

「はじめに」の末尾（iv頁）に示した URL が

<http://www.ias. . . .> → <http://web.ias. . . .>

と変更になっています：

本書に関する情報（補足や訂正など）につきましては
<http://web.ias.tokushima-u.ac.jp/physics/theor/members/hioki-jp.html>
をご覧ください。

($d^3\tilde{\mathbf{k}} \equiv d^3\mathbf{k}/[(2\pi)^3 2k^0]$) の形で求めよう．これを (I.26) に代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2}q(\mathbf{k}, t) + \mathbf{k}^2 q(\mathbf{k}, t) = 0$$

という式が各 \mathbf{k} ごとに得られるが，これはよく知られた調和振動子の方程式と同じ形であり，その一般解は， $q_{1,2}(\mathbf{k})$ を任意定数として

$$q(\mathbf{k}, t) = q_1(\mathbf{k})e^{-ik^0 t} + q_2(\mathbf{k})e^{ik^0 t}$$

(但し， $k^0 = |\mathbf{k}|$) で与えられる．これより

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [q_1(\mathbf{k})e^{-ik^0 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + q_2(\mathbf{k})e^{ik^0 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

となるが， $\phi(x)$ は実スカラーだから $\phi(x) = \phi^*(x)$ ，すなわち

$$\begin{aligned} \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [q_1(\mathbf{k})e^{-i(k^0 t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + q_2(\mathbf{k})e^{i(k^0 t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \\ = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [q_1^*(\mathbf{k})e^{i(k^0 t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + q_2^*(\mathbf{k})e^{-i(k^0 t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \end{aligned}$$

でなければならない．ここで，指数関数の形を揃えるために右辺の積分変数を $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ と変えて左辺と比較すれば $q_{1,2}^*(-\mathbf{k}) = q_{2,1}(\mathbf{k})$ という関係が出るので

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [q_1(\mathbf{k})e^{-ik^0 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + q_1^*(-\mathbf{k})e^{ik^0 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

最後に，右辺第2項で再び積分変数の符号を逆転させ， $q_1(\mathbf{k})$ を改めて $a(\mathbf{k})$ と書き直せば，相対論的記法 $kx = k_\mu x^\mu = k^0 t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ も用いて

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^*(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (\text{I.29})$$

を得る．ここで，4元運動量 k^μ の成分が

$$k^0 = |\mathbf{k}| \quad (\text{従って } k^2 = k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = 0) \quad (\text{I.30})$$

を満たすことも解の条件であることを憶えておこう．これより，一般化運動量も

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} [-ik^0 a(\mathbf{k})e^{-ikx} + ik^0 a^*(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad (\text{I.31})$$

という演算子を導入する．これは明らかにエルミート (Hermitian) だからその固有値 (Eigen value) は常に実数だが, N の場合, それは更に正または 0 であると言える．事実, 固有値を ξ , 固有状態 (Eigen state) を $|\psi_\xi\rangle (\neq 0)$ とすれば

$$\begin{aligned}\langle \psi_\xi | N | \psi_\xi \rangle &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} \langle \psi_\xi | a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) | \psi_\xi \rangle = \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} \langle a(\mathbf{k}) \psi_\xi | a(\mathbf{k}) \psi_\xi \rangle \geq 0 \\ \langle \psi_\xi | N | \psi_\xi \rangle &= \xi \langle \psi_\xi | \psi_\xi \rangle, \quad \langle \psi_\xi | \psi_\xi \rangle > 0\end{aligned}$$

(ここで $|a(\mathbf{k}) \psi_\xi\rangle \equiv a(\mathbf{k}) |\psi_\xi\rangle$) より $\xi \geq 0$ である．

問題 I.3 N はエルミート演算子 (Hermitian operator) であることを示せ．

それでは $|\psi_\xi\rangle$ に $a(\mathbf{p})$ を 1 個作用させたらどうなるだろう? $a(\mathbf{p}) |\psi_\xi\rangle \neq 0$ なら

$$\begin{aligned}Na(\mathbf{p})|\psi_\xi\rangle &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) a(\mathbf{p}) |\psi_\xi\rangle \\ &= \int d^3 \tilde{\mathbf{k}} [a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{k}) - (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})] a(\mathbf{k}) |\psi_\xi\rangle \\ &= a(\mathbf{p}) N |\psi_\xi\rangle - a(\mathbf{p}) |\psi_\xi\rangle = (\xi - 1) a(\mathbf{p}) |\psi_\xi\rangle\end{aligned}\quad (\text{I.39})$$

