m を電荷に置き換え, 質量流束 J を電流と見なせばよい. 電荷は勿論質量と等価ではないが全く同等の役割を果たしている. このような電磁気学の知識を思い出せば質量密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ と質量流束密度 $\mathbf{j}$ を用いて

$$\frac{d}{dt}\int_{V(S)} \rho(\mathbf{r}, t) dV = -\int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n} dS \tag{2}$$

と書ける事が分かる. ここで $\mathbf{n}$ は面法線ベクトルであり、外向きに正の方向を取る。またガウスの法則を用いて面積分を体積積分に直し、閉曲面及びそれに囲まれた領域が任意である事から

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0 \tag{3}$$

となる. これも電磁気学でお馴染みの式である. 初学者にありがちな疑問は $\rho(\mathbf{r}, t)$ の時間微分が偏微分となっている事であろう. これは (1) 式の被積分関数が滑らかな関数であり, 積分領域及び密度の空間座標が時間に依存しない事に依っている.

さてここで (2) 式で時間に対して全微分を使っていて (3) 式では偏微分になっているのは分かりにくい. 実際、多くの教科書では (2) 式で最初から偏微分を

用いている. その是非を説明するためにやや形式的な証明をしてみよう. そういう細かな議論に興味のない読者はこの部分を読み飛ばして差し支えない. 領域 V は時間と共に変化し得るので $V(t)$ と記す. その際

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(\mathbf{r},t)dV = \int_{V(t)} dV \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot \mathrm{grad} f + f\mathrm{div}\mathbf{v} \right\} \tag{4}$$

という関係式が一般に成り立つ. (4) が成立すれば (2) 式から (3) 式の変形は問題がない.

その証明のためにヤコビアン J

$$J \equiv J(\mathbf{X},t) = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_i}\right) \tag{5}$$

を導入して

$$\mathbf{r} : V(0) \to V(t), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{X},t)$$

という運動を考える. また積分する量を明確に記すために $dV = d^3\mathbf{r}$ 等と記す. $F(\mathbf{X},t) = f(\mathbf{r}(\mathbf{X},t),t) = f(\mathbf{r},t)$ とヤコビアンの定義より

$$\int_{V(t)} d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r},t) = \int_{V(0)} d^3\mathbf{X} F(\mathbf{X},t) J(\mathbf{X},t)$$

が成り立つので

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r},t) = \int_{V(0)} d^3\mathbf{X} \left\{ \frac{d}{dt}F(\mathbf{X},t)J(\mathbf{X},t) + F(\mathbf{X},t)\frac{d}{dt}J(\mathbf{X},t) \right\} \tag{6}$$

となる. (6) の右辺第 1 項は Lagrange 微分の定義

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{X},t) = \frac{D}{Dt}f(\mathbf{r},t) \tag{7}$$

によって

$$\begin{aligned} \int_{V(0)} d^3\mathbf{X}\frac{d}{dt}F(\mathbf{X},t)J(\mathbf{X},t) &= \int_{V(t)} d^3\mathbf{X} J(\mathbf{X},t)\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad} f \right\} \\ &= \int_{V(t)} d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad} f \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

と書ける.

また以下の様に

$$\frac{dJ}{dt} = \mathrm{div}\mathbf{v} J \tag{9}$$

が証明できるので (4) 式が成り立つ. 実際、左辺は

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(x_1,\cdots,\dot{x}_i,\cdots,x_n)}{\partial(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(x_1,\cdots,\dot{x}_i,\cdots,x_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}{\partial(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_n)} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\cdot J = \mathrm{div}\mathbf{v}\cdot J \end{aligned} \tag{10}$$

となる. ここで 2 行目から 3 行目は 3 次元のときの

$$\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{11}$$

等を思い起こせば容易に分かる.

次に質量流束密度 $\mathbf{j}$ を決定しなければならない. 電磁気学では電流は独立な変数として電磁場の連続の式の中で決定する必要はない点がそれ以外の連続体の場合と異なると云って良いかもしれない. 流速 $\mathbf{v}$ を持っている流れの面要素 dS に垂直な速度成分は $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ となる. よって単位時間に面要素 dS を通過する質量は $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$ となる. よって (1) 式の J は

$$J=\int_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS \tag{12}$$

となり,(2) との比較から

$$\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \tag{13}$$

となる. (13) 式を (3) 式に代入すると質量保存則は最終的に

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})=0 \tag{14}$$

となる. またラグランジェ微分を用いて (14) 式は

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\mathrm{div}\mathbf{v}=0 \tag{15}$$

と書き直す事も出来る. この表式もよく用いられる.

