Open String Field Theory around Universal Solutions

岸本　功

(東大理)

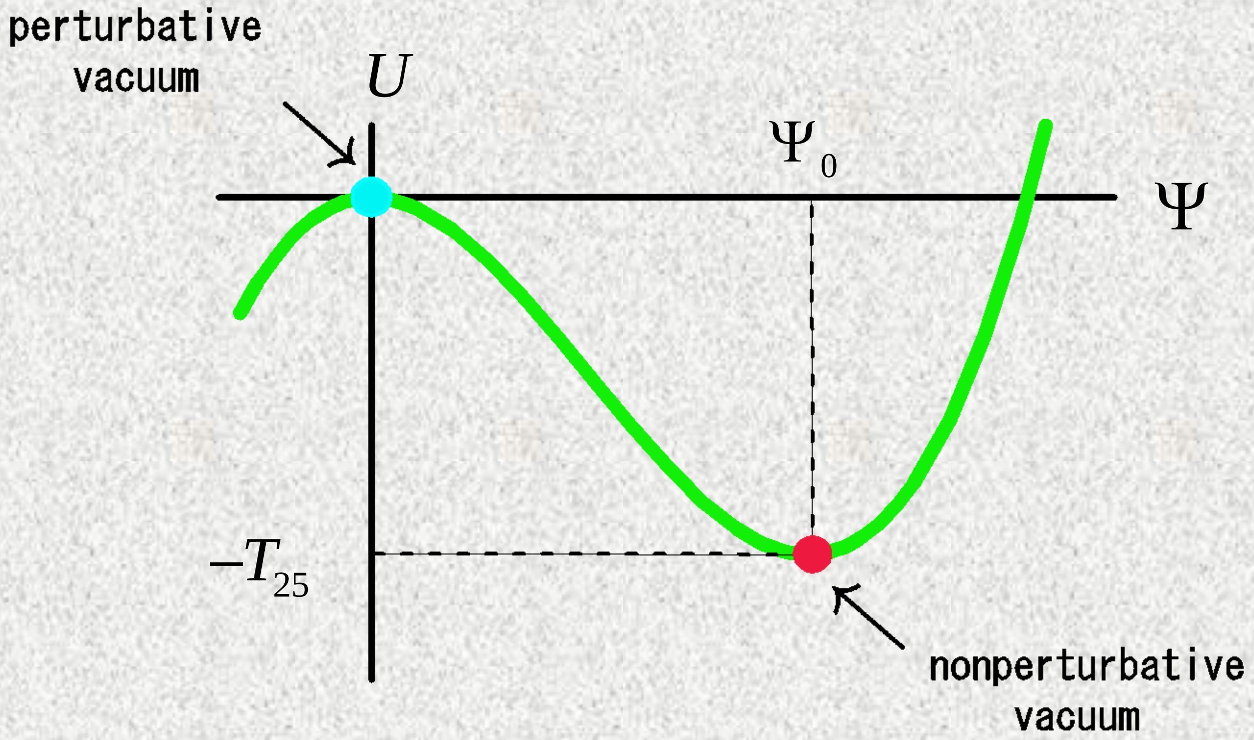
共同研究者:　高橋智彦(奈良女大理)

I.K.,T.Takahashi, hep-th/0205275, accepted in PTP

Introduction

Senの予想:

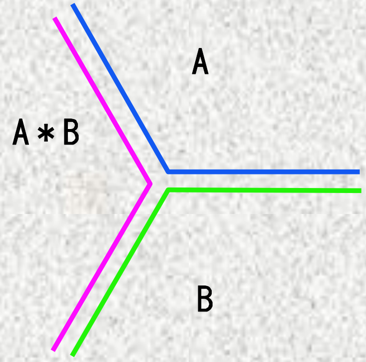
open string (D25-brane)



Cubic String Field Theory (CSFT) [Witten(1986)]
を使えば原理的には厳密に扱える。

作用:

$$S = -\frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{2}\langle\Psi, Q_B\Psi\rangle + \frac{1}{3}\langle\Psi, \Psi * \Psi\rangle\right]$$



運動方程式:

$$Q_B|\Psi\rangle + |\Psi * \Psi\rangle = 0$$

ゲージ不変性:

$$\delta_\Lambda S = 0 \qquad \delta_\Lambda|\Psi\rangle = Q_B|\Lambda\rangle + |\Psi * \Lambda\rangle - |\Lambda * \Psi\rangle$$

Senの予想をCSFTの言葉で言いかえると:

- 運動方程式の解 Ψ_0 があって:

$$Q_B\Psi_0 + \Psi_0 * \Psi_0 = 0.$$

- potentialの値がD25-braneのtensionに等しい:

$$-S|_{\Psi_0} / V_{26} = T_{25}.$$

- そのまわりでの新しいBRST電荷 Q'_B の cohomologyが自明:

$$Q'_B\psi = 0 \Rightarrow \psi = Q'_B\phi, \quad \exists\phi.$$

$$\|$$

$$Q_B\psi + \Psi_0 * \psi - (-1)^{|\psi|}\psi * \Psi_0$$

これを厳密に示そう!