つまり, $a(\mathbf{p}) |\psi_\xi\rangle$ は $\xi - 1$ という固有値を持つ状態ということになるが, もし $(0 \leq) \xi < 1$ であったなら, $\xi - 1 < 0$ となり, N の固有値は負にはならないという性質と矛盾してしまう．従って, この場合には $a(\mathbf{p}) |\psi_\xi\rangle$ という状態は存在しない, つまり $a(\mathbf{p}) |\psi_\xi\rangle = 0$ でなければならない．これは任意の \mathbf{p} に対して言えることだから, そのエルミート共役 $\langle \psi_\xi | a^\dagger(\mathbf{p}) = 0$ と合わせて

$$\begin{aligned}\langle \psi_\xi | a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) | \psi_\xi \rangle = 0 &\implies \int d^3 \tilde{\mathbf{p}} \langle \psi_\xi | a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) | \psi_\xi \rangle = 0 \\ \implies \xi = \langle \psi_\xi | N | \psi_\xi \rangle / \langle \psi_\xi | \psi_\xi \rangle &= \int d^3 \tilde{\mathbf{p}} \langle \psi_\xi | a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) | \psi_\xi \rangle / \langle \psi_\xi | \psi_\xi \rangle = 0\end{aligned}$$

すなわち, $\xi < 1$ であるならば常に $\xi = 0$ でなければならない．

次に, $\xi \geq 1$ の場合を考えよう．上で見たように, この場合には $a(\mathbf{p}) |\psi_\xi\rangle$ は (0 でない限り) 固有値が $\xi - 1$ の状態として存在可能である．そこで同様に $a(\mathbf{p})$ を (種々の \mathbf{p} について) 次々と作用させていくと, 固有値が $\xi - n$ (< 1 ,

と作られる．この「時間発展しない基底」から「時間発展する物理的状態ベクトル $|\Psi(t)\rangle$ 」を眺めるのがこの描像である．ところが， $|k_1 \cdots k_n\rangle$ は「基底ベクトル」という特別な名を持ってはいるが，その性質は他の物理的状態ベクトルと同じであるから，これも時間と共に $e^{-iH(t-t_0)}|k_1 \cdots k_n\rangle$ と変化していくはずである．すると，基底ベクトルも物理的状態ベクトルも，同じ演算子 $e^{-iH(t-t_0)}$ により時間発展することになり，系の物理的な時間変化は記述できないようにも思われる．

しかしながら，忘れてはならないのは，この描像においては，

● 演算子は時間発展しない

及び，どの時刻においても

● 基底ベクトルは，時間発展しない生成演算子から構成される

ということである．この規約は「時刻 t_0 で導入された基底 $|k_1 \cdots k_n\rangle$ は，時刻 t には $e^{-iH(t-t_0)}|k_1 \cdots k_n\rangle$ に変化してしまうが，その時刻には（新たに）基底 $|k_1 \cdots k_n\rangle$ が作られる」ことを意味

する．従って，運動量 k_1, \dots, k_n の n 粒子からなる物理的な系を記述する状態ベクトルは， $e^{-iH(t-t_0)}$ によって時間発展するが，基底ベクトルとしての $|k_1 \cdots k_n\rangle$ は，実質的には時間に対して固定されていると見なすことができ，これによって冒頭で述べた「時間発展しない基底から，時間発展する物理的状態ベクトルを眺める」という説明

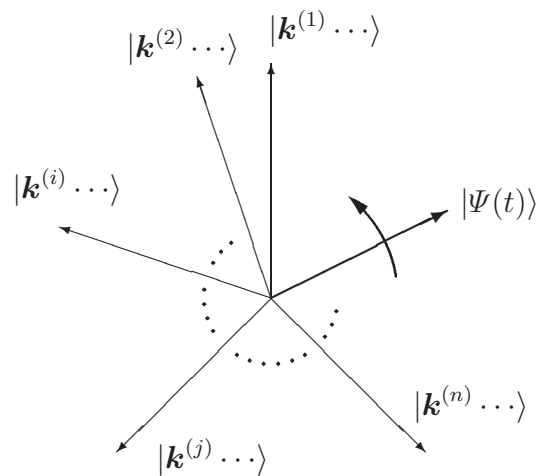


図 I.1

が意味を持つようになる．図 I.1 は，これを模式的に表している．

ハイゼンベルク描像

上記と同種の注意は，ハイゼンベルク描像においても必要である．この描像では，時刻 t を出発点とするなら，運動量 k_1, \dots, k_n を持つ n 粒子系の状態ベクトルは，時刻 t の場の演算子が含む生成演算子 $a_H^\dagger(\mathbf{k}, t)$ から

$$|\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n, t\rangle = a_H^\dagger(\mathbf{k}_1, t) \cdots a_H^\dagger(\mathbf{k}_n, t)|0\rangle$$