ここで任意のスカラー関数 f と質量密度 ρ の間で成り立つ有用な公式

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r},t)f(\mathbf{r},t)=\int_{V(t)} dV\rho(\mathbf{r},t)\frac{Df(\mathbf{r},t)}{Dt} \tag{16}$$

を証明しておく. この式の左辺に (4) 式を代入して整理すると

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r},t)f(\mathbf{r},t)=\int_{V(t)} dV\left[f\left\{\frac{D\rho}{Dt}+\rho\mathrm{div}\mathbf{v}\right\}+\rho\frac{Df}{Dt}\right] \tag{17}$$

となる. ここで (15) 式を用いると (17) 式の右辺第 1 項は 0 になるので (16) 式が成り立つ (証明終).

最後に質量の保存について幾つかの注意をしておこう. まず (13) 式は一成分系にのみ成り立っており, 多成分系の場合は必ずしも正しくない事である. 例えば多成分系であれば拡散流束がある場合がある. しかしこの問題は微妙な点も含んでおり後でまた触れる事にして, とりあえず (13) 式が常に成り立っているとして解析を進める. 最後に (14) 式の構造に注意して欲しい. 左辺第 1 項はスカラー変数であり, 左辺第 2 項はベクトルの発散を取っている. 従ってベクトルの保存則にはテンソルの発散が現われるであろうことは容易に想像がつくであろう.

3　運動量の保存

前節と同様に空間に固定した任意の閉曲面 S に対して運動量の保存を考えてみよう. 体積要素 dV に含まれる運動量は $\rho\mathbf{v}dV$ であるから, S で囲まれた領域 $V(S)$ に含まれる全運動量は

$$\mathbf{P} = \int_{V(S)} \rho\mathbf{v}dV \tag{18}$$

で与えられる. この時間変化はニュートンの運動方程式より

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{tot} \tag{19}$$

となる. ここで $\mathbf{F}_{tot}$ は領域 $V(S)$ に含まれる連続体が受ける力である. 既に述べた通りこの力は物質の体積に比例した体積力と接触面を通して働く力である面積力に分類される.

3.1　体積力

物理現象に現われる重力, 電磁気力等の長距離力は, その大きさが物質の体積または質量に比例しているために, これらを体積力と呼ぶ. 体積力が連続体に働く場合, 体積要素 dV に働く力は

$$\rho\mathbf{K}dV \tag{20}$$

ここで $\mathbf{K}$ は連続体の単位質量当りに働く力を表す. 従って体積 $V(S)$ に働く力を $\mathbf{F}_B$ とすると

$$\mathbf{F}_B = \int_{V(S)} \rho\mathbf{K}dV \tag{21}$$

である.

ここで重力が働いている場合は $\mathbf{K}$ は重力加速度 $\mathbf{g}$, 質点系では体積力は基本的に外力に相当するが、長距離力であれば内力も体積力と成り得る.

3.2　面積力

連続体には体積力の他に接触面を通して働く力がある. この種の力は何もない空間を運動する粒子系には現われず, 連続体力学の特色となっている.

面を通しての相互作用は直観的に分かる通りに、極端な長距離相互作用を除くと面積力となっている。面積力では微小面を考えて, 更に各成分が存在し得る. 例えば xy 平面に平行な微小面積要素 $dxdy$ に対して働く力は

$$\mathbf{F} = dxdy\{\sigma_{zx}\mathbf{e}_x + \sigma_{zy}\mathbf{e}_y + \sigma_{zz}\mathbf{e}_z\} \tag{22}$$

と書けるであろう. ここで $\mathbf{e}_i$ $(i = x, y, z)$ は i 方向の単位ベクトルである. ここで σ_{ij} はストレステンソルであり, まとめて σ と書く. ストレステンソル σ_{ij} の最初の添字 i は考えている面の法線ベクトルの成分を表し, 2 番目の添字 j は力の成分を表す. 一般の座標軸と斜

交する面の場合は各座標軸と平行な稜を持つ 4 面体を考えれば必ず (22) 式の様に座標軸と面が直交する様にすることができる.