Contents

Universal Solutions in CSFT

✡ 高橋-谷本の解 *JHEP 0203 (2002) 033*

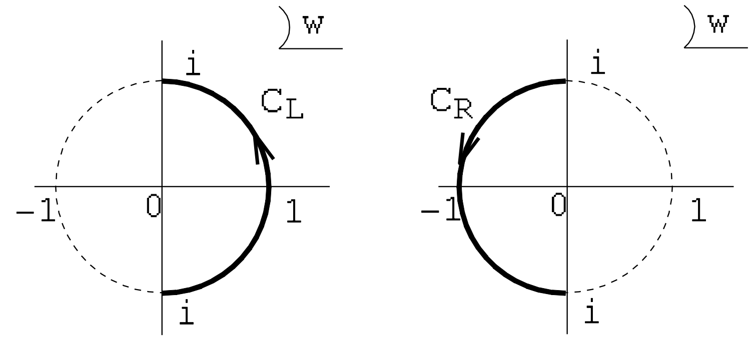
$$|\Psi_0\rangle = Q_L\left(e^h - 1\right)|I\rangle - C_L\left((\partial h)^2 e^h\right)|I\rangle,$$

$$h(w) = \sum h_n\left(w^n + (-w^{-1})^n\right), \quad h(\pm i) = 0, \partial h\left(\pm i\right) = 0.$$

matter Virasoroとghostで書けている。
oscillator表示が存在する(程度に滑らか)。

実は*素朴には*pure gauge*解*: $\Psi_0 = e^{q_L(h)I} * Q_B e^{-q_L(h)I}$

Notation:



$$C(f)=\oint\frac{dw}{2\pi i}f(w)c(w),\qquad C_L(f)=\int_{C_L}\frac{dw}{2\pi i}f(w)c(w),$$

$$Q(f)=\oint\frac{dw}{2\pi i}f(w)\,j_{\mathrm{BRST}}(w),\qquad Q_L(f)=\int_{C_L}\frac{dw}{2\pi i}f(w)\,j_{\mathrm{BRST}}(w),$$

$$q(f)=\oint\frac{dw}{2\pi i}f(w)\,j_{\mathrm{gh}}(w),\qquad q_L(f)=\int_{C_L}\frac{dw}{2\pi i}f(w)\,j_{\mathrm{gh}}(w),\ldots$$

$$j_{\mathrm{BRST}}(w)=cT^X+:bc\partial c:+\frac{3}{2}\partial^2 c=\sum_n Q_n w^{-n-1},\qquad j_{\mathrm{gh}}(w)=-:bc:=\sum_n q_n w^{-n-1},\ldots$$

$$|I\rangle=\frac{1}{4i}b\left(\tfrac{\pi}{2}\right)b\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\exp\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-(-1)^n}{2n}\alpha_{-n}\cdot\alpha_{-n}+(-1)^n c_{-n}b_{-n}\right)\right)c_0c_1|0\rangle\sim\prod_{n=2}^{\infty}\exp\left(-\frac{2}{2^n}L_{-2^n}\right)e^{L_{-2}}|0\rangle.$$

この解のまわりでのBRST電荷:

$$Q'_B = Q(e^h) - C((\partial h)^2 e^h)$$

これは*形式的には*　$Q'_B = e^{q(h)} Q_B e^{-q(h)}$

もとの　Q_B　と同じコホモロジー

～　このまわりでの物理は摂動的な真空と同じ。
～　pure gauge (?)