と作られる。^{‡ I.13} これは，一見すると時間依存性を持っており「ハイゼンベルク描像では，状態ベクトルは時間発展しない」という規定に反するように思えるが，そうではない．上記の $|\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n, t\rangle$ は，あくまで（任意ではなく）指定された「 t 」という時刻の演算子 $a^\dagger(\mathbf{k}, t)$ から構成された状態ベクトルで，時間が $t \rightarrow t'$ と発展しても，これはそのまま $|\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n, t\rangle$ に留まる．

すると，こんどはシュレディンガー描像の場合とは逆に，基底ベクトルも物理的状態ベクトル $|\Psi\rangle$ も時間変化せず，結果として，系の物理的な時間変化が記述できないという状況に陥るようにも見えてくる．しかし，この描像でも，基底は常にその時その時の場の演算子（が含む生成演算子）から構成されることは忘れてはならない．従って，時刻 t' における基底ベクトルは

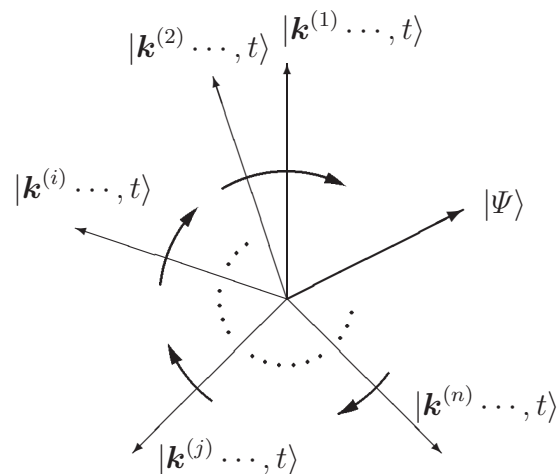


図 I.2

$$|\mathbf{k}_1 \cdots \mathbf{k}_n, t'\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}_1, t') \cdots a^\dagger(\mathbf{k}_n, t')|0\rangle$$

である．このことより，この描像でも基底ベクトルだけは，実質的には時間変

^{‡ I.13} 「生成・消滅演算子」と言えば，通常は，ハイゼンベルク描像でも，時間発展因子を除いた $a^{(\dagger)}(\mathbf{p})$ を指すことが多く， $a_H^{(\dagger)}(\mathbf{p}, t)$ を用いての議論は少々形式的ではある．しかしながら，この描像のイメージ作りには， $a_H^{(\dagger)}(\mathbf{p}, t)$ の利用も有効と思われる．

化すると考えることができ、結果として、「時間発展する基底から、時間発展しない物理的状態ベクトルを眺める」ことが可能となる。

朝永-ディラック描像

ここまで説明してくれば、シュレディンガー描像とハイゼンベルク描像の中間的な立場である朝永-ディラック描像については、特に詳述の必要もないだろう。

この描像では、時間発展の一部を演算子が（従って、基底ベクトルも）担い、残りを物理的な状態ベクトルが担うのだから、両者ともに時間発展する。つまり、「時間発展する基底から、時間発展する物理的状態ベクトルを眺める」のである。

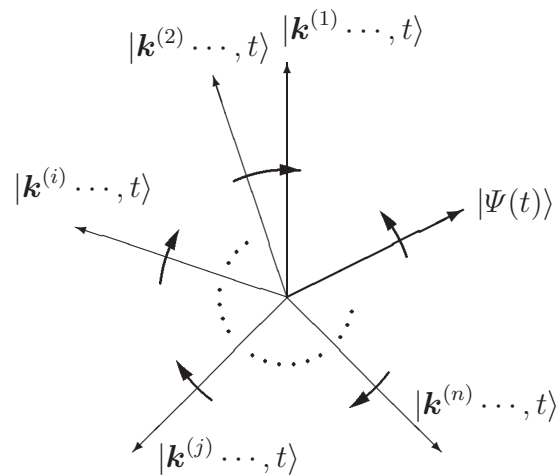


図 I.3

このように、どのベクトルがどのように動くのかは描像毎に異なっても、物理的状態を記述するベクトルと各基底ベクトルの相対的な

位置関係は、どの描像でも同じである。物理的状態ベクトル $|\Psi\rangle$ の中に $|\Psi_f\rangle = |q_1 \dots q_m\rangle$ という成分がどれだけ含まれているかという割合が、 $|\Psi_i\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle$ という遷移の確率を与えることは、それぞれの描像のところでも説明した通りだが、幾何学的なイメージでは、この割合は $|\Psi\rangle$ という“ベクトル”と“座標軸”である各基底ベクトル $|q \dots\rangle$ の相対的な位置関係で決まるということは明らかだろう。従って、どの描像でも両者の位置関係が同じということは、正に「どの描像において計算しても、状態変化の遷移確率は同じ値になる」という事実を表しているのである。