(22) 式は $\mathbf{F} = dxdy\sigma \cdot \mathbf{e}_z$ とも書ける. ここでは $\mathbf{e}_z$ が面法線ベクトルであることを思い出すと微小面積要素 dS に対して面法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると, $\mathbf{F} = \sigma \cdot \mathbf{n}dS$ と書き表すことができる. 従って一般の閉曲面 S に対して

$$\mathbf{F}_S = \int_S dS\sigma \cdot \mathbf{n} = \int_{V(S)} dV \mathrm{div}\sigma \tag{23}$$

となる. ここでガウスの定理を用いた.

3.3 運動方程式

体積力と面積力を合わせた合力 $\mathbf{F}_{tot}$ は (21),(23) 式より

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_{V(S)} dV[\rho\mathbf{K} + \mathrm{div}\sigma] \tag{24}$$

となる. (18) 及び (19) 式に $f \to \mathbf{v}$ として (16) 式を代入すると直ちに

$$\int_V dV\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \int_V dV[\rho\mathbf{K} + \mathrm{div}\sigma] \tag{25}$$

となる. 積分領域は任意に取れるので運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\sigma + \mathbf{K} \tag{26}$$

と書く事が出来る. 上式を成分表示したら

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + K_i \tag{27}$$

となる.[2]

運動方程式 (25) 或は (26) 式は質量保存の式 (14) 式と連続体の基礎方程式を構成する. しかし未知数 $\rho, \mathbf{v}, \sigma$ を決定するには不十分な情報のみしか含まれておらず, そのためにストレステンソルを決定する構成方程式が必要となる. この辺りの事情とどのような構成方程式が可能であるかについては次章で詳しく述べる事にしよう.

4 角運動量の保存の式

一般の連続体で角運動量保存の式が現れないのは構成要素が無視できる場合や, 極性をもたらす外場等が存在しない場合にトルクバランスが自動的に充たされるからである. と

[2] 以降では特に断らない限り Einstein の規約に従い, 2 回現われた添字について和を取る, 即ち $v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \sum_k v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ を意味する.

ころが粉体等構成要素が連続体の観察スケールと必ずしも分離していない場合や磁性流体の様な極性を持った連続体ではトルクバランスを別に考える必要がある.

連続体のトルクバランスは

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \int_V dV\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{K}) + \int_S dS\mathbf{r}\times(\sigma\cdot\mathbf{n}) \tag{28}$$

で与えられる. 但し $\mathbf{r}$ は体積 V 内にある連続体の位置ベクトルである. 公式 (16) を思い出すと (28) は

$$\int_V \rho(\mathbf{r}\times\frac{D\mathbf{v}}{Dt})dV = \int_V dV\rho(\mathbf{r}\times\mathbf{K}) + \int_S dS\mathbf{r}\times\sigma\cdot\mathbf{n} \tag{29}$$

と変形できる. ここで $(D\mathbf{r}/Dt)\times\mathbf{v} = \mathbf{v}\times\mathbf{v} = 0$ を用いた. ここで (29) 式の右辺第 2 項の成分表示をすると

$$\begin{aligned}\int_S dS\epsilon_{ijk}r_j\sigma_{lk}n_l &= \int_V dV\epsilon_{ijk}\partial_l(r_j\sigma_{lk}) \\ &= \int_V \epsilon_{ijk}[\sigma_{jk} + r_j\partial_l\sigma_{lk}]\end{aligned} \tag{30}$$

となる. 但し ϵ_{ijk} は Levi-Civita 記号と呼ばれ

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\text{i,j,k が偶置換}) \\ -1 & (\text{i,j,k が奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外})) \end{cases} \tag{31}$$

である. また (30) の最初の等号には Stokes の定理を用いている. (30) 式をベクトル表示すれば

$$\int_S dS(\mathbf{r}\times\sigma\cdot\mathbf{n}) = \int_V dV[\boldsymbol{\sigma}^{(a)} + \mathbf{r}\times\nabla\cdot\sigma] \tag{32}$$

となる. ここで (32) 式の右辺第 1 項 $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}$ (成分表示では $\epsilon_{ijk}\sigma_{jk}$) は通常の連続体では現れないストレステンソルの反対称部分を表す. 従って (28) 式は

$$\int dV\mathbf{r}\times\left(\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho\mathbf{K} - \nabla\cdot\sigma\right) = \int_V dV\boldsymbol{\sigma}^{(a)} \tag{33}$$

となる. ここまでの議論に基づき (33) 式を考えると, 運動方程式 (26) から左辺は 0 であり, 結果としてストレステンソルの反対称部分 $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}$ は残らない. 従って通常の連続体ではストレステンソルは対称である.