しかし $e^{\pm q(h)}$ が特異になる $h(w)$ の場合

pure gauge ではない非自明な解

である可能性がある（？）

具体例: $h_a(w)=\log\left(1+\frac{a}{2}\left(w+w^{-1}\right)^2\right)$ のとき

$$q(h_a)=-q_0\log(1-Z(a))^2+q^{(+)}(h_a)+q^{(-)}(h_a),\quad Z(a)=\frac{1+a-\sqrt{1+2a}}{a},$$

$$\left[q^{(+)}(h_a),q^{(-)}(h_a)\right]=-2\log(1-Z(a)^2),$$ より

$$\exp\left(\pm q(h_a)\right)=\left(1-Z(a)^2\right)^{-1}\exp\left(\mp q_0\log(1-Z(a))^2\right)e^{\pm q^{(-)}(h_a)}e^{\pm q^{(+)}(h_a)}$$

$Z(a=-1/2)=-1,$ なので $a=-1/2$ の場合つまり

$h_{a=-1/2}(w)=\log\left(-\frac{1}{4}(w-w^{-1})^2\right)$ は非自明な解を与える！？

少し一般化できて: $h_a^l(w) = \log\left(1 - \frac{a}{2}(-1)^l\left(w^l - (-1)^l w^{-l}\right)^2\right)$ のとき

$a = -1/2$ のとき同様に $\exp(\pm q(h_a^l))$ をnormal orderに直せない。

$$Q'_B = Q(e^{h_{a=-1/2}^l}) - C((\partial h_{a=-1/2}^l)^2 e^{h_{a=-1/2}^l})$$

$$\neq e^{q(h_{a=-1/2}^l)} Q_B e^{-q(h_{a=-1/2}^l)}$$

$$\left|\Psi_0^{(l)}\right\rangle = Q_L\left(e^{h_{a=-1/2}^l} - 1\right)\left|I\right\rangle - C_L\left((\partial h_{a=-1/2}^l)^2 e^{h_{a=-1/2}^l}\right)\left|I\right\rangle$$

$l = 1, 2, \cdots$

は非自明な解!?

✡ 解のoscillator表現は存在する:

$$\left|\Psi_0^{(l)}\right\rangle = Q_L\left(-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^l}{4}(w^{2l}+w^{-2l})\right)\left|I\right\rangle + C_L\left(l^2w^{-2}\left(2-(-1)^l(w^{2l}+w^{-2l})\right)\right)\left|I\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{-(-1)^m 4l^2}{(2m+1)(2m+1-2l)(2m+1+2l)}\left(-Q_{-(2m+1)}+4l^2c_{-(2m+1)}\right)\left|I\right\rangle$$

$$+\frac{2l^2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{2k-1}\right)(c_1-c_{-1})\left|I\right\rangle.$$

Cohomology of the New BRST Charge

$\Psi_0^{(l)}$ のまわりの新しいBRST電荷 :

$$Q_B^{(l)} = Q(e^{h^l_{a=-1/2}}) - C((\partial h^l_{a=-1/2})^2 e^{h^l_{a=-1/2}})$$
$$= \frac{1}{2}Q_B + \frac{(-1)^l}{4}\left(Q_{2l} + Q_{-2l}\right) + 2l^2\left(c_0 - \frac{(-1)^l}{2}\left(c_{2l} + c_{-2l}\right)\right)$$

このcohomologyはもとの Q_B と違って消えているか？

$l=1$ の場合

$$Q_B^{(1)} = \frac{1}{2}Q_0 - \frac{1}{4}Q_{-2} - \frac{1}{4}Q_2 + 2c_0 + c_{-2} + c_2 = R_2 + R_0 + R_{-2}.$$

$$R_{\pm 2} := -\frac{1}{4}Q_{\pm 2} + c_{\pm 2}, \qquad R_0 := \frac{1}{2}Q_0 + 2c_0$$

と書くと次の関係式をみたす:

$$R_{\pm 2}^2 = 0, \quad R_{\pm 2}R_0 + R_0 R_{\pm 2} = 0, \quad R_0^2 + R_2 R_{-2} + R_{-2}R_2 = 0.$$

Claim

$Q_B^{(1)}$ のcohomologyはghost数1の状態の中では自明

Proof

$$Q_B^{(1)}\psi = 0 \qquad \psi = \sum_{N \ge h} \psi_{-N} \qquad \text{:ghost数1}$$

を考える。

書き換えると:

① $$R_2 \psi_{-h-k} = 0, \qquad k = 0,1,$$

② $$R_2 \psi_{-h-k-2} = -R_0 \psi_{-h-k},$$

③ $$R_2 \psi_{-h-k-2l} = -R_0 \psi_{-h-k-2(l-1)} - R_{-2} \psi_{-h-k-2(l-2)}, \qquad l \ge 2.$$