II.2 場の理論での S 行列

上記の作業過程を、もう少し具体的・定量的に述べるなら次のようになる：素粒子反応の計算は、時刻 $t = t_i = -\infty$ の始状態 Ψ_i (反応前の自由状態) が、相互作用の後に時刻 $t = t_f = +\infty$ でどのような終状態 Ψ_f (反応後の自由状態) に変化するかを調べる形で行われる。^{# II.1} そこで、この節では、出発点となる量子化の時刻 t_0 を $t = t_i$ にとることにする。すると、散乱の始状態 $|P_1(\mathbf{p}_1)P_2(\mathbf{p}_2)\rangle$ は場 $\phi_0(x) = \phi(x, t_i)$ の生成演算子を用いて $a_1^\dagger(\mathbf{p}_1)a_2^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle$ と、また崩壊の場合の始状態 $|P(\mathbf{p})\rangle$ は $a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ と構成される。この系が時刻 $t = +\infty$ でどう変化しているかを表すのが S 行列 (S matrix) である。

はじめに、シュレディンガー描像で考えてみよう (但し、添字 S は略す)。すでに説明したように、この描像では、状態の変化を表す方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

である。これを $|\Psi(t = t_i)\rangle = |\Psi_i\rangle$ という境界条件で解くと (形式的ながら) 時刻 $t = t_f (= +\infty)$ における状態が

$$|\Psi(t_f)\rangle = e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle \quad (\text{II.1})$$

と得られ、これより $\Psi_i \rightarrow \Psi_f$ という遷移の確率振幅が

$$\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle = \langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle \quad (\text{II.2})$$

と与えられる。さて、ここで仮に相互作用が全くなかったとしてみよう。すると、系が始めに定常状態にあれば、それ以後何の変化も起こらず $|\Psi_i\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle$ の確率振幅も単に $\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$ のはずだが、実際に上式で $H = H_0$ とすると $|\Psi_i\rangle$ の

^{# II.1} 始めの時刻が $t = -\infty$ で終りの時刻が $t = +\infty$ と言っても、もちろん数学的な意味での無限大などではない。しかしながら、反応は正に一瞬のうちに起こるので、実質的には非常に近い近似でこのように扱うことができる。

$$\begin{aligned}
& \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)}) \theta(t_{p(2)} - t_{p(3)}) \cdots \theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)}) \\
= & (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n H_1(t_{p(1)}) H_1(t_{p(2)}) \cdots H_1(t_{p(n)}) \\
& \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)}) \theta(t_{p(2)} - t_{p(3)}) \cdots \theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)})
\end{aligned}$$

この並べ替え $P : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{p(1), p(2), \dots, p(n)\}$ は全部で $n!$ 通りあるが、その一つ一つに対応する積分はもちろん皆同じ値だから、それらを全て足し合わせ全体を $n!$ で割ったものも、元の積分の値 (II.27) に等しい。一方で、このように足し合わされた被積分関数の全体

$$\begin{aligned}
& \sum_P H_1(t_{p(1)}) H_1(t_{p(2)}) \cdots H_1(t_{p(n)}) \\
& \quad \times \theta(t_{p(1)} - t_{p(2)}) \theta(t_{p(2)} - t_{p(3)}) \cdots \theta(t_{p(n-1)} - t_{p(n)})
\end{aligned}$$

は、(II.17) と見比べれば $T[H_1(t_1)H_1(t_2) \cdots H_1(t_n)]$ そのものであることがわかる。^{‡ II.7} だから、(II.26) は次のように表せる：

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = & \left[1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_1(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T[H_1(t_1)H_1(t_2)] \right. \\
& + \cdots \\
& + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T[H_1(t_1)H_1(t_2) \cdots H_1(t_n)] \\
& \left. + \cdots \right] |\Psi(t_0)\rangle \tag{II.28}
\end{aligned}$$

さて、ここでは $t = t_i = -\infty$ の初期状態が $t = t_f = +\infty$ でどんな状態に移るかを考えるのだから、(II.28) 式で $t_0 = -\infty$, $t = +\infty$ と置こう。一方、 $|\Psi(+\infty)\rangle$ と $|\Psi(-\infty)\rangle$ は、(II.14) により

$$|\Psi(+\infty)\rangle = S|\Psi(-\infty)\rangle \tag{II.29}$$

と関係付けられている。従って、 S 行列について

$$S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots + S^{(n)} + \cdots$$

^{‡ II.7} 仮にフェルミオンが関与していても、通常の相互作用ではフェルミオン数は保存される、つまり $H_1(t)$ の中には $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ が同じ数だけ含まれているので、全体の符号はこのままでよい。

$$\begin{aligned}
&= 1 + (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 T[H_I(t_1)H_I(t_2)] \\
&\quad + \dots\dots\dots \\
&\quad + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n T[H_I(t_1)H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)] \\
&\quad + \dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{II.30}$$