一方, 粉体等の構成要素の無視できない連続体や分極等の極性のある連続体ではその構成要素の回転に伴い連続体の場の角運動量と切り離された角運動量及び付随した偶力ストレス (couple stress) が存在する. これらの角運動量密度を $\rho\mathbf{l}$, カップルストレスを C で表すと角運動量保存の式は

$$\frac{d}{dt}\int_V dV(\mathbf{l} + \mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \int_V dV\mathbf{r}\times\mathbf{K} + \int_S dS[C + \mathbf{r}\times\sigma]\cdot\mathbf{n} \tag{34}$$

と変更しなければならない. ここで Stokes の定理を使って体積積分に書き直し, 積分領域が任意に取れる事を使うと

$$\rho\frac{D}{Dt}(\mathbf{l} + \mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times(\rho\mathbf{K} + \nabla\cdot\sigma) + \nabla\cdot C + \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \tag{35}$$

となる. 従って (26) 式を用いても

$$\rho\frac{D}{Dt}\mathbf{l} = \nabla\cdot C + \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \tag{36}$$

という式が残り, ストレステンソルの反対称部分が構成要素の回転及びカップルストレスと結び付く.

一般に $\mathbf{l}$ がどのように表現できるかは自明ではない. しかし粉体の様な最も簡単な場合には回転自由度はほぼ剛体回転で近似できるので $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$ と書いて構わないだろう. 但し $\vec{\omega}$ はスピン角運動量 (microrotation) であり, I は慣性モーメントである. この場合 (36) 式はより分かりやすい

$$\rho I\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega} = \nabla\cdot C + \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \tag{37}$$

という式になる.

5 エネルギーの連続の式

5.1 概論

エネルギーの保存も質量や運動量と同様であるが, テンソルが現われない分, 直観に訴えやすい. もっともエネルギーそのものが熱力学変数であるので熱力学と切り離せず, 連続体で話が閉じなくなってしまう点に注意が必要であろう. 熱力学と関連して連続体力学で扱う系では全エネルギーが一般に保存しない. このあたりの事情はマクロな系では様々な内部自由度に分配されるので巨視的変数としてのエネルギーは保存されないのである. 保存されないエネルギーは一般に熱の形で散逸される.

もう一つの大きな仮定は局所平衡の仮定である. 一般に連続体は平衡から大きく離れているがそのずれ自体は連続体の運動に付随して生じる. この教科書で議論するように殆んどの場合は歪み速度 (や歪み) が小さくそれらで展開した線形理論を議論する. その場合は圧力は定数部分にあたり歪み速度に由来した非平衡の影響は受けない. また温度が一様でない場合もそのずれを小さいとして展開する場合が多く, そのような場合は熱平衡からのずれは高次補正を与えるのに過ぎない. 言うまでもなくこの論法は変形や歪み速度が大きいときには使えない. 高分子等では大変形があっても非常にゆっくりした運動しかないのでエネルギー方程式そのものが議論の対象から外れる場合が多い. しかし粉体の様にそうでない場合もあるので一般論は難しい.

いずれの場合でも運動量の連続の式等と比較して様々なレベルの話が入り混じって錯綜した議論になる場合がある. その点については十分注意してからエネルギーの連続の式を用いる必要がある.

5.2 通常の連続体のエネルギー保存則

力学的エネルギー密度は運動エネルギー密度 $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ と内部エネルギー ϵ に分割出来る. 従って総量は

$$\int_V \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\epsilon)dV \tag{38}$$

となる. この時間変化を議論する訳になる. ここで体積力と面積力のなす仕事率は

$$\int_V \rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}dV+\int_S(\sigma\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}dS \tag{39}$$

である. 勿論第 1 項,2 項がそれぞれ体積力, 面積力に対応している.

マクロな連続体では全ての自由度の動きを把握することは出来ない. 例えば格子振動一つ取っても全部の運動の自由度をフォローすることは難しい. また一般の運動では格子振動以外にも様々な自由度が絡み合っており, そのモデル化は不十分であるおそれがある. また非晶質や流体では格子振動は存在しないか, 固体におけるものとかなり違うが, 連続体の一般論は適用物質に限定せずに普遍的に成立する. その際、注目している少数の自由度以外は熱として散逸する. またその熱は一般に熱伝導と呼ばれ, 熱の流れが存在し、熱流と呼ぶ. 最も良く知られている熱流の現象論はフーリエ (Fourier) の法則であり, 熱流 $\mathbf{q}$ は温度 T の勾配

$$\mathbf{q}=-\kappa\mathrm{grad}T \tag{40}$$

で表される. ここで比例定数 κ を熱伝導率と呼び, 一般に正の値を取る.