Fact

$\widetilde{Q_0} := -4R_2 = Q_2 - 4c_2$ は $Q_0 = Q_B$ の中の c_n, b_n を

$\widetilde{c_n} := c_{n+2}, \widetilde{b_n} := b_{n-2}$ で置き換えたものと等しい。

$$Q_n = \sum_{j=1}^{\infty}\left(c_{-j}\left(L^X_{n+j} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+2n+2j)b_{-k}c_{n+j+k} + (k-2n-2j)c_{n+j-k}b_k\right) + (n+j)b_0 c_{n+j}\right)\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\left(\left(L^X_{n-j} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+2n-2j)b_{-k}c_{n-j+k} + (k-2n+2j)c_{n-j-k}b_k\right) + (n-j)b_0 c_{n-j}\right)c_j\right)$$
$$+\left(L^X_n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((k+2n)b_{-k}c_{n+k} + (k-2n)c_{n-k}b_k\right) + nb_0 c_n\right)c_0 - \left(1 - \frac{n}{2} - \frac{3n^2}{2}\right)c_n$$

普通の Q_B の場合に知られていること:

$Q_B \psi = 0$ の解は [Kato-Ogawa,M.Henneaux,…]

$$|\psi\rangle = A_{\mathrm{DDF}} |0, p_0\rangle + B_{\mathrm{DDF}} c_0 |0, p_0\rangle + Q_B |\phi\rangle$$

ここで $|0, p_0\rangle = e^{ip_0 x} |\Omega\rangle,$ $p_0{}^{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}},$ $p_0{}^{i} = 0,$

$$|\Omega\rangle := c_1 |0\rangle, \quad c_n |\Omega\rangle = 0, n \geq 1, \quad b_n |\Omega\rangle = 0, n \geq 0,$$

$A_{\mathrm{DDF}}, B_{\mathrm{DDF}}$ は DDF operator A_n^i で生成されるもの:

$$\left[A_m^i, A_n^j\right] = m\delta_{m+n,0}\delta^{i,j}, \quad \left[L_{m,}^X A_n^i\right] = 0.$$

$\widetilde{c}_n := c_{n+2}, \widetilde{b}_n := b_{n-2}$ で置き換えると

$\widetilde{Q}_0 \psi = 0$ の解は

$$\left|\psi\right\rangle = A_{\mathrm{DDF}}\left|\tilde{0}, p_0\right\rangle + B_{\mathrm{DDF}}\widetilde{c}_0\left|\tilde{0}, p_0\right\rangle + \widetilde{Q}_0\left|\phi\right\rangle$$

$$\left|\tilde{0}, p_0\right\rangle := b_{-2}b_{-1}\left|0, p_0\right\rangle, \quad \widetilde{c}_n\left|\tilde{0}, p_0\right\rangle = 0, n \geq 1, \quad \widetilde{b}_n\left|\tilde{0}, p_0\right\rangle = 0, n \geq 0.$$

①

今 $|\psi_{-h-k}\rangle$ は ghost数 1 より,

$$R_2|\psi_{-h-k}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad |\psi_{-h-k}\rangle = R_2|\phi_{-h-k-2}\rangle, \qquad \exists|\phi_{-h-k-2}\rangle.$$

R_2 **のcohomologyはghost数 1 の状態の間では自明**

②

同様に
$$R_2|\psi_{-h-k-2}\rangle = -R_0|\psi_{-h-k}\rangle = -R_0R_2|\phi_{-h-k-2}\rangle = R_2R_0|\phi_{-h-k-2}\rangle,$$

$$\Rightarrow \quad |\psi_{-h-k-2}\rangle = R_0|\phi_{-h-k-2}\rangle + R_2|\phi_{-h-k-4}\rangle, \quad \exists|\phi_{-h-k-4}\rangle.$$

③

★ $$\left|\psi_{-h-k-2l}\right\rangle = R_{-2}\left|\phi_{-h-k-2(l-1)}\right\rangle + R_0\left|\phi_{-h-k-2l}\right\rangle + R_2\left|\phi_{-h-k-2(l+1)}\right\rangle, \quad l = m, m-1$$