或いは，ハミルトニアン密度を用いて

$$\begin{aligned}
S &= 1 + (-i) \int d^4x_1 \mathcal{H}_I(x_1) + \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2)] \\
&\quad + \dots\dots\dots \\
&\quad + \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \cdots \int d^4x_n T[\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)] \\
&\quad + \dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{II.31}$$

という摂動展開表現を得る．この時，4次元積分の積分領域は全時空である．また，状態 $|\Psi(-\infty)\rangle$ と $|\Psi(+\infty)\rangle$ は，共に時間に依存しない生成演算子 $a^\dagger(\mathbf{p})$ から構成されるのだから， $H_I(t)$ に含まれる場の演算子も (I.98) で与えたように $a^{(\dagger)}(\mathbf{p})$ による表現

$$\phi_{\text{T}}(x) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \left[a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx} \right]$$

を用いるのが便利である．

ここで，相互作用が微分結合 (Derivative coupling) を含まない場合を考えてみよう．すると，I.2 節で与えた古典場のラグランジュ形式に従い

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}_0(\phi, \partial_\mu\phi) + \mathcal{L}_I(\phi), \quad \pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}}$$

より

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_I = \mathcal{H}_0 - \mathcal{L}_I$$

となるから，

$$\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) \tag{II.32}$$

従って、S行列は

$$\begin{aligned} S &= 1 + i \int d^4x_1 \mathcal{L}_I(x_1) + \frac{i^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 T[\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2)] + \cdots \\ &\equiv T \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

と書き換えることが出来る．但し，第2の式（expの式）は，第1の式を形式的にまとめて表したものである．

もし \mathcal{L}_I が微分結合を含むなら

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}}$$

となり，結果として

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}_I$$

より

$$\mathcal{H}_I = \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}_I \neq -\mathcal{L}_I$$

となってしまう，上式のようにSを $\mathcal{L}_I(x)$ で表すことは出来ないように思われる．しかし，実際には，相互作用が繰り込み可能（Renormalizable）である時にはT積を T^* 積のことと理解しておけば，やはり

$$S = T \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right]$$

が成立することが知られている。^{# II.8}

積分方程式（II.25）を解き始めるときに相互作用は微小ということを前提としたが，実際に \mathcal{L}_I が十分に小さい定数に比例する形をしているなら，摂動展開 $S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots$ の始めの数項の寄与を計算するだけでよい近似が得られると期待できる．つまり摂動計算が有効になるが，この場合は相対論的な

^{# II.8} $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I + [\text{差額}]$ とすると，この「差額」とT積を T^* 積と読み替える時に現れる「差額」とが打ち消し合ってしまうのである．詳しくは例えば「Quantum Field Theory」(C. Itzykson, J-B. Zuber, McGraw-Hill Inc.) の6-1-4節参照．

部にいる粒子(1)で, その数は個数密度 $= \rho_1$ より $\rho_1 v_{\text{rel}} T$ 個である(図 II.3).
すると, これにより上記確率が σ なら標的粒子(2) 1個当り衝突は $\rho_1 v_{\text{rel}} T \sigma$
回起こることになるが, 体積 V の空間内には粒子2も $\rho_2 V$ 個存在するから, 全
衝突回数は結局 $N = \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} V T \sigma$ となり, 断面積の定義(II.34)に一致する.

この断面積を, 質量が M_i で運動量が \mathbf{q}_i と $\mathbf{q}_i + d^3 \mathbf{q}_i$ の間にある粒子 ($i = 1 \sim n$)
からなる終状態に対して, S 行列および実際に測定されるエネルギー・運動
量で表現しよう. そのために, まず, v_{rel} を粒子1, 2の運動量 $p_{1,2}^\mu = (p_{1,2}^0, \mathbf{p}_{1,2})$
と質量 $m_{1,2}$ で書き表そう. 一般には両者の速度 $\mathbf{v}_{1,2}$ の関係には何の制限もない
が, ここでは実用上特に重要な重心系および粒子2が静止している実験室系に
話を限る. すると $\mathbf{v}_{1,2}$ は(反)平行 ($\mathbf{v}_2 = 0$ の場合も含む) となるので,

$$v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{p}_1/p_1^0 - \mathbf{p}_2/p_2^0| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} / (p_1^0 p_2^0) \quad (\text{II.36})$$

を得る.^{‡ II.9}

問題 II.1 $\mathbf{p}_{1,2}$ が平行(または反平行)なら $(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)^2 = p_1^2 p_2^2$ が成り立つことに
注意して, (II.36) の関係を確認せよ.