熱流は流れなので面を通して現われる. 従って熱流 $\mathbf{q}$ によるエネルギーの増加は

$$-\int_S dS\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \tag{41}$$

である. (38) から (41) 迄を組み合わせると

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\epsilon)dV=\int_V \rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}dV+\int_S(\sigma\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}dS-\int_S dS\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \tag{42}$$

となる. 上式 (42) にガウスの定理と公式 (16) 式で f を $|\mathbf{v}|^2/2+\epsilon$ と置き換えたものを用いると

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}v_iv_i+\epsilon)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}v_i-q_i)+K_iv_i \tag{43}$$

となる.

一方 (27) 式から

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}v_iv_i)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}v_j+K_iv_i \tag{44}$$

が成立する.(43),(44) の辺々引くと

$$\frac{D\epsilon}{Dt}=\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{45}$$

となる. 尚, 連続体中に発熱がある場合は更に熱源の項を加えないといけないのは言うまでもない.

注意すべきはここまでの議論で熱流を (40) 式に取る必然もないし, またストレステンソルの決定は何も議論されていないことである. また弾性体とも流体とも連続体を限定していない点である.

5.3 回転自由度のある系のエネルギー保存則

回転の自由度を考慮すると力学的エネルギー密度は運動エネルギー密度と内部エネルギーの他に回転のエネルギー密度 $\rho I\boldsymbol{\omega}^2/2$ が加わる. 従って総量は

$$\int_V \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{I}{2}\boldsymbol{\omega}^2 + \epsilon)dV \tag{46}$$

となる. この時間変化を議論する訳になる. 体積力と面積力のなす仕事率にもカップルストレスの項が付け加わる:

$$\int_V \rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}dV + \int_S\{(\sigma\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v} + C\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}\}dS \tag{47}$$

である. このようにカップルストレスが回転エネルギーの増減に寄与している.

(41) 式を考慮して体積積分に直してから積分領域に依存しないことを用いると

$$\rho\frac{D}{Dt}(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + I\frac{\boldsymbol{\omega}^2}{2} + \epsilon) = \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{K} + \nabla\cdot(\sigma\cdot\mathbf{v} + C\cdot\boldsymbol{\omega} - \mathbf{q}) \tag{48}$$

となる. ここで (44) 式及び (37) 式から導かれる

$$\rho I\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^2) = \boldsymbol{\omega} : \nabla\cdot\sigma + \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(a)} \tag{49}$$

を用いると (48) 式は

$$\rho\frac{D\epsilon}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \sigma : \nabla\mathbf{v} + C : \nabla\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\sigma}^{(a)}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{50}$$

となる.

さて内部エネルギー密度は最も簡単かつ重要なものは温度揺らぎであり, それも並進と回転の寄与を分けて考える必要がある. 通常並進温度 T_t, 回転温度 T_r は

$$\begin{aligned}\frac{D}{2}T_t &\equiv \frac{1}{2}m < \mathbf{C}^2 >= \frac{1}{2}m < (\mathbf{c}-\mathbf{v})^2 >,\\ \frac{D}{2}T_r &\equiv \frac{1}{2}I < \boldsymbol{\Omega}^2 >= \frac{1}{2}I < (\boldsymbol{\omega}-\mathbf{w})^2 >\end{aligned} \tag{51}$$

で定義される. 但し D, m, $\mathbf{c}$, $\mathbf{w}$ はそれぞれ空間次元, 質量, 粒子速度, 粒子回転角速度であり, $\mathbf{v} =< \mathbf{c} >$, $\boldsymbol{\omega} =< \mathbf{w} >$ である. 内部エネルギーは $\epsilon = T_t + T_r + \delta\epsilon$ であり、並進、回転以外の自由度は個々に捉えることは難しい. しかしながら粉体等ではこの自由度が重要になる. それぞれの連続の方程式は

$$\rho\frac{DT_t}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{q}_t + \sigma : \nabla\mathbf{v} - \chi_t \tag{52}$$

及び

$$\rho\frac{DT_r}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{q}_r + C : \nabla\boldsymbol{\omega} - \chi_r \tag{53}$$

で与えられるが並進と回転の間のエネルギー遷移を含む χ_t, χ_t の関数形はよく分かっていない. 当然 2 つの自由度のみを取り出したので $T_t + T_r$ は保存しない. 粉体がガス的に分布している状況ではある程度どういう項が必要であり, T_r, T_t 間の遷移もどのように起こるべきか分かっている. しかしマクロに閉じた本ノートの範囲内ではその項を明示することは難しい.