を仮定。

このとき同様に

$$\begin{aligned}
R_2\left|\psi_{-h-k-2(m+1)}\right\rangle &= -R_0\left|\psi_{-h-k-2m}\right\rangle - R_{-2}\left|\psi_{-h-k-2(m-1)}\right\rangle \\
&= -R_0\left(R_{-2}\left|\phi_{-h-k-2(m-1)}\right\rangle + R_0\left|\phi_{-h-k-2m}\right\rangle + R_2\left|\phi_{-h-k-2(m+1)}\right\rangle\right) \\
&\quad - R_{-2}\left(R_{-2}\left|\phi_{-h-k-2(m-2)}\right\rangle + R_0\left|\phi_{-h-k-2(m-1)}\right\rangle + R_2\left|\phi_{-h-k-2m}\right\rangle\right) \\
&= R_2\left(R_{-2}\left|\phi_{-h-k-2m}\right\rangle + R_0\left|\phi_{-h-k-2(m+1)}\right\rangle\right),
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\left|\psi_{-h-k-2(m+1)}\right\rangle = R_{-2}\left|\phi_{-h-k-2m}\right\rangle + R_0\left|\phi_{-h-k-2(m+1)}\right\rangle + R_2\left|\phi_{-h-k-2(m+2)}\right\rangle, \quad \exists\left|\phi_{-h-k-2(m+2)}\right\rangle$$

つまり ★ が $l = m+1$ でも成立。

結局　①　②　③　より

$$\left|\psi_{-h-k-2l}\right\rangle = R_{-2}\left|\phi_{-h-k-2(l-1)}\right\rangle + R_0\left|\phi_{-h-k-2l}\right\rangle + R_2\left|\phi_{-h-k-2(l+1)}\right\rangle, \quad l \geq 0,$$

つまり

$$Q_B^{(1)}\psi = 0 \qquad \psi = \sum_{N\geq h}\psi_{-N}$$:ghost数1

$$\Rightarrow$$

$$\left|\psi\right\rangle = Q_B^{(1)}\left|\phi\right\rangle, \qquad \exists\left|\phi\right\rangle = \sum_{k=0,1,l\geq 1}\left|\phi_{-h-k-2l}\right\rangle.$$

$\Psi_0^{(l)} \quad l \geq 2$ のまわりのBRST電荷 $Q_B^{(l)}$ についても同様:

$Q_B^{(l)} \qquad l = 1, 2, 3, \cdots$

のcohomologyはghost数1の状態の中では自明

※ $$Q_B^{(l)} \left| \psi^{(l)} \right\rangle = 0$$

の<u>非自明な解</u>はghost数 $-2l, -(2l-1)$ の部分:

$$\left| \psi^{(l)} \right\rangle = \exp\left(-2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n(1+l)}}{n} q_{-2ln} \right)$$

$$\cdot \left(A_{\mathrm{DDF}} b_{-2l} b_{-2l+1} \cdots b_{-2} b_{-1} \left| 0, p_0 \right\rangle + B_{\mathrm{DDF}} b_{-2l+1} \cdots b_{-2} b_{-1} \left| 0, p_0 \right\rangle \right)$$

Summary

- 高橋-谷本の解のうち $\Psi_0^{(l)}$ を調べた。
- このまわりのBRST電荷 $Q_B^{(l)}$ のcohomologyはghost数1の状態の中では自明。

$\Downarrow$

弦の場の理論の__古典論__で

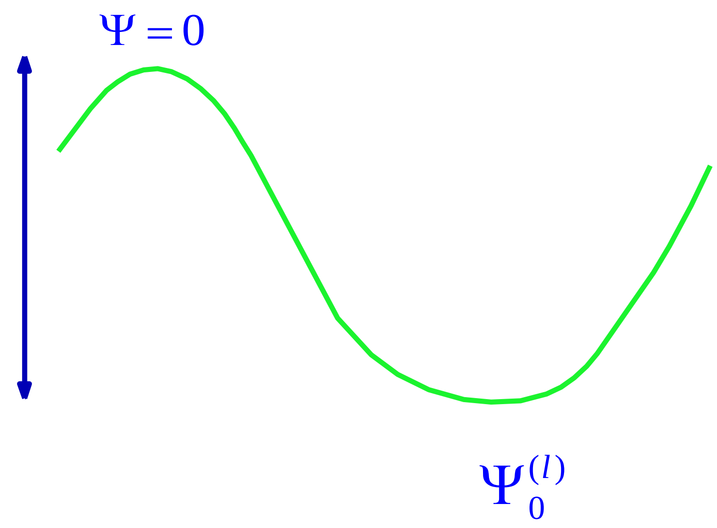
✡ $\Psi_0^{(l)}$ は非自明な解。

✡ $\Psi_0^{(l)}$ まわりでのonshellな状態 $Q_B^{(l)}|\psi\rangle = 0$
は全てゲージ自由度: $|\psi\rangle = Q_B^{(l)}|\phi\rangle$