次に, 始状態の表現に必要な個数密度 ρ について考える. $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle$ は, 1粒子
波動関数を用いて

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x} |\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})|^2$$

と表せることからわかるように, 全空間内に存在する粒子の総数を与えるか
ら, $|\mathbf{p}\rangle$ で記述される状態においては $\int d^3 \mathbf{x} = V_{\text{全空間}}$ と書けば

$$\rho = \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle / V_{\text{全空間}}$$

である. ここで, 本書での規格化 $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ を思い出せば,

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(0) = 2p^0 \int d^3 \mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} |_{\mathbf{p}=0} = 2p^0 \int d^3 \mathbf{x} = 2p^0 V_{\text{全空間}}$$

^{‡ II.9}実は, 一般の場合には逆に(II.36)式の右辺が v_{rel} の「定義」として用いられる.

それぞれ p_i と $p_i + d^3p_i$ の間に入っているような n 粒子状態の数が

$$\prod_i^n d^3\tilde{p}_i |\langle p_1 \cdots p_n | \Psi \rangle|^2$$

であることを意味する．従って，この $|\Psi\rangle$ として始状態 $|\alpha\rangle (= |p_1 p_2\rangle)$ の時間発展した形 $|\Psi\rangle = S|\alpha\rangle$ をとり，想定中の終状態に対応する $|q_1 \cdots q_n\rangle$ と組み合わせれば，衝突が生むこの終状態の数，すなわち，断面積の定義 (II.35) における反応回数 dN は

$$dN = \prod_{i=1}^n d^3\tilde{q}_i |\langle \beta | S | \alpha \rangle|^2 \quad (\text{II.41})$$

であることがわかる．但し，簡単のため，終状態 $|q_1 \cdots q_n\rangle$ を $|\beta\rangle$ と表した．

ここで一つ断わっておこう． S はあらゆる可能な時間発展を記述する演算子なので，当然その中には「無反応」という場合も含まれている．これは S の摂動展開

$$S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots + S^{(n)} + \cdots$$

で言えば，右辺第1項の「1」に対応する．従って，本質的にはこれを除いた $S - 1$ が反応を記述する演算子ということになるが， $\alpha \neq \beta$ であれば勿論この1は $\langle \beta | S | \alpha \rangle$ の計算には全く寄与しないので，これ以降もこのまま S を用いて話を進めることにする．

さて，どんな反応の前後でも全エネルギー・運動量 P は保存されるから， $\langle \beta | S | \alpha \rangle$ には $\delta^4(P_\beta - P_\alpha)$ という因子が含まれている．それを抜き出して

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha} \quad (\text{II.42})$$

と表そう．この $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ は不変散乱振幅 (Invariant scattering amplitude) と呼ばれている．この $\langle \beta | S | \alpha \rangle$ で記述される遷移の舞台は全時空であり，その体積は

$$[VT]_{\text{全時空}} = \int d^3\mathbf{x} \int dt = \int d^4x$$

で与えられる．従って，この表現を用いると

$$|\langle \beta | S | \alpha \rangle|^2 = |(2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$$

ような分析は不可能なことも少なくない。むしろ，終状態の特定の粒子一つか二つに注目し，それ以外の粒子については全ての状態を含める（積分する）といった分析の方が普通である。例えば，上の式で終状態の粒子 1 が $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 + d^3\mathbf{q}_1)$ という運動量の区間に生成される断面積は

$$\frac{d\sigma}{d^3\tilde{\mathbf{q}}_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\tilde{\mathbf{q}}_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\tilde{\mathbf{q}}_n \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \quad (\text{II.46})$$

である。

この式は， $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ といった 2 体反応を重心系で記述する場合には，特に簡単な形になる。実際， q_2 積分は，4 次元デルタ関数の中の空間部分 $\delta^3(\mathbf{P}_\beta - \mathbf{P}_\alpha) \Rightarrow \delta^3(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{P}_\alpha) = \delta^3(\mathbf{q}_2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1))$ のため直ちに完了する：

$$\frac{d\sigma}{d^3\tilde{\mathbf{q}}_1} = \frac{1}{(2\pi)^3 2q_2^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}} (2\pi)^4 \delta(P_\beta^0 - P_\alpha^0) \quad (\text{II.47})$$