6　等方的極性流体の構成方程式

kinetic theory で通常の手法に則って計算すると Newtonian fluid と同様にストレステンソルやカップルストレスが速度勾配等で展開できる. ここで極く簡単に Newtonian Micropolar fluid ではどの様な構成方程式となるべきかをまとめてみる.

ここでは古典流体の仮定

- ストレステンソルは歪み速度テンソル $D_{ij} = (\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2$ と熱力学関数の連続関数である.
- 流体は一様でストレステンソル σ は位置に依存しない.
- 流体は等方的で特別の方向がない.
- 歪み D がないときには等方的な静水圧を持つ.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

これらの仮定が粉体で成立する理由はない. それどころか最後の 2 つは非弾性粒子系では必ずしも成り立たないことが知られている. しかし非弾性性が弱く, 希薄な状況では近似的にこれらの仮定が充たされていると思われる.

まず、ストレステンソルから考える。ここではニュートン流体の導出と同様に歪み速度テンソルで展開可能であるとする. しかし先に述べたように、ニュートン流体とは異なり、反対称部分も許され、また回転の自由度が入るのでその具体的表式は異なる. ストレステンソルの ij 成分を $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$、流体の速度場の i 成分を v_i、角速度の i 成分を ω_i と書くと、微分の 1 次までで

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= (-p + \lambda\partial_k v_k)\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + 2\mu_r\Omega_{ij} - 2\mu_r\epsilon_{kij}\omega_k, && (54)\\
D_{ij} &\equiv \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i), && (55)\\
\Omega_{ij} &\equiv \frac{1}{2}(\partial_i v_j - \partial_j v_i) && (56)\\
& && (57)
\end{aligned}$$

と表される。一方遇力テンソル C_{ij} は

$$C_{ij} = c_0\partial_k\omega_k\delta ij + c_d(\partial_i\omega_j + \partial_j\omega_i) + c_a(\partial_i\omega_j - \partial_j\omega_i) \tag{58}$$

と表される。ここで、$\lambda, \mu, \mu_r, c_0, c_d, c_a$ が輸送係数である。

ここでストレステンソルの反対称部分を ${\sigma^{(a)}}_{ij}$ とすると

$${\sigma^{(a)}}_{ij} = -2\mu_r\epsilon_{ijk}(\omega_k - \tilde{\Omega}_k) = -2\mu_r(\hat{\omega}_{ij} - \Omega_{ij}) \tag{59}$$

となることに注意したい. 但し

$$\tilde{\Omega}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk}, \quad \hat{\omega}_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k \tag{60}$$

である. 熱力学的な安定性から $\mu_r > 0$ が言えるのでスピン角運動量は回転に緩和する傾向があると言って良い. 同様に $\boldsymbol{\omega}$ の時間発展方程式でも $\boldsymbol{\omega}$ が回転に緩和する項が現れる. そのことから (58) 式の c_0, c_d, c_a は μ_r で表現できる関係式を持つことがわかる.

6.1 Derivation of σ_{ij}

ここでは (54) 式のストレステンソルの導出をスケッチする. 時間がないので英語で済みません.

Let us consider the micropolar fluid with a linear consitutive equation for the stress tensor. This version discusses the possibility to determine the expansion of the microrotation.

Assume that the stress tensor σ_{ij} has the form

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + F(v_{i,j} - \xi\epsilon_{kji}\omega_k), \tag{61}$$

where p, δ_{ij}, ω_k and ϵ_{kji} are repsectively the pressure, Kronecker's delta, the microrotation and Eddington's epsilon. $v_{i,j} = \partial v_i/\partial x_j$. ξ is a parameter which is not always to be unity. $F(x)$ is a linear function of x, that is,

$$F(v_{i,j} - \xi\epsilon_{kji}\omega_k) = A_{lmij}(v_{l,m} - \xi\epsilon_{kml}\omega_k) \tag{62}$$

A_{lmij} being the forth order stress tensor. Moreover, let us assume that A_{lmij} is an isotropic one as

$$A_{lmij} = \mu_1\delta_{li}\delta_{mj} + \mu_2\delta_{lj}\delta_{mi} + \mu_3\delta_{lm}\delta_{ij}, \tag{63}$$

where μ_i are constants. The general proof of this form for the forth order isotropic tensor can be found in elementary textbooks for tensor analysis.