Discussion

- Potential heightの評価

$\Psi_0^{(l)}$ がタキオン凝縮の解なら
D25-brane tensionを再現するはず。



素朴に解をactionに代入すると…

$$\langle I \left| (\cdots) \right| I \rangle \sim \left(\det_{n,m\geq 1} \left(\delta_{n,m} - \delta_{n,m} \right) \right)^{-26/2+1} = \infty.$$

計算にはなんらかの正則化が必要。　～　*未解決*

■ 他の解との関係

Horowits et.al.の解はCSFTからVSFTを導き

I.K.-Ohmori, *JHEP 0205 (2002) 036*

cohomologyが全てのghost数の状態の中で自明だが、より特異。

$$\left|\Psi_0\right\rangle = Q_L\left(e^h - 1\right)\left|I\right\rangle - C_L\left((\partial h)^2 e^h\right)\left|I\right\rangle$$

[高橋-谷本]

$$h(w) \to -\infty \qquad \left|\Psi_0\right\rangle = -Q_L\left|I\right\rangle + C_L(f)\left|I\right\rangle.$$

$$f_{\mathrm{GRSZ}}(\sigma) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\delta\big(\sigma-(\pi/2-\varepsilon)\big)+\delta\big((\pi/2+\varepsilon)-\sigma\big)\Big).$$

$$\left|\Psi_0^{\mathrm{VSFT}}\right\rangle = -Q_L\left|I\right\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(g^2\kappa)^{1/3}}{4i}\left(e^{-i\varepsilon}c(ie^{i\varepsilon}) - e^{i\varepsilon}c(-ie^{-i\varepsilon})\right)\left|I\right\rangle$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2m+1}Q_{-(2m+1)}\left|I\right\rangle + \frac{(g^2\kappa)^{1/3}}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left(1+2\sum_{k\geq 1}\cos 2k\varepsilon\right)c_0 - \left(\sum_{k\geq 0}\sin(2k+1)\varepsilon\right)(c_1 - c_{-1})\right)\left|I\right\rangle$$

$$Q_{\mathrm{GRSZ}} = \frac{1}{2i}\big(c(i)-c(-i)\big) = c_0 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n(c_{2n}+c_{-2n}).$$

CSFTで知られている解：

CSFT　　　　　　　　　　　　　　　　VSFT

Q_B　　　$Q_B^{(l)}$　　　Q_{GRSZ}

→

pure gauge　　　$\Psi_0^{(l)}$　　　singular　Ψ_0^{VSFT}

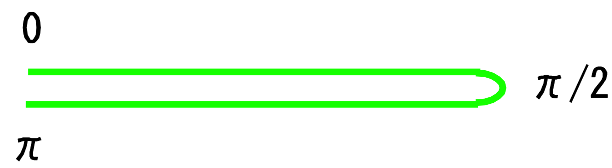
タキオン凝縮を表す厳密解はどれか？

レベルトランケーション
による数値解(Siegelゲージ)

ゲージ変換、場の再定義で
つながってるはず

微妙な点

「厳密」なのか？



知られているCSFTの厳密解は全て identity string field $|I\rangle$ を使っている。

振動子表示のみでは $A*I=I*A=A, \forall A$ を示せない（？）

I.K.,*JHEP12(2001)007*

CFTを使った定義では示せるが：

$c_0 I$ の謎 [Rastelli-Zwiebach(2000),…]

$$c_0 A = c_0\left(I*A\right) = \left(c_0 I\right)*A + I*\left(c_0 A\right) = \left(c_0 I\right)*A + c_0 A,$$

$$\therefore \left(c_0 I\right)*A = 0, \forall A.$$

特に $A=I$ とすると $0 \neq c_0 I = \left(c_0 I\right)*I = 0$ (??)

$|I\rangle$ をconsistentに扱う定義・正則化が必要！

今後の課題:

- 弦の場の理論の第2量子化すると…

$$\left|\Psi\right\rangle = \underbrace{\phi(x)c_1\left|0\right\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^{\mu}c_1\left|0\right\rangle + \cdots}_{\text{古典論}} \underbrace{B(x)c_{-1}c_1\left|0\right\rangle + C(x)\left|0\right\rangle + \cdots}_{\text{ghost数一般}}$$

$\Psi_0^{(l)}$ のまわりで本当にopen stringが消えているのか？

- identity string field を使わない厳密解は？

- Closed string はどう記述されるのか？

- Superstring Field Theory への応用は？