ここで， $P_\beta^0 = q_1^0 + q_2^0 = \sqrt{\mathbf{q}_1^2 + M_1^2} + \sqrt{\mathbf{q}_2^2 + M_2^2}$ であり，また， q_2^0 及び $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ の中の全ての q_2 は，実行した 3 次元デルタ関数積分により $q_2 = \mathbf{P}_\alpha - \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1$ （重心系では $\mathbf{P}_\alpha = 0$ だから）と置き換えられる。更に，極座標を用いると $d^3\mathbf{q}_1 = q_1^2 d|q_1| d\Omega$ となるが，このうち， $|q_1|$ の値は残っているデルタ関数のため固定されてしまうので， $|q_1|$ 積分も簡単に実行できる。すなわち，

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \int_0^{+\infty} d|q_1| \frac{d\sigma}{d|q_1| d\Omega} \\ &= \int_0^{+\infty} |q_1| d|q_1| \delta(\sqrt{s} - q_1^0 - q_2^0) \frac{|q_1|}{64\pi^2 q_1^0 q_2^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}} \end{aligned}$$

$$\left(\text{但し } s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_1^0 + p_2^0)^2 \right)$$

において， $|q_1|^2 = (q_1^0)^2 - M_1^2 = (q_2^0)^2 - M_2^2$ から $|q_1| d|q_1| = q_1^0 dq_1^0 = q_2^0 dq_2^0$ が得られることを利用して，積分変数を $|q_1|$ から $q_1^0 + q_2^0$ に変換する。すると上式は

$$\int_{M_1+M_2}^{+\infty} d(q_1^0 + q_2^0) \frac{q_1^0 q_2^0}{q_1^0 + q_2^0} \delta(\sqrt{s} - q_1^0 - q_2^0) \frac{|q_1|}{64\pi^2 q_1^0 q_2^0} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}$$

となる．但し，ここでは $P_\alpha = (m, 0, 0, 0)$ である．始状態（1粒子状態）は，全空間に $2P_\alpha^0 V_{\text{全空間}} (= 2mV_{\text{全空間}})$ 個の粒子が存在する状態を表していたから，結局，この場合の微分崩壊幅（Differential decay width）は

$$d\Gamma = \frac{dN}{2m[V T]_{\text{全時空}}} = \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \quad (\text{II.50})$$

ということになる．これも終状態が2体の場合には

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{q}|}{32\pi^2 m^2} |\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \quad (\text{II.51})$$

と簡単になる．また， $d\Gamma$ を全ての運動量領域に互って積分し，更に，あらゆる可能な終状態について足し上げた量は，全崩壊幅（Total decay width）と呼ばれる：

$$\Gamma = \sum_{\text{全終状態}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\mathbf{q}}_i \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha) \quad (\text{II.52})$$

単位時間当りの崩壊確率が Γ ということは，この粒子は平均すれば $\tau = 1/\Gamma$ という時間で崩壊することを意味する．つまり，この τ は崩壊粒子の平均寿命（Mean lifetime，あるいは略して寿命）を与える．一方，終状態を特定の状態 f に限ったもの Γ_f ，及びそれと Γ との比 $B_f = \Gamma_f/\Gamma$ は，それぞれ終状態 f への部分崩壊幅（Partial decay width）および分岐比（Branching ratio）と名付けられている．なお，崩壊粒子の非静止系（ $P_\alpha^0 \neq m$ ）では，上記公式の $2m$ が $2P_\alpha^0$ で置き換わるため寿命は P_α^0/m 倍になる（相対論効果による時間の遅れ）．

全断面積と全崩壊幅

この節を終える前に，少々細かい用語の注意をしておこう．同じ「全」で始まる量でも，全断面積と全崩壊幅ではその使い方には微妙な違いが見られる．全断面積の方は，生成される粒子の種類を固定して，その反応が起こる全確率を表すのに使われることが多い．従って， $|\Psi_A\rangle \rightarrow |\Psi_B\rangle$ の全断面積， $|\Psi_A\rangle \rightarrow |\Psi_C\rangle$ の全断面積，… というように，散乱の種類毎に全断面積が現れる．一方，全崩壊幅は，すべての終状態について足し合わせた全崩壊確率を指す方が普通であ

る．上でも一応そのように説明しておいた．これは，全崩壊確率の逆数が「平均寿命」という特別な意味を持つこととも無関係ではないだろう．但し，この使い分けには確立された規則がある訳でもなく，多少面倒でも「過程 $A \rightarrow B$ の全断面積または全崩壊幅」のように明記すれば間違うことはない．