Thus, the stress tensor can be written as

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= (-p + \mu_3 v_{k,k})\delta_{ij} + \mu_1(v_{i,j} - \xi\epsilon_{kji}\omega_k) + \mu_2(v_{j,i} - \xi\epsilon_{kij}\omega_k) \\
&= (-p + \mu_3 v_{k,k})\delta_{ij} + \mu_1 v_{i,j} + \mu_2 v_{j,i} - \xi(\mu_1 - \mu_2)\epsilon_{kji}\omega_k \\
&= (-p + \lambda v_{k,k})\delta_{i,j} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \mu_r(v_{j,i} - v_{i,j}) - \xi(\mu_2 - \mu_1)\epsilon_{kij}\omega_k.
\end{aligned} \tag{64}$$

From the comparision of the final expression with the above one, it is obviosu that there are relations

$$\mu_1 = \mu + \mu_r, \quad \mu_2 = \mu - \mu_r, \quad \mu_2 - \mu_1 = 2\mu_r, \quad \lambda = \mu_3 \tag{65}$$

Thus, we obtain the expression

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda v_{k,k})\delta_{i,j} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \mu_r(v_{j,i} - v_{i,j}) - 2\xi\mu_r\epsilon_{kij}\omega_k. \tag{66}$$

It is obvious that there is no way to determine the parameter ξ in the above formal discussion.

To determine ξ we adopt the further assumption:

$$\sigma_{ij} = \sigma^S_{ij} + \sigma^A_{ij}; \quad ||\sigma^S|| \gg ||\sigma^A||, \tag{67}$$

where σ^S and σ^A are respectively the symmetric part and the asymmetric part of the stress tensor.

Introducing $D_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$, $\Omega_{ij} = (v_{j,i} - v_{i,j})/2$ and $\tilde{\Omega}_i = \epsilon_{ijk}\Omega_{jk}/2$ we obtain σ^A_{ij} as

$$\sigma^A_{ij} = 2\mu_r \epsilon_{ijk}(\tilde{\Omega}_k - \xi\omega_k). \tag{68}$$

On the other hand, in the symmetric tensor $\tilde{\Omega}_k = \omega_k$ holds. Thus, the stress tensor may be interpreted as

$$\sigma_{ij}(D_{ij}, \eta_k) = \sigma_{ij}(D_{ij}, 0) + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \eta_k}\right)_0 \eta_k + \cdots, \tag{69}$$

where $\eta_k = \tilde{\Omega}_k - \omega_k$. From (66)-(69) we can identify

$$\begin{aligned} \sigma^S_{ij} &= \sigma_{ij}(D_{ij}, 0) = (-p + \lambda v_{k,k})\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \\ \sigma^A_{ij} &\simeq \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \eta_k}\right)_0 \eta_k = 2\mu_r(\Omega_{ij} - \epsilon_{ijk}\omega_k), \end{aligned} \tag{70}$$

where $2\mu_r = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \eta_k}\right)_0$. Thus, ξ in eq.(66) should be 1, and the final expression is given by

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda v_{k,k})\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + 2\mu_r(\Omega_{ij} - \epsilon_{ijk}\omega_k). \tag{71}$$

Remarks: we cannot omit the possibility to be $\xi \neq 1$ if we cannot assume that the stress tensor is almost symmetric. Furthermore, this note assumes that the stress tensor is 2nd order at the first step, and asymmetricity is small in the second step. The second step may introduce small corrections in the symmetric part. Nevertheless, the result is physically reasonable.

7 まとめ

本ノートでは粉体を意識しないで考えられる部分の極性流体の方程式系をまとめて, 更にその導出や考え方をまとめた. 粉体とカップルした部分はまた後で別にまとめる. ちょっとくどいのは執筆中の「連続体力学」の原稿を借用したためで通常の部分は学部生向きに書かれてある. また極性流体の部分も基本的に難しいことは書いていないので容易に理解できると信じている.