II.6 場の演算子のまとめ

ここまでは，場の量子論の枠組み及び摂動計算に必要な基本事項を簡潔にまとめるという目的のために，場の演算子としては実スカラー場 (Real scalar field) のみに話を限定してきた．しかし，実際の素粒子の多くは 0 でないスピンや電荷を持ち，その記述のためには異なる幾種類かの場が必要になる．具体的には，電子，ミュオン (Muon)，タウオン (Tauon)，ニュートリノやクォークはスピン $1/2$ のフェルミ粒子であって，ディラックスピノル (Spinor) 場で表される．^{‡ II.11} 一方，力の媒介粒子 (Intermediate particle) である光子 (電磁相互作用: Electromagnetic interaction)，Wボソン (荷電弱相互作用: Charged weak interaction)，Zボソン (中性弱相互作用: Neutral weak interaction) やグルオン (Gluon, 強相互作用: Strong interaction) は，スピン 1 のボーズ粒子であり，ベクトル場によって記述される．これらの場の量子化その他の詳細な解説は，本書の目的ではないので他の本格的教科書に譲り，この節では摂動計算のために必要なそれらの場の基本的性質のみをまとめておく．^{‡ II.12}

以下に与える場の演算子は，すべて朝永-ディラック描像での表現，つまり自

^{‡ II.11} ミュオン，タウオンは，それぞれミュオン粒子，タウ粒子とも呼ばれる．ニュートリノに関しては，その質量も含め興味深い話題が多いが，本書のレベルを超えてしまうので，ここでは他のレプトンと同様に扱う．また，質量も 0 とおく．

^{‡ II.12} ラグランジアンと運動方程式の形は (メトリックが共通なら) どんなテキストでも同じだが，その他の多くの量は，規格化・記法やその他の習慣により少しずつ異なる．例えば，生成・消滅演算子の規格化には幾つかの流儀があるし，伝播関数も， i を除いて定義されることもある (51 頁の脚注参照)．また，量子論では，しばしばある量の値自体ではなくその絶対値 (の 2 乗) のみが意味を持つため，任意の位相因子もよく現れる．但し，どんな基準を採ろうとも，そこで首尾一貫して計算をする限りは，物理的な結果には何の影響も出ないことは勿論である．

ない。何故なら、上述の通り $\sum_{\mu=0}^3 u'^{\mu} e'(\mu)$ と $\sum_{\mu=0}^3 u^{\mu} e(\mu)$ は共に同じ \mathbf{u} を表すのに、もし $e(\mu)$ の変換性が反変成分と同じ $e'(\mu) = \sum_{\nu=0}^3 A^{\mu}_{\nu} e(\nu)$ だとすると、内積のところで見たと同じように $\sum_{\mu=0}^3 u'^{\mu} e'(\mu) \neq \sum_{\mu=0}^3 u^{\mu} e(\mu)$ となるからである。ここまで来ればおわかりかと思うが、 $e(\mu)$ は u_{μ} と同じ変換則に従うのである。実際、それならば

$$\mathbf{u} = \sum_{\mu=0}^3 u^{\mu} e(\mu) = \sum_{\mu=0}^3 u'^{\mu} e'(\mu)$$

が、内積の不変性と同じ理由で成立する。そして、これが共変・反変という名前の由来でもある： A_{μ} は基本単位ベクトルと同じように（“共に”）変換されるので共変成分と呼ばれ、 A^{μ} はそれと反対の変換を受けるので反変成分と呼ばれるという訳である。

付録2 ウィックの定理

実際の摂動計算において、重要な役割を果たすのがウィックの定理である。これは、一口で言えば「場の演算子の時間順序積は、それらの演算子から構成される全ての可能な正規積と伝播関数の積の和で表される」というもので、 n 個の演算子 $\phi(x_i)$ ($i = 1 \sim n$) の場合を式で表せば次のようになる：

$$\mathbb{T} \left[\prod_{i=1}^n \phi(x_i) \right] = \sum_{E_n} \left[\sum_{\substack{\{\text{pair}\} \\ (\text{in } E_n)}} \prod_{\{i < j\}} \langle 0 | \mathbb{T} \phi(x_i) \phi(x_j) | 0 \rangle : \prod_{k \in E_n^c} \phi(x_k) : \right] \quad (\text{A.7})$$

ここで、 E_n は $1, 2, \dots, n$ を元とする集合 $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ の任意の部分集合のうちで偶数個の元を持つもの、 E_n^c はその補集合であり、 \sum_{E_n} は全ての E_n についての和である。例えば、 $E_n = \{\phi\}$ (空集合) なら $E_n^c = \Omega_n$ であり、 $E_n = \{1, n\}$ なら $E_n^c = \{2, 3, \dots, n-1\}$ である (n が偶数なら $E_n = \Omega_n$ の場合もあるが、 n が奇数なら $E_n = \Omega_n$ は当然ありえない)。また、 $\sum_{\substack{\{\text{pair}\} \\ (\text{in } E_n)}}$ は E_n の元を二つずつのペアにする全ての可能な組み合わせについての和で、 $\prod_{\{i < j\}}$ は与えられた組み合わせの中の全てのペアの積を表す。但し、